

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

SALVATORE COEN

Sull'omologia degli aperti q -completi di uno spazio di Stein

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 23, n° 2 (1969), p. 289-303

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_2_289_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULL'OMOLOGIA DEGLI APERTI q -COMPLETI DI UNO SPAZIO DI STEIN

SALVATORE COEN

Questa nota si propone di estendere alcuni teoremi dimostrati da L. Kaup in [3] e da R. Narasimhan in [4]; precisamente si proverà:

(1.4) **TEOREMA.** *Sia Q un sottospazio aperto q -completo ⁽¹⁾ di uno spazio di Stein; sia $\dim Q = n$; allora si ha*

$$\begin{aligned} H_k(Q, \mathbf{Z}) &= 0 && \text{per } k > n + q \\ H_{n+q}(Q, \mathbf{Z}) &&& \text{privo di torsione.} \end{aligned}$$

(3.2) **TEOREMA.** *Sia G un gruppo abeliano finitamente generato e siano k, q, n numeri interi tali che*

- i) $k \geq 1$
- ii) $q \geq 0$
- iii) $n \geq k + 3 - q, n \geq q$;

allora esiste in $\mathbf{C}^n$ un dominio D q -completo, tale che $H_k(D, \mathbf{Z}) \simeq G$.

(3.3) **TEOREMA.** *Sia G un gruppo abeliano numerabile e siano k, q, n numeri interi tali che*

- i) $k \geq 1$
- ii) $q \geq 0$
- iii) $n \geq 2k + 2 - q, n \geq q$;

allora esiste in $\mathbf{C}^n$ un dominio D q -completo tale che $H_k(D, \mathbf{Z}) \simeq G$.

Pervenuto alla Redazione il 23 Ottobre 1968.

⁽¹⁾ Alcuni autori (cfr. [1], [5]) chiamano $(q+1)$ -plurisubarmoniche le funzioni che qui sono chiamate q -plurisubarmoniche; con tale posizione si dicono fortemente $(q+1)$ -pseudoconvessi e $(q+1)$ -completi gli spazi complessi che qui sono chiamati rispettivamente fortemente q -pseudoconvessi e q -completi.

In [4] questi teoremi sono mostrati nel caso $q = 0$. Riguardo ad (1.4) v. pure L. Kaup ([3] Satz 1).

Nel § 0 del presente lavoro si espongono alcune definizioni ed alcuni teoremi noti ed utili per il seguito; nel § 1 si presenta la dimostrazione di (1.4); il § 2 contiene alcuni corollari ad (1.4); il § 3 è dedicato ai teoremi (3.2), (3.3).

Ringrazio i proff. A. Andreotti e V. Villani per avermi dato utili suggerimenti durante la redazione di questo lavoro.

§ 0.

Con il termine *spazio complesso* si intende spazio analitico complesso nel senso di Serre e numerabile all'infinito; se X è un tale spazio, con $\dim X$ si intende la sua dimensione complessa.

Con $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ si indicano rispettivamente gli insiemi dei numeri naturali, interi, razionali, reali, complessi, con le loro strutture naturali.

Sia Ω un aperto di $\mathbf{C}^n$; una funzione $\widehat{\varphi}: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^∞ si dice *fortemente q -plurisubarmonica* (risp: *q -plurisubarmonica*) su Ω quando per ogni $x \in \Omega$ la forma di Levi

$$\mathcal{L}(\widehat{\varphi}, x)(u) = \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 \widehat{\varphi}}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)_x u_i \bar{u}_j$$

ha almeno $n - q$ autovalori positivi (risp: positivi o nulli).

Sia X uno spazio complesso, una funzione $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$ si dice *fortemente q -plurisubarmonica* ⁽¹⁾ (risp: *q -plurisubarmonica*) quando, per ogni $x \in X$, esistono

a) un intorno aperto U di x in X

b) un isomorfismo χ di U su un sottoinsieme analitico di un aperto Ω di un opportuno spazio $\mathbf{C}^n$

c) una funzione $\widehat{\varphi}: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ che sia fortemente q -plurisubarmonica (risp: q -plurisubarmonica) su Ω e tale che su U si abbia $\varphi = \widehat{\varphi} \circ \chi$.

Si dimostra che tale definizione è indipendente dalla scelta dell'isomorfismo χ .

Si dice che uno spazio complesso X è *fortemente q -pseudoconvesso* (risp: *q -pseudoconvesso*) quando esiste una funzione $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$ di classe C^∞ , fortemente q -plurisubarmonica (risp: q -plurisubarmonica) al di fuori di un compatto $K \subset X$ e tale che gli insiemi

$$B_c := \{x \in X \mid \varphi(x) < c\}$$

siano relativamente compatti in X per ogni $c \in \mathbf{R}$; X si dice *q -completo* ⁽¹⁾ quando $K = \emptyset$ e φ è fortemente q -plurisubarmonica.

Enunciamo ora alcuni teoremi che saranno usati in seguito.

In [2], A. Andreotti ed R. Narasimhan, sulla base della teoria di Morse, hanno esteso un precedente teorema di A. Andreotti-T. Frankel dimostrando:

(0.1) **TEOREMA.** *Sia X uno spazio di Stein di dimensione n . Sia Y un sottospazio aperto olomorficamente convesso in X . Supponiamo che le singolarità di X siano isolate, allora*

$$H_k(X \bmod Y, \mathbb{Z}) = 0 \quad \text{per } k > n$$

$$H_n(X \bmod Y, \mathbb{Z}) \quad \text{non ha torsione.}$$

Inoltre se Y è relativamente compatto ed ha frontiera differenziabile, allora $H_n(X \bmod Y, \mathbb{Z})$ è un gruppo libero.

R. Narasimhan in «The Levi Problem for complex Spaces — Math. Annalen 142 (1961) pagg. 355-65» ha provato:

(0.2) **TEOREMA.** *Uno spazio complesso è di Stein se e solo se è 0-completo. Nel lavoro [1], a pag. 250, A. Andreotti e H. Grauert hanno dimostrato:*

(0.3) **TEOREMA.** *Se Q è uno spazio q -completo ed $\mathcal{F}$ un fascio analitico coerente su Q , allora $H^k(Q, \mathcal{F}) = 0$ per $k > q$.*

Il seguente risultato di G. Sorani [5] mostra la validità di (1.4) quando Q non abbia punti singolari.

(0.4) **TEOREMA.** *Sia Q una varietà fortemente q -pseudoconvessa relativamente ad una funzione φ fortemente q -plurisubarmonica su $Q - K$ (K compatto di Q). Sia $\dim Q = n$ e poniamo $c_0 = \sup_K \varphi$; per $c > c_0$ si ha (ponendo $B_c = \{x \in Q \mid \varphi(x) < c\}$):*

$$H_k(Q \bmod B_c, \mathbb{Z}) = 0 \quad \text{per } k > n + q$$

$$H_{n+q}(Q \bmod B_c, \mathbb{Z}) \quad \text{privo di torsione;}$$

se inoltre la frontiera di B_c è differenziabile, allora $H_{n+q}(Q \bmod B_c, \mathbb{Z})$ è libero.

§ 1.

(1.1) **LEMMA.** *Sia Q uno spazio q -completo rispetto a una funzione φ fortemente q -plurisubarmonica, sia $p: Q \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione 0-plurisubarmonica e sia $R := \{x \in Q \mid p(x) < 0\}$. Per ogni $c \in \mathbb{R}$, poniamo*

$$B_c := \{x \in Q \mid \varphi(x) < c\}.$$

Allora, per ogni $c \in \mathbf{R}$ esiste una successione $\psi_{c,1}, \psi_{c,2}, \dots$ di funzioni che definiscono la q -completezza di B_c ed esiste una successione $a_1, a_2, \dots$ di numeri reali tali che, ponendo $B_{c,v} := \{x \in B_c \mid \psi_{c,v}(x) < a_v\}$ si abbia

$$i) \quad \overline{B_{c,v}} \subset B_{c,v+1}$$

$$ii) \quad \bigcup_{\substack{v \in \mathbf{N} \\ v \neq 0}} B_{c,v} = B_c \cap R.$$

Inoltre, se Q non ha punti singolari, ogni $B_{c,v}$ può essere scelto a frontiera differenziabile ⁽²⁾.

DIMOSTRAZIONE. Sia $c \in \mathbf{R}$. Possiamo supporre che si abbia $B_c \cap R \neq \emptyset$. Per semplicità di notazione scriviamo $B_c = B$. Sia $m = |\min_{\bar{B}} p|$, si ha $m \neq 0$.

Definendo la funzione

$$\pi = \frac{p + m}{m}$$

si ha

$$B \cap R = \{x \in B \mid \pi(x) < 1\}$$

e $\pi|_{\bar{B}}$ è una funzione non negativa.

È noto (cfr. [6] Prop. (2.2)) che B come sottospazio di Q è q -completo e che la funzione $\chi = \frac{1}{c - \varphi}$ ne definisce la q -completezza.

⁽²⁾ Un po' più generalmente si può dimostrare con lo stesso metodo:

« Sia Q uno spazio fortemente q -pseudoconvesso rispetto ad una funzione φ fortemente q -plurisubarmonica al di fuori di un compatto $K \subset Q$; sia $p: Q \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione di classe C^∞ 0-plurisubarmonica al di fuori di K e sia $R := \{x \in Q \mid p(x) < 0\} \supset K$. Per ogni $c \in \mathbf{R}$, poniamo

$$B_c := \{x \in Q \mid \varphi(x) < c\}.$$

Allora, per ogni $c > \max_K \varphi \geq -\infty$ esiste una successione $\psi_{c,1}, \psi_{c,2}, \dots$ di funzioni che definiscono la forte q -pseudoconvessità di B_c ed esiste una successione di numeri reali $a_1, a_2, \dots$ tali che, ponendo $B_{c,v} := \{x \in B_c \mid \psi_{c,v}(x) < a_v\}$ si abbia

$$i) \quad \overline{B_{c,v}} \subset B_{c,v+1}$$

$$ii) \quad \bigcup_{\substack{v \neq 0, v \in \mathbf{N}}} B_{c,v} = B_c \cap R$$

Inoltre, se Q non ha punti singolari, ogni $B_{c,v}$ può essere scelto a frontiera differenziabile »

Esiste un numero naturale $\bar{\nu}$ che, per semplicità, supporremo uguale a 0, tale che per ogni $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu > \bar{\nu}$ si ha $B_{c-\frac{1}{\nu}} \neq \emptyset$; per tali ν consideriamo su B la funzione

$$\chi_{\nu}(x) = \frac{\chi(x)}{\left| 2 \left(\max_{\bar{B}_{c-\frac{1}{\nu}}} \chi \right) \right|};$$

essa definisce ancora la q -completezza di B e per $x \in B_{c-\frac{1}{\nu}}$ si ha $0 < \chi_{\nu}(x) < 1$.

Per ogni $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \neq 0$ poniamo

$$\psi_{\nu} = \pi^{\nu} + \chi_{\nu}^{\nu}.$$

Dimostriamo che tali funzioni ψ_{ν} (che ovviamente dipendono da c) sono le $\psi_{c, \nu}$ della tesi.

Osserviamo, anzitutto, che poichè π e χ_{ν} sono non negative su B , allora π^{ν} è 0-plurisubarmonica su B e χ_{ν}^{ν} è fortemente q -plurisubarmonica su B , così ψ_{ν} è una funzione fortemente q -plurisubarmonica su B . Inoltre, per ogni $d \in \mathbb{R}$, si ha

$$\{x \in B \mid \psi_{\nu}(x) < d\} \subset \{x \in B \mid \chi_{\nu}^{\nu}(x) < d\}$$

e quindi, poichè $\{x \in B \mid \chi_{\nu}^{\nu}(x) < d\}$ è relativamente compatto in B , anche ψ_{ν} definisce la q -completezza di B .

Sia $\{a_{\nu}\}_{\nu \in \mathbb{N}}_{\nu \neq 0}$ una successione di numeri reali tali che $0 < a_1 < a_2 < \dots$ e che $\lim_{\nu \rightarrow \infty} a_{\nu} = 1$.

Poniamo $B_{c, \nu} = \{x \in B \mid \psi_{\nu}(x) < a_{\nu}\}$ e verifichiamo i), ii).

i) La chiusura di $B_{c, \nu}$ in B è $\bar{B}_{c, \nu}$ cioè è uguale alla chiusura di $B_{c, \nu}$ in Q . Basta ora osservare che se $x \in \bar{B}_{c, \nu}$ allora $\pi^{\nu+1}(x) + \chi_{\nu+1}^{\nu+1}(x) \leq \pi^{\nu}(x) + \chi_{\nu}^{\nu}(x) \leq a_{\nu} < a_{\nu+1}$.

ii) Mostriamo $B \cap R \subset \bigcup_{\nu \in \mathbb{N}} B_{c, \nu}$ (infatti l'inclusione opposta è ovvia).

Sia $x \in B \cap R$, allora esiste $\mu \in \mathbb{N}$ tanto grande da aversi $\chi_{\mu}(x) < 1$, quindi, fissato arbitrariamente d , $0 < d < 1$, per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ abbastanza grande si ha $\chi_{\mu}^{\nu}(x) + \pi^{\nu}(x) < d < a_{\nu}$, da cui la disuguaglianza cercata

$$\chi_{\nu}^{\nu}(x) + \pi^{\nu}(x) < \chi_{\mu}^{\nu}(x) + \pi^{\nu}(x) < a_{\nu}$$

per ν abbastanza grande.

Supponiamo che Q sia una varietà, allora per ogni funzione ϱ di classe C^{∞} è noto che $\{x \in Q \mid \varrho(x) < d\}$ è a frontiera differenziabile per tutti i $d \in \mathbb{R}$

al di fuori di un insieme di misura di Lebesgue nulla (teor. di A. P. Morse); quindi è possibile scegliere la successione $\{a_\nu\}_{\nu \in \mathbf{N}, \nu \neq 0}$ in modo che $B_{c, \nu}$ sia a frontiera differenziabile.

(1.2). LEMMA. *Sia Q una varietà q -completa, $\dim Q = n$; sia data una funzione $p: Q \rightarrow \mathbf{R}$ 0-plurisubarmonica e si ponga $R = \{x \in Q \mid p(x) < 0\}$; allora, se G è un arbitrario gruppo abeliano di coefficienti, si ha:*

$$H_k(Q \bmod R, G) = 0 \text{ per } k > n + q.$$

DIMOSTRAZIONE. Usiamo le notazioni di (1.1). Sia $\{B_{c, \nu}\}_{c, \nu}$ la famiglia degli aperti a frontiera differenziabile di cui (1.1) assicura l'esistenza. Da (0.4) si deduce

$$H_k(B_c \bmod B_{c, \nu}, \mathbf{Z}) = 0 \text{ per } k > n + q$$

$$H_{n+q}(B_c \bmod B_{c, \nu}, \mathbf{Z}) \text{ è un gruppo libero,}$$

per ogni $c \in \mathbf{R}$ e per ogni $\nu \in \mathbf{N}, \nu \neq 0$.

Sia G un gruppo abeliano, dalla formula dei coefficienti universali

$$H_j(B_c \bmod B_{c, \nu}, G) = H_j(B_c \bmod B_{c, \nu}, \mathbf{Z}) \otimes G \oplus \text{Tor}(H_{j-1}(B_c \bmod B_{c, \nu}, \mathbf{Z}), G)$$

ponendo $j = n + q + 1, n + q + 2, \dots$ si ricava

$$H_k(B_c \bmod B_{c, \nu}, G) = 0 \text{ per } k > n + q.$$

Poichè tale uguaglianza vale per ogni $c \in \mathbf{R}$ e per ogni $\nu \in \mathbf{N}, \nu \neq 0$, da ((1.1), ii)) segue la tesi ⁽³⁾.

Una nota a (1.2): con ragionamenti analoghi a quelli usati nella dimostrazione di (0.1) e di (0.4), si vede che $H_{n+q}(Q \bmod B_{c, \nu}, \mathbf{Z})$ è un gruppo libero per ogni $c \in \mathbf{R}$ e per ogni $\nu \in \mathbf{N}$.

⁽³⁾ Sulla base della nota ⁽²⁾ si può dimostrare qualcosa di lievemente più generale:

« Sia Q una varietà fortemente q -pseudoconvessa rispetto ad una funzione fortemente q -plurisubarmonica al di fuori di un compatto $K \subset Q$, sia $\dim Q = n$; $p: Q \rightarrow \mathbf{R}$ sia una funzione di classe C^∞ 0-plurisubarmonica al di fuori di K e sia $R := \{x \in Q \mid p(x) < 0\} \supset K$. Allora si ha

$$H_k(Q \bmod R, G) = 0 \text{ per } k > n + q$$

e per ogni gruppo abeliano di coefficienti G ».

(1.3) LEMMA. Sia X uno spazio di Stein, $\dim X = n$ e sia A un sottoinsieme analitico (chiuso) di X , allora esiste un sistema fondamentale di intorni aperti $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ di A in X del tipo $U_\beta = \{x \in X \mid p_\beta(x) < 0\}$ ove $p_\beta: X \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione 0-plurisubarmonica su X .

DIMOSTRAZIONE. (cfr. [4] Theor. 2 pag. 380). Sia U un intorno aperto di A in X , allora esiste (v. [4] Theor. 1) per un opportuno numero naturale N , un'applicazione olomorfa $f: X \rightarrow \mathbb{C}^N$ tale che $f^{-1}(0) = A$, $f|_{X-A}$ è iniettiva ed $f|_{X-U}$ è propria.

Quindi, $f(X-U)$ è chiuso in $\mathbb{C}^N$ e non contiene l'origine. Esiste, allora, un numero reale $\beta = \beta(U) > 0$ tale che, definendo la funzione $v_\beta: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{R}$ con $v_\beta(z_1, \dots, z_N) = \sum_{j=1}^N |z_j|^2 - \beta$ si ha

$$\{z \in \mathbb{C}^N \mid v_\beta(z) < 0\} \cap f(X-U) = \emptyset.$$

La funzione $p_\beta = v_\beta \circ f$ è 0-plurisubarmonica su X e soddisfa le condizioni volute, avendosi $A \subset U_\beta \subset U$.

I lemmi ora mostrati ci permettono, estendendo una dimostrazione di [4], di mostrare il seguente

(1.4) TEOREMA. Sia Q un sottospazio aperto q -completo di uno spazio di Stein X ; sia $\dim Q = n$; allora si ha

$$H_k(Q, \mathbb{Z}) = 0 \quad \text{per } k > n + q$$

$$H_{n+q}(Q, \mathbb{Z}) \quad \text{privo di torsione.}$$

DIMOSTRAZIONE. In primo luogo osserviamo che non è restrittivo supporre si abbia $\dim X = n$. Infatti sia $\{X_\delta\}_{\delta \in \Delta}$ la famiglia delle componenti irriducibili di X le quali abbiano intersezione non vuota con Q ; allora $\tilde{X} := \bigcup_{\delta \in \Delta} X_\delta$, essendo chiuso in X , è uno spazio di Stein di cui Q è un sottospazio aperto. Inoltre da $\dim X_\delta \leq \dim Q = n$ segue $\dim \tilde{X} = n$; possiamo, quindi, porre $X = \tilde{X}$.

Sia h una funzione olomorfa su X e tale che

$$A := \{x \in X \mid h(x) = 0\}$$

contenga l'insieme dei punti singolari di X ; supponiamo, inoltre, che h non si annulli identicamente su alcuna componente irriducibile di Q .

Allora A è uno spazio di Stein e $\dim A \cap Q < n$; $X - A$ è una varietà di Stein. Osserviamo che il sottospazio aperto di $X \cap Q - A = (X - A) \cap Q$ è una varietà q -completa (v. [6] Prop. (2.4)) e che si ha $\dim (Q - A) = n$.

Sia $\{U_\beta\}_{\beta \in B}$ un sistema fondamentale di intorno aperti di A scelto come in (1.3). Per ogni $\beta \in B$ si ha

$$(U_\beta \cap Q) - A = \{x \in Q - A \mid p_\beta(x) < 0\}$$

ove p_β è una funzione 0-plurisubarmonica su $X - A$ (precisamente p_β è del tipo $p_\beta = p'_\beta|_{X-A}$ ove p'_β è una funzione 0-plurisubarmonica su X); siamo, perciò, nelle condizioni di (1.2) e possiamo scrivere

$$H_k((Q - A) \bmod (U_\beta \cap Q) - A, G) = 0$$

per ogni $k > n + q$, per ogni $\beta \in B$ e per ogni gruppo abeliano di coefficienti G .

Per excisione si ha

$$H_k(Q \bmod U_\beta \cap Q, G) = 0$$

al variare come sopra di k, β, G .

Ora $\{U_\beta \cap Q\}_{\beta \in B}$ è un sistema fondamentale di intorno aperti di $A \cap Q$ in Q , quindi

$$H_k(Q \bmod A \cap Q, G) = \lim_{\leftarrow} H_k(Q \bmod U_\beta \cap Q, G) = 0$$

al variare come sopra di k, β, G .

Ragioniamo, adesso, per induzione sulla dimensione di Q : supponiamo che per ogni gruppo abeliano di coefficienti G si abbia

$$H_k(T, G) = 0 \quad \text{per } k > \dim T + q$$

per ogni aperto T q -completo di uno spazio di Stein S con $\dim T < n$.

Poichè $A \cap Q$ è un aperto q -completo dello spazio di Stein A e $\dim A \cap Q < n$, allora si ha

$$H_k(A \cap Q, G) = 0 \quad \text{per } k > n + q - 1.$$

Dalla successione esatta

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_k(A \cap Q, G) &\rightarrow H_k(Q, G) \rightarrow H_k(Q \bmod A \cap Q, G) \rightarrow \\ &\rightarrow H_{k-1}(A \cap Q, G) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

segue $H_k(Q, G) = 0$ per $k > n + q$: con ciò si conclude il ragionamento induttivo e si vede in particolare

$$H_k(Q, \mathbf{Z}) = 0 \quad \text{per } k > n + q.$$

Finalmente, dalla formula dei coefficienti universali

$$H_{n+q+1}(Q, G) = H_{n+q+1}(Q, \mathbf{Z}) \otimes G \oplus \text{Tor}[H_{n+q}(Q, \mathbf{Z}), G]$$

si deduce

$$H_{n+q}(Q, \mathbf{Z}) \text{ privo di torsione.} \quad \text{q. e. d.}$$

Si dà ora qualche condizione sufficiente perchè un aperto di uno spazio di Stein sia *q-completo*.

(1.5) OSSERVAZIONE. Sia Q un aperto di uno spazio di Stein X ; allora Q è un sottospazio *q-completo* di X se e solo se è *q-pseudoconvesso*.

DIMOSTRAZIONE. Sia φ una funzione *q-plurisubarmonica* che definisca la *q-pseudoconvessità* di Q e π sia una funzione fortemente 0-plurisubarmonica che definisca la 0-completezza di X (v. (0.2)); possiamo supporre che π e φ siano positive su Q . Supponiamo che φ sia *q-plurisubarmonica* al di fuori del compatto K . Sia $x \in K$ ed U sia un intorno aperto di x , immerso mediante l'isomorfismo analitico χ come sottoinsieme analitico in un aperto Ω di $\mathbf{C}^N$. Esistono su Ω una funzione $\widehat{\pi}$ fortemente 0-plurisubarmonica ed una funzione $\widehat{\varphi}$ di classe C^∞ tali che $\widehat{\pi} \circ \chi = \pi$, $\widehat{\varphi} \circ \chi = \varphi$. Restringendo eventualmente Ω , possiamo supporre che gli autovalori di $\mathcal{L}(\widehat{\pi}, y)$ si mantengano su Ω maggiori di un numero $m > 0$ che gli autovalori di $\mathcal{L}(\widehat{\varphi}, y)$ si mantengano su Ω maggiori di un numero $s > -\infty$. Sia $M > 0$ tale che $mM + s > 0$, allora $M\widehat{\pi} + \widehat{\varphi}$ è una funzione fortemente 0-plurisubarmonica su Ω .

Ricopriamo K con un numero finito di aperti scelti come U , allora esiste un numero positivo A tale che la funzione $A\pi + \varphi$ definisce la *q-completezza* di Q .

(1.6) OSSERVAZIONE. Sia X uno spazio di Stein, sia $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione *q-plurisubarmonica* su X e sia $Q := \{x \in X \mid \varphi(x) < 0\}$; allora Q è un sottospazio aperto *q-completo* di X .

DIMOSTRAZIONE. Sia $\pi: X \rightarrow \mathbf{R}$ una funzione positiva fortemente 0-plurisubarmonica che definisca la 0-completezza di X . La *q-completezza* di Q è

definita dalla funzione

$$\psi := \pi - \frac{1}{\varphi}.$$

Verifichiamo che ψ è fortemente q -plurisubarmonica. Sia U un intorno di x immerso secondo l'isomorfismo χ come sottoinsieme analitico in un aperto Ω di $\mathbb{C}^N$; le funzioni $\widehat{\pi} = \pi \circ \chi^{-1}$, $\widehat{\varphi} = \varphi \circ \chi^{-1}$ sono rispettivamente fortemente 0-plurisubarmonica e q -plurisubarmonica su Q . Ponendo $\widehat{\psi} = \psi \circ \chi^{-1}$ si ha per ogni $y \in \Omega$

$$\mathcal{L}(\widehat{\psi}, y)(u) = \mathcal{L}(\widehat{\pi}, y)(u) + \frac{1}{(-\widehat{\varphi})^2} \mathcal{L}(\widehat{\varphi}, y)(u) + \frac{2}{(-\widehat{\varphi})^3} |\text{grad } \widehat{\varphi} \times u|^2$$

e quindi $\mathcal{L}(\widehat{\psi}, y)$ ha almeno $N - q$ autovalori positivi.

Per ogni $c \in \mathbb{R}$ poniamo $B_c = \{x \in Q \mid \psi(x) < c\}$; si ha $B_c \subset \{x \in X \mid \pi(x) < c\}$. Quindi, per vedere che B_c è relativamente compatto in Q , basta osservare che si ha $\partial Q \cap \partial B_c = \emptyset$ (∂ denota la frontiera in X).

§ 2.

(2.1) COROLLARIO. *Sia X uno spazio di Stein e Q sia un sottospazio aperto q -completo di X , $\dim Q = n$ allora si ha:*

- i) $H^k(Q, \mathbb{Z}) = 0$ per $k > n + q + 1$
- ii) $H^k(Q, G) = 0$ per $k > n + q$ e per ogni gruppo divisibile G .

DIMOSTRAZIONE. Ricordiamo il teorema dei coefficienti universali

$$H^i(Q, G) = \text{Ext}(H_{j-1}(Q, \mathbb{Z}), G) \oplus \text{Hom}(H_j(Q, \mathbb{Z}), G).$$

Dal precedente teor. (1.4) e dalla formula ora scritta applicata nel caso $j > n + q + 1$, segue i). Si ottiene ii) applicando ancora (1.4) e la formula scritta nel caso $j > n + q$ e ricordando che un gruppo è uno $\mathbb{Z}$ -modulo iniettivo se e solo se è divisibile.

In particolare, $H^{n+q+1}(Q, \mathbb{Q}) = H^{n+q+1}(Q, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = 0$.

Quando Q è uno spazio complesso di dimensione n , $H_k(Q, \mathbb{Z}) = 0$ per $k > n + q$ e $H_{n+q}(Q, \mathbb{Z})$ è libero, allora, essendo $\text{Ext}(H_{n+q}(Q, \mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = 0$, ne segue $H^k(Q, \mathbb{Z}) = 0$ per $k > n + q$. Un caso in cui si verifica tale proprietà è quello di uno spazio Q come in (2.1) e tale che $H_{n+q}(Q, \mathbb{Z})$ sia finitamente generato; un altro esempio è dato dagli spazi di Stein i cui punti singolari siano isolati (cfr. (0.1), [4]); in particolare se X è uno spazio di Stein 1-dimensionale si ha $H^2(X, \mathbb{Z}) = 0$; un ulteriore esempio è dato, ricordando (0.4), dalla seguente

(2.2) OSSERVAZIONE. Sia Q una varietà q -completa di dimensione n ; allora, $H^k(Q, \mathbb{Z}) = 0$ per $k > n + q$.

(2.3) COROLLARIO. Sia Q una varietà q -completa ed A sia una sottovarietà (chiusa) di Q ; si abbia $\dim A < \dim Q = n$.

Allora, indicando con $\mathcal{B}(A)$ il fascio (non analitico) dei germi delle funzioni olomorfe, mai nulle e che valgono identicamente 1 su A , abbiamo:

- i) $H^k(Q, \mathcal{B}(A)) \simeq H^{k+1}(Q \bmod A, \mathbb{Z})$ per $k > q$
- ii) $H^k(Q, \mathcal{B}(A)) = 0$ per $k > \max(q, n + q - 1)$.

DIMOSTRAZIONE. Proviamo che ii) è conseguenza di i). Si ha la successione esatta

$$\dots \rightarrow H^{n+q}(A, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{n+q+1}(Q \bmod A, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{n+q+1}(Q, \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

Poichè, per (2.2), $H^{s-1}(A, \mathbb{Z}) = 0 = H^s(Q, \mathbb{Z})$ per $s > n + q$, allora si ha $H^s(Q \bmod A, \mathbb{Z}) = 0$ per $s > n + q$. Quindi, se è valido i), quando sia $\max(q, n + q - 1) < k$, si ha $H^k(Q, \mathcal{B}(A)) \simeq H^{k+1}(Q \bmod A, \mathbb{Z}) = 0$.

Proviamo i). Indichiamo con $\mathcal{I}(A)$ il fascio degli ideali dei germi delle funzioni olomorfe che si annullano su A ; indichiamo con $\mathbb{Z}(A)$ il fascio su Q le cui sezioni sono quelle del fascio $\mathbb{Z}$ che si annullano su A . Si ha la successione esatta

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}(A) \rightarrow \mathcal{I}(A) \rightarrow \mathcal{B}(A) \rightarrow 0$$

da cui la successione esatta di coomologia

$$\begin{aligned} & \dots \rightarrow H^q(Q, \mathcal{B}(A)) \rightarrow \\ & \rightarrow H^{q+1}(Q, \mathbb{Z}(A)) \rightarrow H^{q+1}(Q, \mathcal{I}(A)) \rightarrow H^{q+1}(Q, \mathcal{B}(A)) \rightarrow \\ & \rightarrow H^{q+2}(Q, \mathbb{Z}(A)) \rightarrow H^{q+2}(Q, \mathcal{I}(A)) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Da (0.3) si vede $0 = H^{q+1}(Q, \mathcal{I}(A)) = H^{q+2}(Q, \mathcal{I}(A)) = \dots$. Per concludere basta osservare che si ha $H^k(Q, \mathbb{Z}(A)) \simeq H^k(Q \bmod A, \mathbb{Z})$.

Si può, evidentemente, ripetere il discorso ora concluso anche in altri casi, secondo quanto si è fatto intorno alle osservazioni (2.1), (2.2). Per esempio se X è uno spazio di Stein 1-dimensionale ed A un sottoinsieme analitico (chiuso) 0-dimensionale di X , allora $H^1(X, \mathcal{B}(A)) = 0$.

Se X è uno spazio q -completo o, più in generale, se X è uno spazio coomologicamente q -completo [i.e. $H^k(X, \mathcal{F}) = 0$ per ogni $k > q$ e per ogni fascio analitico coerente $\mathcal{F}$ su X], allora $H^{k+1}(X, \mathcal{B}(\emptyset)) \simeq H^{k+2}(X, \mathbb{Z})$ per

$k \geq q$. È noto, per un teorema di H. J. Reiffen, che uno spazio complesso arbitrario di dimensione n è coomologicamente n -completo, quindi per un tale spazio gli isomorfismi precedenti valgono a cominciare da $H^{n+1}(X, \mathcal{B}(\emptyset)) \simeq H^{n+2}(X, \mathbb{Z})$.

In particolare se X è una varietà complessa di dimensione n , allora, poichè X è una varietà n -completa (cfr. ad es. [7]), ne segue $H^{2n}(X, \mathcal{B}(\emptyset)) = 0$ per $n > 0$ (tale uguaglianza è falsa per $n = 0$); con lo stesso metodo si vede che se A è una sottovarietà chiusa con $\dim A < \dim X$, allora $H^{2n}(X, \mathcal{B}(A)) = 0$ per $n > 0$.

(2.4) COROLLARIO. Sia Q un sottospazio aperto q -completo di uno spazio di Stein X . Sia A un sottoinsieme analitico (chiuso) di Q con $\dim A < \dim Q = n$. Allora, indicando con $\mathcal{B}(A)$ il fascio (non analitico) dei germi delle funzioni olomorfe mai nulle e che valgono identicamente 1 su A , abbiamo:

- i) $H^k(Q, \mathcal{B}(A)) \simeq H^{k+1}(Q \bmod A, \mathbb{Z})$ per $k > q$
- ii) $H^k(Q, \mathcal{B}(\emptyset)) = 0$ per $k > n + q$.

DIMOSTRAZIONE. Si procede analogamente a (2.3) sulla base di (2.1).

Quest'ultimo risultato estende il Korollar 3 pag. 222 di [3], dove, con lo stesso metodo, si prova ii) nel caso $q = 0$.

§ 3.

(3.1) LEMMA. Sia U un aperto di $\mathbb{R}^{m+2q}$; si consideri $\mathbb{R}^m$ immerso naturalmente in $\mathbb{C}^m$ e si identifichi $\mathbb{R}^{2q}$ con $\mathbb{C}^q$; allora esiste un aperto q -completo $D \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^q$ tale che $U \subset D$ e che U sia un retratto di deformazione di D .

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con $x_1, \dots, x_m$ le coordinate di $\mathbb{R}^m$, con $z_1 = x_1 + iy_1, \dots, z_m = x_m + iy_m$ le coordinate di $\mathbb{C}^m$; indichiamo con $x_{m+1}, \dots, x_{m+2q}$ le coordinate di $\mathbb{R}^{2q}$ che si identifica con $\mathbb{C}^q$ di coordinate $z_{m+1} = x_{m+1} + ix_{m+q+1}, \dots, z_{m+q} = x_{m+q} + ix_{m+2q}$.

In ([4] Lemma 6 pag. 383) si dimostra che esiste una funzione $g: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2q} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che: i) $U = \{x \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2q} \mid g(x) > 0\}$, ii) $g(x) = 0$ per ogni $x \notin U$, iii) le derivate di tutti gli ordini di g sono limitate in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{2q}$.

Fissata una funzione g di tale natura, per ogni $\varepsilon > 0$ definiamo la funzione $p_\varepsilon: \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^q \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$p_\varepsilon(z_1, \dots, z_{m+q}) = y_1^2 + \dots + y_m^2 - \varepsilon g(x_1, \dots, x_{m+2q}).$$

Per $1 \leq i, j \leq m$ si ha, indicando con δ_{ij} il simbolo di Kronecker,

$$\frac{\partial^2 p_\varepsilon}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = \frac{1}{4} \left(2\delta_{ij} - \varepsilon \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right).$$

Si può, quindi, per la proprietà iii) della funzione g , fissare un $\varepsilon > 0$ tanto piccolo che per ogni $(z_{m+1}^0, \dots, z_{m+q}^0) \in \mathbb{C}^q$ la funzione $p_\varepsilon(z_1, \dots, z_m, z_{m+1}^0, \dots, z_{m+q}^0)$ sia fortemente 0-plurisubarmonica in ogni $(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$. Scriviamo $p_\varepsilon = p$.

Vogliamo vedere che p è fortemente q -plurisubarmonica su tutto $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^q$. Una condizione necessaria e sufficiente perchè ciò si verifichi è che per ogni punto $z^0 \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}$ esista una applicazione biolomorfa τ_{z^0} del disco $D_m = \left\{ t \in \mathbb{C}^m \mid \sum_{j=1}^m t_j \bar{t}_j < 1 \right\}$ in $\mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^q$ tale che $\tau_{z^0}(0) = z^0$ e che $p \circ \tau_{z^0}$ sia fortemente 0-plurisubarmonica su D_m . Nel nostro caso tale proprietà è soddisfatta, basta porre:

$$\tau_{z^0}(t_1, \dots, t_m) = (t_1 + z_1^0, \dots, t_m + z_m^0, z_{m+1}^0, \dots, z_{m+q}^0).$$

Sia, ora

$$D := \{z \in \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^q \mid p(z) < 0\}.$$

Per (1.6) D è un aperto q -completo.

Resta da dimostrare che U è un retratto di deformazione di D . Osserviamo subito che $U \subset D$: infatti se $\widehat{z} \in U$, allora, per i) si ha

$$\widehat{y}_1 = \dots = \widehat{y}_m = 0, \quad g(\widehat{x}) = g(\widehat{x}_1, \dots, \widehat{x}_{m+2q}) > 0$$

e quindi $p(\widehat{z}) = 0 - \varepsilon g(\widehat{x}) < 0$.

Inoltre, si ha

$$D = \{(z_1, \dots, z_{m+q}) \in \mathbb{C}^{m+q} \mid (x_1, \dots, x_{m+2q}) \in U, y_1^2 + \dots + y_m^2 < \varepsilon g(x_1, \dots, x_{m+2q})\}$$

infatti, basta notare che se $(x_1, \dots, x_{m+2q}) \notin U$, allora, per ii), $g(x_1, \dots, x_{m+2q}) = 0$ e quindi $p(z) \geq 0$, cioè $z \notin D$. Ciò mostra che la funzione continua $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{C}^q$ definita da

$$\begin{aligned} f(x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m, x_{m+1} + ix_{m+q+1}, \dots, x_{m+q} + ix_{m+2q}) = \\ = (x_1, \dots, x_m, x_{m+1} + ix_{m+q+1}, \dots, x_{m+q} + ix_{m+2q}) \end{aligned}$$

prende i valori in U . Consideriamo la funzione $F: D \times [0, 1] \rightarrow D$ definita da

$$F(z, t) = (1 - t)z + tf(z);$$

essa determina una retrazione di D su U .

(3.2) **TEOREMA.** *Sia G un gruppo abeliano finitamente generato e siano k, q, n numeri interi tali che*

- i) $k \geq 1$
- ii) $q \geq 0$
- iii) $n \geq k + 3 - q, n \geq q$;

allora esiste in $\mathbb{C}^n$ un dominio D q -completo tale che $H_k(D, \mathbb{Z}) \simeq G$.

DIMOSTRAZIONE. In ([4] pag. 384) si dimostra che, fissati arbitrariamente un gruppo abeliano finitamente generato G , un intero $k \geq 1$, ed un intero $s \geq k + 3$, esiste un complesso L finito e connesso immerso in $\mathbb{R}^s$ tale che $H_k(L, \mathbb{Z}) \simeq G$ e che L è un retratto di deformazione di un proprio intorno U in $\mathbb{R}^s$.

Nel nostro caso, essendo per iii) $(n - q) + 2q \geq k + 3$ e $n \geq q$, possiamo, quindi, dire che esiste un aperto U di $\mathbb{R}^{(n-q)+2q}$ tale che si abbia

$$H_k(U, \mathbb{Z}) \simeq G.$$

Basta ora applicare il lemma (3.1).

(3.3) **TEOREMA.** *Sia G un gruppo abeliano numerabile; k, q, n siano numeri interi tali che si abbia*

- i) $k \geq 1$
- ii) $q \geq 0$
- iii) $n \geq 2k + 2 - q, n \geq q$;

allora esiste in $\mathbb{C}^n$ un dominio D q -completo tale che $H_k(D, \mathbb{Z}) \simeq G$.

DIMOSTRAZIONE. Esiste un complesso X connesso localmente finito di dimensione $k + 1$ per cui $H_k(X, \mathbb{Z}) \simeq G$. Si può realizzare X in un $\widehat{X}$ contenuto in $\mathbb{R}^{2(k+1)}$ ⁽⁴⁾. Sia $D_{n+q-2(k+1)}$ il disco reale di dimensione $n + q - 2(k + 1)$ e sia $K = \widehat{X} \times D_{n+q-2(k+1)}$; allora si ha $H_k(K, \mathbb{Z}) \simeq G$.

(4) Risultato gentilmente comunicato dal Prof. R. Narasimhan.

Sia U un aperto connesso di K in $\mathbb{R}^{(n-q)+2q}$ per cui si abbia

$$H_k(U, \mathbb{Z}) \simeq H_k(K, \mathbb{Z}) \simeq G;$$

allora esiste per (3.1) un dominio q -completo D in $\mathbb{C}^{n-q} \times \mathbb{C}^q$ tale che

$$H_k(D, \mathbb{Z}) \simeq H_k(U, \mathbb{Z}).$$

*Università di Pisa.
Istituto di Matematica.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] ANDREOTTI A. et GRAUERT H., *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. Franc. **90** (1962) pagg. 193-259.
- [2] ANDREOTTI A. and NARASIMHAN R., *A topological property of Runge pairs*, Annals of Math. **79** (1962) pagg. 499-509.
- [3] KAUP L., *Eine topologische Eigenschaft Steinscher Raume*, Nachr. Akad. Wiss. Gottingen, Math. Physik. kl. (1966) pagg. 213-244.
- [4] NARASIMHAN R., *On the Homology Groups of Stein Spaces*, Inventiones Math., **2** (1967) pagg. 377-385.
- [5] SORANI G., *Omologia degli spazi q -pseudoconvessi*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa vol. XIV (1962) pagg. 299-304.
- [6] SORANI G. and VILLANI V., *q -complete Spaces and Cohomology*, Transactions of the Am. Math. Soc. **125** (1966) pagg. 432-448.
- [7] VILLANI V., *Su alcune proprietà coomologiche dei fasci coerenti su uno spazio complesso* Rend. Sem. Mat. Università di Padova XXXV (1964) pagg. 47-55.