ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

BRUNO BIGOLIN

Gruppi di Aeppli

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 2 (1969), p. 259-287

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_2_259_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

GRUPPI DI AEPPLI

BRUNO BIGOLIN

Lo studio dei gruppi di Aeppli $V^{p,q}$ e $\Lambda^{p,q}$ intrapreso in questo lavoro si giustifica in vista di alcune applicazioni nella teoria dei cicli delle varietà algebriche (ampiamente trattata in vari lavori di A. Andreotti e F. Norguet), e di utilizzazioni nello studio delle classi di Chern secondo la definizione di R. Bott e S. S. Chern (in Acta Mathematica — 114 (1965)).

Nel § 1 si introducono i gruppi di Aeppli e si descrive il caso in cui la varietà-base X è di Stein: i risultati di questo § sono in [1] e [5].

Nel § 2 si costruisce, su ogni varietà complessa e per ogni (fissata) coppia di interi non negativi (p, q), una risoluzione:

$$0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{L}^0 \longrightarrow \mathcal{L}^1 \longrightarrow \dots$$

del fascio $\mathcal{H}$ dei germi di funzioni pluriarmoniche, tale che:

$$\frac{\operatorname{Ker}(\Gamma(X, \mathcal{L}^{p+q}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}^{p+q+1}))}{\operatorname{Im}(\Gamma(X, \mathcal{L}^{p+q-1}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}^{p+q}))} = V^{p,q}$$

$$\frac{\operatorname{Ker}(\Gamma(X, \mathcal{L}^{p+q+1}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}^{p+q+2}))}{\operatorname{Im}(\Gamma(X, \mathcal{L}^{p+q}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{L}^{p+q+1}))} = \Lambda^{p+q,q+1}.$$

Per esempio, nei casi semplici corrispondenti alle coppie di interi (1,1) e (1,2), si hanno le risoluzioni:

$$\begin{tikzcd}
 & & \Omega^{0,1} \arrow[dr, "i"] & & & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[ur, "\bar\partial"] \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "-\partial"'] & \oplus & \mathcal{A}^{0,1} \arrow[r, "\partial"] & \mathcal{A}^{1,1} \arrow[r, "\partial\bar\partial"] & \mathcal{A}^{2,1} \arrow[r, "d"] & \dots \\
 & & \mathcal{A}^{0,0} \arrow[ur, "\bar\partial"] \arrow[dr, "\partial"] & \oplus & & & \\
 & & \oplus & \mathcal{A}^{1,0} \arrow[ur, "\bar\partial"'] & & & \\
 & & \Omega^{1,0} \arrow[ur, "i"'] & & & &
\end{tikzcd}$$

Pervenuto in Redazione il 5 Novembre 1968.

Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca per la matematica del C. N. R. nell'anno accademico 1968-1969.

$$\begin{tikzcd}
 & & \overline{\Omega}^{0,1} \arrow[r, "-\bar\partial"] \arrow[dr, "i"] & \overline{\Omega}^{0,2} \arrow[dr, "i"] & & & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{K} \arrow[ur, "\partial"] \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "-\partial"'] & \oplus & \oplus & \mathcal{A}^{0,2} \arrow[dr, "\partial"] & & & \\
 & & \mathcal{A}^{0,0} \arrow[r, "\bar\partial"] \arrow[dr, "\partial"] & \mathcal{A}^{0,1} \arrow[ur, "\bar\partial"] \arrow[dr, "\partial"] & & \mathcal{A}^{1,2} \arrow[r, "\partial\bar\partial"] & \mathcal{A}^{2,3} \arrow[r, "d"] & \cdots \\
 & & \oplus & \oplus & \mathcal{A}^{1,1} \arrow[ur, "\bar\partial"] \arrow[dr, "\bar\partial"] & & & \\
 & & \Omega^{1,0} \arrow[r, "i"] & \mathcal{A}^{1,0} \arrow[ur, "\partial"] & & & &
\end{tikzcd}$$

Come si vede, siffatte risoluzioni non sono acicliche (a meno che la varietà X non sia di Stein), l'ostruzione essendo rappresentata dalla presenza dei fasci $\Omega^{p,0}$ e $\overline{\Omega}^{0,q}$ dei germi di forme olomorfe ed antiolomorfe.

Usando un'opportuna (e ovvia) successione spettrale, nel § 3 si ottiene la finitezza dei $V^{p,q}$ e $\Lambda^{p,q}$ su varietà fortemente k-pseudoconvesse, nel § 4 si dimostra la dualità:

$$\begin{cases} (V^{p,q})' \simeq \Lambda^{n-p,n-q} \\ (\Lambda^{p,q})' \simeq V^{n-p,n-q} \end{cases}$$

su varietà compatte ($n = \dim_C X$).

Il caso compatto è ripreso, con spirito diverso, nel § 5, dove si introduce l'operatore $\mathcal{D}$: si tratta di un operatore ellittico del 4° ordine, verificante:

$$\operatorname{Ker}(A^{p,q} \xrightarrow{\mathcal{D}} A^{p,q}) \simeq V^{p,q}.$$

Siccome per metriche Kähleriane si ha $\mathcal{D} = \frac{1}{4}\Delta^2 + \partial\bar\vartheta + \bar\partial\vartheta$, ne viene (in questa situazione particolare) una notevole precisazione:

$$V^{p,q} \simeq H^{p,q},$$

dove $H^{p,q}$ indica lo spazio delle forme globali (di bigrado (p, q)) armoniche.

In tutto il seguito saranno usate le notazioni seguenti:

$\mathcal{K}^{p,q}$ = fascio dei germi di (p, q)-correnti;

$\mathcal{A}^{p,q}$ = » » » » (p, q)-forme C^∞;

$\Omega^{p,0}$ = » » » » p-forme olomorfe;

$\overline{\Omega}^{0,q}$ = » » » » q-forme antiolomorfe;

C = » costante dei complessi;

$$K^{p,\ } = \Gamma(X, \mathcal{K}^{p,q}); \qquad K_c^{p,q} = \Gamma_c(X, \mathcal{K}_c^{p,q});$$

$$A^{p,q} = \Gamma(X, \mathcal{A}^{p,q}); \qquad D^{p,q} = \Gamma_c(X, \mathcal{A}^{p,q});$$

$$\Omega^{p,0} = \Gamma(X, \Omega^{p,0}); \qquad \bar{\Omega}^{0,q} = \Gamma(X, \bar{\Omega}^{0,q}).$$

Sono grato al prof. A. Andreotti che, dopo avermi assegnato questo problema come tesi di laurea (discussa a Pisa l'8 luglio 1968), mi ha guidato nella ricerca concedendomi molti utili colloqui.

§ 1. I GRUPPI DI AEPPLI.

1. Definizioni.

Su ogni varietà analitica complessa X, definiamo:

$$(1.1)\quad \begin{cases} V^{p,q} = \dfrac{\operatorname{Ker}(A_{p,q} \xrightarrow{\partial\bar\partial} A^{p+1,q+1})}{\partial A^{p-1,q} + \bar\partial A^{p,q-1}} & [p, q \geq 1] \\[2ex] V^{0,q} = \dfrac{\operatorname{Ker}(A^{0,q} \xrightarrow{\partial\bar\partial} A^{1,q+1})}{\bar\Omega^{0,q} + \bar\partial A^{0,q-1}} & [q \geq 1] \\[2ex] V^{p,0} = \dfrac{\operatorname{Ker}(A^{p,0} \xrightarrow{\partial\bar\partial} A^{p+1,1})}{\partial A^{p-1,0} + \Omega^{p,0}} & [p \geq 1] \\[2ex] V^{0,0} = \dfrac{\operatorname{Ker}(A^{0,0} \xrightarrow{\partial\bar\partial} A^{1,1})}{\bar\Omega^{0,0} + \Omega^{0,0}} \end{cases}$$

$$(1.2)\quad \begin{cases} A^{p,q} = \dfrac{\operatorname{Ker}(A^{p,q} \xrightarrow{d} A^{p+1,q} \oplus A^{p,q+1})}{\partial\bar\partial A^{p-1,q-1}} & [p, q \geq 1] \\[2ex] A^{0,q} = \dfrac{\operatorname{Ker}(A^{0,q} \xrightarrow{d} A^{1,q} \oplus A^{0,q+1})}{\bar\partial\, \bar\Omega^{0,q-1}} & [q \geq 1] \\[2ex] A^{p,0} = \dfrac{\operatorname{Ker}(A^{p,0} \xrightarrow{d} A^{p+1,0} \oplus A^{p,1})}{\partial\Omega^{p-1,0}} & [p \geq 1] \\[2ex] A^{0,0} = \operatorname{Ker}(A^{0,0} \xrightarrow{d} A^{1,0} \oplus A^{0,1}) \end{cases}$$

Sostituendo $A^{p,q}$ con $D^{p,q}$ (spazio delle (p,q)-forme C^∞ a supporto compatto) e $\Omega^{p,0}$, $\bar{\Omega}^{0,p}$ con $\{0\}$, si ottengono le analoghe definizioni per i gruppi a supporti compatti:

$$V_c^{p,q},\ \Lambda_c^{p,q} \qquad [p, q \geq 0]. \tag{1.3}$$

Le osservazioni seguenti sono di immediata verifica:

$$\Lambda^{0,q} \simeq \frac{\operatorname{Ker}(\bar{\Omega}^{0,q} \xrightarrow{\partial} \bar{\Omega}^{0,q+1})}{\bar{\partial}\,\bar{\Omega}^{0,q-1}}; \tag{1.4}$$

pertanto, se X è di Stein, si ha:

$$\Lambda^{0,q} \simeq H^q(X, C)$$

$$\Lambda^{p,0} \simeq \frac{\operatorname{Ker}(\Omega^{p,0} \xrightarrow{\partial} \Omega^{p+1,0})}{\partial\Omega^{p-1,0}}; \tag{1.5}$$

pertanto, se X è di Stein, si trova:

$$\Lambda^{p,0} \simeq H^p(X, C) \simeq \Lambda^{0,p}.$$

(1.6) Su una qualsiasi varietà, si ha:

$$\Lambda^{0,0} \simeq H^0(X, C).$$

(1.7) Su una qualsiasi varietà priva di componenti connesse compatte, si ha

$$V_c^{0,q} = \frac{\operatorname{Ker}(D^{0,q} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} D^{1,q+1})}{\bar{\partial} D^{0,q-1}} \simeq H_c^q(X, \bar{O}).$$

Infatti se $a^{0,q} \in D^{0,q}$, $\partial\bar{\partial}\, a^{0,q} = 0 \Longrightarrow \bar{\partial} a^{0q}$ è antiolomorfa a supporto compatto e quindi nulla. Perciò il numeratore è $\operatorname{Ker}(D^{0,q} \xrightarrow{\bar{\partial}} D^{0,q+1})$.

(1.8) Analogamente si trova, su una qualsiasi varietà priva di componenti connesse compatte:

$$V_c^{p,0} \simeq H_c^p(X, \bar{O}).$$

$$V_c^{0,0} = 0 \tag{1.9}$$

$$\Lambda_c^{0,q} = \Lambda_c^{p,0} = \Lambda_c^{0,0} = 0. \tag{1.10}$$

2. Caso delle varietà di Stein.

(2.1) LEMMA. Si ha un omomorfismo naturale:

$$V^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}_*} A^{p,q+1}. \qquad [p, q \geq 0]$$

Se X è di Stein, esso è iniettivo e surgettivo.

DIM. L'omomorfismo $\bar{\partial}_*$

$$\frac{\mathrm{Ker}\,(A^{p,q} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} A^{p+1,q+1})}{\partial A^{p-1,q} + \bar{\partial} A^{p,q-1}} \longrightarrow \frac{\mathrm{Ker}(A^{p,q+1} \xrightarrow{d} A^{p+1,q+1} \oplus A^{p,q+2})}{\partial\bar{\partial} A^{p-1,q}}$$

è definito con un ovvio passaggio al quoziente.

Perchè $\bar{\partial}_*$ sia iniettivo, occorre e basta che:

$$\left\{ a^{p,q} \in A^{p,q} \;\middle|\; \begin{array}{l} \partial\bar{\partial} a^{p,q} = 0 \\ \\ \partial a^{p,q} = \partial\bar{\partial} a^{p-1,q} \end{array} \right\} \subset \partial A^{p-1,q} + \bar{\partial} A^{p,q-1};$$

ora se X è di Stein, si ha successivamente:

$$\bar{\partial} a^{p,q} = \partial\bar{\partial} a^{p-1,q} \Longrightarrow \bar{\partial}\,(a^{p,q} + \partial a^{p-1,q}) = 0 \Longrightarrow a^{p,q} = -\,\partial a^{p-1,q} + \bar{\partial} a^{p,q-1}.$$

Perchè $\bar{\partial}_*$ sia surgettivo, occorre e basta che:

$$\left\{ a^{p,q+1} \in A^{p,q+1} \;\middle|\; \begin{array}{l} d\,a^{p,q+1} = 0 \\ \\ a^{p,q+1} = \bar{\partial} a^{p,q} \\ \\ \partial\bar{\partial} a^{p,q} = 0 \end{array} \right\} + \partial\bar{\partial} A^{p-1,q} \supset$$

$$\supset \mathrm{Ker}\,(A^{p,q+1} \xrightarrow{d} A^{p+1,p+1} \oplus A^{p,q+2}).$$

Allora:

$$da^{p,q+1} = 0 \Longrightarrow \begin{cases} \partial a^{p,q+1} = 0 \\ \\ \bar{\partial} a^{p,q+1} = 0 \end{cases}; \text{ ma } \bar{\partial} a^{p,q+1} = 0 \Longrightarrow a^{p,q+1} = \bar{\partial} a^{p,q};$$

inoltre

$$\partial a^{p,q+1} = 0 \Longrightarrow \partial\, \bar{\partial} a^{p,q} = 0.$$

(2.1′) LEMMA. Si ha un omomorfismo naturale :

$$V^{p,q} \xrightarrow{\partial_*} \Lambda^{p+1,q} \qquad [p, q \geq 0].$$

Se X è di Stein, esso è iniettivo e surgettivo.

(2.2) LEMMA. Si ha un omomorfismo naturale :

$$V_c^{p,q} \xrightarrow{\bar{\partial}_*} \Lambda_c^{p,q+1} \qquad [p, q \geq 0].$$

Se X è di Stein, esso è :
i) iniettivo, se $q < n = \dim_{\mathcal{O}} X$
ii) surgettivo, se $q + 1 < n = \dim_{\mathcal{O}} X$.

DIM. L'omomorfismo $\bar{\partial}_*$

$$\frac{\operatorname{Ker}(D^{p,q} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} D^{p+1,q+1})}{\partial D^{p-1,q} + \bar{\partial} D^{p,q-1}} \longrightarrow \frac{\operatorname{Ker}(D^{p,q+1} \xrightarrow{d} D^{p+1,q+1} \oplus D^{p,q+2})}{\partial\bar{\partial} D^{p-1,q}}$$

si deduce con un ovvio passaggio al quoziente.

Affinchè $\bar{\partial}_*$ sia iniettivo, occorre e basta che

$$\left\{ a^{p,q} \in D^{p,q} \;\middle|\; \begin{array}{l} \partial\bar{\partial} a^{p,q} = 0 \\ \\ \bar{\partial} a^{p,q} = \partial\bar{\partial} a^{p-1,q} \end{array} \right\} \subset \partial D^{p-1,q} + \bar{\partial} D^{p,q-1} ;$$

ora si abbia

$$\bar{\partial}(a^{p,q} + \partial a^{p-1,q}) = 0 ;$$

dall'essere

$$H_c^q(X, \Omega^{p,0}) = 0 \qquad \forall\, q \neq n$$

sulle varietà di Stein, segue che, se $q < n$, si ha :

$$a^{p,q} = -\,\partial a^{p-1,q} + \bar{\partial} a^{p,q-1}$$

(le forme scritte essendo tutte a supporto compatto).

Affinchè $\bar{\partial}_*$ sia surgettivo, occorre e basta che:

$$\left\{ a^{p,q+1} \in D^{p,q+1} \left| \begin{array}{l} da^{p,q+1} = 0 \\ a^{p,q+1} = \bar{\partial} a^{p,q} \\ \partial \bar{\partial} a^{p,q} = 0 \end{array} \right. \right\} + \partial \bar{\partial} D^{p-1,q} \supset$$

$$\supset \operatorname{Ker}(D^{p,q+1} \xrightarrow{d} D^{p+1,q+1} \oplus D^{p,q+2}).$$

Supponiamo allora che $da^{p,q+1} = 0$, ossia che $\begin{cases} \partial a^{p,q+1} = 0 \\ \bar{\partial} a^{p,q+1} = 0 \end{cases}$; se $q + 1 < n$, $\bar{\partial} a^{p,q+1} = 0 \Longrightarrow a^{p,q+1} = \bar{\partial} a^{p,q}$, $a^{pq} \in D^{p,q}$.

D'altra parte $\partial a^{p,q+1} = 0 \Longrightarrow \partial \bar{\partial} a^{p,q} = 0$.

(2.2′) LEMMA. Si ha un omomorfismo naturale:

$$V_c^{p,q} \xrightarrow{\partial_*} \Lambda_c^{p+1,q}. \qquad [p, q \geq 0]$$

Se X è di Stein, esso è:

A) iniettivo, se $p < n = \dim_C X$

B) surgettivo, se $p + 1 < n = \dim_C X$.

Siamo ora in grado di provare i due teoremi seguenti

(2.3) TEOREMA. *Se X è di Stein, si hanno gli isomorfismi*:

$$V^{p,q} \simeq H^{p+q+1}(X, C)$$

$$\Lambda^{p,q} \simeq H^{p+q}(X, C).$$

DIM. $V^{pq} \underset{\sim}{\xrightarrow{\bar{\partial}_*}} \Lambda^{p,q+1} \underset{\sim}{\xleftarrow{\partial_*}} V^{p-1,q+1} \underset{\sim}{\xrightarrow{\bar{\partial}_*}} \Lambda^{p-1,q+2} \underset{\sim}{\xleftarrow{\partial_*}} V^{p-2,q+2} \underset{\sim}{\rightarrow} \ldots V^{0,p+q} \underset{\sim}{\xrightarrow{\bar{\partial}_*}} \Lambda^{0,p+q+1}$.

Dunque si ottiene:

$$V^{p,q} \simeq \Lambda^{0,p+q+1}$$

$$\Lambda^{p,q} \simeq \Lambda^{0,p+q} \simeq H^{p+q}(X, C), \qquad \text{se } X$$

è di Stein (v. (1.4) di questo §).

(2.4) TEOREMA. A) *Se X è di Stein e $p+q<n$, allora*:

$$V_c^{p,q} \simeq H_c^{p+q}(X, \mathcal{O}) = 0$$

B) *Se X è di Stein, $p+q \leq n$ e p oppure $q<n$, allora*:

$$\Lambda_c^{p,q} \simeq H_c^{p+q-1}(X, \mathcal{O}) = 0.$$

DIM.

$$V_c^{pq} \xrightarrow[q+1<n]{\bar\partial_*} \Lambda_c^{p,q+1} \xleftarrow[p<n]{\partial_*} V_c^{p-1,q+1} \xrightarrow[q+2<n]{\bar\partial_*} \Lambda_c^{p-1,q+2} \xleftarrow[\sim]{}$$

$$\xleftarrow[\sim]{\partial_*} \dots V_c^{1,p+q-1} \xrightarrow[p+q<n]{\bar\partial_*} \Lambda^{1,p+q} \xleftarrow[1<n]{\partial_*} V_c^{0,p+q} = H_c^{p+q}(X, \mathcal{O}).$$

§ 2. RISOLUZIONI DEL FASCIO $\mathcal{H}$.

1. Notazioni.

Sia U un aperto di C^n; una funzione $\varphi \in C^2(U)$ è detta pluriarmonica se $\partial\bar\partial\varphi = 0$. Ciò equivale a dire che la forma di Levi

$$L(\varphi, \xi)\, u$$

è identicamente nulla in ogni punto $\xi \in U$. La parte reale di una funzione olomorfa su U è pluriarmonica; inversamente, se $H_1(U, R) = 0$, ogni funzione (a valori in R) pluriarmonica su U è parte reale di una funzione olomorfa.

In questo paragrafo, indicheremo con $\mathcal{H}$ il fascio dei germi di funzioni pluriarmoniche (locali) sulla varietà complessa X.

Useremo anche le notazioni seguenti: se

$$d: A^{p,q} \longrightarrow \bigoplus_{A^{p,q+1}}^{A^{p+1,q}}$$

è l'ordinario operatore di differenziazione esterna, indicheremo con

$${}^t d: \bigoplus_{A^{p,q-1}}^{A^{p-1,q}} \longrightarrow A^{p,q}$$

l'operatore definito da:

$$\begin{tikzcd} A^{p-1,q} \arrow[dr, "\partial"] & \\ \bigoplus & A^{p,q}. \\ A^{p,q-1} \arrow[ur, "\bar\partial"'] & \end{tikzcd}$$

Questa notazione è giustificata dal fatto che se si fa operare d da $K_c^{n-p,\,n-q}$ in $K_c^{n-p+1,\,n-q} \oplus K_c^{n-p,\,n-q+1}$, ${}^t d$ allora è esattamente il suo trasposto. Come d, così anche ${}^t d$ si prolunga per linearità su somme dirette degli $A^{p,q}$.

2. Risoluzione con le forme C^∞.

(2.1) TEOREMA. *Su ogni varietà analitica complessa di dimensione n (su C), si hanno le seguenti successioni esatte di fasci:*

$$\text{A)}\quad 0 \to \mathcal{H} \to \mathcal{A}^{0,0} \xrightarrow{\partial\bar\partial} \mathcal{A}^{1,1} \xrightarrow{d} \begin{matrix} \mathcal{A}^{2,1} \\ \bigoplus \\ \mathcal{A}^{1,2} \end{matrix} \to \mathrm{CoKer}\, d \to 0$$

$$\text{B)}\quad 0 \to \mathcal{H} \to \mathcal{L}^0 \xrightarrow{h^0} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{h^1} \dots \mathcal{L}^q \xrightarrow{h^q} \mathcal{L}^{q+1} \xrightarrow{h^{q+1}}$$

$$\to \mathcal{L}^{q+2} \to \mathrm{CoKer}\, h^{q+1} \to 0 \qquad [q \geq 1]$$

dove

$\text{b}_1)$ $\mathcal{L}^i = \bar\Omega^{0,i+1} \oplus \mathcal{A}^{0,i} \qquad \forall\ 0 \leq i \leq q-1$

$\text{b}_2)$ $\mathcal{L}^q = \mathcal{A}^{0,q}$; $\mathcal{L}^{q+1} = \mathcal{A}^{1,q+1}$; $\mathcal{L}^{q+2} = \mathcal{A}^{2,q+1} \oplus \mathcal{A}^{1,q+2}$

$\text{b}_3)$ $h^i\colon (\mu^{0,i+1}, a^{0,i}) \rightsquigarrow (-\bar\partial\mu^{0,i+1}, \mu^{0,i+1} + \bar\partial a^{0,i}) \qquad \forall\ 0 \leq i \leq q-2$

$\text{b}_4)$ $h^{q-1}\colon (\mu^{0,q}, a^{0,q-1}) \rightsquigarrow (\mu^{0,q} + \bar\partial a^{0,q-1})$

$\text{b}_5)$ $h^q = \partial\bar\partial$; $h^{q+1} = d$

$$\text{C)}\quad 0 \to \mathcal{H} \to \mathcal{L}^0 \xrightarrow{h^0} \mathcal{L}^1 \xrightarrow{h^1} \dots \to \mathcal{L}^{p+q} \xrightarrow{h^{p+q}} \mathcal{L}^{p+q+1} \xrightarrow{h^{p+q+1}}$$

$$\to \mathcal{L}^{p+q+2} \to \mathrm{CoKer}\, h^{p+q+1} \to 0 \begin{bmatrix} p, q \geq 1 \\ p \leq q \end{bmatrix}$$

dove :

c$_1$) $\mathcal{L}^i = \overline{\Omega}^{0,i+1} \oplus \left(\bigoplus_{a=0}^{i} \mathcal{A}^{a,i-a} \right) \oplus \Omega^{i+1,0} \qquad \forall\ 0 \leq i \leq p-1$

c$_2$) $\mathcal{L}^i = \overline{\Omega}^{0,i+1} \oplus \left(\bigoplus_{a=0}^{p} \mathcal{A}^{a,i-a} \right) \qquad \forall\ p \leq i \leq q-1$

c$_3$) $\mathcal{L}^i = \bigoplus_{a=0}^{p+q-1} \mathcal{A}^{i-q+a,q-a} \qquad \forall\ q \leq i \leq p+q-1$

c$_4$) $\mathcal{L}^{p+q} = \mathcal{A}^{p,q}$; $\mathcal{L}^{p+q+1} = \mathcal{A}^{p+1,q+1}$; $\mathcal{L}^{p+q+2} = \mathcal{A}^{p+2,q+1} \oplus \mathcal{A}^{p+1,q+2}$

c$_5$) $h^i : (\mu^{0,i+1}, \{a^{a,i-a}\}_{a=0}^{i}, \nu^{i+1,0}) \rightsquigarrow (-\overline{\partial}\mu^{0,i+1}, \mu^{0,i+1} + \overline{\partial} a^{0,i},$

$\{\partial a^{a,i-a} + \overline{\partial} a^{a+1,i-a-1}\}_{a=0}^{i-1}, \partial a^{i,0} + \nu^{i+1,0}, -\partial \nu^{i+1,0}) \qquad \forall\ 0 \leq i \leq p-2$

c$_6$) $h^{p-1} : (\mu^{0,p}, \{a^{a,p-1-a}\}_{a=0}^{p-1}, \nu^{p,0}) \rightsquigarrow (-\overline{\partial}\mu^{0,p}, \mu^{0,p} + \overline{\partial} a^{0,p-1},$

$\{\partial a^{a,p-1-a} + \overline{\partial} a^{a+1,p-2-a}\}_{a=0}^{p-2}, \partial a^{p-1,0} + \nu^{p,0})$

c$_7$) $h^i : (\mu^{0,i+1}, \{a^{a,i-a}\}_{a=0}^{p}) \rightsquigarrow (-\partial\mu^{0,i+1}, \mu^{0,i+1} + \overline{\partial} a^{0,i},$

$\{\partial a^{a,i-a} + \overline{\partial} a^{a+1,i-a-1}\}_{a=0}^{p-1}) \qquad \forall\ p \leq i \leq q-2$

c$_8$) $h^{q-1} : (\mu^{0,q}, \{a^{a,q-1-a}\}_{a=0}^{p}) \rightsquigarrow (\mu^{0,q} + \overline{\partial} a^{0,q-1}, \{\partial a^{a,q-1-a} + \overline{\partial} a^{a+1,q-2-a}\}_{a=0}^{p-1})$

c$_9$) $h^i = {}^t d \qquad \forall\ q \leq i \leq p+q-1$

c$_{10}$) $h^{p+q} = \partial\overline{\partial}$; $h^{p+q+1} = d$.

D) le analoghe di B e C) che si ottengono considerando al quart'ultimo posto, rispettivamente, $\mathcal{A}^{p,0}$ con $p \geq 1$ e $\mathcal{A}^{pq}$ con $p \geq q \geq 1$.

DIM. Trattandosi di questioni locali, possiamo porci su una varietà di Stein e contrattile, e ragionare a livello delle sezioni.

Cominciamo col dimostrare l'esattezza delle successioni scritte nei termini che stanno a sinistra del $\partial\overline{\partial}$.

Nel caso A) non c'è nulla da dimostrare.

Dimostrazione di B). Basta far vedere che Ker $h^i \subset$ Im h^{i-1}, per ogni $1 \leq i \leq q-1$, e che Ker $\partial\overline{\partial} \subset$ Im h^{q-1} (le conclusioni inverse essendo ovvie).

Ora $(\mu^{0,i+1}, a^{0,i}) \in \operatorname{Ker} h^i$ significa

$$\begin{cases} \bar\partial \mu^{0,i+1} = 0 \\ \mu^{0,i+1} = -\bar\partial a^{0,i}. \end{cases}$$

Dalla prima eguaglianza e dall'essere $H^q(X, C) = 0$ si deduce che

$$\mu^{0,i+1} = -\bar\partial \lambda^{0,i},$$

essendo $\lambda^{0,i}$ una forma antiolomorfa di grado i; la seconda eguaglianza scritta sopra dà allora

$$\bar\partial a^{0,i} = \bar\partial \lambda^{0,i}$$

da cui

$$\Longrightarrow \bar\partial (a^{0,i} - \lambda^{0i}) = 0 \Longrightarrow a^{0,i} = \lambda^{0i} + \bar\partial b^{0,i-1}.$$

L'inclusione $\operatorname{Ker} \partial\bar\partial \subset \operatorname{Im} h^{q-1}$ è nient'altro che il teorema (2.3) del § 1.

Dimostrazione di C). Sia i un generico grado compreso tra 1 e $p-2$; $\operatorname{Ker} h^i$ è l'insieme degli elementi

$$(\mu^{0,i+1}, \{a^{\alpha,i-\alpha}\}_{\alpha=0}^{i}, \nu^{i+1,0})$$

tali che

$$(*) \qquad \begin{cases} \bar\partial \mu^{0,i+1} = 0 \\ \mu^{0,i+1} = -\bar\partial a^{0,i} \\ \partial a^{\alpha,i-\alpha} = -\bar\partial a^{\alpha+1,i-\alpha-1} \qquad \forall\ \alpha = 0 \dots i-1. \\ \nu^{i+1,0} = -\partial a^{i,0} \\ \partial \nu^{i+1,0} = 0 \end{cases}$$

Dalla prima delle $(*)$ si ottiene $\mu^{0,i+1} = -\bar\partial \alpha^{0,i}$ ($\alpha^{0,i}$ forma antiolomorfa); la seconda delle $(*)$ dà allora

$$\bar\partial a^{0,i} = \bar\partial \alpha^{0,i},$$

e successivamente

$$\bar\partial (a^{0i} - \alpha^{0i}) = 0$$

$$a^{0i} = \alpha^{0i} + \bar\partial b^{0,i-1}$$

perchè siano in una var. di Stein).

Dalla terza delle (*) si ricava poi

$$\partial a^{0,i} = -\bar{\partial} a^{1,i-1} \Longrightarrow \bar{\partial} a^{1,i-1} = \bar{\partial}\partial b^{0,i-1} \Longrightarrow a^{1,i-1} = \partial b^{0,i-1} + \bar{\partial} b^{1,i-2};$$

analogamente si trova

$$a^{2,i-2} = \partial b^{1,i-2} + \bar{\partial} b^{2,i-3},$$

e in generale si trova un sistema $\{b^{\alpha,i-1-\alpha}\}_{\alpha=\alpha}^{i-1}$ di forme verificanti

$$a^{\alpha,i-\alpha} = \partial b^{\alpha-1,i-\alpha} + \bar{\partial} b^{\alpha,i-1-\alpha}, \qquad \forall\ 1 \leq \alpha \leq i-1.$$

Dalla penultima e dall'ultima delle (*) si ottiene

$$a^{i,0} = \partial b^{i-1,0} + \beta^{i,0}$$

$$\nu^{i+1,0} = -\partial a^{i,0} = -\partial \beta^{i,0}$$

($\beta^{i,0}$ forma olomorfa).

L'esattezza nei gradi $p-1$, p e i compreso tra $p+1$ e $q-1$ si dimostra con un discorso perfettamente analogo sfruttando sempre il fatto che ad una estremità del fascio $\mathcal{L}^i$ compaiono le forme antiolomorfe; per il termine $\mathcal{L}^q$ si osserva cha dall'essere

$$\partial a^{0q} + \bar{\partial} a^{1,q-1} = 0$$

si deduce

$$\partial \bar{\partial} a^{0,q} = 0,$$

da cui

$$\bar{\partial} a^{0,q} = \mu^{0,q+1} \qquad \text{(antiolomorfa)}.$$

D'altra parte $\mu^{0,q+1} = \bar{\partial}^2 a^{0,q} = 0$, e quindi

$$\mu^{0,q+1} = \bar{\partial} \lambda^{0,q} \qquad \text{(antiolomorfa)};$$

sostituendo ne viene

$$a^{0q} = \lambda^{0q} + \bar{\partial} b^{0,q-1}.$$

A questo punto si procede come sopra.

Supponiamo infine che i varii tra $q+1$ e $p+q-1$ (l'esattezza nel termine $\mathcal{L}^{p+p}$ è il teorema (2.3) del § 1); intanto è $i-q < p < q$, poi si hanno le implicazioni

$$\partial a^{i-q,q} + \bar{\partial} a^{i-q+1,q-1} = 0 \Longrightarrow \partial(\bar{\partial} a^{i-q,q}) = 0 \Longrightarrow \bar{\partial} a^{i-q,q} = \partial c_{(1)}^{i-q-1,q+1};$$

avendosi anche

$$\partial(\bar{\partial}\, c^{i-q-1,\, q+1}_{(1)}) = 0$$

si ottiene a sua volta

$$\bar{\partial}\, c^{i-q-1,\, q+1}_{(1)} = \partial\, c^{i-q-2,\, q+2}_{(2)} \ldots$$

Proseguendo in tal modo, si ottiene un sistema di forme differenziali

$$c^{i-q-1,\, q+1}_{(1)}\,,\ c^{i-q-2,\, q+2}_{(2)}\,,\ \ldots\,,\ c^{0,\, i}_{(i-q)}$$

verificanti

$$(**) \qquad \bar{\partial}\, c^{i-q-\alpha,\, q+\alpha}_{(\alpha)} = \partial\, c^{i-q-\alpha-1,\, q+\alpha+1}_{(\alpha+1)}\,.$$

L'ultima delle (**) dà in particolare:

$$\partial\,(\bar{\partial}\, c^{0,\, i}_{(i-q)}) = 0, \text{ ossia}$$

$$\bar{\partial}\, c^{0,\, i}_{(i-q)} = \mu^{0,\, i+1} \text{ (antiolomorfa)}\,;$$

essendo poi $\bar{\partial}\, \mu^{0,\, i+1} = 0$, sarà $\mu^{0,\, i+1} = \bar{\partial}\, \mu^{0,\, i}$ (antiolomorfa), e quindi

$$c^{0,\, i}_{(i-q)} = \mu^{0,\, i} + \bar{\partial}\, f^{0,\, i-1}_{(i-q)}\,.$$

Successivamente $c^{1,\, i-1}_{(i-q-1)}$ è tale che

$$\bar{\partial}\, c^{1,\, i-1}_{(i-q-1)} = \partial\, c^{0,\, i}_{(i-q)} = \partial\, \bar{\partial}\, f^{0,\, i-1}_{(i-q)} = -\, \bar{\partial}\, \partial\, f^{0,\, i-1}_{(i-q)}\,,$$

ossia

$$c^{1,\, i-1}_{(i-q-1)} = \partial\,(-\, f^{0,\, i-1}_{(i-q)}) + \bar{\partial}\, f^{1,\, i-2}_{(i-q-1)}\,..$$

Dopo un numero finito di passi, otteniamo

$$c^{i-q-1,\, q+1}_{(1)} = \partial\,(-\, f^{i-q-2,\, q+1}_{(2)}) + \bar{\partial}\, f^{i-q-1,\, q}_{(1)}$$

e pertanto si avrà:

$$\bar{\partial}\, a^{i-q,\, q} = \partial\, c^{i-q-1,\, q+1}_{(1)} = -\, \bar{\partial}\, \partial\, f^{i-q-1,\, q}_{(1)}\,,$$

da cui

$$a^{i-q,\, q} = \partial\,(-\, f^{i-q-1,\, q}_{(1)}) + \bar{\partial}\, b^{i-q,\, q-1} = \partial\, b^{i-q-1,\, q} + \bar{\partial}\, b^{i-q,\, q-1}\,.$$

Adesso si va avanti come al solito (per esempio:

$$\bar{\partial}\, a^{i-q+1,\, q-1} = -\,\partial\, a^{i-q,\, q} = \bar{\partial}\,\partial\, b^{i-q,\, q-1} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow a^{i-q+1,\, q-1} = \partial\, b^{i-q,\, q-1} + \bar{\partial}\, b^{i-q+1,\, q-2}).$$

Per concludere la dimostrazione (i casi detti in D) sono i simmetrici di B) e C)) basta provare l'esattezza delle successioni nel termine che sta a destra del $\partial\,\partial$; e questo è sempre il teorema (2.3) del § 1.

(2.2) LEMMA. Sia X una varietà di Stein di dimensione (complessa) n, e siano p e q interi verificanti le relazioni

$$0 \leq p < q < n-1$$

$$n < p + q + 2.$$

Si ha la successione esatta di spazi vettoriali ed applicazioni lineari:

$$\begin{array}{ccccccc}
K_c^{q-p-1,\, n-q-1} & & K_c^{q-p,\, n-q-1} & & & & \\
\oplus & & \oplus & & & & \\
K_c^{q-p,\, n-q-2} & & K_c^{q-p+1,\, n-q-2} & & & & K_c^{n-p-3,\, n-q-1} \\
\oplus & & \oplus & & & & \oplus \\
\vdots & \xrightarrow{t_d} & \vdots & \xrightarrow{t_d} & \cdots & \xrightarrow{t_d} & K_c^{n-p-2,\, n-q-2} \quad \longrightarrow \\
\oplus & & \oplus & & & & \oplus \\
K_c^{n-p-3,\, 1} & & K_c^{n-p-2,\, 1} & & & & K_c^{n-p-1\;\, n-q-3} \\
\oplus & & \oplus & & & & \\
K_c^{n-p-2,\, 0} & & K_c^{n-p-1,\, 0} & & & &
\end{array}$$

$$\xrightarrow{t_d} \begin{array}{c} K_c^{n-p-2,\, n-q-1} \\ \oplus \\ K_c^{n-p-1,\, n-q-2} \end{array} \xrightarrow{t_d} K_c^{n-p-1,\, n-q-1} \xrightarrow{\partial\,\bar{\partial}} K_c^{n-p,\, n-q}\,.$$

DIM. (1) Verifichiamo l'esattezza della successione scritta nel grado $n-p-1$.

Da
$$\partial\, T_c^{n-p-2,\, 1} + \bar{\partial}\, T_c^{n-p-1,\, 0} = 0$$

viene $\bar{\partial}\,(\partial\, T_c^{n-p-1,\, 0}) = 0$ e quindi $\partial\, T_c^{n-p-1,\, 0} = 0$, perchè una distribuzione $\bar{\partial}$-chiusa è una funzione olomorfa, e perchè non ci sono forme olomorfe a supporto compatto.

Da $H_c^q(X, \Omega^{p,0}) = H^q(X, \overline{\Omega}^{0,p} = 0)$ per $q \neq n = \dim_C X$ e $p \geq 0$, si deduce:

$$T_c^{n-p-1,0} = \partial S_c^{n-p-2,0}; \text{ inoltre } \partial T_c^{n-p-2,1} = -\overline{\partial} T_c^{n-p-1,0} =$$

$$= \partial \partial S_c^{n-p-2,0}, \text{ da cui segue che } \partial (T_c^{n-p-2,1} - \overline{\partial} S_c^{n-p-2,0}) = 0.$$

Si ha inoltre:

$$T_c^{n-p-2,1} = \partial S_c^{n-p-3,1} + \overline{\partial} S_c^{n-p-2,0}.$$

Se poi è anche

$$\partial T_c^{n-p-3,2} = \overline{\partial} T_c^{n-p-2,1} = 0$$

sarà

$$\partial T_c^{n-p-3,2} = \partial \overline{\partial} S_c^{n-p-3,1},$$

da cui

$$T_c^{n-p-3,2} = \partial S_c^{n-p-4,2} + \overline{\partial} S_c^{n-p-3,1} \ldots$$

In questo modo si vede che il nucleo dell'operatore uscente da $K_c^{q-p,n-q-1} \oplus \ldots \oplus K_c^{n-p-1,0}$ è contenuto nell'immagine dell'operatore uscente da

$$K_c^{q-p-1,n-q-1} \oplus \ldots \oplus K_c^{n-p-2,0};$$

siccome l'inclusione inversa è ovvia, ne consegue l'esattezza della successione nel grado considerato.

(2) Consideriamo un grado $2n - p - q - j - 1$ qualsiasi, con $j \geq 3$. Da

$$\partial T_c^{n-p-2,n-q-j+1} + \overline{\partial} T_c^{n-p-1,n-q-j} = 0$$

segue $\overline{\partial}(\partial T_c^{n-p-1,n-q-j}) = 0$. Si avrà pertanto:

$$\partial T_c^{n-p-1,n-q-j} = \overline{\partial}\, {}^{(1)}R_c^{n-p,n-q-j-1};$$

da $\overline{\partial}(\partial\, {}^{(1)}R_c^{n-p,n-q-j-1}) = 0$ segue

$$\partial\, {}^{(1)}R_c^{n-p,n-q-j-1} = \overline{\partial}\, {}^{(2)}R_c^{n-p+1,n-q-j-2}.$$

Così proseguendo, si trovano correnti

$${}^{(1)}R_c^{n-p,n-q-j-1}, \quad {}^{(2)}R_c^{n-p+1,n-q-j-2}, \ldots, {}^{(n-q-j)}R_c^{2n-p-q-j-1,0}$$

verificanti

$$\partial\, {}^{(\alpha)}R_c^{n-p+\alpha-1,\, n-q-j-\alpha} = \bar{\partial}\, {}^{(\alpha+1)}R_c^{n-p+\alpha,\, n-q-j-\alpha-1}\,.$$

Si avrà in particolare

$$\bar{\partial}\,(\partial\, {}^{(n-q-j)}R_c^{2n-p-q-j-1,\,0)}) = 0,$$

ossia

$$\partial\, {}^{(n-q-j)}R_c^{2n-p-q-j-1,\,0} = 0,$$

ossia

$${}^{(n-q-j)}R_c^{2n-p-q-j-1,\,0} = \partial\, U_c^{2n-p-q-j-2,\,0}.$$

Ora è

$$\partial\, {}^{(n-q-j-1)}R_c^{2n-p-q-j-2,\,1} = -\,\partial\,\bar{\partial}\, U_c^{2n-p-q-j-2,\,0}\,,$$

da cui

$${}^{(n-q-j-1)}R_c^{2n-p-q-j-2,\,1} = \partial\, V_c^{2n-p-q-j-3,\,1} + \bar{\partial}\,(-\,U_c^{2n-p-q-j-2,\,0}).$$

Ripetendo il discorso per le ${}^{(\alpha)}R_c$ successive, si troverà finalmente:

$${}^{(1)}R_c^{n-p,\,n-q-j-1} = \partial\, Z_c^{n-p-1,\,n-q-j-1} + \bar{\partial}\, W_c^{n-p,\,n-q-j-2}\,.$$

Ma ci ricordiamo che deve essere

$$\partial\, T_c^{n-p-1,\,n-q-j} = \bar{\partial}\, {}^{(1)}R_c^{n-p,\,n-q-j-1} = -\,\partial\,\bar{\partial}\, Z_c^{n-p-1,\,n-q-j-1}\,,$$

da cui:

$$T_c^{n-p-1,\,n-q-j} = \partial\, S_c^{n-p-2,\,n-q-j} + \bar{\partial}\,(-\,Z_c^{n-p-1,\,n-q-j-1}).$$

A questo punto si ragiona come nel caso precedente, ricavando una dopo l'altra tutte le $T_c^{n-p-1-\alpha,\,n-q-j+\alpha}$.

(3) Infine l'esattezza nel grado $2n-p-q-2$ equivale al fatto che il gruppo di Aeppli a coefficienti distribuzioni

$$\frac{\operatorname{Ker}\,(K_c^{n-p-1,\,n-p-1} \xrightarrow{\partial\,\bar{\partial}} K_c^{n-p,\,n-q})}{\partial\, K_c^{n-p-2,\,n-q-1} + \bar{\partial}\, K_c^{n-p-1,\,n-q-2}}$$

è nullo, come si verifica ripetendo la dimostrazione del teorema (2.4) del § 1.

(2.3) TEOREMA. *Sia X una varietà analitica complessa, di dimensione n (su C). La risoluzione C) del teorema* (2.1) *si prolunga a destra del $\partial\bar{\partial}$:*

$$\cdots \xrightarrow{{}^t d} \mathcal{A}^{p,q} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p+1,q+1} \xrightarrow{d} \begin{matrix} \mathcal{A}^{p+2,q+1} \\ \oplus \\ \mathcal{A}^{p+1,q+2} \end{matrix} \xrightarrow{d} \begin{matrix} \mathcal{A}^{p+3,q+1} \\ \oplus \\ \mathcal{A}^{p+2,q+2} \\ \oplus \\ \mathcal{A}^{p+1,q+3} \end{matrix} \xrightarrow{d} \cdots$$

$$\cdots \longrightarrow \begin{matrix} \mathcal{A}^{n-1,n} \\ \oplus \\ \mathcal{A}^{n,n-1} \end{matrix} \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{n\,n} \longrightarrow 0$$

se $p + q + 2 > n = \dim_C X$.

DIM. La verifica è facile per i termini di grado elevato (e precisamente per $p + n + 2 \leq i \leq 2n - 1$, avendo posto $\mathcal{L}^i = \bigoplus_{\alpha=0}^{i-p-q-1} \mathcal{A}^{i-q-\alpha,\, q+1+\alpha}$), laddove la successione si va « assottigliando »; meno evidente è l'esattezza nel pezzo di risoluzione compreso tra $p + q + 1$ e $p + n + 1$. Ma osserviamo che questo pezzo si ottiene (a livello delle sezioni su un aperto coordinato) trasponendo nella successione esatta del lemma (2.2); se pertanto dimostriamo che tutti gli operatori ${}^t d$ che compaiono in detta successione sono omomorfismi, la nostra tesi è conseguenza di (2.2) e della dualità di Serre (vedi: [7], pagg. 64/65). Osserviamo anzi che, per poter applicare il lemma di Serre, basta che i ${}^t d$ siano omomorfismi rispetto alle topologie deboli degli spazi $K_c^{r,s}$; osserviamo poi che, per la continuità (anche debole) di tutte le applicazioni (${}^t d$ e $\partial\bar{\partial}$) che compaiono in (2.2) e per l'esattezza della successione, tutti i ${}^t d$ hanno immagine debolmente chiusa.

Siamo quindi nella situazione:

$$\begin{cases} E' \xleftarrow{{}^t d} F' \\ E \xrightarrow{d} F \end{cases}$$

dove E ed F sono spazi di Fréchet riflessivi, E' ed F' i loro duali forti, $\operatorname{Im} {}^t d$ è debolmente chiusa in E'.

Si ha successivamente:

$\operatorname{Im} {}^t d$ debolmente chiusa $\Longrightarrow d\,(= {}^t({}^t d))$ omomorfismo $\Longrightarrow {}^t d$ omomorfismo per le topologie deboli, come risulta dal

LEMMA (vedi: [3] — Chap. IV — § 4 — Ex. 5).

Siano: E ed F due spazi di Fréchet, $d : E \longrightarrow F$ un'applicazione lineare. Le proprietà seguenti si equivalgono:

α) d è un omomorfismo di E su $d(E)$ per le topologie iniziali

β) ${}^t d(F')$ è debolmente chiuso in E'

γ) ${}^t d$ è un omomorfismo di F' su ${}^t d(F')$ per le topologie deboli $\sigma(F', F)$ e $\sigma(E', E)$.

3. Risoluzione con le correnti.

Il teorema seguente si dimostra con le stesse parole usate del n. 2, con l'accorgimento di usare le risoluzioni dei fasci $\Omega^{p,0}$, $\overline{\Omega}^{0,q}$ a coefficienti distribuzioni.

Un'ovvia variante del lemma (2.2) di questo §. permetterà di ottenere « per dualità » l'esattezza della successione nei termini che stanno a destra del $\partial\overline{\partial}$.

(3.1) TEOREMA. *Su ogni varietà analitica complessa sussistono le risoluzioni del fascio $\mathcal{H}$ scritte nei teoremi* (2.1) *e* (2.3) *del n^0. precedente salvo ad avere ovunque $\mathcal{K}^{p,q}$ al posto di $\mathcal{A}^{p,q}$.*

§ 3. TEOREMI DI FINITEZZA.

1. Lemmi preliminari.

Su ogni varietà analitica complessa si ha la successione esatta di fasci:

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow \mathcal{O} \oplus \overline{\mathcal{O}} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

(ogni funzione f pluriarmonica su un aperto olomorficamente convesso U di C^n si può scrivere come somma di una funzione olomorfa φ e di una funzione antiolomorfa ψ. Prova: $\partial\overline{\partial}f = 0 \Longrightarrow \overline{\partial}f = \psi^{0,1} \in \overline{\Omega}^{0,1}$; siccome $\overline{\partial}\psi^{0,1} = 0$, ne viene $\psi^{0,1} = \overline{\partial}\psi$, $\psi \in \overline{\Omega}^{00}$. Dunque è $\overline{\partial}(f - \psi) = 0$, da cui $f - \psi = \varphi \in \Omega^{00}$).

Ne derivano la successione esatta di coomologia a supporti arbitrari:

$$\ldots \longrightarrow H^q(X, \mathcal{O}) \oplus H^q(X, \overline{\mathcal{O}}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{H}) \longrightarrow H^{q+1}(X, C) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^{q+1}(X, \mathcal{O}) \oplus H^{q+1}(X, \mathcal{O}) \longrightarrow \ldots$$

e l'analoga a supporti compatti.

Applicando il teorema B di Cartan, si trova

(1.1) LEMMA. Se X è una varietà di Stein, allora

$$H^r(X, \mathcal{H}) \simeq H^{r+1}(X, C) \qquad [r \geq 1].$$

(1.2) OSSERVAZIONE. Analogamente, sulle varietà di Stein, si trova

$$H_c^r(X, \mathcal{H}) = 0 \qquad [1 \leq r < n = \dim_C X].$$

(Questi risultati si possono far discendere anche dalle risoluzioni del teorema (2.1) del § 2, che, sulle varietà di Stein sono tutte acicliche e danno quindi gli isomorfismi di De Rham:

$$H^{p+q}(X, \mathcal{H}) \simeq V^{p,q} \simeq H^{p+q+1}(X, C)$$

$$H_c^{p+q}(X, \mathcal{H}) \simeq V_c^{p,q} \simeq H_c^{p+q}(X, \mathcal{O}) = 0).$$

Nei prossimi n.i ci occorrerà sapere la finitezza di $H^r(X, \mathcal{H})$ su varietà compatte e pseudoconvesse; precisamente ci servirà il

(1.4) LEMMA. A) Su ogni varietà compatta X si ha:

$$\dim_C H^r(X, \mathcal{H}) < +\infty$$

per $r \geq 1$;

B) su ogni varietà fortemente k-pseudoconvessa si ha:

$$\dim_C H^r(X, \mathcal{H}) < +\infty$$

per $r \geq k$,

la cui dimostrazione può essere fatta ricalcando [4] e [2]. (Infatti il lemma (1.1) consente di utilizzare il teorema di Leray sui ricoprimenti aciclici, e inoltre lo spazio $A_{\partial\bar{\partial}}(U)$ delle funzioni pluriarmoniche su un aperto U di C^n, con la topologia della convergenza uniforme sui compatti, è uno spazio di Montel completo).

2. Caso delle varietà compatte.

(2.1) TEOREMA. *Su ogni varietà compatta si ha*:

A) $\qquad \dim_C V^{p,q} < +\infty, \qquad$ *per* $\; p + q \geq 1$

B) $\qquad \dim_C A^{p,q} < +\infty, \qquad$ *per* $\; p, q \geq 1.$

DIM. Fissiamoci, per semplicità, su una coppia (p, q) di indici, che rientri nel caso C) del teorema (2.1) del § 2.

È ben noto (vedi: [6], pag. 180) che esiste una successione spettrale $\{E_r\}_{r \in N}$ tale che:

$$1^0) \qquad E_2^{ij} = \frac{\operatorname{Ker}(H^j(X, \mathcal{L}^i) \to H^j(X, \mathcal{L}^{i+1}))}{\operatorname{Im}(H^j(X, \mathcal{L}^{i-1}) \to H^j(X, \mathcal{L}^i))}$$

$$2^0) \qquad E_\infty^{ij} = H^{i+j}(X, \mathcal{H}) \cap \Sigma_i / H^{i+j}(X, \mathcal{H}) \cap \Sigma_{i+1},$$

essendo $\{\Sigma_\nu\}_{\nu \in N}$ una opportuna filtrazione (decrescente) dell'omologia di X a valori in $\mathcal{H}$.

Osserviamo ora che i gruppi che compaiono in A), B), sono esattamente i termini $E_2^{i,0}$ della successione spettrale scritta sopra, per $i \geq p + q$, onde la nostra tesi sarà provata se faremo vedere (più in generale) che

$$\dim_C E_2^{i,0} < +\infty.$$

Evidentemente siamo nei casi in cui «la filtrazione è positiva» e «la graduazione è inferiore alla filtrazione»; il teorema di Leray dà allora le successioni esatte di spazi vettoriali ed omomorfismi:

$$0 \to \ker(E_2^{i-2,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{i,0}) \to E_2^{i-2,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{i,0} \to E_3^{i,0} \to 0$$

$$0 \to \ker(E_3^{i-3,2} \xrightarrow{d_3} E_3^{i,0}) \to E_3^{i-3,2} \xrightarrow{d_3} E_3^{i,0} \to E_4^{i,0} \to 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0 \to \ker(E_{r-1}^{i-r+1,r-2} \xrightarrow{d_{r-1}} E_{r-1}^{i,0}) \to E_{r-1}^{i-r+1,r-2} \xrightarrow{d_{r-1}} E_{r-1}^{i,0} \to E_r^{i,0} \to 0.$$

Siccome, per il teorema di piattezza di Malgrange, $E_s^{u,v} = 0$ per $v \geq n + 1$ $[n = \dim_C X]$, si avrà, per r sufficientemente elevato, $E_r^{i,0} = E_\infty^{i,0}$; il punto 2^0) scritto dianzi e il lemma (1.4) dicono allora che $\dim_C E_r^{i,0} < +\infty$.

D'altra parte, per il teorema di finitezza di Cartan-Serre, è anche $\dim_C E_2^{u,v} < +\infty$, per $v \geq 1$.

Pertanto, dall'ultima delle successioni esatte precedenti si ottiene (sandwich tra omomorfismi) (1):

$$\dim_C E_{r-1}^{i,0} < +\infty,$$

(1) Il «Sandwich tra omomorfismi» dice che, se abbiamo una successione esatta (finita) di spazi vettoriali (su K) ed omomorfismi:

$$0 \to A_1 \to \ldots \to A_{i-1} \to A_i \to A_{i+1} \to \ldots \to A_N \to 0,$$

e se è $\dim_K A_j < +\infty$, per ogni $j \neq i$, allora è anche $\dim_K A_i < +\infty$.

e, risalendo, si ottiene successivamente:

$$\dim_C E_{r-2}^{i,0} < +\infty$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\dim_C E_3^{i,0} < +\infty$$

$$\dim_C E_2^{i,0} < +\infty.$$

3. Caso delle varietà k-convesse.

Ora i termini $E_2^{i,j}$ $[j \geq 1]$ della successione spettrale che compare nella dimostrazione del teorema (2.1) non sono più tutti finiti; sono finiti però i termini $E_2^{i,j}$ con $k \leq j \leq n$, per il teorema di Andreotti-Grauert, e, al solito, sono nulli gli $E_2^{i,j}$ con $j > n$, per il teorema di Malgrange.

Se allora è $i > k + \sup(p, q)$ ((p, q) come nella dimostrazione del teor. (2.1)), le successioni esatte:

$$0 \to \ker(E_2^{i-2,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{i,0}) \to E_2^{i-2,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{i,0} \to E_3^{i,0} \to 0$$

$$0 \to \ker(E_3^{i-3,2} \xrightarrow{d_3} E_3^{i,0}) \to E_3^{i-3,2} \xrightarrow{d_3} E_3^{i,0} \to E_4^{i,0} \to 0$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$0 \to \ker(E_{r-1}^{i-r+1,r-2} \xrightarrow{d_{r-1}} E_{r-1}^{i,0}) \to E_{r-1}^{i-r+1,r-2} \xrightarrow{d_{r-1}} E_{r-1}^{i,0} \to E_\infty^{i,0} \to 0$$

sono tali che i termini $E_t^{i-t,t-1}$ contenuti in esse sono o nulli $(2 \leq t \leq k)$ o finiti $(k+1 \leq t \leq n+1)$.

Da esse si deduce quindi ancora che

$$\dim_C E_2^{i,0} < +\infty$$

se $i > k + \sup(p, q)$.

Abbiamo così provato il

(3.1) TEOREMA. *Su ogni varietà fortemente k-pseudoconvessa si ha:*

A) $\dim_C V^{p,q} < +\infty$, per $p, q > k$

B) $\dim_C \Lambda^{p,q} < +\infty$, per $p, q > k$.

4. Un'osservazione.

Se siamo nel caso in cui $p + q + 2 > n = \dim_C X$, la risoluzione del teorema (2.3) del § 1 ci dà delle informazioni sui gruppi di coomologia $H^r(X, \mathcal{H}^{p,q})$, dove con $\mathcal{H}^{p,q}$ indichiamo il fascio dei germi di forme (di bigrado (p, q)) pluriarmoniche (i.e. $\partial\bar{\partial}$-chiuse). Precisamente si ottiene:

$$H^r(X, \mathcal{H}^{p,q}) \simeq H^{p+q+r+1}(X, C) \qquad [r \geq 1] \tag{4.1}$$

sulle varietà di Stein;

$$\dim_C H^r(X, \mathcal{H}^{p,q}) < +\infty \qquad [r \geq 1] \tag{4.2}$$

sulle varietà compatte;

$$\dim_C H^r(X, \mathcal{H}^{p,q}) < +\infty \qquad [r \geq 1] \tag{4.3}$$

sulle varietà fortemente k-pseudoconvesse, se è inoltre $p, q > k$.

§ 4. TEOREMA DI DUALITÀ.

1. Duale di $V^{p,q}$.

(1.1) LEMMA. Siano: E, F due spazi di Fréchet; $T: E \to F$ una applicazione lineare continua e surgettiva.

Se $\{f_n\}$ è una successione convergente a 0 in F, esistono una successione $\{e_n\}$ in E ed un elemento $e \in \operatorname{Ker} T$, tali che $T(e_n) = f_n$ e che $e_n \to e$ in E.

DIM. Conseguenza immediata del teorema dell'applicazione aperta.

(1.2) PROPOSIZIONE. Supponiamo che $V^{p,q}[p, q \geq 1]$ sia dotato di una struttura di Fréchet. Allora il suo duale (topologico) è dato da:

$$(V^{p,q})' \simeq \frac{\ker\left(K_c^{n-p,n-q} \xrightarrow{d} K_c^{n-p+1,n-q} \oplus K_c^{n-p,n-q+1}\right)}{\partial\bar{\partial} K_c^{n-p-1,n-q-1}}. \tag{*}$$

DIM. Se $\{T_c^{n-p\,n-q}\}$ è una classe appartenente al 2^0 membro della (*), sia $L_{\{T\}}$ il funzionale lineare definito su $V^{p,q}$ in questo modo:

$$L_{\{T\}}(\{a^{pq}\}) = \langle a^{pq}, T_c^{n-p,n-q} \rangle .$$

La definizione è ben posta, cioè dipende solo dalle classi $\{a^{pq}\}$ e $\{T_c^{n-p,n-q}\}$; inoltre, se $\{T_c^{n-p,n-q}\} = \{0\}$, il funzionale corrispondente $L_{\{0\}}$ è il funzionale nullo.

Basta pertanto dimostrare che:

(a) $L_{\{T\}}$ è un funz. lin. continuo su V^{pq}

(b) ogni funz. lin. continuo L su V^{pq} è del tipo $L = L_{\{T\}}$.

La prima affermazione è conseguenza del Lemma premesso; infatti se

$$\{a^{pq}\}_\nu \longrightarrow \{0\} \quad \text{in} \quad V^{p,q},$$

si avrà che

$$a_\nu^{pq} \longrightarrow \partial a^{p-1,q} + \bar{\partial} a^{p,q-1} \begin{bmatrix} a^{p-1,q} \in A^{p-1,q} \\ a^{p,q-1} \in A^{p,q-1} \end{bmatrix}$$

nella topologia di $A^{p,q}$, dunque si avrà enche

$$\langle a_\nu^{pq}, T_c^{n-p,n-q} \rangle \longrightarrow \langle \partial a^{p-1,q} + \bar{\partial} a^{p,q-1}, T_c^{n-p,n-q} \rangle = 0.$$

Quanto alla seconda affermazione, si ragiona così.

Sia L un funzionale lineare continuo su $V^{p,q}$; siamo allora nella situazione:

$$\operatorname{Ker}(A^{p,q} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} A^{p+1,q+1}) \xrightarrow{\pi} \frac{\operatorname{Ker}(A^{pq} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} A^{p+1,q+1})}{\partial A^{p-1,q} + \bar{\partial} A^{p,q-1}} \xrightarrow{L} C,$$

onde possiamo definire un funzionale lineare continuo $\tilde{L}$ su

$$\operatorname{Ker}(A^{pq} \xrightarrow{\partial\bar{\partial}} A^{p+1,q+1}),$$

ponendo:

$$\tilde{L} = L \cdot \pi.$$

Osservazione:

$$\tilde{L}\,|_{(\partial A^{p-1,q} + \bar{\partial} A^{p,q-1})} = 0.$$

Per il teorema di Hahn-Banach, possiamo prolungare $\widetilde{L}$ ad un funzionale lineare continuo su tutto lo spazio A^{pq}, e questo prolungamento sarà una certa corrente a supporto compatto

$$T_c^{n-p,\, n-q}\,.$$

Tale corrente dovrà coincidere con L sul sottospazio

$\mathrm{Ker}\,(A^{pq} \xrightarrow{\partial\,\bar\partial} A^{p+1,\, q+1})$ e in particolare essere nulla su $\partial\, A^{p-1,\, q} + \bar\partial\, A^{p,\, q-1}$, ossia dovremo avere :

$$\langle\, \partial\, a^{p-1,\, q} + \bar\partial\, a^{p,\, q-1}\,,\, T_c^{n-p,\, n-q}\,\rangle = 0,\ \forall \begin{cases} a^{p-1,\, q} \in A^{p-1,\, q} \\ a^{p,\, q-1} \in A^{p,\, q-1}\,. \end{cases}$$

Questo dice che $\begin{cases} \partial\, T_c^{n-p,\, n-q} = 0 \\ \bar\partial\, T_c^{n-p,\, n-q} = 0 \end{cases}$

ossia che $T_c^{n-p,\, n-q} \in \mathrm{Ker}\,(K_c^{n-p,\, n-q} \xrightarrow{d} K_c^{n-p+1,\, n-q} \oplus K_c^{n-p,\, n-q+1})$.

Si osservi infine che ogni elemento della classe di equivalenza

$$T_c^{n-p,\, n-q} + \partial\,\bar\partial\, K_c^{n-p-1,\, n-q-1}$$

(che è ancora un funzionale lineare continuo su $A^{p,\, q}$ e nullo su $\partial\, A^{p-1,\, q} + \bar\partial\, A^{p,\, q-1}$) è tale che la sua restrizione al sottospazio

$$\mathrm{Ker}\,(A^{p,\, q} \xrightarrow{\partial\,\bar\partial} A^{p+1,\, q+1})$$

coincide anch'essa con $\widetilde{L}$.

Poniamo allora :

$$L_{\{T\}} = T_c^{n-p,\, n-q} + \partial\,\bar\partial\, K_c^{n-p-1,\, n-q-1}\,.$$

OSSERVAZIONE. L'ipotesi della proposizione (1.2) è soddisfatta, ad esempio, nei seguenti casi :

α) *se* X *è di Stein* ($\partial\, A^{p-1,\, q} = \mathrm{Ker}\,(A^{p,\, q} \xrightarrow{\partial} A^{p+1,\, q})$ e $\bar\partial\, A^{p,\, q-1} = \mathrm{Ker}\,(A^{p,\, q} \xrightarrow{\bar\partial} A^{p,\, q-1})$ sono sottospazi chiusi di $A^{p,\, q}$)

β) *X è compatta* ($\dim_C V^{p,q} < +\infty$)

γ) *se X è fortemente* k-*pseudoconvessa e se $p, q > k$* ($\dim_C V^{p,q} < +\infty$).

2. Caso delle varietà compatte.

Se la varietà X è compatta, si ha semplicemente:

$$(**) \qquad (V^{p,q})' \simeq \frac{\operatorname{Ker}(K^{n-p\,n-q} \xrightarrow{d} K^{n-p+1,\,n-q} \oplus K^{n-p,\,n-q+1})}{\partial\,\bar\partial\, K^{n-p-1,\,n-q-1}}.$$

Ora si ripeta la dimostrazione del teor. (2.1) del § 3, sostituendo alla risoluzione con le forme C^∞ la risoluzione con le correnti (teorema (3.1) del § 2); si trovano due fatti:

1°) il 2° membro di (**) ha dimensione finita (e questo è già nella (**))

2°) il 2° membro di (**) compare nelle successioni esatte della dimostrozione del teor. (2.1) esattamente al posto di $\Lambda^{n-p,\,n-q}$.

Se ne deduce la seguente dualità [2]:

(2.1) TEOREMA. *Su ogni varietà compatta, si ha:*

A) $$(V^{p,q})' \simeq \Lambda^{n-p,\,n-q} \qquad [p+q \geq 1]$$

B) $$(\Lambda^{p,q})' \simeq V^{n-p,\,n-q} \qquad [p, q \geq 1].$$

§ 5. L'OPERATORE $\mathcal{D}$.

1. L'operatore $\mathcal{D}$.

Sia X una varietà complessa compatta, su cui fissiamo una volta per tutte una metrica hermitiana ds^2 con forma fondamentale

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} h_{\alpha\beta}\, dz_\alpha \wedge d\bar z_\beta \qquad [n = \dim_C X].$$

Di conseguenza, ogni $A^{r,s}$ resta munito di una struttura prehilbertiana, e così pure lo spazio $A = \oplus A^{r,s}$ di tutte le forme differenziali.

---

[2] Infatti $\Lambda^{n-p,\,n-q}$ e $\dfrac{\operatorname{Ker}(K^{n-p,\,n-q} \xrightarrow{d} K^{n-p+1,\,n-q} \oplus K^{n-p,\,n-q+1})}{\partial\,\bar\partial\, K^{n-p-1,\,n-q-1}}$ hanno la stessa dimensione finita, e l'iniezione naturale del primo spazio nel secondo è, in realtà, un isomorfismo.

Sia $\mathcal{D}: A \longrightarrow A$ l'operatore così definito:

$$\mathcal{D} = \vartheta\bar{\vartheta}\,\partial\bar{\partial} + \partial\bar{\partial}\,\vartheta\bar{\vartheta} + \partial\vartheta\,\bar{\partial}\bar{\vartheta} + \bar{\partial}\bar{\vartheta}\,\partial\vartheta + \partial\bar{\vartheta} + \bar{\partial}\vartheta\,;$$

si tratta di un operatore locale, le cui proprietà essenziali riportiamo qui sotto:

(1.1) $\mathcal{D}$ è biomogeneo di bigrado $(0, 0)$ (i. e. applica $A^{r,s}$ in $A^{r,s}$)

(1.2) $\mathcal{D}$ è autoaggiunto (i. e. $\langle \mathcal{D}\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \mathcal{D}\psi \rangle$)

(1.3) $\mathcal{D}\varphi = 0 \iff \varphi \in F^{r,s} = \{\alpha \in A^{r,s} \mid \partial\bar{\partial}\alpha = \vartheta\alpha = \bar{\vartheta}\alpha = 0\}$
per ogni $\varphi \in A^{r,s}$

(prova:

$$\langle \mathcal{D}\varphi, \varphi \rangle = \| \partial\bar{\partial}\varphi \|^2 + \| \vartheta\bar{\vartheta}\varphi \|^2 + \| \bar{\partial}\bar{\vartheta}\varphi \|^2 + \| \partial\vartheta\varphi \|^2 + \| \bar{\vartheta}\varphi \|^2 + \| \vartheta\varphi \|^2,$$

da cui segue: $\mathcal{D}\varphi = 0 \Longrightarrow \partial\bar{\partial}\varphi = \vartheta\varphi = \bar{\vartheta}\varphi = 0$. L'implicazione inversa è evidente).

(1.4) $\mathcal{D}$ è un operatore ellittico

(1.5) Se la metrica ds^2 è kähleriana (i. e. $d\omega = 0$), allora:

$$\mathcal{D} = \frac{1}{4}\Delta^2 + \partial\bar{\vartheta} + \bar{\partial}\vartheta.$$

Dalla teoria degli operatori ellittici si deduce, in conformità, che $\operatorname{Ker}\mathcal{D}$, ossia lo spazio $F^{r,s}$, ha dimensione finita, onde si può considerare l'operatore di proiezione ortogonale $\mathbf{F}: A^{r,s} \longrightarrow F^{r,s}$.

Esiste inoltre un operatore di Green $\mathbf{G}: A^{r,s} \longrightarrow (F^{r,s})^{\perp}$, legato a $\mathcal{D}$ e ad $\mathbf{F}$ dalla relazione fondamentale:

(1.6) $$\mathcal{D}\mathbf{G} = 1 - \mathbf{F},$$

dove 1 indica l'operatore identico.

Segue di qui il teorema di decomposizione:

(1.7) TEOREMA. $(\partial A^{r-1,s} + \bar{\partial} A^{r,s-1}) \oplus_{\perp} F^{r,s} = \Psi^{r,s} = \{\alpha \in A^{r,s} \mid \partial\bar{\partial}\alpha = 0\}$.

DIM. Sia φ un elemento di $\Psi^{r,s}$; per (1.6) si ha:

$$\varphi = \mathcal{D}\,\mathbf{G}\,\varphi + \mathbf{F}\varphi = \partial\,\bar\partial\,\vartheta\,\bar\vartheta\,\mathbf{G}\varphi + \vartheta\,\bar\vartheta\,\partial\,\bar\partial\,\mathbf{G}\varphi + \partial\vartheta\,\bar\partial\,\bar\vartheta\,\mathbf{G}\varphi + \bar\partial\,\bar\vartheta\,\partial\vartheta\,\mathbf{G}\varphi +$$

$$+ \partial\,\bar\vartheta\,\mathbf{G}\varphi + \bar\partial\,\vartheta\,\mathbf{G}\varphi + \mathbf{F}\varphi = \vartheta\,\bar\vartheta\,\alpha + \partial\lambda + \bar\partial\,\mu + f.$$

Ne segue:

$$\vartheta\,\bar\vartheta\,\alpha = \varphi - \partial\lambda - \bar\partial\,\mu - f$$

dove:

1⁰) $\varphi \in \Psi^{r,s}$ per ipotesi

2⁰) $\partial\lambda, \bar\partial\mu \in \Psi^{r,s}$ perchè $\partial^2 = \bar\partial^2 = 0$

3⁰) $f \in \Psi^{r,s}$ perchè $F^{r,s} \subset \Psi^{r,s}$.

Pertanto $\vartheta\bar\vartheta\alpha$ sarà una certa $\psi \in \Psi^{r,s}$, ma allora:

$$\| \vartheta\,\bar\vartheta\,\alpha \|^2 = \langle \vartheta\,\bar\vartheta\,\alpha, \psi \rangle = \langle \alpha, \partial\,\bar\partial\,\psi \rangle = 0,$$

e quindi $\vartheta\,\bar\vartheta\alpha = 0$, quando $\varphi \in \Psi^{r,s}$.

Abbiamo provato così che ogni $\varphi \in \Psi^{r,s}$ si scrive:

$$\varphi = \partial\lambda + \bar\partial\,\mu + f.$$

Supponiamo ora che una certa $\partial\alpha^{r-1,s} + \bar\partial\,\alpha^{r,s-1}$ appartenga ad $F^{r,s}$; si ha allora:

$$\| \partial\alpha^{r-1,s} + \bar\partial\,\alpha^{r,s-1} \|^2 = \langle \partial\alpha^{r-1,s} + \bar\partial\,\alpha^{r,s-1}, \partial\alpha^{r-1,s} + \bar\partial\,\alpha^{r,s-1} \rangle =$$

$$= \langle \alpha^{r-1,s}, \bar\vartheta\,(\partial\alpha^{r-1,s} + \bar\partial\,\alpha^{r,s-1}) \rangle + \langle \alpha^{r,s-1}, \vartheta\,(\partial\alpha^{r-1,s} + \bar\partial\,\alpha^{r,s-1}) \rangle = 0$$

ossia:

$$\partial\alpha^{r-1,s} + \bar\partial\,\alpha^{r,s-1} = 0.$$

(1.8) COROLLARIO.

$$F^{r,s} \simeq \frac{\Psi^{r,s}}{\partial A^{r+1,s} + \bar\partial A^{r,s-1}} = \frac{\mathrm{Ker}\,(A^{r,s} \xrightarrow{\partial\bar\partial} A^{r+1,s+1})}{\partial A^{r-1,s} + \bar\partial A^{r,s-1}} = V^{r,s}.$$

(1.9) COROLLARIO. Su ogni varietà compatta (su cui sia stata fissata una metrica hermitiana ds^2), si ha:

$$\dim_C V^{r,s} < +\infty.$$

Ritroviamo così, con metodi di teoria del potenziale, il risultato già stabilito nel teorema (2.1) del § 3.

2. Caratterizzazione dei gruppi di Aeppli.

Se X è kähleriana compatta, allora

$$f \in F^{r,s} \Longleftrightarrow \Delta f = 0.$$

(Prova:

$$\langle \mathcal{D} f, f \rangle = 0 \Longrightarrow \| \Delta f \|^2 + \| \bar{\vartheta} f \|^2 + \| \vartheta f \|^2 = 0,$$

per quanto visto in (1.5). Viceversa:

$$\Delta f = 0 \Longrightarrow \Box f = \bar{\Box} f = 0 \Longrightarrow \partial f = \bar{\partial} f = \bar{\vartheta} f = \vartheta f = 0)$$

Per metriche kähleriane si ha dunque il seguente fondamentale

(2.1) TEOREMA. $\qquad V^{r,s} \simeq F^{r,s} \simeq H^{r,s}$ (3)

NOTA.

Scambiando, nella definizione dell'operatore $\mathcal{D}$, rispettivamente ∂ con $\bar{\vartheta}$ e $\bar{\partial}$ con ϑ, si ottiene un operatore $\mathcal{D}_*$ che gode proprietà del tutto analoghe a quelle del $\mathcal{D}$; precisamente si vede che:

$$\operatorname{Ker}(A^{r,s} \xrightarrow{\mathcal{D}_*} A^{r,s}) \simeq F_*^{r,s} = \{\alpha \in A^{r,s} \mid \bar{\vartheta}\, \vartheta \alpha = \partial \alpha = \bar{\partial} \alpha = 0\},$$

e che:

$$\operatorname{Ker}(A^{r,s} \xrightarrow{d} A^{r+1,s} \oplus A^{r,s+1}) \simeq (\partial \bar{\partial}\, A^{r-1,s-1}) \oplus_{\perp} F_*^{r,s}.$$

Pertanto è $A^{r,s} \simeq F_*^{r,s}$.

Nel caso kähleriano si ha ancora $F_*^{r,s} \simeq H^{r,s}$, e quindi si caratterizzano compiutamente anche i gruppi di Aeppli $A^{r,s}$.

Istituto Matematico
Univerità di Pisa

(3) Con $H^{r,s}$ si indica lo spazio delle (r,s)-forme armoniche.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. AEPPLI: *On the cohomology structure of Stein manifolds.* Proc. of the conf. on Complex Analysis. Minneapolis (1964).

[2] A. ANDREOTTI et H. GRAUERT: *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes.* Bull. Soc. Math. France 90 (1962).

[3] N. BOURBAKI: *Espaces véctoriels topologiques.* Paris: Hermann (1964).

[4] H. CARTAN et J. P. SERRE: *Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes.* C. R. Acad. Sci 237 (1953)

[5] J. FRENKEL et F. NORGUET: *Sur la cohomologie à coefficients complexes des variétés de Stein.* C. R. Acad. Sci. 256 (1963).

[6] R. GODEMENT: *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Paris: Hermann (1958).

[7] J. P. SERRE: *Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein.* C.B.R.M., Liege: G. Thone, et Paris: Masson & Cie (1953).