Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

J. Chabrowski

Sur une mesure associée à l'équation différentielle aux dérivées partielles du type parabolique

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 1 (1969), p. 99-113

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_1_99_0>

SUR UNE MESURE ASSOCIÉE A L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE AUX DERIVÉES PARTIELLES DU TYPE PARABOLIQUE

par J. CHABROWSKI (Katowice)

Dans la théorie des problèmes aux limites de Dirichlet et de Fourier on peut introduire grâce au théorème de F. Riesz sur la répresentation d'une fonctionnelle linéaire la notion de mesures harmonique et parabolique (voir Brelot [2] et [3], Bauer [1], Doob [4], Hunt [7]). Récemment M. Krzyżański a introduit la mesure parabolique par rapport au problème de Cauchy pour les équations paraboliques (voir [9]). Dans la note présente nous allons considérer la mesure associée aux solutions de l'équation parabolique définies dans tout l'espace-temps.

§ 1. Théorèmes auxiliaires.

Soit E_{n+1} l'espace-temps de points $(t, x) = (t, x_1, \dots, x_n)$ et

$$(1.1) \qquad Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x)\, u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(t, x)\, u_{x_i} + c(t, x)\, u - u_t = f(t, x)$$

l'équation parabolique en question.

On suppose que

I. Les coefficients et la fonction $f(t, x)$ sont définis dans E_{n+1} et il existe des constantes positives A, B, m telles que

$$|a_{ij}(t, x)| \leq A, \quad |b_i(t, x)| \leq B, \quad c(t, x) \leq -m \quad i, j = 1, \dots, n$$

pour $(t, x) \in E_{n+1}$.

Pervenuto alla Redazione il 14 Giugno 1968.

II. La forme quadratique $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j$ est définie positive.

Les solutions qui vont être étudiées appartiennent à une classe $E(M,k)$ de fonctions non bornées, et une fonction $\Psi(t,x)$ est dite de classe $E(M,k)$ dans l'espace-temps E_{n+1} (M, k étant des constantes positives) lorsque

$$|\Psi(t,x)| \leq M \exp\left\{k\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i| + |t|\right)\right\}$$

pour $(t,x) \in E_{n+1}$.

D'abord nous établissons quelques théorèmes qui interviendront dans la suite.

Soit

$$H(t,x,\nu) = \prod_{i=1}^{n} \cosh \nu x_i \cdot \cosh \nu t.$$

Il est évident qu'il existe un nombre positif k_0 tel que

$$(1.2)\quad LH = H\left(\nu^2 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, tgh\, \nu x_i \cdot tgh\, \nu x_j + \nu \sum_{i=1}^{n} b_i\, tgh\, \nu x_i + c - \nu\, tgh\, \nu t\right) \leq -\frac{m}{2} H$$

pour $(t,x) \in E_{n+1}$ et $0 < \nu \leq k_0$.

THÉORÈME 1. Supposons que les hypothèses I et II soient satisfaites. Soit $u(t,x)$ une fonction définie dans E_{n+1} de classe $E(M,k) \cap C^1$ (où $k < k_0$) et possèdant des dérivées partielles du second ordre par rapport aux variables $x_1, \dots, x_n$ continues dans E_{n+1} et telle que

$$Lu \geq 0 \quad (Lu \leq 0)$$

dans E_{n+1}. Avec ces hypothèses l'inégalité

$$(1.3)\qquad u(t,x), \leq 0 \quad (u(t,x) \geq 0)$$

a lieu dans E_{n+1}.

DÉMONSTRATION. Nous montrerons seulement la première partie du théorème. Dans ce but nous posons

$$u(t,x) = w(t,x)\, H(t,x,\nu),$$

où $k < \nu < k_0$. L'inégalité (1.3) est équivalente à l'inégalité

$$(1.4)\qquad w(t,x) \leq 0$$

pour $(t, x) \in E_{n+1}$. Il suffit donc de démontrer (1.4). Soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Il est aisé de voir qu'on peut lui faire correspondre un nombre R_0 tel que pour $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + t^2 \geq R_0$ on ait

$$w(t, x) \leq \varepsilon. \tag{1.5}$$

Nous montrerons que l'inégalité (1.5) est verifiée dans E_{n+1}. Dans le cas contraire il existe un point (t_0, x_0) tel que

$$\varepsilon < w(t_0, x_0) = \max_{K_{R_0}} w(t, x),$$

où $K_{R_0} = \left\{(t, x) ; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + t^2 \leq R_0\right\}$. D'après l'inégalité (1.5) (t_0, x_0) est un point intérieur de la boule K_{R_0}, donc

$$w_{x_i}(t_0, x_0) = 0 \quad i = 1, \dots, n, \; w_t(t_0, x_0) = 0, \quad \sum_{i, j=1}^{n} w_{x_i x_j}(t_0, x_0)\, \lambda_i \lambda_j \leq 0 \tag{1.6}$$

pour tout système $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. D'autre part, on a

$$0 \leq Lu = LwH = H\left(\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}\, w_{x_i} w_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\, w_{x_i}\right) + \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}\, (z_{x_i} H_{x_j} + z_{x_j} H_{x_i}) + w\, LH - H w_t$$

Selon (1.2) et (1.6) le second membre de cette inégalité est négatif au point (t_0, x_0), ce qui est impossible.

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème 1.

COROLLAIRE 1. Sous les hypothèses I et II l'équation (1.1) admet dans la classe $E(M, k)$ $(k < k_0)$ au plus une solution.

En modifiant un peu la démonstration du théorème 1 on parvient au

THÉORÈME 2. Supposons que les hypothèses I et II soient satisfaites pour $(t, x) \in S_i = \{(t, x) ; x_i > \overset{\circ}{x}_i\}$ ($\overset{\circ}{x}_i$ étant un nombre fixé). Soit $u(t, x)$ une fonction de classe $E(M, k)$ dans $\overline{S_i}$ possèdant des dérivées partielles u_{x_i}, $u_{x_i x_j}$, $u_t (i, j = 1, \dots, n)$ continues dans S_i et telle que

$$u\big|_{x_i = \overset{\circ}{x}_i} \geq 0 \quad (u\big|_{x_i = \overset{\circ}{x}_j} \leq 0), \quad Lu \leq 0 \; (Lu \geq 0)$$

dans S_i. Avec ces hypothèses l'inégalité

$$u(t, x) \geq 0 \quad (u(t, x) \leq 0)$$

a lieu dans $\overline{S}_i$.

REMARQUE 1. Lè théorème 2 reste valable lorsque nous remplaçons l'ensemble S_i par l'ensemble $P_i = \{(t, x) ; x_i < \overset{\circ}{x}_i\}$ (resp. $P = \{(t, x) ; t < t_0\}$). Dans ce cas l'inégalité initiale est donnée sur $x_i = \overset{\circ}{x}_i$, $t = t_0$ respectivement.

Avant de passer aux autres théorèmes, il est nécessaire d'introduire une hypothèses supplémentaire sur l'équation (1.1).

Considérons un domaine borné D découpé à l'intérieur de la couche $(t_1 \leq t \leq t_2) \times E_n$ (E_n étant l'espace euclidien à n dimensions) par une surface ζ orientée dans le temps (c'ert-à-dire, non tangente nulle part à aucnne caractéristique de l'équation (1.1)). Soit Γ' la partie de la frontière $Fr(D)$ située sur le plan $t = t_1$. Posons $\sigma = \zeta \cap Fr(D)$ et $\Sigma = \Gamma \cup \sigma$ (la frontière parabolique du domaine D).

Le premier problème de Fourier relatif à l'équation (1.1) et au domaine D consiste à chercher une solution $u(t, x)$ de l'équation (1.1), régulière dans $\overline{D}$ (c'est-à-dire continue dans $\overline{D}$ et admettant des dérivées $u_{x_i}, u_{x_i x_j}, u_t$ $(i,j=1,...,n)$ continues dans l'ensemble $\overline{D} - \Sigma$) et satisfaisant à la condition

$$u(t, x) = \Phi(t, x) \tag{1.7}$$

pour $(t, x) \in \Sigma$, où $\Phi(t, x)$ est une fonction continue dans Σ.

Le domaine D est dit régulièr par rapport au problème de Fourier pour l'équation (1.1) avec la condition (1.7) lorsque ce problème a une solution pour toute fonction $\Phi(t, x)$ continue sur Σ et pour toute fonction $f(t, x)$ hölderienne par rapport aux variables (t, x) dans $\overline{D}$.

L'hypothèse supplémentaire sur l'équation (1.1) est la suivante.

III. L'espace-temps E_{n+1} est supposée être une somme d'une suite croissante de domaines D_p dont la distance de la frontière parabolique Σ_p à l'origine des cordonnées tend vers l'infini lorsque $p \to \infty$, chaque domaine D_p étant régulier par rapport au premier problème de Fourier pour l'équation (1.1).

On a le théorème suivant

THÉORÈME 3. Supposons que les hypothèses I, II et III soient satisfaites. Soit $f(t, x)$ une fonction localement hölderienne dans E_{n+1} de classe $E(M, k)$ $(k < k_0)$. Soient $u^p(t, x)$ les solutions de l'équation (1.1) régulières dans D_p (où $p = 1, 2, ...$) et satisfaisant aux conditions $u^p(t, x) = 0$ pour $(t, x) \in \Sigma_p$ (Σ_p étant la frontière parabolique du domaine D_p).

Alors la suite $u^p(t, x)$ converge presque uniformément dans E_{n+1} vers une fonction $u(t, x)$ de classe $E\left(\frac{2^{n+2} M}{m}, \nu\right)$ $(k < \nu < k_0)$, qui est une solution de l'équation (1.1) dans E_{n+1}.

DÉMONSTRATION. Posons

$$u^p(t, x) = v^p(t, x) H(t, x, \nu) \tag{1.8}$$

où $k < \nu < k_0$. Par un calcul simple nous vérifions que la fonction v^p vérifie à l'équation

$$\widetilde{L} v^p = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x) v^p_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{b}_i(t, x) v^p_{x_i} + \widetilde{c}(t, x) v^p - v^p_t = \frac{f(t, x)}{H(t, x, \nu)}$$

dans $\overline{D}_p - \Sigma_p$, où

$$\widetilde{c}(t, x) = \frac{LH(t, x, \nu)}{H(t, x, \nu)} < -\frac{m}{2}$$

$$\widetilde{b}_i(t, x) = \frac{1}{\overline{H}(t, x, \nu)} \sum_{l=1}^{n} (a_{il}(t, x) + a_{li}(t, x)) H_{x_i} + b_i(t, x).$$

Le membre droit de la dernière égalité satisfait à l'inégalité

$$\frac{|f(t, x)|}{H(t, x, \nu)} \leq 2^{n+1} M$$

dans E_{n+1}; il résulte donc du principe d'extremum (voir [5], chap. 2, ou [8], § 1) que

$$|v^p(t, x)| \leq \frac{2^{n+2} M}{m} \tag{1.9}$$

pour $(t, x) \in \overline{D}_p = 1, 2, \ldots$ Pour établir la convergence de la suite $\{u^p(t, x)\}$ introduisons les fonctions auxiliaires

$$u^p(t, x) = \overline{v}^p(t, x) H(t, x, \overline{\nu}), \qquad u^q(t, x) = \overline{v}^q(t, x) H(t, x, \overline{\nu}),$$

où le paramètre $\overline{\nu}$ satisfait à l'inégalité $k < \nu < \overline{\nu} < k_0$. Soit

$$u^{pq} = u^p - u^q, \qquad \overline{v}^{pq} = \overline{v}^p - \overline{v}^q, \qquad p \geq q.$$

D'après (1.8) et (1.9) on a

$$|\overline{v}^{pq}(t, x)| \leq \frac{2^{2n+4} M}{m} \exp[-(\overline{\nu} - \nu) R_q] \tag{1.10}$$

pour $(t, x) \in \Sigma_q$, $R_q = \inf\limits_{\Sigma_q} \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| + |t| \right)$. La fonction $\overline{v}^{pq}$ satisfait à l'équation

$$\widehat{L} \overline{v}^{pq} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t, x) \overline{v}^{pq}_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \widehat{b}_i(t, x) \overline{v}^{pq}_{x_i} + \widehat{c}(t, x) \overline{v}^{pq} - \overline{v}^{pq}_t = 0$$

dans $\bar{D}_q - \Sigma_q$, où

$$\widehat{c}(t, x) = \frac{LH(t, x, \bar{\nu})}{H(t, x, \bar{\nu})} < -\frac{m}{2}.$$

D'après le principe d'extremum on a

$$|\bar{v}^{pq}(t, x)| \leq \frac{2^{2n+4} M}{m} \exp[-(\bar{\nu} - \nu) R_q]$$

dans $\bar{D}_q$. Soit $K_R = \left\{(t, x); \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + t^2 \leq R\right\}$. Choisissons q de façon que $K_R \subset D_q$. D'après la dernière inégalité on a

$$|u^{pq}(t, x)| \leq N_0 \frac{2^{2n+4} M}{m} \exp[-(\bar{\nu} - \nu) R_q]$$

dans K_R, où $N_0 = \sup_{K_R} H(t, x, \bar{\nu})$. Il est clair que la dernière inégalité permet de prouver que la suite $\{u^p(t, x)\}$ converge presque uniformément vers une fonction $u(t, x)$ appartenant à la classe $E\left(\frac{2^{n+2} M}{m}, \nu\right)$. A la fin nous montrons que $u(t, x)$ est la solution de l'équation (1.1). Soit z^q la solution du premier problème de Fourier relatif à l'équation (1.1) dans $\bar{D}_q$ avec la condition limite

$$z^q(t, x) = u(t, x)$$

pour $(t, x) \in \Sigma_q$. Cette solution z^q existe d'après la régularité du domaine D_q. La suite $\{u^p(t, x)\}$ converge vers $u(t, x)$ donc

$$|u^p(t, x) - u(t, x)| < \varepsilon$$

dans Σ_q pour $p \geq p_0$ (p_0 étant un nombre assez grand). Il résult du principe d'extremum que

$$|u^p(t, x) - z^q(t, x)| < \varepsilon$$

dans $\bar{D}_q$. Par passage à la limite on a

$$|u(t, x) - z^q(t, x)| \leq \varepsilon$$

dans $\bar{D}_q$, donc $z^q(t, x) = u(t, x)$ dans $\bar{D}_q$.

Considérons une suite $\{f_p(t, x)\}$ de fonctions localement hölderiennes dans E_{n+1} de classe $E(M, k)(k < k_0)$. Supposons que la suite $\{f_p(t, x)\}$ converge presque unifermément dans E_{n+1} vers une fonction $f_0(t, x)$. Cette fonction est localement hölderienne et de la classe $E(M, k)$ dans E_{n+1}. Les hypothèses I, II et III etant admises, on déduit du théorème 3 l'existence d'une suite $\{u^p(t, x)\}$ de solutions de classe $E\left(\frac{2^{n+2} M}{m}, \nu\right)$ $(k < \nu < k_0)$ dans E_{n+1} des équations

$$Lu^p = f_p(t, x) \qquad p = 0, 1, 2, \dots$$

Nous montrons le

THÉORÈME 4. Sous les hypothèses I, II et III la suite $\{u^p(t, x)\}$ converge presque uniformément dans E_{n+1} vers la fonction $u^0(t, x)$.

DÉMONSTRATION. Soit

$$u^p(t, x) = \tilde{v}^p(t, x)\, H(t, x, \tilde{\nu}),$$

où $k < \nu < \tilde{\nu} < k_0$. Il est évident qu'il existe pour tout $\varepsilon > 0$, un q_0 tel que $(t, x) \in E_{n+1} - \bar{D}_{q_0}$ entraîne $|v^p(t, x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $p = 0, 1, 2, \dots$ On a d'une part

$$|\tilde{v}^p(t, x) - \tilde{v}^0(t, x)| \leq \varepsilon \tag{1.11}$$

pour $(t, x) \in E_{n+1} - \bar{D}_{q_0}$. D'autre part, on a

$$L^*(\tilde{v}^p - \tilde{v}^0) = \sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(\tilde{v}^p - \tilde{v}^0)_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i^*(\tilde{v}^p - \tilde{v}^0)_{x_i} + c^*(\tilde{v}^p - \tilde{v}^0) - (\tilde{v}^p - \tilde{v}^0)_t = \frac{f_p - f_0}{H},$$

où

$$c^*(t, x) = \frac{LH(t, x, \tilde{\nu})}{H(t, x, \tilde{\nu})}$$

pour $(t, x) \in D_{q_0}$. La suite f_p converge uniformément vers f_0 dans D_{q_0}, donc d'après le principe d'extremum nous avons

$$|\tilde{v}^p(t, x) - \tilde{v}_0(t, x)| < \max\left\{2 \sup_{D_{q_0}} \frac{|f_p - f_0|}{H} m^{-1}, \varepsilon\right\} \tag{1.12}$$

dans D_{q_0}. Il résulte de (1.11) et (1.12) que

$$|u^p(t, x) - u^0(t, x) \leq \max\left\{2 \sup_{D_{q_0}} \frac{|f_p - f_0|}{H} m^{-1}, \varepsilon\right\} H(t, x, \tilde{\nu})$$

dans E_{n+1}. On a donc

$$\lim_{p \to \infty} u^p(t, x) = u^0(t, x)$$

presque uniformément dans E_{n+1}, ce qui achève la démonstration.

§ 2. La mesure parabolique.

Nous introduisons maintenant la mesure parabolique. Dans ce but considérons l'espace vectoriel $C_h(E_{n+1})$ de fonctions $f(t, x)$ hölderiennes dans E_{n+1} et à supports bornés. Comme norme nous prenons $\|f\| = \sup_{E_{n+1}} |f(t, x)|$. Supposons que les hypothèses I et II soient satisfaites. Soit $u(t, x)$ une solution de l'équation (1.1) définie dans E_{n+1} de classe $E(M, k)$ $(k < k_0)$. En supposant qu'une telle solution $u(t, x)$ de (1.1) existe, il résulte du corollaire 1 qu'elle est unique. A l'aide du théorème 1 on peut facilement montrer que

$$|u(t, x)| \leq \frac{\|f\|}{m} \tag{2.1}$$

dans E_{n+1}. Ayant fixé un point $(t, x) \in E_{n+1}$ on a, $-u(t, x) = F(f)$ où F est une fonctionnelle linéaire définie sur $C_h(E_{n+1})$. En vertu du théorème 1 $f \geq 0$ entraîne $F(f) \geq 0$; donc $f_1 \leq f_2$ y entraîne $F(f_1) \leq F(f_2)$. La fonctionnelle $F(f)$ est par conséquent non négative et isotone. Il résulte de (2.1) que la norme de la fonctionnelle F satisfait à l'inégalité $\|f\| \leq \dfrac{1}{m}$. En vertu du théorème de Banach-Hahn il existe une extension de la fonctionnelle sur $C(E_{n+1})$ avec la même norme, $C(E_{n+1})$ étant l'espace vectoriel de fontions continues aux supports bornés. Désignons cette extension aussi par $F(f) = -u(t, x)$. Il est évident que $F(f) \geq 0$ si $f \geq 0$. Donc d'après le théorème de F. Riesz il existe une mesure unique $\mu(t, x; E)$ régulière dans la classe des ensembles boreliens $E \subset E_{n+1}$ et telle que

$$u(t, x) = -F(f) = -\int_{E_{n+1}} f(\tau, y)\, \mu(t, x; d\tau\, dy) \tag{2.2}$$

pour toute fonction $f(t, x)$ de l'espace $C(E_{n+1})$ (voir Halmos [6] § 52).

Nous démontrérons que si la fontion $f(t,x)$ est localement hölderienne dans E_{n+1} et satisfait à une condition concernant l'ordre de sa croissance à l'infini, la solution de l'équation (1.1) donnée par la formule (1.1) existe.

Nous allons utiliser la méthode donnée par M. Krzyżański dans [9]. Commençons par démontrer le

THÉORÈME 5. Il résulte des hypothèses I, II et III que pour chaque nombre k $(0 < k < k_0)$ on a

$$\int_{E_{n+1}} \exp \left\{ k \left(\sum_{i=1}^{n} | y_i | + | \tau | \right) \right\} \mu (t, x ; d\tau \, dy) < \infty.$$

DÉMONSTRATION. Soit $\{\varphi_p (t, x)\}$ une suite non décroissante de fonctions continues de classe $E(1, k)$ dans E_{n+1}, à supports bornés et telles que $\lim\limits_{p \to \infty} \varphi_p (t, x) = \exp \left\{ k \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i | + | t | \right) \right\}$. En vertu du théorème 3 la suite $\{u^p (t, x)\}$ des solutions de classe $E\left(\frac{2^{n+2}}{m}, \nu\right)$ $(k < \nu < k_0)$ des équations

$$Lu^p = \varphi_p (t, x) \quad p = 1, 2, \ldots$$

dans E_{n+1} existe, ainsi que la solution $u(t,x)$ de classe $E\left(\frac{2^{n+2}}{m}, \nu\right)$ de l'équation

$$Lu = \exp \left\{ k \left(\sum_{i=1}^{n} | x_i | + | t | \right) \right\}$$

dans E_{n+1}. D'autre part, on a

$$-u^p(t, x) = \int_{E_{n+1}} \varphi_p (\tau, y) \, \mu (t, x ; d\tau, dy) \tag{2.3}$$

pour $(t, x) \in E_{n+1}$, $p = 1, 2, \ldots$ La suite $\{- u^p (t, x)\}$ est monotone non décroissante et on a $-u^p (t, x) \leq -u (t, x)$ pour $(t, x) \in E_{n+1}$ et $p = 1, 2, \ldots$ Par suite le point $(t, x) \in E_{n+1}$ étant fixé, la suite des intégrales formant le membre droit de (2.3) est bornée supérieurement. Il résulte du théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme des suites monotones que

$$\int_{E_{n+1}} \exp \left\{ k \left(\sum_{i=1}^{n} | y_i | + | \tau | \right) \right\} \mu (t, x ; d\tau \, dy) = - \lim_{p \to \infty} u^p (t, x) = - u (t, x)$$

THÉORÈME 6. Supposons que les hypothèses I, II et III soient satisfaites. Soit $f(t, x)$ une fonction localement hölderienne de classe $E(M, k)$ $(k < k_0)$ Soit $u (t, x)$ une solution de l'équation (1,1) de classe $E\left(\frac{2^{n+2} M}{m}, \nu\right)$

$(k < \nu < k_0)$ dans E_{n+1}. On a l'égalité

$$u(t, x) = -\int_{E_{n+1}} f(\tau, y)\, \mu(t, x\,;\, d\tau\, dy) \tag{2.4}$$

pour $(t, x) \in E_{n-1}$.

DÉMONSTRATION. Il est aisé de construire une suite $\{f_p(t, x)\}$ de fonctions localement hölderiennes appartenat à la classe $E(M, k)$ et aux supports bornés et convergeant presque uniformément vers la fonction $f(t, x)$. Soient $u^p(t, x)$ où $p = 1, 2, \dots$ et $u(t, x)$ les solutions de classe $E\left(\frac{2^{n+2} M}{m}, \nu\right)$ des équations

$$Lu^p = f_p(t, x), \quad Lu = f(t, x)$$

respectivement. On a

$$u^p(t, x) = -\int_{E_{n+1}} f_p(\tau, y)\, \mu(t, x\,;\, d\tau\, dy) \tag{2.5}$$

pour $(t, x) \in E_{n+1}$ et

$$\lim_{p \to \infty} u^p(t, x) = u(t, x)$$

pour $(t, x) \in E_{n+1}$. Il résulte du théorème 5 que les functions $f^p(t, x)$ sont bornées par une fonction commune, sommable (intégrable) par rapport à la mesure $\mu(t, x\,;\, E)$, donc d'après le théorème de Lebesgue sur l'intégration terme à terme (voir Halmos [6] § 26) par passage à la limite dans (2.5) nous obtenons l'égalité (2.4).

§ 3. Quelques propriétés de la mesure parabolique.

Nous allons étudier ici quelques propriétés asymptotiques de la mesure parabolique $\mu(t, x\,;\, E)$.

Soit, comme dans le théorème 2,

$$S_i = \{(t, x)\,;\, x_i > a\}, \quad P_i = \{(t, x)\,;\, x_i < a\} \qquad i = 1, \dots, n$$

$$S = \{(t, x)\,;\, t > t_0\}, \quad P = \{(t, x)\,;\, t < t_0\},$$

THÉORÈME 7. Sous les hypothèses I, II et III on a

$$\lim_{t\to-\infty} \mu(t, x ; S) = 0 \tag{3.1}$$

$$\lim_{t\to+\infty} \mu(t, x ; P) = 0 \tag{3.2}$$

$$\lim_{x_i\to-\infty} \mu(t, x ; S_i) = 0 \tag{3.3}$$

$$\lim_{x_i\to+\infty} \mu(t, x ; P_i) = 0 \qquad i = 1, \dots, n. \tag{3.4}$$

DÉMONSTRATION. Nous montrerons seulement la relation (3.2). Désignons par $I_p(t, x)$ la fonction indicatrice (caractéristique) de l'ensemble P. Il est évident qu'il existe une suite $\{\Psi_p(t, x)\}$ de fonctions hölderiennes dans E_{n+1} qui converge vers la fonction $I_p(t, x)$. On peut supposer que $N = \sup_p \{\sup_{E_{n+1}} |\Psi_p(t, x)|\} < \infty$.

Considérons la suite $\{u^p(t, x)\}$ des solutions des équations

$$Lu^p = \Psi_p \qquad p = 1,2, \dots$$

dans E_{n+1}, suite qui existe d'aprés le théorème 3. Il est facile de vérifier à l'aide du théorème 1 que

$$|u^p(t, x)| \leq \frac{N}{m} \qquad p = 1,2, \dots$$

dans E_{n+1}. Posons

$$w^p(t, x) = u^p(t, x) + \frac{N}{m} \exp - \gamma(t - t_1),$$

où $t_1, \gamma > 0$ étant des nombres choisis de façon que supp $\Psi_p \subset \{(t, x) ; t \leq t_1\}$, $0 < \gamma < m$. La fonction $w^p(t, x)$ satisfait aux conditions

$$w^p(t_1, x) \geq 0, \quad Lw^p = (c + \gamma) \frac{N}{m} \exp - \gamma(t - t_1) < 0$$

pour $t \geq t_1$ et $x \in E_n$, $p = 1, 2, \dots$, donc $w^p(t, x) \geq 0$ pour $t \geq t_1$ et $x \in E_n$, c'est-à-dire

$$-\int_{E_{n+1}} \Psi_p(t, x \quad \mu(t, x ; d\tau\, dy) = u^p(t, x) \geq -\frac{N}{m} \exp - \gamma(t - t_1)$$

pour $t \geq t_1$ et $x \in E_n$ $p = 1, 2, \ldots$ Par passage à la limite on a

$$0 \leq \mu(t, x\,;\, P) \leq \frac{N}{m} \exp - \gamma(t - t_1) \tag{3.5}$$

pour $t \geq t_1$ et $x \in E_n$, d'où résulte la formule (3.2). De manière analogue et en s'appuyant sur le théorème 2 et la remarque 1 on peut prouver qu'il existe des constantes $t_2, \overset{\circ}{x}_i, \gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$ telles que

$$\mu(t, x\,;\, S) \leq \frac{N}{m} \exp(t - t_2) \tag{3.6}$$

pour $t \leq t_2$ et $x \in E_n$,

$$\mu(t, x\,;\, P_i) \leq \frac{N}{m} \exp - \gamma_1 (x_i - \overset{\circ}{x}_i) \tag{3.7}$$

pour $x_i \geq \overset{\circ}{x}_i$,

$$\mu(t, x\,;\, S_i) < \frac{N}{m} \exp + \gamma_2 (x_i - \overset{\circ}{x}_i) \qquad i = 1, \ldots, n \tag{3.8}$$

pour $x_i \leq \overset{\circ}{x}_i$. Les constantes γ_1 et γ_2 satisfont aux conditions

$$c - \gamma_1 b_i + \gamma_1^2 a_{ii} < -\frac{m}{2}$$

$$c + \gamma_2 b_i + \gamma_1^2 a_{ii} < -\frac{m}{2}$$

dans E_{n+1}.

REMARQUE 2. Il résulte du théorème 7 que pour chaque ensemble E borelien et borné on a

$$\lim_{t \to \infty} \mu(t, x\,;\, E) = \lim_{t \to -\infty} \mu(t, x\,;\, E) = \lim_{x_i \to \infty} \mu(t, x\,;\, E) = \lim_{x_i \to -\infty} \mu(t, x\,;\, E) = 0$$

$i = 1, \ldots, n$ et de plus $\mu(t, x\,;\, E)$ satisfait aux inégalités analogues aux (3.5), (3.6), (3.7) et (3.8).

THÉORÈME 8. Supposons que les hypothèses I, II et III soient satisfaites et que de plus $-K \leq c(t, x) \leq -m$, $f(t, x) \leq -k_f$ dans E_{n+1} (la fonction $f(t, x)$ est localement hölderienne et appartenant à la classe $E(M, \nu)$, $\nu < k_0$, K, m, k_f sont des constantes positives). Soit $u^K(t, x)$ une solution de l'équation (1.1) dans E_{n+1} de classe $E\left(\frac{2^{n+2} M}{m}, \nu\right)$. Dans ces hypothèses on a :

$$\lim_{K \to 0} u^K(t, x) = \infty$$

pour chaque $(t, x) \in E_{n+1}$.

DÉMONSTRATION. Soit $0 < \alpha < 1$. La fonction $u^K(t, x) - \frac{1}{K^\alpha}$ vérifie l'inégalité suivante

$$L\left(u^K - \frac{1}{K^\alpha}\right) = f - c\frac{1}{K^\alpha} \leq -k_f + K^{1-\alpha} < 0$$

pour $(t, x) \in E_{n+1}$ et K assez petit, d'où en vertu du théorème 1 on a $u^K(t, x) \geq \frac{1}{K^\alpha}$ dans E_{n+1}, donc $\lim_{K \to 0} u^K(t, x) = \infty$.

COROLLAIRE 2. Si nous prenons $f(t, x) = -1$ et par $\mu_K(t, x\,;\,\cdot)$ désignons la mesure parabolique alors $\lim_{K \to 0} \mu_K(t, x\,;\, E_{n+1}) = \infty$.

Entre les coefficients de l'équation (1.1) et la mesure parabolique existe certaine dépendance.

THÉORÈME 9. Supposons que les hypothèses I et II soient satisfaites et que les coefficients soient localement hölderiennes. Alors la mesure parabolique $\mu(t, x\,;\cdot)$ existe et de plus on a les formules suivantes

$$(3.9) \qquad 2\int_{E_{n+1}} a_{ij}(\tau, y)\,\mu(t, x\,;\, d\tau\, dy) = \int_{E_{n+1}} b_j(\tau, y)(x_i - y_i)\,\mu(t, x\,;\, d\tau\, dy) + \int_{E_{n+1}} b_i(\tau, y)(x_j - y_j)\,\mu(t, x; d\tau\, dy) + \int_{E_{n+1}} c(\tau, y)(x_i - y_i)(x_j - y_j)\,\mu(t, x\,;\, d\tau\, dy)$$

$$(3.10) \qquad \int_{E_{n+1}} b_i(\tau, y)\,\mu(t, x\,;\, d\tau\, dy) \int_{E_{n+1}} c(\tau, y)(x_i - y_i)\,\mu(t, x\,;\, d\tau\, dy)$$

$$(3.11) \qquad \int_{E_{n+1}} c(\tau, y)\,\mu(t, x\,;\, d\tau\, dy) = -1$$

$$(3.12) \qquad \int_{E_{n+1}} \mu(t, x\,;\, d\tau\, dy) = \int_{E_{n+1}} c(\tau, y)(\tau - t)\,\mu(t, x\,;\, d\tau\, dy)$$

ou

$$\mu(t, x; E_{n+1}) = \int_{E_{n+1}} c(\tau, y)(\tau - t)\,\mu(t, x; d\tau\, dy) \tag{3.12'}$$

DÉMONSTRATION. Il est évident que l'hypothese III est satisfaite (voir [5], chap. 3, sec. 4, corollaire 2), donc la mesure parabolique $\mu(t, x; \cdot)$ existe (voir § 2). Nous montrerons les formules (3.9)-(3.12) à l'aide de la méthode dite « des substitutions ».

Soit $z = (z_1, \dots, z_n) \in E_n$ un point fixé. La fonction $w = (x_i - z_i)(x_j - z_j)$ satisfait à l'équation

$$Lw = 2a_{ij}(t, x) + (x_j - z_j)\, b_i(t, x) + (x_i - z_i)\, b_j(t, x) + (x_i - x_j) \times$$
$$(x_j - z_j)\, c\,(t, x) = \Phi_z(t, x)$$

D'après le théorème 6 on a

$$(x_i - z_i)(x_j - z_j) = -\int_{E_{n+1}} \Phi_z(\tau, y)\,\mu(t, x; d\tau\, dy).$$

Si nous posons $x_i = z_i$ (i $= 1, \dots, n$) dans la dernière formule on a (3.9). En substituant $x_i - z_i$, 1, $t - s$, on parvient aux (3.10), (3.11) et (3.12).

REMARQUE 3. Il résulte de la formule (3.12) que sous les hypothèses des théorèmes 8 et 9, on a

$$\lim_{K \to 0} \int_{E_{n+1}} c(\tau, y)(\tau - t)\,\mu_K(t, x; d\tau\, dy) = \infty.$$

THÉORÉME 10. Supposons que les hypothèses du théorème 9 soient satisfaites. Soit C ensemble compact de E_{n+1} dont l'intérieur est non vide. Alors la mesure $\mu(t, x; C)$ en tant que fonction du point (t, x) satisfait à l'équation

$$L\mu = \begin{cases} -1 & \text{pour } (t, x) \in \operatorname{Int} C \\ \;\;0 & \text{pour } (t, x) \in E_{n+1} - C. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Il est clair que nous pouvons écrire l'égalité $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_m$, où U_m sont des ensembles ouverts, Il existe des fonctions $f_m(t, x)$

hölderiennes et telles que $f_m(t, x) = 1$ pour $(t, x) \in C$, $f_m(t, x) = 0$ pour $(t, x) \in E_{n+1} - U_m$, $0 \leq f_m \leq 1$ dans E_{n+1}. La suite des fonctions $f_m(t, x)$ converge vers $I_C(t, x)$ ($I_C(t, x)$ étaut la fonction caractéristique de C), donc il en résulte que

$$\lim_{n \to \infty} u_m(t, x) = -\int_{E_{n+1}} \lim_{m \to \infty} f_m(\tau, y)\, \mu(t, x; d\tau\, dy) = -\mu(t, x; C).$$

Soit (t, x) un point de l'intérieur de C. Il existe un cylindre $W = \{(\tau, y); |y| < r, s_1 < \tau < s_2\}$, telle que $(t, x) \in \overline{W} \subset \mathrm{Int}\, C$. Soit W_1 un domaine borné et tel que $\overline{W}_1 \subset W$. L'inégalité (2.1) et les estimations intérieurs de Schauder-Friedman (voir [5] chap. 3, sec. 2, théorème 5) permettent de choisir une suite u_m, qui converge uniformément vers $\overline{u}$ dans $\overline{W}_1$ avec ses dérivées $u_{m_\nu x_i}$, $u_{m_\nu x_i x_j}$, $u_{m_\nu t}$ $i, j = 1, \ldots, n$. Il est clair que $L\overline{u} = 1$ dans $\overline{W}_1$, mais d'apres le convergence de toute la suite $u_m(t, x)$ vers $-\mu(t, x; C)$ nous obtenons $\overline{u}(t, x) = \mu(t, x; C)$, donc $L\mu = 1$ pour $(t, x) \in \mathrm{Int}\, C$. De manière analogue on montre que $L\mu = 0$ pour $(t, x) \in E_{n+1} - C$.

TRAVAUX CITÉS

[1] H. Bauer, *Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen,* Mathematische Annalen 146 (1962), p. 1-59.

[2] M. Brelot, *Familles de Perron et le problème de Dirichlet,* Acta Scientiarum Mathematicarum 9 (1939), p. 133-153.

[3] M. Brelot *Le problème de Dirichlet et frontière de Martin,* Journal de Mathématiques Pures et Appliquées 35 (1956) p. 297-335.

[4] J. L. Doob, *Probability approach to the heat equation,* Transactions of the American Mathematical Society 80 (1955) p. 216-280.

[5] A. Friedman, *Partial differential equations of parabolic type,* Englewood Cliffs 1964.

[6] P. R. Halmos, *Measury Theory,* New York 1950.

[7] G. A. Hunt, *Some theoremes concerning Brownian motion,* Transactins of the American Society 81 (1956) p. 224-319.

[8] A. Il'in, A. Kalashnikow and O. Oleinik, *Second order linear equations of parabolic-type,* Russian Mathematical Surveys 17 (1966). n° 3, p. 1-143.

[9] M. Krzyżański, *La mesure parabolique et le problème de Cauchy.* Colloquium Mathematicum XVI (1967), p. 123-131.