

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

JINDŘICH NEČAS

**Sur l'alternative de Fredholm pour les opérateurs non-linéaires
avec applications aux problèmes aux limites**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 23,
n° 2 (1969), p. 331-345*

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_2_331_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ALTERNATIVE DE FREDHOLM POUR LES OPÉRATEURS NON-LINÉAIRES AVEC APPLICATIONS AUX PROBLÈMES AUX LIMITES

JINDŘICH NEČAS

§ 1. Introduction.

La théorie des opérateurs monotons s'est montrée une base pour la solution des problèmes aux limites pour les équations non-linéaires aux dérivées partielles du type elliptique.

On considère un opérateur T d'un espace de Banach B , complexe, réflexif, dans son antidual B^* , en désignant par (Tu, v) la dualité entre B^* et B . Le problème fondamental: sous quelles hypothèses $T(B) = B^*$. Deux hypothèses suivantes sont importantes:

$$(1.1) \text{ monotonie: } \operatorname{Re} (Tv - Tu, v - u) \geq 0,$$

$$(1.2) \text{ coercitivité: } \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} |(Tu, u)| \cdot \|u\|^{-1} = \infty.$$

Si encore T est continu de chaque sous-espace de dimension finie dans B^* faible, on a $T(B) = B^*$, cf. le théorème 1 de ce travail; si B est réel et séparable et $\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} (Tu, u) \cdot \|u\|^{-1} = \infty$, cf. J. Leray, J. L. Lions [1]; sans séparabilité cf. F. E. Browder [2] et J. Nečas [6].

Si B est un espace de Hilbert et T un opérateur linéaire, continu et (v, u) le produit scalaire, on peut se donner encore un opérateur S de H dans H , complètement continu, et de considérer la question sur la surjectivité de l'opérateur $A_\lambda = T - \lambda S$, $\lambda \in C_1$. L'alternative de Fredholm a

lieu : ou bien λ est une valeur propre, ou bien il existe un opérateur inverse. La structure des valeurs propres est bien connue et on connaît aussi l'image de $T - \lambda S$ pour λ , une valeur propre. La condition (1.2) est remplacée dans les applications linéaires du type elliptique par l'inégalité de Gårding. C'est l'idée principale qu'on a suivie en considérant les opérateurs non-linéaires.

Sous certaines conditions sur la monotonie et la coercivité de T , sous la condition que S est continu de la topologie faible dans la topologie forte et encore sous certaines conditions, dont un cas particulier très important est κ -homogénéité de T et S : pour $\mu > 0$, $u \in B$, $T(\mu u) = \mu^\kappa T(u)$, $S(\mu u) = \mu^\kappa S(u)$, nous avons obtenu un analogue de l'alternative de Fredholm : s'il n'existe pas u de B , $u \neq \theta$, telle que $Tu - \lambda Su = \theta$, alors $T - \lambda S$ est surjectif. On démontre aussi qu'il existe un sous-espace F de B^* , de dimension finie, tel que chaque f de B^* s'écrit sous la forme $f = f_1 + f_2$, où $f_1 \in (T - \lambda S)(B)$ et $f_2 \in F$.

EXEMPLES : Dans les exemples qui suivront, on désigne par

$$\mathring{W}_m^{(1)}(\Omega) = \left\{ u \mid \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^m + |u|^m \right) dx < \infty, u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\},$$

$\partial\Omega$ étant la frontière d'un domaine Ω de R_N .

EXEMPLE 1. On cherche u de $\mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$, telle que pour $v \in \mathring{W}_2^{(1)}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx - \lambda \int_{\Omega} \frac{|u|^s}{1 + |u|^s} u \bar{v} dx = \int_{\Omega} f \bar{v} dx,$$

formellement : $u = 0$ sur $\partial\Omega$, $-\Delta u - \lambda u \frac{|u|^s}{1 + |u|^s} = f$ dans Ω . $f \in L_2(\Omega)$, $s > 0$. Alors pour chaque f de L_2 , il existe une solution si $\lambda \neq \lambda_k$, où $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ est le spectre pour le problème de Dirichlet et l'opérateur de Laplace.

EXEMPLE 2. On cherche u de $\mathring{W}_4^{(1)}(\Omega)$, telle que pour chaque v de $\mathring{W}_4^{(1)}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^2 u \bar{v} dx = \int_{\Omega} f \bar{v} dx,$$

formellement $u = 0$ sur $\partial\Omega$, $-\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \right] - \lambda |u|^2 u = f$ dans Ω . Alors

pour chaque f de $L_{\frac{4}{3}}(\Omega)$, il existe une solution, s'il n'existe pas u de $\mathring{W}_4^{(1)}(\Omega)$, $u \neq \theta$, telle que pour chaque $v \in \mathring{W}_4^{(1)}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^2 u \bar{v} dx = 0.$$

EXEMPLE 3. Soit $1 < m < \infty$. On cherche u de $\mathring{W}_m^{(1)}(\Omega)$, telle que pour chaque v de $\mathring{W}_m^{(1)}(\Omega)$ on a

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left(1 + \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{\frac{m}{2}-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx - \lambda \int_{\Omega} (1 + |u|^2)^{\frac{m}{2}-1} \cdot u \bar{v} dx = \int_{\Omega} f \bar{v} dx.$$

Formellement $u = 0$ sur $\partial\Omega$,

$$- \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(1 + \sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{\frac{m}{2}-1} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right] - \lambda (1 + |u|^2)^{\frac{m}{2}-1} u = f \text{ dans } \Omega.$$

Alors pour chaque f de $L_{\frac{m}{m-1}}$, il existe une solution, s'il n'existe pas u de $\mathring{W}_m^{(1)}(\Omega)$, $u \neq \theta$, telle que pour v de $\mathring{W}_m^{(1)}(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 \right)^{\frac{m}{2}-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x_i} dx - \lambda \int_{\Omega} |u|^{m-2} \cdot u \cdot \bar{v} \cdot dx = 0.$$

§ 2. Une généralisation du théorème de Leray-Lions.

Nous considérons dans la suite les espaces de Banach B , complex. Par B^* , on désigne l'antidual de B , à savoir l'espace des fonctionnelles antilinéaires. On désigne par (f, u) la dualité entre B^* et B .

HYPOTHÈSE 1. Soit A , un opérateur borné, continu de tout sous-espace de B de dimension finie dans B^* faible. A soit coercitif:

$$(2.1) \quad \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} |(Au, u)| \cdot \|u\|^{-1} = \infty.$$

HYPOTHÈSE 2. Il existe une application bornée de $B \times B$ dans B^* , soit $A(v, u)$, telle que $A(u, u) = A(u)$ et telle que

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall u \text{ de } B, \text{ l'application } v \rightarrow A(v, u) \text{ est hémicontinue (continue de} \\ \text{toute droite de } B \text{ dans } B^* \text{ faible) et telle que pour } u, v \text{ de } B, \\ \operatorname{Re} (A(u, u) - A(v, u), u - v) \geq 0, \end{array} \right.$$

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } u_n \rightarrow u \text{ (convergence faible) et si } (A(u_n, u_n) - A(u, u_n), \\ u_n - u) \rightarrow 0, \text{ alors pour } v \text{ de } B: A(v, u_n) \rightarrow A(v, u) \text{ dans } B^*, \end{array} \right.$$

$$(2.4) \quad \text{si } u_n \rightarrow u \text{ et } A(v, u_n) \rightarrow v^* \text{ dans } B^*, \text{ alors } (A(v, u_n), u_n) \rightarrow (v^*, u).$$

Nous dirons que $A(B) = B^*$ régulièrement, si de $f \in B^*, \|f\| \leq R < \infty$, suit $\|u\| \leq r < \infty, u$ étant la solution de $A(u) = f$.

THÉORÈME 1. Soit B un espace de Banach réflexif, complexe, de dimension ≥ 2 et A une application de B dans B^* , satisfaisant aux hypothèses 1 et 2. Alors $A(B) = B^*$ régulièrement.

DÉMONSTRATION. Soit $F \subset B$ un sous-ensemble de dimension finie, F^* son antidual et désignons par $(f, v)_F$ la dualité entre F^* et F . Définissons A_F de F dans F^* par $u, v \in F \Rightarrow (A_F v, u)_F = (A v, u)$. Si l'on introduit dans F et F^* une base biorthonormale, soit $e_i, e_j^*, i, j = 1, 2, \dots, \kappa$, alors u de F s'écrit comme $u = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i e_i, f$ de F^* s'écrit comme $f = \sum_{j=1}^{\kappa} y_j e_j^*$ et on peut identifier F et F^* avec l'espace euclidien C_{κ} , au produit scalaire $(x, y) = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i \bar{y}_i$ et l'opérateur A_F avec un opérateur R , continu de C_{κ} dans lui même, défini par $(A_F v, u) = (Rx, y)_{C_{\kappa}}$, où $v = \sum_{i=1}^{\kappa} x_i e_i, u = \sum_{i=1}^{\kappa} y_i e_i$.

On a

$$(2.5) \quad \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} |(Rx, x)_{C_{\kappa}}| \|x\|^{-1} = \infty.$$

Soit $f \in B^*, (f_F, v)_F = (f, v)$ et soit $\eta \in C_{\kappa}$ avec $f_F = \sum_{i=1}^{\kappa} \eta_i e_i^*$. Considérons encore $Ux = Rx - \eta$ qui satisfait aussi à (2.5). Il s'agit de trouver $x \in C_{\kappa}$ de sorte que $Ux = 0$. Soit $\varrho > 0$ si grand pour que $|(Ux, x)| \neq 0$ pour $\|x\| = \varrho$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer $\kappa \geq 2$. Dans ce cas, on peut trouver $\arg(Ux, x)$ de sorte qu'il résulte continue sur la sphère $\|x\| = \varrho$. Posons $V(x) = \exp\left(-i \frac{\|x\|}{\varrho} \cdot \arg\left(U \frac{x}{\|x\|} \varrho, \frac{x}{\|x\|} \varrho\right)\right) \cdot U(x)$; c'est

une application continue de C_* dans lui même. Sur $|x| = \varrho$, on a $(V(x), x) > 0$, alors on peut trouver $\varepsilon > 0$ si petit pour que la transformation $x - \varepsilon V(x)$ transforme la boule $|x| \leq \varrho$ dans elle même. D'après le théorème de Brouwer, il existe un point fixe x_F , dans cette boule, alors $V(x_F) = 0$, d'où $U(x_F) = 0$. Désignons par u_F le point correspondant dans F . Nous avons alors pour v de F :

$$(2.6) \quad (A_F u_F, v)_F = (A u_F, v) = (f, v).$$

Il suit de (2.1) qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour chaque F , $\|u_F\| \leq c$. Désignons par $\mathcal{A}$ l'ensemble de tous les sous-espaces de B de dimension finie et ≥ 2 et par $B_{F_0} = \bigcup_{\mathcal{A} \ni F \supset F_0} u_F$. Soit $\bar{B}_{F_0}$ la fermeture de B_{F_0} dans la topologie faible. La famille de $\bar{B}_{F_0}$ possède la propriété des intersections finies. Il en suit que $\bigcap_{F_0 \in \mathcal{A}} \bar{B}_{F_0} \neq \emptyset$, donc il existe $u_0 \in \bigcap_{F_0 \in \mathcal{A}} \bar{B}_{F_0}$. Soit v de B et $F_0 \in \mathcal{A}$ contenant v et u_0 . Il existe maintenant une suite u_n de B_{F_0} , telle que $u_n \rightharpoonup u$. Comme u_n est une suite bornée, $A(u_0, u_n)$ l'est aussi, alors, on peut supposer que $A(u_0, u_n) \rightarrow u^*$. Vérifions que

$$(2.7) \quad (A(u_n, u_n) - A(u_0, u_n), u_n - u_0) \rightarrow 0.$$

En effet, $(A(u_n, u_n), u_n) = (f, u_n) \rightarrow (f, u_0)$, $(A(u_n, u_n), u_0) = (u_0, f)$. D'après (2.4): $(A(u_0, u_n), u_n) \rightarrow (u^*, u_0)$ et enfin $(A(u_0, u_n), u_0) \rightarrow (u^*, u_0)$; tout cela entraîne (2.7). Alors pour v en question, compte tenu de (2.3), $A(v, u_n) \rightarrow A(v, u_0)$. Il s'en suit de (2.4) que $(A(v, u_n), u_n) \rightarrow (A(v, u_0), u_0)$. Soit $C_n = (A(u_n, u_n) - A(v, u_n), u_n - v)$. On a $C_n \rightarrow (f - A(v, u_0), u_0 - v)$. Mais d'après (2.2), $\operatorname{Re} C_n \geq 0$, donc on a

$$(2.8) \quad \operatorname{Re} (f - A(v, u_0), u_0 - v) \geq 0$$

pour chaque v de B . Si nous posons $v = u_0 - \lambda w$, w de B , $\lambda > 0$, il suit de (2.8) que $\operatorname{Re} (f - A(u_0 - \lambda w, u_0), w) \geq 0$ et en faisant tendre $\lambda \rightarrow 0$, il en suit que $\operatorname{Re} (f - A(u_0), w) \geq 0$, d'où $A(u_0) = f$; pour chaque boule $K_\varrho = \{|f| \leq \varrho\}$, il suit de (2.1) que $A^{-1}(K_\varrho)$ est bornée, d'où l'assertion.

§ 3. Alternative.

Soit $T(u)$ un opérateur du théorème 1, tel que

$$(3.1) \quad (T(v), u) \geq 0.$$

HYPOTHÈSE 3. Soit $S(u)$ un opérateur de B dans B^* , continu « de la topologie faible dans la topologie forte » : si $u_n \rightarrow u$, alors $S(u_n) \rightarrow S(u)$ dans B^* . Soit encore

$$(3.2) \quad (S(u), u) \geq 0.$$

Désignons par $A_\lambda(u) = T(u) - \lambda S(u)$. Évidemment, il suit du théorème 1 :

CONSÉQUENCE 1. Pour $\lambda \leq 0$, $A_\lambda(B) = B^*$ régulièrement.

THÉORÈME 2. Soit $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ et $A_\lambda = T - \lambda S$ avec T satisfaisant aux hypothèses 1 et 2 et S à l'hypothèse 3. Supposons encore (3.1). Alors si $\lambda_2 \neq 0$, l'opérateur A_λ est régulièrement surjectif.

DÉMONSTRATION. Il suffit de démontrer (2.1). Mais (3.2)' : $|(A_\lambda u, u)|^2 = (Tu, u)^2 + \lambda_1^2 (Su, u)^2 - 2\lambda_1 (Tu, u)(Su, u) + \lambda_2^2 (Su, u)^2 \geq (Tu, u)^2 (1 - \varepsilon \lambda_1) + \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 - \frac{\lambda_1}{\varepsilon}\right) (Su, u)^2$ pour chaque $\varepsilon > 0$.

Si nous prenons $0 < \varepsilon < \frac{1}{\lambda_1}$ mais assez proche de $1/\lambda_1$, nous obtenons le résultat.

Nous avons un lemme important :

LEMME 1. Soit T un opérateur borné de B dans B^* , satisfaisant à l'hypothèse 2. Alors si $u_n \rightarrow u$ et $T(u_n) \rightarrow g$, il en suit que $g = T(u)$.

DÉMONSTRATION. On peut supposer que $T(u, u_n) \rightarrow u^*$; d'après (2.4), $(T(u, u_n), u_n) \rightarrow (u^*, u)$, d'où $(T(u_n, u_n) - T(u, u_n), u_n - u) \rightarrow 0$, d'où d'après (2.3) pour chaque v de B : $T(v, u_n) \rightarrow T(v, u)$. D'après (2.2) $\operatorname{Re}(T(u_n, u_n) - T(v, u_n), u_n - v) \geq 0$; si $n \rightarrow \infty$, on obtient de (2.4) que $(T(v, u_n), u_n) \rightarrow (T(v, u), u)$, d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(T(u_n, u_n) - T(v, u_n), u_n - v) = \operatorname{Re}(g - T(v, u), u - v) \geq 0$.

Si nous posons $v = u - \lambda w$, $\lambda > 0$, w de B , nous obtenons $\operatorname{Re}(g - T(u - \lambda w, u), w) \geq 0$ et en faisant tendre $\lambda \rightarrow 0$, on obtient $\operatorname{Re}(g - T(u), w) \geq 0$, d'où $g = T(u)$.

Nous dirons qu'un opérateur N de B dans B^* est $\kappa > 0$ homogène, si pour chaque $0 < \mu$, u de B : $N(\mu u) = \mu^\kappa N(u)$.

Nous dirons qu'un opérateur N de B dans B^* est $\kappa > 0$ quasi-homogène, s'il existe un opérateur N_0 de B dans B^* , κ -homogène, tel que : si $w_n \rightarrow w$ et si les nombres $\mu_n > 0$, $\mu_n \rightarrow 0$ et si $\mu_n^\kappa N\left(\frac{w_n}{\mu_n}\right) \rightarrow g$, alors

$$(3.2)'' \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^\kappa N\left(\frac{w_n}{\mu_n}\right) = N_0(w).$$

Nous dirons que N est fortement $\kappa > 0$ quasi-homogène si (3.2)'' est valable pour chaque $\mu_n \rightarrow 0$, $\mu_n > 0$, $w_n \rightarrow w$. (Dans ce cas N_0 est κ -homogène automatiquement).

PROPOSITION 1. *Soit S un opérateur de B dans B^* continu « de la topologie faible dans la topologie forte ». Si S est κ -homogène, il est κ quasi-homogène fortement avec $S_0 = S$.*

En effet $\mu_n^\kappa S\left(\frac{w_n}{\mu_n}\right) = S(w_n) \rightarrow S(w)$.

PROPOSITION 2. *Soit T un opérateur de B dans B^* , satisfaisant à l'hypothèse 2. Alors s'il est κ homogène, il est κ quasi-homogène avec $T_0 = T$.*

En effet $\mu_n^\kappa T\left(\frac{w_n}{\mu_n}\right) = T(w_n)$. Maintenant, on utilise le lemme 1.

PROPOSITION 3. *Si T est un opérateur de B dans B^* satisfaisant à (2.1) et s'il est κ -homogène, on a*

$$|(T(u), u)| \geq c \|u\|^{1+\kappa}, \quad c > 0.$$

En effet, pour $\|u\| = \varrho$, avec ϱ assez grand, $|(T(u), u)| \geq c_1 > 0$. On a pour u de B

$$|(T(u), u)| = \left| \left(T\left(\frac{\|u\|}{\varrho} \frac{u}{\|u\|} \varrho\right), \frac{\|u\|}{\varrho} \frac{u}{\|u\|} \varrho \right) \right| \geq \left(\frac{\|u\|}{\varrho} \right)^{1+\kappa} c_1,$$

d'où l'assertion.

THÉORÈME 3. (alternative) *Soient T et S les opérateurs satisfaisant aux hypothèses 1 et 2 et à l'hypothèse 3 respectivement. Soit T κ -quasi-homogène et S fortement κ -quasi-homogène. Supposons encore*

$$(3.3) \quad (T(u), u) \geq c \|u\|^{1+\kappa}, \quad c > 0.$$

Soit $\lambda > 0$. Alors

(i) *ou bien il existe $u \neq \theta$, « un élément propre » tel que $T_0(u) - \lambda S_0(u) = \theta$*

(ii) *ou bien il n'existe pas ; dans ce cas $A_\lambda = T - \lambda S$ est régulièrement surjectif.*

DÉMONSTRATION. D'après le théorème 2, si nous posons $\lambda^* = \lambda + i\lambda_2$, $\lambda_2 > 0$, nous obtenons que A_{λ^*} est régulièrement surjectif. Considérons $\lambda > 0$

qui n'est pas une valeur propre et soit $\lambda^* = \lambda + i\lambda_2$, $0 < \lambda_2 \leq 1$. J'affirme que $A_{\lambda^*}^{-1}(K_R)$ est uniformément borné par rapport à $0 < \lambda_2 \leq 1$. Supposons que ceci n'est pas vrai. Dans ce cas, il existe f_n de B^* , $\|f_n\| \leq R$, $\lambda_{2n} \rightarrow 0$ et u_n de B , telles que $A_{\lambda_n^*}(u_n) = f_n$, $\|u_n\| \rightarrow \infty$. ($\lambda_{2n} \rightarrow 0$ en vertu du théorème 2, où on a démontré de plus l'inégalité (3.2)'). Soit $v_n = \frac{u_n}{\|u_n\|}$. On peut supposer que $v_n \rightarrow v$. On a

$$(3.4) \quad \|u_n\|^{-\alpha} A_{\lambda_n^*}(u_n) = \|u_n\|^{-\alpha} A_{\lambda_n^*}(\|u_n\| v_n) = \|u_n\|^{-\alpha} f_n$$

et d'autre part, étant

$$(3.5) \quad \|u_n\|^{-\alpha} S(\|u_n\| v_n) \rightarrow S_0(v),$$

on a $\|u_n\|^{-\alpha} T(\|u_n\| v_n) \rightarrow \lambda S_0(v)$,

donc $\|u_n\|^{-\alpha} T(\|u_n\| v_n) \rightarrow T_0(v)$. On a alors $T_0(v) - \lambda S_0(v) = \theta$.

D'autre part, $\|u_n\|^{-\alpha} (T(\|u_n\| v_n), v_n) = \|u_n\|^{-1-\alpha} (T(v_n \|u_n\|), v_n \|u_n\|) \geq \geq c > 0$, et étant $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n\|^{-\alpha} (T(\|u_n\| v_n), v_n) = (T_0(v), v)$, on a $(T_0(v), v) > 0$,

donc $v \neq \theta$. Mais c'est une contradiction.

Soit alors f de B^* et u_{λ^*} de K_θ , les solutions de $A_{\lambda^*}(u) = f$, pour $\lambda^* = \lambda + i\lambda_2$, $\lambda_2 > 0$. Soit $\lambda_{2n} \rightarrow 0$ et désignons $u_{\lambda_n^*} = u_n$. On peut supposer que $u_n \rightarrow u$. Mais $A_{\lambda_n^*}(u_n) = T(u_n) - \lambda_n^* S(u_n) = f$, d'où $T(u_n) \rightarrow f + \lambda Su$, alors d'après le lemme 1, $Tu = f + \lambda Su$, d'où l'assertion.

PROPOSITION 4. *Sous les hypothèses du théorème 3, les valeurs propres sont réels, positives.*

En effet, si λ est une valeur propre, $(T_0(u), u) = \lambda (S_0(u), u)$, $(S_0(u), u) \neq 0$, d'où $\lambda = \frac{(T_0(u), u)}{(S_0(u), u)}$.

§ 4. Image des applications $T - \lambda S$.

Dans ce paragraphe, nous donnerons quelques résultats simples sur l'image de $T - \lambda S$ au cas général, alors aussi au cas, où λ est une valeur propre de $T_0 - \lambda S_0$. Ces résultats généralisent dans un sens les résultats de F. F. Browder [4].

Nous supposons pour l'opérateur T l'hypothèse 2 et la coercitivité dans une forme un peu plus forte :

$$(4.1) \quad |(T(u)u)| \geq c_1 \|u\|^{1+\kappa} - c_2, \quad c_1, c_2 > 0, \quad \kappa > 0.$$

Pour l'opérateur S , nous supposons :

HYPOTHÈSE 4. *Il existe G , un espace de Banach, tel que $B \subset G$ algébriquement et topologiquement et tel que l'application identique de B dans G est compacte ; S est continue de G dans B^* .*

Désignons par $\|u\|_0$ la norme dans G .

HYPOTHÈSE 5. *Il existe une application complètement continue, soit S_1 de G dans B^* , κ -homogène, et telle que*

$$(4.2) \quad \|S(u) - S_1(u)\| \leq c(1 + \|u\|)^{\kappa'}, \quad 0 \leq \kappa' < \kappa.$$

Nous avons le lemme suivant :

LEMME 2. *Soit S_1 une application complètement continue de G dans B , κ -homogène. Alors à chaque $\varepsilon > 0$, il existe une application complètement continue, κ -homogène, soit R , de G dans un sous-espace F de B de dimension finie, telle que pour u de G :*

$$(4.3) \quad \|S_1(u) - R(u)\| \leq \varepsilon \|u\|_0^\kappa.$$

DÉMONSTRATION. L'application S_1 étant complètement continue de G , l'image de la sphère $K = \{\|u\|_0 = 1\}$: $S_1(K)$ est compacte. Donc, il existe un $\varepsilon > 0$ réseau dans $S_1(K)$, soit $f_1, f_2, \dots, f_p$ tel que si $f \in S_1(K)$, alors il existe f_i tel que $\|f - f_i\| < \varepsilon$. Soit F le sous-espace engendré par f_j , $j = 1, 2, \dots, p$. Posons pour u de K :

$$\mu_i(u) = \varepsilon - \|S_1(u) - f_i\|, \quad \text{si } \|S_1(u) - f_i\| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \mu_i(u) = 0$$

$$\text{si } \|S_1(u) - f_i\| > \varepsilon. \text{ Posons } P(u) = \frac{\sum_{i=1}^p \mu_i(u) f_i}{\sum_{i=1}^p \mu_i(u)}. \text{ Enfin soit } R(u) = \|u\|_0^\kappa \cdot$$

$\cdot P\left(\frac{u}{\|u\|_0}\right)$. On obtient aisément (4.3), d'où l'assertion.

THÉORÈME 4. *Soit T une application de B dans B^* satisfaisant à l'hypothèse 2, à l'inégalité (4.1) et S l'opérateur complètement continu de G dans*

B^* satisfaisant aux hypothèses 4 et 5. Alors il existe un opérateur R , complètement continu de G dans B^* , κ -homogène, avec image dans $F \subset B^*$, un espace de dimension finie, tel que $T - \lambda S = T_0 - \lambda R$, où T_0 satisfait à l'hypothèse 2, et à l'inégalité (4.1). Il en suit que chaque élément f de B^* peut s'écrire comme $f = f_1 + f_2$, où $f_1 \in (T - \lambda S)(B)$ et $f_2 \in F$.

DÉMONSTRATION. $T - \lambda S = T - \lambda(S - S_1) - \lambda S_1$. L'opérateur $T_1 = T - \lambda(S - S_1)$ satisfait à l'hypothèse 2 et à (4.1): l'hypothèse 2 est évidente en vertu de la continuité complète de S de G dans B^* . Mais

$$\begin{aligned} |(T_1(u), u)| &= |(T - \lambda(S - S_1)(u), u)| \geq c_1 \|u\|^{1+\kappa} - c_2 - \\ &\quad - |\lambda| (1 + \|u\|^{\kappa'}) \|u\| \geq c_3 \|u\|^{1+\kappa} - c_4, \end{aligned}$$

d'où l'énoncé. Pour S_1 , on applique le lemme 2 et on construit R . On obtient $T - \lambda S = T_1 - \lambda(S_1 - R) - \lambda R$. Si nous posons $T_0 = T_1 - \lambda(S_1 - R)$, on a de nouveau l'hypothèse 2 en vertu de la continuité complète de R de G dans B^* . Pour obtenir (4.1), on a $|(T_0(u), u)| \geq c_3 \|u\|^{1+\kappa} - c_4 - |\lambda| \varepsilon c_5 \|u\|^{1+\kappa}$, où c_5 est la norme de l'application identique de G dans B . Il suffit maintenant de prendre $\varepsilon < \frac{c_3}{c_5 |\lambda|}$. Si $f \in B^*$, il existe u de B tel que $T_0(u) = f$. Posons $f_2 = \lambda R(u)$ et $f_1 = (T - \lambda S)(u)$, d'où la démonstration.

§ 5. Applications aux problèmes aux limites.

D'abord, nous démontrerons encore un lemme facile, utile dans la suite.

LEMME 3. Soient T_n , $n = 1, 2, \dots$, une suite des opérateurs de B dans B^* , monotone :

$$(5.1) \quad \operatorname{Re} (T_n(u) - T_n(v), u - v) \geq 0$$

et tels que

$$(5.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(u) = T(u) \text{ dans } B^* \text{ pour chaque } u \text{ de } B.$$

Soit l'opérateur T hemicontinu. Alors si $u_n \rightarrow u$ et si $T_n(u_n) = g$, alors $T(u) = g$.

En effet, pour chaque v de B : $0 \leq \operatorname{Re} (T_n(u_n) - T_n(v), u_n - v) \rightarrow \rightarrow \operatorname{Re} (g - T(v), u - v)$. Si nous posons $v = u - \lambda w$, $\lambda > 0$, nous obtenons $\operatorname{Re} (g - T(u - \lambda w), w) \geq 0$ et par le passage à la limite $\lambda \rightarrow 0$: $\operatorname{Re} (g - T(u), w) \geq 0$, d'où le résultat.

Dans la suite, on va se borner aux applications simples de la théorie ci-dessus. Le lecteur pourrait faire les généralisations lui même. Pour la littérature, cf. J. Leray, J. L. Lions [1], J. Nečas [3].

Soit Ω un domaine borné de l'espace euclidien R_N , à frontière lipschitzienne. On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions complexes, à support compact dans Ω . La notation usuelle $D^i = \frac{\partial^{|i|}}{\partial x^{i_1} \dots \partial x_N^{i_N}}$ est utilisée. On introduit comme d'habitude l'espace $W_m^{(k)}(\Omega)$ avec la norme $\|u\|_{W_m^{(k)}} = \left(\int_{\Omega} \sum_{|i| \leq k} |D^i u|^m dx \right)^{\frac{1}{m}}$. On désigne encore par $\overset{\circ}{W}_m^{(k)}(\Omega)$ le fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W_m^{(k)}(\Omega)$.

On définit les fonctions $a_i(x, \zeta_j)$ pour x de Ω , $|\zeta_j| < \infty$, $|i| \leq k$, $|j| \leq k$. On suppose que $a_i(x, \zeta_j)$ sont mesurables en x pour tous ζ_j , ζ_j fixés et continues en ζ_j pour presque tout x (condition de Carathéodory). On suppose encore

$$(5.3) \quad |a_i(x, \zeta_j)| \leq c \left(1 + \sum_{|j| \leq k} |\zeta_j| \right)^{m-1}, \quad 1 < m < \infty.$$

Il est connu, cf. par exemple M. M. Vajnberg [5]: l'opérateur $a_i(x, D^j u)$ résulte continu de $W_m^{(k)}(\Omega)$ dans $L_{m'}(\Omega)$, $\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1$.

Soit f de $L_{m'}(\Omega)$, u_0 de $W_m^{(k)}(\Omega)$. On s'occupera du problème de Dirichlet (pour les autres problèmes cf. J. Nečas [3]). Une fonction u de $W_m^{(k)}(\Omega)$ est dite une solution faible du problème de Dirichlet:

$$(5.4) \quad \sum_{|i| \leq k} (-1)^{|i|} D^i (a_i(x, D^j u)) = f \quad \text{dans } \Omega,$$

$$(5.5) \quad \frac{\partial^l u}{\partial n^l} = \frac{\partial^l u_0}{\partial n^l} \quad l = 0, 1, \dots, k-1 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

$\left(\frac{\partial}{\partial n} \right.$ étant la dérivée selon la normale extérieure) si pour chaque v de $\overset{\circ}{W}_m^{(k)}(\Omega)$:

$$(5.6) \quad \int_{\Omega} \sum_{|i| \leq k} a_i(x, D^j u) \cdot D^i \bar{v} \cdot dx = \int_{\Omega} f \bar{v} dx,$$

$$(5.7) \quad u - u_0 \in \overset{\circ}{W}_m^{(k)}(\Omega).$$

Désignons encore par $a_i(x, \zeta_\alpha, \zeta_\beta) = a_i(x, \zeta_j)$, où $|\alpha| = k$, $|\beta| < k$. Supposons

$$(5.8) \quad \sum_{|i| \leq k} a_i(x, \zeta_j) \bar{\zeta}_i \geq c_1 \sum_{|i| = k} |\zeta_i|^m,$$

$$(5.9) \quad \operatorname{Re} \sum_{|i| = k} (a_i(x, \xi_\alpha, \zeta_\beta) - a_i(x, \eta_\alpha, \zeta_\beta)) (\bar{\xi}_i - \bar{\eta}_i) > 0$$

pour $\xi \neq \eta$,

$$(5.10) \quad \sum_{|i| = k} a_i(x, \xi_\alpha, \eta_\beta) \bar{\xi}_i \geq c_3 \sum_{|i| = k} |\xi_i|^m - c_4.$$

Posons

$$\begin{aligned} (T(u, v), w) &\stackrel{\text{df}}{=} \int_{\Omega} \sum_{|i| = k} a_i(x, D^\alpha u_0 + D^\alpha u, D^\beta u_0 + D^\beta v) D^i \bar{w} \, dx + \\ &\quad + \int_{\Omega} \sum_{|i| < k} a_i(x, D^j u_0 + D^j v) D^i \bar{w} \, dx. \end{aligned}$$

Il est démontré dans J. Leray, J. L. Lions [1] ou dans J. Nečas [3] que l'opérateur $T(u, v)$ ainsi défini satisfait aux hypothèses du théorème 3. Soient $b_i(x, \zeta_j)$ définies comme $a_i(x, \zeta_j)$ mais pour $|i| < k$, $|j| < k$. On suppose

$$(5.11) \quad |b_i(x, \zeta_j)| \leq c(1 + \sum_{|j| < k} |\zeta_j|)^{m-1},$$

$$(5.12) \quad \sum_{|i| \leq k} b_i(x, \zeta_j) \bar{\zeta}_i \geq 0$$

et posons

$$(5.12)' \quad (S(u), v) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{\Omega} \sum_{|i| < k} b_i(x, D^j u) D^i \bar{v} \, dx.$$

Compte tenu de ce que l'application identique de $W_m^{(k)}(\Omega)$ dans $W_m^{(k-1)}(\Omega)$ est complètement continue, on a l'hypothèse 3. Si nous supposons que pour chaque $\mu > 0$, $\varkappa > 0$ fixé, $\varkappa = m - 1$:

$$(5.13) \quad \begin{cases} a_i(x, \mu \zeta_j) = \mu^\varkappa a_i(x, \zeta_j), \\ b_i(x, \mu \zeta_j) = \mu^\varkappa b_i(x, \zeta_j), \end{cases}$$

nous pouvons utiliser les propositions 2 et 3. Dans ces conditions, nous avons :

THÉOREME 5. *On suppose les conditions (5.3), (5.8), (5.13), $u_0 \equiv \theta$ de (5.7). Alors si $\text{Im } \lambda \neq 0$, $\lambda \leq 0$ ou si $\lambda > 0$ et dans le dernier cas s'il n'existe pas $u \neq \theta$ dans $\overset{\circ}{W}_m^{(k)}(\Omega)$ telle que pour v de $\overset{\circ}{W}_m^{(k)}(\Omega)$: $\int_{\Omega} \sum_{|i| \leq k} a_i(x, D^j u) D^i \bar{v} dx - \lambda \int_{\Omega} \sum_{|i| < k} b_i(x, D^j u) D^i \bar{v} dx = 0$, alors pour chaque f de $L_{m'}(\Omega)$ (à plus forte raison pour f de $(\overset{\circ}{W}_m^{(k)}(\Omega))^*$) il existe une solution faible u de $W_m^{(k)}(\Omega)$ de l'équation*

$$(5.13)' \quad \sum_{|i| \leq k} (-1)^{|i|} D^i (a_i(x, D^j u)) - \lambda \sum_{|i| < k} (-1)^{|i|} D^i (b_i(x, D^j u)) = f$$

dans Ω . (Cf. exemple 2).

Supposons maintenant pour $\kappa = m - 1$ et $0 < \mu \leq 1$ que

$$(5.14) \quad \begin{cases} \mu^{m-1} a_i\left(x, \frac{\zeta_i}{\mu}\right) = a_i(x, \zeta_j, \mu), \\ \mu^{m-1} b_i\left(x, \frac{\zeta_i}{\mu}\right) = b_i(x, \zeta_j, \mu), \end{cases}$$

où $a_i(x, \zeta_j, \mu)$, $b_i(x, \zeta_j, \mu)$ à côté de la condition de Carathéodory sont pour presque tout x de Ω et pour tous ζ_j continues en μ dans l'intervalle $0 \leq \mu \leq 1$. Supposons

$$(5.15) \quad \begin{aligned} |a_i(x, \zeta_j, \mu)| &\leq c \left(1 + \sum_{|j| \leq k} |\zeta_j|\right)^{m-1}, \\ |b_i(x, \zeta_j, \mu)| &\leq c \left(1 + \sum_{|j| < k} |\zeta_j|\right)^{m-1}. \end{aligned}$$

Pour fixer les idées, supposons encore que pour $\mu > 0$:

$$(5.16) \quad \text{Re} \sum_{|i| \leq k} (a_i(x, \xi_a, \mu) - a_i(x, \eta_a, \mu)) (\bar{\xi}_i - \bar{\eta}_i) \geq 0.$$

Définissons :

$$(5.17) \quad (T(u), v) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{\Omega} \sum_{|i| \leq k} a_i(x, D^j u) D^i \bar{v} dx$$

et $S(u)$ comme audessus. Nous avons :

LEMME 4. L'opérateur T , défini par (5.17), sous les conditions (5.3), (5.14), (5.15) et (5.16) est $m - 1$ quasi-homogène avec $T_0(u)$ défini par $(T_0(u), v) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{\Omega} \sum_{|i| \leq k} a_i(x, D^j u, 0) D^i \bar{v} dx$ et $B = \mathring{W}_m^{(k)}(\Omega)$.

DÉMONSTRATION. Définissons $T_\mu(u)$ par

$$(T_\mu(u), v) = \int_{\Omega} \sum_{|i| \leq k} a_i(x, D^j u, \mu) D^i \bar{v} dx$$

et soit $\mu_n \rightarrow 0$, $u_n \rightarrow u$ et $T_{\mu_n}(u_n) \rightarrow g$. Pour appliquer le lemme précédent, on voit de (5.16) que (5.1) est satisfaite. L'opérateur T_0 est continu. Il faut encore voir (5.2). Mais $a_i(x, D^j u, \mu_n) \rightarrow a_i(x, D^j u, 0)$ presque partout et en vertu de (5.15) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |a_i(x, D^j u, \mu_n) - a_i(x, D^j u, 0)|^{m'} dx = 0,$$

d'où (5.2), donc le lemme 3 s'applique, d'où l'assertion. On a aussi :

LEMME 5. L'opérateur S , défini par (5.12)', sous les conditions (5.14), (5.15) est fortement $m - 1$ quasi-homogène.

En effet, il suffit de voir que pour $\mu_n \rightarrow 0$, $u_n \rightarrow u$:

$$(5.17) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |b_i(x, D^j u_n, \mu_n) - b_i(x, D^j u, 0)|^{m'} = 0.$$

Mais $b_i(x, D^j u_n(x), \mu_n) \rightarrow b_i(x, D^j u(x), 0)$ presque partout et les intégrales (5.17) sont en vertu du théorème de l'immersion : $W_m^{(k)}(\Omega) \subset W_q^{(k-1)}(\Omega)$, $q > m$, algébriquement et topologiquement, absolument équicontinues. Il suffit d'appliquer le théorème de Jęgorov.

Nous avons alors, en vertu des Lemmes 4 et 5 :

THÉORÈME 6. On suppose les hypothèses (5.3), (5.8), (5.11), (5.12), (5.14), (5.15), (5.16), $u_0 = \theta$ de (5.7). Alors si $\text{Im } \lambda \neq 0$ ou si $\lambda \leq 0$ ou si $\lambda > 0$ et si dans le dernier cas il n'existe pas $u \neq \theta$ dans $\mathring{W}_m^{(k)}(\Omega)$ telle que pour $\mathring{W}_m^{(k)}(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \sum_{|i| \leq k} a_i(x, D^j u, 0) D^i \bar{v} dx - \lambda \int_{\Omega} \sum_{|i| < k} b_j(x, D^j u, 0) \cdot D_i \bar{v} dx = 0,$$

alors pour chaque f de $L_{m'}(\Omega)((\overset{\circ}{W}_m^{(k)}(\Omega))^*)$, il existe une solution de l'équation (5.13)'.

En effet, il suffit de définir $T(u, v) = T(u)$, où $T(u)$ est défini par (5.17). $T(u, v)$ satisfait aux hypothèses du théorème 3. Cf. les exemples 1 et 3.

REMARQUE. On voit aisément que le cas du problème de Dirichlet non-homogène se résout par le théorème 6, où l'on peut remplacer la condition 3.3 par la condition $(T(u), u) \geq c_1 \|u\|^{1+\kappa} - c_3 \|u\|^{1+\kappa'}, -1 \leq \kappa'' < \kappa$.

*Institut Mathématique
Žitná 25, Praha 1
Tchécoslovaquie*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. LERAY, J. L. LIONS : *Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder*, Bull. Soc. Math. France 93 (1965), 97-107.
- [2] F. E. BROWDER : *Problèmes non-linéaires, Séminaire de mathématiques supérieures, Montréal 1966*.
- [3] J. NEČAS : *Les équations elliptiques non linéaires*, Cours d'été 1967, Tchécoslovaquie, à paraître dans Czechoslovak mathematical journ. 1969.
- [4] F. E. BROWDER : *Variational boundary value problems for quasi-linear elliptic equations*, II, Proc. Nat. Acad. Sciences, Vol. 50, n. 4, 592-598, (1963).
- [5] M. M. VAJNBERG : *Variacionnyje metody isledovanija nelinejnyh operatorov*, Moskva 1956.
- [6] J. NEČAS : *Sur la régularité des solutions faibles des équations elliptiques non linéaires*, Sémin. équat. part., Collège de France, 1968.