ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

KNUT KNORR

Über den Grauertschen Kohärenzsatz bei eigentlichen holomorphen Abbildungen. II

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 23, nº 1 (1969), p. 1-74

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1969_3_23_1_1_0>

ÜBER DEN GRAUERTSCHEN KOHÄRENZSATZ BEI EIGENTLICHEN HOLOMORPHEN ABBILDUNGEN II (*)

KNUT KNORR

INHALTSVERZEICHNIS

3. Calcül der Messüberdeckungen.

3.1. Messatlanten und Messüberdeckungen

(3.1.1) Bezeichnungen: Sei $(X, \mathcal{H})$ ein komplexer Raum K ein Polyzylinder im $\mathbf{C}^m$, $\pi : X \to K$ eine eigentliche holomorphe Abbildung. In den

Pervenuto alla Redazione il 25 Gennaio 1968.

(*) Die Kapitel 1 und 2 sind in diesem Journal Band XXII, (1968), 729-761, erschienen.

Kapiteln 3 und 4 werden ständig folgende Bezeichnungen benutzt:

$t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbf{C}^m$,

$\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_m) \in \mathbf{R}_+^m$,

$K(t, \varrho)$ Polyzylinder im $\mathbf{C}^m$ mit Zentrum t und Polyradius ϱ,

$X(t, \varrho) = \overset{-1}{\pi}(K(t, \varrho))$.

Wenn $\varrho = 0$ ist, wird speziell $K(t, 0) = K(t) = \{t\}$ und $X(t, 0) = X(t)$ gesetzt; wenn $t = 0$ ist, wird speziell $K(0, \varrho) = K(\varrho)$ und $X(0, \varrho) = X(\varrho)$ gesetzt.

DEFINITION (3.1.2). — Sei $t \in \mathbf{C}^m$ und $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$, $\varrho > 0$. Eine Messkarte $\mathfrak{M}$ bezüglich (t, ϱ) ist ein Quartrupel (W, Φ, E, R) mit folgenden Daten:

(i) W eine offene Menge von X,

(ii) E eine Steinsche offene Menge in einem $\mathbf{C}^n$,

(iii) $\Phi: W \longrightarrow E \times K(t, \varrho)$ eine holomorphe Abbildung mit $pr_2 \cdot \Phi = \pi$, die W biholomorph auf eine analytische Menge von $E \times K(t, \varrho)$ abbildet.

(iv) R ein Funktor, der jeden kohärenten $\mathcal{H}$-Modul $\mathcal{S}$ eine Auflösung

$$R(\mathcal{S}): \mathcal{O}^p \xrightarrow{h} \mathcal{O}^q \xrightarrow{\alpha} \Phi_*(\mathcal{S}) \longrightarrow 0$$

über $E \times K(t, \varrho)$ zuordnet. (1)

DEFINITION (3.1.3). — Sei $t \in \mathbf{C}^m$ und $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$, $\varrho > 0$. Ein Messatlas $\mathfrak{A} = (\mathfrak{M}_k, \lambda_{lk})$ bezüglich (t, ϱ), der K als Indexmenge hat, besteht aus folgenden Daten:

(i) K endliche Menge,

(ii) $(\mathfrak{M}_k)_{k \in K}$ eine Famille von Messkarten $\mathfrak{M}_k = (W_k, \Phi_k, E_k, R_k)$ bezüglich (t, ϱ), die K als Indexmenge hat.

(iii) Für jedes Paar (k, l) von Indizes aus K derart, dass $W_k \cap W_l \neq \emptyset$ ist, sei λ_{lk} eine holomorphe Abbildung von $E_k \times K(t, \varrho)$ nach $\mathbf{C}^{n_l} \times K(t, \varrho)$.

Diese Daten müssen folgende Axiome erfüllen:

(A1) $\bigcup_{k \in K} W_k = X(t, \varrho)$

(1) Wenn $f: \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}'$ ein Morphismus zwischen zwei kohärenten $\mathcal{H}$-Moduln ist, dann soll $R(f) = \Phi_*(f)$ sein.

(A2) Wenn (k, l) ein Paar von Indizes aus K ist mit $W_k \cap W_l \neq \emptyset$, dann ist das Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
W_k \cap W_l \arrow[r, "\Phi_k"] \arrow[dr, "\Phi_l"'] & E_k \times K(t, \varrho) \arrow[d, "\lambda_{lk}"] \arrow[dr] & \\
 & \mathbb{C}^{n_l} \times K(t, \varrho) \arrow[r] & K(t, \varrho)
\end{tikzcd}
$$

kommutativ.

DEFINITION (3.1.4). — Sei $\mathfrak{A} = (\mathfrak{W}_k, \lambda_{lk})$ ein Messatlas bezüglich (t, ϱ_0), der K als Indexmenge hat. Eine Messüberdeckung $\mathfrak{U} = (U, M, M', F)$ bezüglich $\mathfrak{A}$ besteht aus folgenden Daten:

(i) $U = (U_i)_{i \in I}$ ist eine endliche Steinsche Familie offener Mengen aus X, die für hinreichend kleines $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$ die Menge $X(t, \varrho)$ überdeckt.

(ii) M und M' sind Abbildungen von I in die Potenzmengen von K, so dass für jedes $i \in I$ die Beziehung $\emptyset \neq M'(i) \subset M(i)$ gilt.

(iii) Sei A die Menge aller Paare $(k, i) \in K \times I$ mit $k \in M(i)$. $F = (F_{k;i})$ ist eine Familie achsenparalleler Quader $F_{k;i}$ aus E_k, die A als Indexmenge hat.

Diese Daten müssen für hinreichend kleines ϱ folgende Axiome erfüllen:

(M1) Wenn $(i_0, \ldots, i_p)$ eine endliche Folge von Indizes aus I ist, dann gilt:

$$U_{i_0} \cap \ldots \cap U_{i_p} \neq \emptyset \Longrightarrow M'(i_0) \cap \ldots \cap M'(i_p) \neq \emptyset$$

(M2) Wenn $(k, i) \in K \times I$ ist, dann gilt:

$$k \in M(i) \Longrightarrow U_i \subset W_k$$

$$k \in M(i) \Longrightarrow pr_1(\Phi_k(U_i)) \subset\subset F_{k;i} \subset\subset E_k$$

(M3) Wenn $j \in I$ und $(k, i) \in K \times I$, dann gilt:

$$k \in M'(j) \quad \text{und} \quad k \notin M(i) \Longrightarrow U_i \cap \overset{-1}{\Phi}_k(F_{k;j} \times K(t, \varrho)) = \emptyset\,.$$

DEFINITION (3.1.5). — Sei $\mathfrak{A} = (\mathfrak{W}_k, \lambda_{lk})$ ein Messatlas bezüglich (t, ϱ_0), der K als Indexmenge hat; $\mathfrak{U} = (U, M, M', F)$ und $\mathfrak{V} = (V, N, N', G)$ seien Messüberdeckungen bezüglich $\mathfrak{A}$. Die Messüberdeckung $\mathfrak{V}$ heisst zulässige Verfeinerung von $\mathfrak{U}$ mit Verfeinerungsabbildung τ (in Zeichen $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$), wenn für hinreichend kleines ϱ folgende Axiome erfüllt sind:

(V1) $V = (V_j)_{j \in J}$ Verfeinerung von $U = (U_i)_{i \in I}$ mit der Verfeinerungsabbildung $\tau : J \longrightarrow I$.

(V2) Wenn $(k, j) \in K \times J$, dann gilt:

$$k \in M(\tau(j)) \Longrightarrow G_{k;j} \subset\subset F_{k;\tau(j)}$$

(V3) Wenn $j \in J$, dann ist $N(j)) = M(\tau(j))$ und $N'(j) = M'(\tau(j))$

(V4) Wenn $(k, j) \in K \times J$, dann gilt:

$$k \in N'(j) \Longrightarrow (G_{k;j} \times K(t, \varrho)) \cap \Phi_k(U_{\tau(j)}) = (G_{k;j} \times K(t, \varrho)) \cap \Phi_k(W_k)$$

(V5) Wenn $j \in J$ und $k, l \in K$, dann gilt:

$$k, l \in N(j) \Longrightarrow \lambda_{lk}(G_{k,j} \times K(t, \varrho)) \subset F_{l;\tau(j)} \times K(t, \varrho).$$

(3.1.6) Sei $\mathfrak{A}$ ein Messatlas bezüglich (t, ϱ_0) und $\mathfrak{U}$ eine Messüberdeckung bezüglich $\mathfrak{A}$, dann sagen wir kurz: $\mathfrak{U}$ ist eine t-Messüberdeckung (Missverständnisse bezüglich des Messatlas sind dabei nicht zu befürchten, denn für jedes $t \in \mathbf{C}^m$ wird später genau ein Messatlas gewählt).

Seien $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{W}$ zwei t-Messüberdeckungen. $\mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{W}$ bezeichne eine endliche Familie $\mathfrak{V}_i)_{1 \leq i \leq n}$ von t-Messüberdeckungen derart, dass

$$\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2 \supset \dots \supset \mathfrak{V}_n \supset \mathfrak{W}$$

gilt. Dabei ist die Zahl n stets aus dem Zusammenhang ersichtlich. $\mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{W}$ heisst eine (endliche) Kette von t-Messüberdeckungen.

Es ist zweckmässig noch folgende Bezeichnungen einzuführen, die dann in den folgenden Kapiteln ständig benutzt werden:

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Teilmengen einer Menge X, s eine natürliche Zahl. Es wird gesetzt:

$$i = (i_0, \dots, i_s) \in I^{s+1},$$

$$U_i = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_s}.$$

Seien J und K Mengen, τ eine Abbildung von I nach J und M eine Abbildung von I in die Potenzmenge von K. Es wird gesetzt:

$$\tau(i) = (\tau(i_0), \dots, \tau(i_s)) \in J^{s+1},$$

$$M(i) = M(i_0) \cap \dots \cap M(i_s).$$

Definition (3.1.7). — Sei $\mathfrak{A} = (\mathfrak{W}_k, \lambda_{lk})$ ein Messatlas bezüglich (t, ϱ_0), der K als Indexmenge hat, $(\mathcal{S}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine endliche Familie kohärenter $\mathcal{H}$-Moduln auf X und s eine natürliche Zahl. Ein Paar $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ von Messüberdeckungen bezüglich $\mathfrak{A}$ heisst s-privilegierte Verfeinerung bezüglich $(\mathcal{S}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, wenn für hinreichend kleines ϱ folgende Axiome erfüllt sind:

(PV1) $\mathfrak{V}$ ist zulässige Verfeinerung von $\mathfrak{U}$ mit Verfeinerungsabbildung $\tau: J \to I$.

(PV2) Es gibt eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \ldots, \delta_m)$ und eine Abbildung $M: \Delta(\delta_1, \ldots, \delta_m) \to \mathbf{R}_+$ und es gibt zu jedem $j \in J^{s+1}$ und jedem $\chi \in M(j)$ einen n_χ-dimensionalen Polyzylinder $K_{\chi;j}$ so dass gilt:

1) $$G_{\chi;j} \subset K_{\chi;j} \subset F_{\chi;\tau(j)}.$$

2) Wenn $\lambda \in \Lambda$, $\varrho \in \Delta(\delta_1, \ldots, \delta_m)$ und σ ein Schnitt aus

$$\Gamma(K_{\chi;j} \times K(t, \varrho) \text{ im } h_\lambda) \text{ mit } \|\sigma\|_{K_{\chi;j}\varrho} < \infty,$$

dann gibt es ein $\sigma' \in \Gamma(K_{\chi;j} \times K(t, \varrho), \mathcal{O}^{p_\lambda})$ mit $h_\lambda(\sigma') = \sigma$ und

$$\|\sigma'\|_{K_{\chi;j}\varrho} \leq M(\varrho) \, \|\sigma\|_{K_{\chi;j}\varrho}.$$

Lemma (3.1.8). — Sei $\mathfrak{A}$ ein Messatlas bezüglich (t, ϱ_0) der K als Indexmenge hat; $\mathfrak{U} = ((U_i)_{i \in I}, M, M', F)$ und $\mathfrak{V} = ((V_j)_{j \in J}, N, N', G)$ Messüberdeckungen bezüglich $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$. Sei $(i_0, \chi) \in I \times K$ derart, dass $\chi \in M'(i_0)$ is. Mit J_χ sei die Menge aller $j \in J$ mit $\chi \in N(j)$ bezeicnet.

Behauptung: Für hinreichend kleines ϱ gilt:

1) Die Familie $(V_j)_{j \in J_\chi}$ überdeckt $\Phi_\chi^{-1}(F_{\chi;i_0} \times K(t, \varrho))$

2) Für alle V_j mit $\chi \notin N(j)$ gilt $\Phi_\chi^{-1}(F_{\chi;i_0} \times K(t, \varrho)) \cap V_j = \emptyset$

3) Es gilt $(F_{\chi;i_0} \times K(t, \varrho)) \cap \Phi_\chi(W_\chi) \subset \bigcup_{j \in J} (G_{\chi;j} \times K(t, \varrho))$.

Beweis. 1) — Annahme: Sei $x \in \Phi_\chi^{-1}(F_{\chi;i_0} \times K(t, \varrho))$ mit $x \notin V_j$ für jedes $j \in J_\chi$. Da $V = (V_j)_{j \in J}$ die Menge $X(t, \varrho)$ überdeckt, gibt es ein $j_1 \in J$ mit $x \in V_{j_1}$ und $\chi \notin N(j_1)$. Nach (3.1.5) (V1) folgt $x \in V_{j_1} \subset U_{\tau(j_1)}$ und damit $U_{\tau(j_1)} \cap \Phi_\chi^{-1}(F_{\chi;i_0} \times K(t, \varrho)) \neq \emptyset$. Nach (3.1.4) (M3) folgt jetzt $\chi \in M(\tau(j_1))$ und damit folgt nach (3.1.5) (V3) $\chi \in M(\tau(j_1)) = N(j_1)$, was ein Widerspruch ist.

2) Annahme: Sei $V_j \cap \Phi_\chi^{-1}(F_{\chi;i_0} \times K(t, \varrho)) \neq \emptyset$ und $\chi \notin N(j)$. Nach (3.1.5) (V1) gilt $V_j \subset U_{\tau(j)}$ und damit $U_{\tau(j)} \cap \Phi_\chi^{-1}(F_{\chi;i_0} \times K(t, \varrho)) \neq \emptyset$. Nach (3.1.4) (M3) ist jetzt $\chi \in M(\tau(j))$ und nach (3.1.5) (V3) folgt $\chi \in M(\tau(j)) = N(j)$, was ein Widerspruch ist.

3) Nach (1) gilt: $(F_{\chi \cdot i_0} \times K(t, \varrho)) \cap \Phi_\chi(W_\chi) \subset \bigcup_{j \in J} \Phi_\chi(V_j)$. Nach (3.1.4) (M2) folgt: $\Phi_\chi(V_j) \subset G_{\chi;j} \times K(t, \varrho)$, und da J eine endliche Menge ist, gilt $\bigcup_{j \in J} \Phi_\chi(V_j) \subset \bigcup_{j \in J} G_{\chi;j} \times K(t, \varrho)$.

3.2. Topologische Vorbereitungen

LEMMA (3.2.1). — Voraussetzung: Sei X ein metrischer Raum, A eine Teilmenge von X versehen mit der Relativmetrik, und A', A'' Teilmengen von A, so dass bezüglich der Relativtopologie von A die Beziehung gilt: A' offen und $A \supset A' \supset\supset A''$.

Behauptung: Es gibt ein $r > 0$, so dass für jede Teilmenge G von X gilt:

$$d(G) < r,\ G \cap A'' \neq \emptyset \Longrightarrow G \cap A' = G \cap A.$$

LEMMA (3.2.2). — Voraussetzungen; Seien X, X' metrische Räume, $\Phi: X \to X'$ eine gleichmässig stetige Abbildung, F eine Teilmenge von X und U eine offene Teilmenge von X' derart dass $\Phi(F) \subset\subset U$ gilt.

Behauptung: Es gibt ein $\delta > 0$, so dass für jede Teilmenge G von X gilt:

$$d(G) < \delta,\ G \cap F \neq \emptyset \Longrightarrow \Phi(G) \subset U.$$

LEMMA (3.2.3). — Voraussetzung: Seien X, X' metrische Räume, $\varrho_0 \in \mathbf{R}_+^m$, $\varrho_0 > 0$. Die Mengen $X \times K(\varrho_0)$, $X' \times K(\varrho_0)$ seien mit der Produktmetrik versehen. Sei $\Phi: X \times K(\varrho_0) \to X' \times K(\varrho_0)$ eine gleichmässig stetige Abbildung über $K(\varrho_0)$ (d. h. $pr_2 = pr_2' \circ \Phi$), F eine Teilmenge von $X \times \{0\}$ ($0 =$ Zentrum von $K(\varrho)$), U eine offene Teilmenge von X' derart, dass $\Phi(F) \subset\subset U \times K(\varrho_0)$ gilt.

Behauptung: Es gibt ein $\varrho_1 \in \mathbf{R}_+^m$ mit $0 < \varrho_1 < \varrho_0$ und ein $\delta > 0$, so dass für jedes $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$ mit $0 < \varrho < \varrho_1$ und jede Teilmenge G von X gilt:

$$d(G) < \delta,\ G \cap pr_1(F) \neq \emptyset \Longrightarrow \Phi(G \times K(\varrho)) \subset U \times K(\varrho).$$

LEMMA (3.2.4) — Voraussetzung: Sei X ein topologischer Raum, $\varrho_0 \in \mathbf{R}_+^m$ mit $\varrho_0 > 0$, $\pi: X \to K(\varrho_0)$ eine eigentliche Abbildung und U eine Umgebung von $X(0) = \pi^{-1}(\{0\})$.

Behauptung: Es gibt ein $\varrho_1 \in \mathbf{R}_+^m$ mit $0 < \varrho_1 < \varrho_0$, so dass $X(\varrho_1) \subset U$ ist.

AUFFÜLLEMMA (3.2.5). — Voraussetzung: Sei G eine beschränkte Steinsche offene Menge in $\mathbf{C}^n$, $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$, A eine beliebige Teilmenge von $G \times K(\varrho)$ und $(G_r)_{r \in R}$ eine endliche Familie offener Steinscher Mengen $G_r \subset G$ derart, dass die Familie $(G_r \times K(\varrho))_{r \in R}$ die abgeschlossene Hülle $\bar{A}$ überdeckt.

Behauptung: Es gibt eine endliche Familie $(G'_s)_{s \in S}$ Steinscher offener Mengen $G'_s \subset G$ derart, dass gilt:

1) Wenn $s \in S$, dann $(G'_s \times K(\varrho)) \cap \bar{A} = \emptyset$.
2) Die Familie $((G_r)_{r \in R}, (G'_s)_{s \in S})$ überdeckt G.

Beweis. — Da $\bigcup_{r \in R} G_r \supset\supset pr_1(\bar{A})$ ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für jedes $\tilde{G} \subset G$ gilt:

$$d(\tilde{G}) < \delta,\ \tilde{G} \cap pr_1(\bar{A}) \neq \emptyset \Longrightarrow \tilde{G} \subset \bigcup_{r \in R} G_r.$$

Sei $(G'_s)_{s \in S_0}$ eine endliche Steinsche Überdeckung von G mit $d(G'_s) < \delta$.

Setzen wir $S = \{s \in S_0 : G_s \cap pr_1(\bar{A}) = \emptyset\}$, dann ist $(G'_s)_{s \in S}$ die gesuchte Familie.

3.3. Existenzsätze.

In dieser Nummer wird die Existenz von Messkarten, Messatlanten, Messüberdeckungen und Messüberdeckungsketten bewiesen. Der bequemeren Schreibweise wegen wird stets $t = 0$ angenommen und es werden die in (3.1.1) dafür vereinbarten Abkürzungen benutzt.

Satz (3.3.1). — Zu jedem $x \in X(0)$ gibt es für hinreichend kleine $\varrho \in \mathbf{R}^m_+$ eine Messkarte $\mathfrak{W} = (W, \Phi, E, R)$ bezüglich $(0, \varrho)$ derart, dass $x \in W$ ist.

Beweis. — Es gibt eine offene Umgebung W_1 von x, eine analytische Menge A_1 in einem Polyzylinder E_1 des $\mathbf{C}^n$ und eine biholomorphe Abbildung $\Phi_1 : W_1 \longrightarrow A_1$. Sei $\varrho_0 \in \mathbf{R}^m_+$ mit $\varrho_0 > 0$, und sei $\Phi : W_1 \longrightarrow E_1 \times K(\varrho_0)$ die Abbildung, die durch $x \longmapsto (\Phi_1(x), \pi(x))$ definiert ist. Wie mann leicht sieht wird W_1 durch Φ biholomorph auf eine analytische Menge $A \subset E_1 \times K(\varrho_0)$ abgebildet. Wählt man einen echt kleineren Polyzylinder $E \subset E_1$ und ein $\varrho < \varrho_0$, so gibt es über $E \times K(\varrho)$ wegen Theorem A zu jedem kokärenten $\mathcal{H}$-Modul $\mathcal{S}$ eine Auflösung $R(\mathcal{S}) : \mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{O}^q \longrightarrow \Phi_*(\mathcal{S}) \longrightarrow 0$.

Setzen wir $\Phi^{-1}(E \times K(\varrho)) = W$, so haben wir mit (W, Φ, E, R) eine gesuchte Messkarte.

Satz (3.3.2) — Für hinreichend kleine $\varrho \in \mathbf{R}^m_+$ gibt es einen Messatlas $\mathfrak{A}$ bezüglich $(0, \varrho)$.

Beweis. — Da $X(0)$ kompakt ist, gibt es nach (3.3.1) eine endliche Familie $(W_\iota, \Phi_\iota, E_\iota, R_\iota)_{\iota \in I}$ von Messakarten über $(0, \varrho_0)$, so dass $\bigcup_{\iota \in I} W_\iota \supset X(0)$.

Nach (2.3.2) gibt es zu jedem $\iota \in I$ offene Teilmenge W_ι', W_ι'', W_ι''' von X mit $W_\iota \supset\supset W_\iota' \supset\supset W_\iota'' \supset\supset W_\iota'''$, so dass $(W_\iota''')_{\iota \in I}$ noch $X(0)$ überdeckt.

1) Wenn $(\iota, i) \in I \times I$, dann wenden wir auf $\Phi_\iota(W) \supset \Phi_\iota(W_{\iota, i}) \supset\supset$ $\supset\supset \Phi_\iota(W_{\iota, i}'')$. Lemma (3.2.1) an. Es gibt also ein $r > 0$, so dass für jedes $\tilde{G} \subset E_\iota \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\tilde{G}) < r, \quad \tilde{G} \cap \Phi_\iota(W_{\iota, i}'') \neq \emptyset \Longrightarrow \tilde{G} \cap \Phi_\iota(W_i) = \tilde{G} \cap \Phi_\iota(W_{\iota, i}').$$

2) Es ist $\Phi_\iota(W_\iota') \supset\supset \Phi_\iota(W_{\iota, i}'')$. Es gibt jetzt eine endliche Familie $(U_\nu^{\iota, i})_{\nu \in N_{\iota, i}}$ offener Teilmengen von $E_\iota \times K(\varrho_0)$ mit $d(U_\nu^{\iota, i}) < r$, die noch $\overline{\Phi_\iota(W_{\iota, i}'')}$ überdeckt und es gibt holomorphe Abbildungen $\lambda_\nu^{\iota, i}$ von $U_\nu^{\iota, i}$ nach $\mathbb{C}^{n_i} \times K(\varrho_0)$ mit $pr_2(\lambda_\nu^{\iota, i}(x, t)) = t$, deren Einschränkungen auf $U_\nu^{\iota, i} \cap \Phi_\iota(W_\iota')$ mit $\Phi_i \circ \Phi_\iota^{-1}$ übereinstimmen (für $i = \iota$ soll $\lambda_\nu^{\iota, i} = id$ sein). Dies sieht man wegen (1) leicht ein. Überdies darf man noch annehmen, dass die $\lambda_\nu^{\iota, i}$ gleichmässig stetig sind (durch eine relativkompakte Schrumpfung stets erreichbar!).

3) Auf die Situation $\overline{E_\iota \times K(\varrho_0)}$, $\overline{\Phi_\iota(W_{\iota, i}'')}$, $(U_\nu^{\iota, i})_{\nu \in N_{\iota, i}}$ wird das Lebesguesche Lemma (2.3.3) angewandt: Es gibt also ein $\lambda > 0$, so dass für jedes $\tilde{G} \subset E_\iota \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\tilde{G}) < \lambda, \quad \tilde{G} \cap \overline{\Phi_\iota(W_{\iota, i}'')} \neq \emptyset \Longrightarrow \text{es gibt ein } \nu \in N_{\iota, i} \text{ mit } \tilde{G} \subset U_\nu^{\iota, i}.$$

4) Es wird vorübergehend $F = U_\nu^{\iota, i} \cap \Phi_\iota(W_\iota') = U_\nu^{\iota, i} \cap \Phi_\iota(W_{\iota, i}')$ gesetzt; wegen $\Phi_\iota(W_\iota) \supset\supset \Phi_\iota(W_\iota')$ gilt $\lambda_\nu^{\iota, i}(F) \subset\subset E_i \times K(\varrho_0)$. Auf die Situation $\lambda_\nu^{\iota, i}$, F, $E_i \times K(\varrho_0)$ wird Lemma (3.2.2) angewandt: Es gibt also ein $\delta > 0$, so dass für jedes $\tilde{G} \subset U_\nu^{\iota, i}$ gilt:

$$d(\tilde{G}) < \delta, \quad \tilde{G} \cap U_\nu^{\iota, i} \cap \Phi_\iota(W_i') \neq \emptyset \Longrightarrow \lambda_\nu^{\iota, i}(G) \subset E_i \times K(\varrho_0).$$

5) Auf die Situation $\Phi_\iota(W_\iota) \supset\supset \Phi_\iota(W_\iota'') \supset\supset \Phi_\iota(W_\iota''')$ wenden wir Lemma (3.2.1) an: Es gibt also ein $r' > 0$, so dass für jedes $\tilde{G} \subset E_\iota \times K(\varrho_0)$ die Beziehung gilt:

$$d(\tilde{G}) < r', \quad \tilde{G} \cap \Phi_\iota(W_\iota''') \neq \emptyset \Longrightarrow \tilde{G} \cap \Phi_\iota(W_\iota'') = \tilde{G} \cap \Phi_\iota(W_\iota).$$

6) Es werde $\varepsilon = \inf(\lambda, \delta, r')$ gesetzt. Sei jetzt $(E_{\iota, \mu})_{\mu \in M_\iota}$ eine endliche Familie von offenen achsenparallelen Quadern des $\mathbb{C}^{n_\iota}$ mit $d(E_{\iota, \mu}) < \varepsilon / \sqrt{2}$,

die noch E_ι überdeckt. Der Polyradius $\varrho > 0$ wird so gewählt, dass $d(K(\varrho)) < \varepsilon/\sqrt{2}$ ist. Jetzt ist $d(E_{\iota,\mu} \times K(\varrho)) < \varepsilon$. Wir setzen

$$K = \{\chi = (\iota, \mu) : (E_{\iota,\mu} \times K(\varrho)) \cap \Phi_\iota(W_\iota''') \neq \emptyset\},$$

$$\widetilde{W}_\chi = \Phi_\iota^{-1}(E_{\iota,\mu} \times K(\varrho)).$$

7) Eigenschaften der Familie $(\widetilde{W}_\chi)_{\chi \in K}$:

(i) $\bigcup_{\chi \in K} \widetilde{W}_\chi \supset X(0)$

(ii) Wenn $\chi = (\iota, \mu) \in K$, dann ist $\widetilde{W}_\chi \subset W_\iota''$.

(iii) Wenn $\chi_1, \chi_2 \in K$, dann gilt:

$$\widetilde{W}_{\chi_1} \cap \widetilde{W}_{\chi_2} \neq \emptyset \Longrightarrow (E_{\iota_1,\mu_1} \times K(\varrho)) \cap \Phi_{\iota_1}(W''_{\iota_1,\iota_2}) \neq \emptyset$$

und es gibt eine holomorphe Abbildung $\lambda^{\iota_1,\iota_2}$ von $E_{\iota_1,\mu_1} \times K(\varrho)$ nach $E_{\iota_2} \times K(\varrho)$, so dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{W}_{\kappa_1} \cap \widetilde{W}_{\kappa_2} \arrow[r, "\phi_{\iota_1}"] \arrow[dr, "\phi_{\iota_2}"'] & E_{\iota_1,\mu_1} \times K(\varrho) \arrow[d, "\lambda_\gamma^{\iota_1,\iota_2}"] \arrow[dr, "pr_2"] & \\
& \mathbb{C}^{n_{\iota_2}} \times K(\varrho) \arrow[r, "pr_2"'] & K(\varrho)
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Denn nach (ii) gilt $\widetilde{W}_{\iota_1}'' \supset \widetilde{W}_{\chi_1}$, $\widetilde{W}_{\iota_2}'' \supset \widetilde{W}_{\chi_2}$, somit $\widetilde{W}_{\iota_1\iota_2}'' \supset \widetilde{W}_{\chi_1,\chi_2}$, und nach leichter Rechnung folgt

$$\Phi_{\iota_1}(W''_{\iota_1,\iota_2}) \supset \Phi_{\iota_1}(\widetilde{W}_{\chi_1,\chi_2}) \neq \emptyset.$$

Nach (3) gibt es ein $\nu \in N_{\iota_1,\iota_2}$ mit $E_{\iota_1,\mu_2} \times K(\varrho) \subset U_\nu^{\iota_1,\iota_2}$; nach (2) gibt es eine Abbildung $\lambda^{\iota_1,\iota_2}$ von $E_{\iota_1,\mu_1} \times K(\varrho)$ nach $\mathbb{C}^{n_{\iota_2}} \times K(\varrho)$, mit den verlangten kommutativen Eigenschaften. Wegen (4) ist $\lambda_\nu^{\iota_1,\iota_2}$ schon eine Abbildung von $E_{\iota_1,\mu_1} \times K(\varrho)$ nach $E_{\iota_2} \times K(\varrho)$. Jetzt wird

$$\chi = (\iota, \mu) \in K, \quad \Phi_\iota | \widetilde{W}_\chi = \Phi_\chi, \quad E_{\iota,\mu} = E_\chi \text{ und } R_\iota | E_\chi \times K(\varrho) = R_\chi$$

gesetzt. Offensichtlich ist $(\widetilde{W}_\chi, \Phi_\chi, E_\chi, R_\chi)_{\chi \in K}$ ein gesuchter Messatlas über $(0, \varrho)$.

Im folgenden sei stets ein fester Messatlas $\mathfrak{A} = (W_\chi, \Phi_\chi, E_\chi, R_\chi)_{\chi \in K}$ *bezüglich* $(0, \varrho_0)$, *der* K *als Indexmenge hat, vorgegeben.*

SATZ (3.3.3). — Es gibt Messüberdeckungen bezüglich $\mathfrak{A}$.

Beweis. — Nach (2.3.2.) gibt es zu jedem $\chi \in K$ offene Teilmengen W_χ', W_χ'' von X mit $W_\chi \supset\supset W_\chi' \supset\supset W_\chi''$, so dass $(W_\chi'')_{\chi \in K}$ noch $X(0)$ überdeckt. Auf die Situation $\Phi_\chi(W_\chi) \supset\supset \Phi_\chi(W_\chi') \supset\supset \Phi_\chi(W_\chi'')$ wenden wir das Lemma (3.2.1) an: Es gibt also ein $\delta_0 > 0$, so dass für jedes $\widetilde{F} \subset E_\chi \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\widetilde{F}) < \delta_0, \quad \widetilde{F} \cap \Phi_\chi(W'') \neq \emptyset \Longrightarrow \widetilde{F} \cap \Phi_\chi(W_\chi) = \widetilde{F} \cap \Phi_\chi(W_\chi')$$

Wir wählen $\delta_0 > 0$ noch so, dass auch noch gilt:

$$d(\widetilde{F}) < \delta_0, \quad \widetilde{F} \cap \Phi_\chi(W_\chi') \neq \emptyset \Longrightarrow pr_1(\widetilde{F}) \subset\subset E_\chi$$

Sei $(F_{k;i})_{i \in I_k'}$ eine endliche Familie von offenen achsenparallelen Quadern des $\mathbb{C}^{n_\chi}$ mit $d(F_{\chi;i}) < \delta_0/\sqrt{2}$, die noch E_χ überdeckt; überdies sei $\varrho_1 > 0$ so klein gewählt, dass $d(K(\varrho_1)) < \delta_0/\sqrt{2}$, dann ist stets $d(F_{\chi;i} \times K(\varrho_1)) < \delta_0$. Wir setzen

$$I_\chi = \{i \in I_\chi' : (F_{\chi;i} \times K(\varrho_1)) \cap \overline{\Phi_\chi(W_\chi')} \neq \emptyset\}$$

$$(X(0))_\chi' = \Phi_\chi(X(0) \cap W_\chi) \cap \overline{\Phi_\chi(W_\chi')}.$$

Offenbar überdeckt $(F_{\chi;i} \times K(\varrho_1))_{i \in I_\chi}$ die kompakte Menge $(X(0))_\chi'$. Auf die Situation $(X(0))_\chi', (F_{\chi;i} \times K(\varrho_1))_{i \in I_\chi}$ wird das Lebesguesche Lemma (2.3.3) angewandt: Es gibt also ein $\lambda > 0$, so dass für jedes $\widetilde{F} \subset E_\chi \times K(\varrho_0)$ gilt:

$d(\widetilde{F}) < \lambda$, $\widetilde{F} \cap (0))_\chi' \neq \emptyset \Longrightarrow$ es gibt ein $i \in I_\chi$ mit $\widetilde{F} \subset\subset F_{\chi;i} \times K(\varrho_1)$.

Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, das $\Phi_\chi : W_\chi \to E_\chi \times K(\varrho_0)$ gleichmässig stetig ist. Es gibt also ein $\delta_1 > 0$, so dass für jedes $U \subset W_\chi$ gilt:

$$d(U) < \delta_1 \Longrightarrow d(\Phi_\chi(U)) < \lambda$$

Jetzt lässt sich $\delta_1 > 0$ noch so wählen, das für jedes $U \subset X(\varrho_0)$ gilt:

$$d(U) < \delta_1 \quad \text{und} \quad U \cap \overline{W_\chi''} \neq \emptyset \Longrightarrow U \subset W_\chi',$$

$$d(U) < \delta_1 \quad \text{und} \quad U \cap \overline{W_\chi'} \neq \emptyset \Longrightarrow U \subset W_\chi.$$

Sei jetzt $(U'_i)_{i\in I}$ eine endliche Steinsche Überdeckung von $X(0)$ mit $d(U'_i)<\delta_1$, dann setzen wir

$$M'(i) = \{\chi \in K : U_i \cap \overline{W''_\chi} \neq \varnothing\},$$

$$M(i) = \{\chi \in K : U_i \cap \overline{W'_\chi} \neq \varnothing\}.$$

Nach Lemma (3.2.4) gibt es ein $\varrho_2 > 0$, so dass $X(\varrho_2) \subset \bigcup_{i\in I} U'_i$. Setzen wir $U_i = X(\varrho_2) \cap U'_i$ (das ist wieder eine Steinsche Menge), so wird durch die Daten $(U_i)_{i\in I}$, M, M', $(F_{\chi;i})$ (wobei $\Phi_\chi(U_i) \subset F_{\chi;i} \times K(\varrho_2)$ für $\chi \in M(i)$) eine Messüberdeckung bezüglich $\mathfrak{A}$ definiert.

Satz (3.3.4). — Wenn $\mathfrak{U}$ eine Messüberdeckung bezüglich $\mathfrak{A}$ ist, dann gibt es eine Messüberdeckung $\mathfrak{V}$ bezüglich $\mathfrak{A}$, die eine zulässige Verfeinerung von $\mathfrak{U}$ ist.

Beweis. — Sei $\mathfrak{U} = (U, M, M', F)$. Nach (2.3.2) gibt es zu jedem $i \in I$ eine offene Teilmenge U'_i von X mit $U_i \supset\supset U'_i$, so dass $(U'_i)_{i\in I}$ noch $X(0)$ überdeckt. Für $\chi \in M(i)$ gilt somit $\Phi_\chi(U'_i) \subset\subset F_{\chi;I} \times K(\varrho_0)$. Es gibt ein $r_0 > 0$, so dass für alle $\widetilde{G} \subset \mathbf{C}^{n_\chi} \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\widetilde{G}) < r_0,\ \widetilde{G} \cap \Phi_\chi(U'_i) \neq \varnothing \Longrightarrow \widetilde{G} \subset F_{\chi;i} \times K(\varrho_0).$$

Nach (3.1.4) (M2) folgt $W_\chi \supset U_i \supset\supset U'_i$. Auf die Situation $\Phi_\chi(W_\chi) \supset \Phi_\chi(U_i) \supset\supset \Phi_\chi(U'_i)$ wenden wir Lemma (3.2.1) an: Es gibt also ein $r_1 > 0$ so dass für alle $\widetilde{G} \subset F_{\chi;i} \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\widetilde{G}) < r_1,\ \widetilde{G} \cap \overline{\Phi_\chi(U'_i)} \neq \varnothing \Longrightarrow$$

1) $\widetilde{G} \cap \Phi_\chi(W_\chi) = \widetilde{G} \cap \Phi_\chi(U_i)$

2) $\widetilde{G} \subset\subset F_{\chi;i} \times K(\varrho_0)$

Sei $\chi_1, \chi_2 \in K$. Es gibt ein $\delta_0 > 0$, so dass für jede Menge $\widetilde{G}$, die im Definitionsbereich λ_{χ_1,χ_2} enthalten ist, gilt:

$$d(\widetilde{G}) < \delta_0 \Longrightarrow d(\lambda_{\chi_1,\chi_2}(\widetilde{G})) < r_0$$

Sei $(G_{\chi;i,j})_{j\in J'_{\chi;i}}$ eine endliche Familie von offenen achsenparallelen Quadern des $\mathbf{C}^{n_\chi}$ mit $d(G_{\chi;i,j}) < \inf(r_1, \delta_0)/\sqrt{2}$, die noch $F_{\chi;i}$ überdeckt; überdies sei $\varrho_1 > 0$ so klein gewählt, dass $d(K(\varrho_1)) < \inf(r_1, \delta_0)/\sqrt{2}$ ist, dann ist stets $d(G_{\chi;i,j} \times K(\varrho_1)) < \inf(r_1, \delta_0)$. Wir definieren

$$J_{\chi;i} = \{ j \in J'_{\chi;i} : (G_{\chi;i,j} \times K(\varrho_1)) \cap \overline{\Phi_\chi(U'_i)} \neq \emptyset \}.$$

Die Familie $G_{\chi;i,j} \times K(\varrho_1))_{j \in J_{\chi;i}}$ überdeckt $\overline{\Phi_\chi(U'_i \cap X(0))}$ und es gilt $G_{\chi;i,j} \times K(\varrho_1) \subset\subset F_{\chi;i} \times K(\varrho_0)$ für $j \in J_{\chi;j}$. Wenden wir darauf das Lebesguesche Lemma (2 3.3) an: Es gibt also ein $\lambda > 0$, so dass für alle $\widetilde{G} \subset F_{\chi;i} \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\widetilde{G}) < \lambda \text{ und } \widetilde{G} \cap \overline{\Phi_\chi(U'_i \cap X(0))} \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, j \in J_{\chi;i} \text{ mit } \widetilde{G} \subset\subset G_{\chi;i,j} \times K(\varrho_1).$$

Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, das $\Phi_\chi : W_\chi \to E_\chi \times K(\varrho_0)$ gleichmässig stetig ist. Es gibt also ein $\delta_1 > 0$, so dass für jedes $V \subset W_\chi$ gilt:

$$d(V) < \delta_1 \Longrightarrow d(\Phi_\chi(V)) < \lambda.$$

Es gibt jetzt ein $r_2 > 0$, so dass für jedes $V \subset X$ gilt:

$$d(V) < r_2,\ V \cap U'_i \neq \emptyset \Longrightarrow V \subset U_i.$$

Sei jetzt $(V'_j)_{j \in J}$ eine endliche Steinsche Überdeckung von $X(0)$ mit $d(V'_j) <$ $< \inf(r_2, \delta_1)$. Nach Lemma (3.2.4) gibt es ein $\varrho_2 > 0$, so dass $X(\varrho_2) \subset \bigcup_{j \in J} V'_j$. Wir setzen $V_j = V'_j \cap X(\varrho_2)$, dann ist $V = (V_j)_{j \in J}$ eine Steinsche Überdekkung von $X(\varrho_2)$. Es gibt eine Abbildung $\tau : J \to I$ mit $V_i \subset U_{\tau(j)}$. Wir setzen $B = \{(\chi, j) \in K \times J;\ \chi \in M(\tau(j))\}$, $N(j) = M(\tau(j))$, $N'(j) = M'(\tau(j))$. Sei jetzt $j \in J$ und $\chi \in M(\tau(j)) = N(j)$, dann ist $V_j \subset U_{\tau(j)} \subset W_\chi$. Da jetzt $d(\Phi_\chi(V_j)) < \lambda$ und $\Phi_\chi(V_j) \cap \Phi_\chi(U'_{\tau(j)} \cap X(0)) \neq \emptyset$ ist, gibt es ein $j' \in J_{\chi;\tau(j)}$ mit $\Phi_\chi(V_j) \subset\subset G_{\chi;\tau(j),j'} \times K(\varrho_1)$. Setzen wir $G_{\chi;\tau(j),j'} = \widetilde{G}_{\chi;j}$ und $(\widetilde{G}_{\chi;j})_{(\chi,j) \in B}$, dann ist, wie man leicht nachrechnet, (V, N, N', G) eine Messüberdeckung bezüglich $\mathfrak{A}$, die $\mathfrak{U} = (U, M, M', F)$ zulässig verfeinert.

SATZ (3.3.5). — Sei $(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha \in A}$ eine endliche Familie kohärenter $\mathcal{H}$-Moduln, s eine natürliche Zahl. Wenn $\mathfrak{U}$ eine Messüberdeckung bezüglich $\mathfrak{A}$ ist, dann gibt es eine Messüberdeckung $\mathfrak{V}$ bezüglich $\mathfrak{A}$ derart, dass das Paar $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$ eine s-privilegierte Verfeinerung bezüglich $(\mathcal{S}_\alpha)_{\alpha \in A}$ ist.

Beweis. — Sei $\mathfrak{U} = (U, M, M', F)$ und sei I die Indexmenge der Familie U. Nach (2.3.2) gibt es zu jedem $\iota \in I$ eine offene Teilmenge U'_ι von X mit $U_\iota \supset\supset U'_\iota$, so dass $(U'_\iota)_{\iota \in I}$ noch $X(0)$ überdeckt. Wenn $\boldsymbol{i} = (i_0, \dots, i_s)$ ein $(s+1)$-tupel von Indizes aus I ist, derart, dass $U_{\boldsymbol{i}} \neq \emptyset$ und wenn

$\chi \in M(i)$ ist, dann ist $\Phi_\chi(U_i') \subset\subset F_{\chi;i} \times K(\varrho_0)$ und es gilt:

1) Es gibt ein $r_0 > 0$, so dass für alle $\widetilde{G} \subset \mathbf{C}^{n_\chi} \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\widetilde{G}) < r_0, \ \widetilde{G} \cap \Phi_\chi(U_i') \neq \emptyset \Longrightarrow \widetilde{G} \subset\subset F_{\chi;i} \times K(\varrho_0).$$

Nach (3.1.4) (M2) folgt $W_\chi \supset U_i \supset\supset U_i'$. Auf die Situation

$$\Phi_\chi(W_\chi) \supset \Phi_\chi(U_i) \supset\supset \Phi_\chi(U_i')$$

wenden wir Lemma (3.2.1) an:

2) Es gibt ein $r_1 > 0$, so dass für alle $\widetilde{G} \subset F_{\chi;i} \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\widetilde{G}) < r_1, \ \widetilde{G} \cap \overline{\Phi_\chi(U')} \neq \emptyset$$

(1) $\widetilde{G} \cap \Phi_\chi(W_\chi) = \widetilde{G} \cap \Phi_\chi(U_i)$,

(2) $\widetilde{G} \supset\supset F_{\chi;i} \times K(\varrho_0)$

3) Es gibt ein $\delta_0 > 0$, so dass für jede Teilmenge $\widetilde{G}$ aus dem Definitionsbereich von λ_{χ_1,χ_2} gilt: $d(\widetilde{G}) < \delta_0 \Longrightarrow d(\lambda_{\chi_1,\chi_2}(\widetilde{G})) < r_0$. Wir setzen jetzt $I_\chi = \{\iota \in I: \chi \in M'(\iota)\}$, $F_\chi = (F_{\chi;\iota})_{\iota \in I}$. Nach (3.1.4) (M2) folgt $\bigcup_{\iota \in I_\chi} pr_1 \Phi_\chi(U_\iota) \subset\subset \bigcup_{\iota \in I_\chi} F_{\chi;\iota}$. Jetzt ist $F_\chi^{(s)}$ (vergleiche Anfang des Beweises zu (2.3.5)) eine endliche offene Überdeckung von $\bigcup_{\iota \in I_\chi} F_{\chi;\iota}$. Auf die Situation

$$\mathbf{C}^{n_\chi} \supset \bigcup_{\iota \in I_\chi} F_{\chi;\iota} \supset\supset \bigcup_{\iota \in I_\chi} pr_1 \Phi_\chi(U_\iota), \ F_\chi^{(s)}, \ h_{\chi,\alpha}: \mathcal{O}^{p_{\chi,\alpha}} \longrightarrow \mathcal{O}^{q_{\chi,\alpha}}$$

wird Lemma (2.3.4) angewandt: Es gibt eine endliche Familie $K_\chi = (K_{\chi,l})_{l \in \Lambda_\chi}$ von Polyzylindern, die noch $\overline{\bigcup_{\iota \in I} pr_1 \Phi_\chi(U_\iota)}$ überdeckt und eine eigentliche Verfeinerung von $F_\chi^{(s)}$ ist und es gibt eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1^\chi, \dots, \delta_m^\chi)$ und eine Abbildung $M_\chi: \Delta(\delta_1^\chi, \dots, \delta_m^\chi) \longrightarrow \mathbf{R}_+$ so dass die Aussage von (2.3.4) bezüglich der Familie $(h_{\chi,\alpha})_{\alpha \in A}$ gilt.

Die Polyzylinder $K_{\chi,l}$ werden noch so klein gewählt, dass $d(K_{\chi;l}) < \inf(r_1, \delta_0)/\sqrt{2}$. $\varrho_1 < \varrho_0$ werde so klein gewählt, dass $d(K(\varrho_1)) < \inf(r_1, \delta_0)/\sqrt{2}$ gilt. Somit gilt $d(K_{\chi;l} \times K(\varrho_1)) < \inf(r_1, \delta_0)$.

Wir machen die Polyradien von $K_{\chi;l}$ echt kleiner, erhalten Polyzylinder $K'_{\chi;l}$ mit $K'_{\chi;l} \subset\subset K_{\chi;l}$, so dass $K'_\chi = (K'_{\chi;l})_{l \in \Lambda_\chi}$ noch $\overline{\bigcup_{\iota \in I_\chi} pr_1 \Phi_\chi(U_\iota)}$ überdeckt. Wir setzen jetzt $\Lambda_{\chi;i} = \{l \in \Lambda_\chi: K'_{\chi;l} \times K(\varrho_1)) \cap \overline{\Phi_\chi(U_i')} \neq \emptyset\}$. Jetzt ist $(K'_{\chi;l} \times K(\varrho_1))_{l \in \Lambda_{\chi;i}}$ eine offene Überdeckung von $\overline{\Phi_\chi(U_i' \cap X(0))}$

und $K_{\chi;\iota} \times K(\varrho_1) \subset\subset F_{\chi;\iota} \times K(\varrho_0)$. Auf die Situation $F_{\chi;\iota} \times K(\varrho_0)$, $\overline{\Phi_\chi(U_\iota' \cap X(0))}$, $(K'_{\gamma;l} \times K(\varrho_1))_{l \in \Lambda_{\gamma;\iota}}$ wird das Lebesguesche Lemma (2.3.3) angewandt:

4) Es gibt ein $\lambda > 0$, so dass für alle $\widetilde{G} \subset F_{\chi;\iota} \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\widetilde{G}) < \lambda \text{ und } \widetilde{G} \cap \overline{\Phi_\chi(U_\iota' \cap X(0))} \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, l \in \Lambda_{\chi;\iota} \text{ mit } \widetilde{G} \subset K'_{\chi;\iota} \times K(\varrho_1).$$

5) Es gibt ein $\delta' > 0$ (hängt von $K'_{\chi;l} \subset\subset K_{\chi;l}$ *ab*), so dass für alle $\widetilde{G} \subset \mathbf{C}^n$ gilt:

$$d(\widetilde{G}) < \delta' \text{ und } \widetilde{G} \cap K'_{\chi;l} \neq \emptyset \Longrightarrow \widetilde{G} \subset K_{\chi;l}.$$

Sei $(G_{\chi;t})_{t \in T_\chi}$ eine offene Überdeckung von $\mathbf{C}^{n_\chi}$, gebildet aus achsenparallelen Quedern, so dass $d(G_{\chi;t}) < \delta'$ und $d(G_{\chi;t} \times K(\varrho_1)) < \inf(r_1, \delta_0)$ ist.

Wenn $(\chi, \iota) \in K \times I$ ist, dann setzen wir $T_{\chi;l} = \{t \in T_\chi : (G_{\chi;t} \times K(\varrho_1)) \cap \cap \overline{\Phi_\chi(U_\iota')} \neq \emptyset\}$. Die Familie $(G_{\chi;t} \times K(\varrho_1))_{t \in T_{\chi;\iota}}$ überdeckt $\overline{\Phi_\chi(U_\iota' \cap X(0))}$ und es ist $G_{\chi;t} \times K(\varrho_1) \subset\subset F_{\chi;\iota} \times K(\varrho_0)$ für alle $t \in T_{\gamma;\iota}$. Wir wenden das Lebesguesche Lemma (2.3.3) an:

6) Es gibt ein $\lambda' > 0$, so dass für jedes $\widetilde{G} \subset F_{\chi;\iota} \times K(\varrho_0)$ gilt:

$$d(\widetilde{G}) < \lambda' \text{ und } \widetilde{G} \cap \Phi_\chi(U_\iota' \cap X(0)) \neq \emptyset \Longrightarrow \exists\, t \in T_{\chi;\iota} \text{ mit } \widetilde{G} \subset\subset G_{\chi;t} \times K(\varrho_1)$$

7) Es gibt ein $\delta_1 > 0$ so dass für jedes $V \subset W_\chi$ gilt:

$$d(V) < \delta_1 \Longrightarrow d(\Phi_\chi(V)) < \inf(\lambda, \lambda', r_0).$$

8) Es gibt ein $r_2 > 0$, so dass für jedes $V \subset X$ gilt:

$$d(V) < r_2 \text{ und } V \cap U_\iota' \neq \emptyset \Longrightarrow V \subset U_\iota.$$

Sei $V = (V_\gamma)_{\gamma \in J}$ eine endliche Steinsche Überdeckung von $X(0)$ mit $d(V_\gamma) < \inf(r_2, \delta_1)$. Es gibt jetzt eine Abbildung $\tau : J \longrightarrow I$ mit $V_\gamma \cap U'_{\tau(\gamma)} \neq \emptyset$. Sei $\chi \in M(\tau(\gamma))$. Nach (7) gilt $\Phi_\chi(V_\gamma) < \inf(\lambda, \lambda', r_0)$. Wegen $\emptyset \neq \Phi_\chi(V_\gamma \cap \cup U'_{\tau(\gamma)}) \subset \Phi_\chi(V_\gamma) \cap \Phi_\chi(U'_{\tau(\gamma)})$ folgt aus (1), dass $\Phi_\chi(V_\gamma) \subset\subset F_{\chi;\tau(\gamma)} \times K(\varrho_0)$. Nach (6) gibt es ein $t(\gamma) \in T_{\chi;\tau(\gamma)}$ mit $\Phi_\chi(V_\gamma) \subset\subset G_{\chi;\tau(\gamma)} \times K(\varrho_1)$, also ist $pr_1(\Phi_\chi(V_\gamma) \subset\subset G_{\chi;\tau(\gamma)}$. Es ist noch $G_{\gamma;\tau(\gamma)} \subset\subset F_{\chi;\tau(\gamma)}$.

Wir setzen $G_{\chi;\tau(\gamma)} = G'_{\chi;\gamma}$, $N(\gamma) = M(\tau(\gamma))$, $N'(\gamma) = M'(\tau(\gamma))$,

$$B = \{(\chi, \gamma) \in K \times J : \chi \in M(\tau(\gamma))\}, \qquad G = (G'_{\chi;\gamma})_{(\gamma,\gamma) \in B},$$

dann ist das Paar $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V})$, wobei $\mathfrak{V} = (V, N, N', G)$ ist, eine zulässige s-privilegierte Verfeinerung.

Denn sei $j = (j_0, \ldots, j_s)$ ein $(s+1)$-tupel von Indizes aus J und $\chi \in N'(j)$, dann folgt wegen (8) $pr_1\, \Phi_\chi(V_j) \subset\subset G_{\chi;j}$, $d(G_{\chi;j}) < \delta'$. Jetzt gilt $\emptyset \neq \Phi_\gamma\, V_j \cap U'_{\tau(j)}) \subset \Phi_\chi(V_j) \cap \Phi_\gamma(U'_{\tau(j)})$. Nach (1) folgt $\Phi_\chi(V_j) \subset\subset F_{\chi;\tau(j)} \times K(\varrho_0)$ und nach (7) folgt $d(\Phi_\chi(V_j)) < \lambda$. Nach (4) gibt es ein $l \in \Lambda_{\chi;\tau(j)}$ mit $\Phi_\chi(V_j) \subset K'_{\chi;l} \times K(\varrho_1)$, also ist auch $pr_1(\Phi_\chi(V_j) \subset K'_{\chi;l}$. Nach (5) folgt $pr_1\, \Phi_\chi(V_j) \subset G_{\chi;j} \subset K_{\chi;l}$. Da auch $K_{\chi;l} \times K(\varrho_1) \subset F_{\chi;\tau(j)} \times K(\varrho_0)$ gilt, folgt somit $G_{\chi;j} \subset K_{\chi;l} \subset F_{\chi;\tau(j)}$ und $\Delta(\delta_1, \ldots, \delta_m) = \bigcap_{\chi \in K} \Delta(\delta_1^\chi, \ldots, \delta_m^\chi)$, ist eine verlangte Dreieksmenge.

3.4. Grauertnormen.

(3.4.1) Seien $\mathfrak{U} = (U, M, M', F)$ und $\mathfrak{V} = (V, N, N', G)$ zwei Messüberdeckungen bezüglich $\mathfrak{A}$ derart, dass $\mathfrak{V}$ eine zulässige Verfeinerung von $\mathfrak{U}$ ist. I beziehungsweise J sei die Indexmenge von U bzw. V und $\tau : J \to I$ sei die Verfeinerungsabbildung. Wenn $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$ ist (stets wird ϱ so klein vorausgesetzt, wie es in den Definition (3.1.4) und (3.1.5) gefordert wird.), dann bezeichne $U(\varrho)$ die Familie $(U_\iota \cap X(\varrho))_{\iota \in I}$. Sei p eine natürliche Zahl, $i = (i_0, \ldots, i_p)$ ein $(p+1)$ tupel von Indizes aus I. Mit $U_i(\varrho)$ wird die Menge $U_i \cap X(\varrho)$ bezeichnet. Mit $j = (j_0, \ldots, j_p)$ sei ein $(p+1)$-tupel von Indizes aus J bezeichnet derart, dass $\tau(j) = i$ ist.

Definition (3.4.2). — Sei $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$, $i \in I^{p+1}$, $\chi \in M(i)$ und $\xi \in \Gamma(U_i(\varrho), \mathcal{S})$. Es wird definiert:

(i) $\chi(\xi)$ bezeichne die Menge aller $\tilde{\xi} \in \Gamma(F_{\chi;i} \times K(\varrho), (\Phi_\chi)_*(\mathcal{S}))$ mit $\tilde{\xi} \mid \Phi_\chi(U_i(\varrho)) = (\Phi_\chi)_*(\xi)$

(ii) $$\|\xi\|_{U_i\varrho} = \sup_{\chi \in M(i)} \inf_{\tilde{\xi} \in \chi(\xi)} \|\tilde{\xi}\|_{F_{\chi;i}\varrho}$$

Anmerkung. — Wenn die Menge $\chi(\xi) = \emptyset$ ist, dann ist $\|\xi\|_{U_i\varrho} = \infty$.

Definition (3.4.3). — Wenn $\xi = (\xi_i) \in C^p(U(\varrho), \mathcal{S})$, dann wird $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\varrho} = \sup_{i \in I^{p+1}} \|\xi_i\|_{U_i\varrho}$ gesetzt.

Definition (3.4.4). — Sei $i \in I^{p+1}$, $\chi \in M(i)$ und $\eta \in C^q(U_i \cap V(\varrho), \mathcal{S}))$ Jetzt wird definiert:

(i) $J_\chi = \{\gamma \in J : \chi \in N(\gamma)\}$, $\quad \Phi_\chi(V) = (\Phi_\chi(V_\gamma))_{\gamma \in J_\chi}$.

(ii) $\chi(\eta)$ ist die Menge aller

$\tilde{\eta} \in C^q((F_{\chi;i} \cap G_{\gamma;\,\gamma})_{\gamma \in J_\chi} \times K(\varrho),\ (\Phi_\chi)_*(\mathcal{S}))$ mit

$$\tilde{\eta} \mid \Phi_\chi(U_i(\varrho)) \cap \Phi_\chi(V) = (\Phi_\chi)_*(\eta).$$

Bemerkung: Wenn $\chi \in M'(i)$, dann überdeckt $\Phi_\chi(V)$ die Menge $\Phi_\chi(U_i(\varrho))$. (Lemma (3.1.8)).

(iii) $$\| (\Phi_\chi)_*(\eta) \|_{U_i \mathfrak{V} \chi\varrho} = \inf_{\tilde{\eta} \in \chi(\eta)} \| \tilde{\eta} \|_{(F_{\chi;i} \cap G_{\chi;\gamma})_{\gamma \in J_\chi}\varrho}$$

(iv) $$\| \eta \|_{U_i \mathfrak{V} \varrho} = \sup_{\chi \in M(i)} \| (\Phi_\chi)_*(\eta) \|_{U_i \mathfrak{V} \chi\varrho}.$$

(3.4.5) — Sei X ein topologischer Raum, $(U_i)_{i \in I}$ und $(V_j)_{j \in J}$ zwei offene Überdeckungen von X, $\mathcal{S}$ eine Garbe von abelschen Gruppen, dann wird $C^{p,q}(U, V, \mathcal{S}) = \prod_{(i,j) \in I^{p+1} \times J^{q+1}} \Gamma(U_i \cap V_j, \mathcal{S})$ gesetzt. Oft schreiben wir nur $C^{p,q}(U, V)$, wenn klar ist in welcher Garbe die Werte liegen. Es gibt zwei Corandoperatoren

$$\partial : C^{p,q}(U, V) \longrightarrow C^{p,q+1}(U, V)$$

$$\delta : C^{p,q}(U, V) \longrightarrow C^{p+1,q}(U, V)$$

wobei ∂ bzw. δ der übliche Čechsche Corandoperator bezüglich der Indizes aus J bzw. I ist. Es ist wohlbekannt, dass die Familie $(C^{p,q}(U, V), \partial, \delta)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ ein Doppelkomplex ist.

DEFINITION (3.4.6). — Wenn $\eta = (\eta_{i,j}) \in C^{p,q}(U(\varrho), V(\varrho))$ dann wird definiert:

(i) $$\eta_i = (\eta_{i,j})_{j \in J^{q+1}}$$

(ii) $$\| \eta \|_{\mathfrak{U} \mathfrak{V} \varrho} = \sup_{i \in I^{p+1}} \| \eta_i \|_{U_i \mathfrak{V} \varrho}.$$

DEFINITION (3.4.7). Sei $i \in I^{p+1}$, $j \in J^{q+1}$, $\chi \in M(i) \cap N(j)$ und $\eta \in \Gamma(U_i(\varrho) \cap \cap V_j(\varrho), \mathcal{S})$, dann wird definiert:

(i) $\chi(\eta)$ ist die Menge aller $\tilde{\eta} \in \Gamma((F_{\chi;i} \cap G_{\chi;j}) \times K(\varrho), \mathcal{S})$ mit $\tilde{\eta} \mid \Phi_\chi(U_i(\varrho) \cap V_j(\varrho)) = (\Phi_\chi)_*(\eta)$.

(ii) $$\| \eta \|_{U_i V_j \varrho} = \sup_{\chi \in M(i) \cap N(j)} \inf_{\tilde{\eta} \in \chi(\eta)} \| \tilde{\eta} \|_{F_{\chi;i} \cap G_{\chi;j}\varrho}.$$

Satz (3.4.8). — (i) Für jedes $\eta \in C^q(U_i \cap V(\varrho), \mathcal{S})$ gilt:

$$\|\eta\|_{U_i \mathfrak{V} \varrho} = \sup_{j \in J^{q+1}} \|\eta_j\|_{U_i V_j \varrho}$$

(ii) Für jedes $\eta \in C^{p,q}(U(\varrho), V(\varrho), \mathcal{S})$ gilt:

$$\|\eta\|_{\mathfrak{U} \mathfrak{V} \varrho} = \sup_{i \in I^{p+1}} \sup_{j \in J^{q+1}} \|\eta_{i,j}\|_{U_i V_j \varrho}.$$

Beweis. — (i) folgt sofort aus den Definitionen (3.4.4) und (3.4.7) und (ii) folgt unmittelbar aus (i).

Satz (3.4.9). — Wenn $\eta \in C^p(U(\varrho), \mathcal{S})$, dann $\|\eta\|_{\mathfrak{U} \varrho} \geq \|\eta\|_{\mathfrak{V} \varrho}$.

Beweis. — Die Behauptung folgt sofort aus den Definition (3.1.6) und (3.4.2).

3.5 Der Lerayssche Satz von Grauert.

Wie in den vorhergehenden Nummern werden der Bequemlichkeit halber alle Sätze bezüglich $t = 0$ formuliert und bewiesen. Für die folgenden Betrachtungen sei $\mathfrak{A}$ ein fest vorgegebener Messatlas bezüglich $(0, \varrho_0)$. Alle Messüberdeckungen dieser Nummer sind Messüberdeckungen bezüglich $\mathfrak{A}$. $\mathcal{S}$ sei eine fest vorgegebene kohärente Garbe auf X.

(3.5.1) Sei $\mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{U}_\mu \supset\supset \mathfrak{U}' \supset \mathfrak{V} \supset\supset \mathfrak{V}_\nu \supset\supset \mathfrak{V}'$ eine Kette von Messüberdeckungen:

$$\mathfrak{U} = (U, M, M', F), \quad \mathfrak{U}_\mu = (U^{(\mu)}, M, M', F^{(\mu)}), \quad \mathfrak{U}' = (U', M, M', F')$$

$$\mathfrak{V} = (V, N, N', G), \quad \mathfrak{V}_\nu = (V^{(\nu)}, N, N', G^{(\nu)}), \quad \mathfrak{V}' = (V', N, N', G')$$

Wir benutzen für die in (3.1.4) (ii) geforderten Abbildungen der Messüberdeckungen $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_\mu, \mathfrak{U}'$ (bzw. $\mathfrak{V}, \mathfrak{V}_\nu, \mathfrak{V}'$) stets die Buchstaben M und M' (bzw. N und N'). Wegen (3.1.5) (V3) entstehen dadurch keine Missverständnisse. Die Familien $U = (U_\iota)$, $U^{(\mu)} = (U_\iota^{(\mu)})$, $U' = (U_\iota')$, $V = (V_\gamma)$, $V^{(\nu)} = (V_\gamma^{(\nu)})$ $V' = (V_\gamma')$ haben der Reihe nach die Indexmenge, $I, I^{(\mu)}, I', J, J^{(\nu)}$ und J'. Die Verfeinerungsabbildungen werden stets mit τ bezeichnet. Es wird noch folgende Vereinbarung getroffen: Wenn i eine endliche Familie von Indizes aus I' oder $I^{(\mu)}$ ist, dann wird $\tau(i)$ wieder mit i bezeichnet.

SATZ (3.5.2). — Voraussetzung: Sei $\mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{U}' \supset \mathfrak{V} \supset\supset \mathfrak{V}'$ eine Kette von Messüberdeckungen, p, q seien natürliche Zahlen; $i = (i'_0, \dots, i'_p)$ ein $(p+1)$-tupel von Indizes aus I'.

Behauptung: Es gibt eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und eine Abbildung $M : \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \to \mathbf{R}_+$, so dass für jedes hinreiched kleine $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ die Aussage gilt:

(i) Wenn $q = 0$, dann gilt für jedes $\xi \in Z^0(U_i(\varrho) \cap V, \mathcal{S})$ mit $\|\xi\|_{U_i \mathfrak{V} \varrho} < \infty$ die Ungleichung

$$\| \xi \mid U'_i(\varrho) \|_{U'_i \varrho} \leq M(\varrho) \| \xi \|_{U_i \mathfrak{V} \varrho}$$

(ii) Wenn $q > 0$, dann gibt es zu jeden $\xi \in Z^q(U_i(\varrho) \cap V, \mathcal{S})$ mit $\|\xi\|_{U_i \mathfrak{V} \varrho} < \infty$ ein $\eta \in C^{q-1}(U'_i(\varrho) \cap V', \mathcal{S})$, derart, dass $\delta\eta = \xi \mid U'_i(\varrho) \cap V'$ und $\|\eta\|_{U'_i \mathfrak{V}' \varrho} \leq M(\varrho) \|\xi\|_{U_i \mathfrak{V} \varrho}$ ist.

Zusatz: Wenn $\mathcal{S}$ t_1-torsionsrecht ist, dann kann M von ϱ_1 unabhängig gewählt werden.

Beweis. — Sei $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{U}_1 \supset \mathfrak{U}_2 \supset \mathfrak{U}' \supset \mathfrak{V} \supset \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2 \supset \mathfrak{V}'$ die vorausgesetzte Kette von Messüberdeckungen. Wir setzen $U_i(\varrho) \neq \emptyset$ voraus, dann gibt es nach (3.1.4) (M1) ein $k \in M'(i)$. Lemma (3.1.8) auf die Situation $\mathfrak{U}_1 \supset \mathfrak{V}_1$, i, χ angewandt, ergibt: $(F^{(1)}_{\chi;i} \times K(\varrho)) \cap \Phi_\chi(W_k) \subset\subset \bigcup_{\gamma \in J^{(1)}_\chi} (G^{(1)}_{\chi;\gamma} \times K(\varrho))$. Auf die Situation $F^{(1)}_{\chi;i}$, $(F^{(1)}_{\chi;i} \times K(\varrho)) \cap \Phi_\chi(W_\chi)$, $(G^{(1)}_{\chi;\gamma} \times K(\varrho))_{\gamma \in J^{(1)}_\chi}$ das Auffüllemma (3.2.5) angewandt, liefert eine Überdeckung $(\widetilde{G}_{k;\gamma} \times K(\varrho))_{\gamma \in \tilde{J}_k}$ mit den in (3.2.5) genannten Eigenschaften. Auf die Situation $E_\chi \supset\supset F^{(1)}_{\chi;i} \supset\supset F^{(2)}_{\chi;i}$, $(\widetilde{G}_{\chi;\gamma})_{\gamma \in \tilde{J}_\chi}$, $(\Phi_\chi)_*(\mathcal{S})$ wird Theorem (2.4.1) angewandt. Seien $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, $\Delta(\delta_1, \dots$ $\dots, \delta_m)$, $M_q : \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \to \mathbf{R}_+$ die in (2.4.1) versprochenen Daten. Vorübergehend werden folgende Bezeichnungen eingeführt: Die Familie $(F^{(n)}_{\chi;i} \cap$ $\cap\, G^{(n)}_{\chi;\gamma})_{\gamma \in J(n)}$ bezüglich der Messüberdeckungen $\mathfrak{U}_n$, $\mathfrak{V}_n$ und bezüglich $i \in I^{p+1}_n$ wird mit $(H^{(n)}_{\chi;\gamma})$ bezeichnet. Analogerweise bezeichnet $(\widetilde{H}^{(n)}_{\chi;\gamma})$ die Familie $(F^{(n)}_{\chi;i} \cap \widetilde{G}_{\chi;\gamma})_{\gamma \in \tilde{J}_\chi}$. An die Messüberdeckung $\mathfrak{V}_2$ werde noch die Anforderung gestellt, dass die Familie $(H^{(2)}_{\chi;\gamma})$ eine Verfeinerung von $(V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ ist. Sei jetzt $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und $\xi \in Z^q(U_i(\varrho) \cap V, \mathcal{S})$ mit $\|\xi\|_{U_i \mathfrak{V} \varrho} < \infty$. Es ist $\|(\Phi_\chi)_*(\xi)\|_{U_i \mathfrak{V} \chi \varrho} < \infty$ (3.4.4) und nach Definition von $\chi(\xi)$ (3.4.4) gibt es ein $\tilde{\xi} \in C^q((H_{\chi;\gamma}) \times K(\varrho), (\Phi_\chi)_*(\mathcal{S}))$ mit $\tilde{\xi} \mid \Phi_\chi U_i(\varrho)) \cap \Phi_\chi(V) = (\Phi_\chi)_*(\xi)$ und $\|\xi\|_{(H_{\chi;\gamma})\varrho} \leq 2 \|(\Phi_\chi)_*(\xi)\|_{U_i \mathfrak{V} \chi \varrho}$.

1. Verfeinerung (Beschränkung zum Cozyklus): Um wieder einen Cozyklus zu erhalten, gehen wir zu den feineren Messüberdeckungen $\mathfrak{U}_1 \supset \mathfrak{V}_1$ über.

Es wird $\tilde{\xi}_1 = \tilde{\xi} \mid (H^{(1)}_{\chi;\gamma}) \times K(\varrho)$ gesetzt und es ist $\| \tilde{\xi}_1 \|_{(H^{(1)}_{\chi;\gamma})\varrho} \leq \| \tilde{\xi} \|_{(H_{\chi;\gamma})\varrho}$.

Wegen (3.1.5) (V 4) gilt: $\xi_1 \in Z^q((H^{(1)}_{\chi;\gamma}) \times K(\varrho), (\Phi_k)_*(\mathcal{S}))$.

Bemerkung: Die Familie $(G^{(1)}_{\chi;\gamma} \times K(\varrho))_{\gamma \in J^{(1)}_\chi}$ überdeckt nicht notwendigerweise $F^{(1)}_{\chi;i} \times K(\varrho)$. Wegen dem Auffüllemma (3.2.5) lässt sich ξ_1 als Cozyklus aus $Z^q((H^{(1)}_{\chi;\gamma}) \times K(\varrho), (\Phi_\chi)_*(\mathcal{S}))$ auffassen, und es ist

$$\| \xi_1 \|_{(H^{(1)}_{\chi;\gamma})\varrho} = \| \xi_1 \|_{(\tilde{H}^{(1)}_{\chi;\gamma})\varrho}.$$

2. Verfeinerung: Um Theorem (2.4.1) anwerden zu können, benutzen wir die Messüberdeckungskette $\mathfrak{U}_1 \supset \mathfrak{U}_2 \supset \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}_2$.

Nach Theorem (2.4.1) folgt jetzt:

(i) Für $q = 0$ gilt: $\| \xi_1 \mid D_2 \times K(\varrho) \|_{D_2\varrho} \leq M(\varrho) \| \xi_1 \|_{(\tilde{H}^{(1)}_{\chi;\gamma})\varrho}$ dabei wurde $\bigcup\limits_\gamma H^{(2)}_{\chi;\gamma} = D_2$ gesetzt.

(ii) Für $q > 0$ gilt: Es gibt ein $\tilde{\eta} \in C^{q-1}((H^{(2)}_{\chi;\gamma}) \times K(\varrho), (\Phi_\chi)_*(\mathcal{S}))$ mit $\delta\tilde{\eta} = \xi_1 \mid (H^{(2)}_{\chi;\gamma}) \times K(\varrho)$ und $\| \tilde{\eta} \|_{(H^{(2)}_{\chi;\gamma})\varrho} \leq M(\varrho) \| \xi_1 \|_{(H^{(1)}_{\chi;\gamma})\varrho}$.

Lemma (3.1.8) auf die Situation $\mathfrak{V}_2 \subset \mathfrak{U}_2, i, \chi$ angewandt ergibt: Für alle $\gamma \in J$ mit $\chi \notin N(\gamma) \Longrightarrow U^{(2)}_i(\varrho) \cap V^{(2)}_\gamma = \emptyset$

(i) Für $q = 0$ gilt deswegen: Der Schnitt $\xi_1 \mid D_2 \times K(\varrho)$ definiert einen Schnitt $\xi^* \in \Gamma(U^{(2)}_i(\varrho), \mathcal{S})$. Offensichtlich ist $\xi^* \mid U'_i(\varrho) = \xi \mid U'_i(\varrho)$. Damit haben wir die Abschätzung:

$$\| \xi_1 \mid D_2 \times K(\varrho) \|_{D_2\varrho} \leq 2M(\varrho) \| \xi \|_{U_i \mathfrak{V} \varrho}.$$

(ii) Für $q > 0$ gilt deswegen: Die Cokette $\tilde{\eta}$ definiert eine Cokette $\eta^* \in C^{q-1}(U^{(2)}_i(\varrho) \cap V^{(2)}, \mathcal{S})$. Es wird jetzt $\eta = \eta^* \mid U'_i(\varrho) \cap V'$ gesetzt. Damit haben wir die Abschätzung:

$$\| \tilde{\eta} \|_{(H^{(2)}_{\chi;\gamma})\varrho} \leq 2M(\varrho) \| \xi \|_{U_i \mathfrak{V} \varrho}.$$

3. Verfeinerung: Um das Corollar (1.1.10) anwenden zu können, benutzen wir die Messüberdeckungskette $\mathfrak{U}_2 \supset \mathfrak{U}' \supset \mathfrak{V}_2 \supset \mathfrak{V}'$.

Sei jetzt $\chi_1 \in M'(i)$. Nach (3.1.5) (V5) und (3.1.4) (M2) folgt:

(i) Für $q = 0$: $\lambda_{\chi,\chi_1}(D' \times K(\varrho)) \subset D_2 \times K(\varrho) \subset\subset E_\chi \times K(\varrho_0)$. Dabei wurde $\bigcup_\gamma H'_{\chi;\gamma} = D'$ gesetzt.

Nach Corollar (1.1.10) gibt es ein $c > 0$ mit

$$\| (\Phi_{\chi_1})_* (\xi^* \mid U'(\varrho) \|_{U'_i \chi_1 \varrho} \leq c \| \xi_1 \mid D_2 \times K(\varrho) \|_{D_2 \varrho}$$

und insgesamt hat man also

$$\| \xi^* \mid U_i'(\varrho) \|_{U'_i \varrho} \leq 2\, cM(\varrho) \| \xi \|_{U_i \mathfrak{V} \varrho}.$$

(ii) Für $q > 0$: Sei j ein q-tupel von Indizes aus J'. Die Menge $F^{(n)}_{\chi;i} \cap G^{(n)}_{\chi;j}$ wird mit $H^{(n)}_{\chi;j}$ bezeichnet. Damit gilt:

$$\lambda_{\chi,\chi_1}(H'_{\chi_1;j} \times K(\varrho)) \subset H^{(2)}_{\chi;j} \times K(\varrho) \subset\subset E_\chi \times K(\varrho_0).$$

Nach Corollar (1.1.10) gibt es ein $c > 0$ mit $\| (\Phi_{\chi_1})_* (\eta) \|_{U'_i \mathfrak{V}' \chi_1 \varrho} \leq c \| \eta \|_{(H^{(2)}_{\chi;\gamma})\varrho}$ und insgesamt hat man also $\| \eta \|_{U'_i \mathfrak{V} \varrho} \leq 2cM(\varrho) \| \xi \|_{U_i \mathfrak{V} \varrho}$.

THEOREM (3.5.3) (Leray-Grauert). — Voraussetzung:

$$\mathfrak{V}' \subset\subset \mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}' \subset\subset \mathfrak{U} \quad \text{Messüberdeckungskette}$$

Behauptung: zu jeder natürlichen Zahl p gibt es eine Dreicksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und zwei Abbildungen $M: \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \to \mathbf{R}_+$, $N: \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \to \mathbf{R}^+$, so dass für jedes hinreichend kleine $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ die Aussage gilt:

Für jedes $\xi \in Z^p(V(\varrho), \mathcal{S})$ mit $\| \xi \|_{\mathfrak{V}\varrho} < \infty$ gibt es ein $\xi' \in Z^p(U'(\varrho), \mathcal{S})$ und ein $\eta \in C^{p-1}(V'(\varrho), \mathcal{S})$ mit $\xi' = \xi + \delta\eta$ auf V', $\| \xi' \|_{\mathfrak{U}'\varrho} \leq M(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{V}\varrho}$ und $\| \eta \|_{\mathfrak{V}'\varrho} \leq N(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{V}\varrho}$.

Zusatz: Wenn $\mathcal{S}$ t_1-torsionsrecht ist, dann kann M von ϱ_1 unabhängig gewählt werden.

Beweis. — Aus Satz (3.5.2) erhält man sofort

LEMMA (*). — Voraussetzung:

$$\mathfrak{V}' \subset\subset \mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}' \subset\subset \mathfrak{U} \quad \text{Messüberdeckungskette}$$

Behauptung: Zu jedem Paar natürlicher Zahlen (p, q) gibt es eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1,\ldots,\delta_m)$ und eine von ϱ_1 unabhängige Abbildung $M : \Delta(\delta_1,\ldots,\delta_m) \longrightarrow \longrightarrow \mathbf{R}_+$ so dass für jedes hinreichend kleine $\varrho \in \Delta(\delta_1, \ldots, \delta_m)$ die Aussagen gelten:

(i) Für $q = 0$ gilt: Jedes $\xi \in C^{p,0}(U(\varrho), V(\varrho))$ mit $\partial\xi = 0$, $\| \xi \|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\,\varrho} < \infty$ lässt sich das Element aus $C^p(U'(\varrho), \mathcal{S})$ auffassen und es gilt

$$\| \xi \|_{\mathfrak{U}'\,\varrho} \leq M(\varrho)\, \| \xi \|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\,\varrho}$$

(ii) Für $q > 0$ gilt· Zu jedem $\xi \in C^{p,q}(U(\varrho), V(\varrho))$ mit $\partial\xi = 0$ und $\| \xi \|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\,\varrho} < \infty$ gibt es ein $\eta \in C^{p,q-1}(U'(\varrho), V'(\varrho))$ so, dass $\partial\eta = \xi$ in $C^{p,q}(U'(\varrho), V'(\varrho))$ und $\| \eta \|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}'\varrho} \leq M(\varrho)\, \| \xi \|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\,\varrho}$ gilt.

Beweis zu Lemma (*). — Nach Satz (3.5.2) gibt es zu jedem $i \in I^{p+1}$ eine Dreiecksmenge Δ_i une eine von ϱ_1 unabhängige Abbildung $M_i : \Delta_i \longrightarrow \mathbf{R}_+$, sa dass die Aussage von (3.5.2) gilt. Es wird $\Delta = \bigcap_{i \in I^{p+1}} \Delta_i$ und $M = \sup_{i \in I^{p+1}} M_i$ gesetzt.

Sei jetzt $\varrho \in \Delta$ (ϱ hinreichend klein) und $\xi = (\xi_{i,j}) \in C^{p,q}(U(\varrho), V(\varrho))$ mit $\partial\xi = 0$ und $\| \xi \|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\,\varrho} < \infty$. Setzen wir $\xi_i = (\xi_{i,j})_{j \in J^{q+1}}$, dann ist $\xi_i \in \in Z^q(U_i(\varrho) \cap V, \mathcal{S})$ und $\| \xi_i \|_{U_i \mathfrak{V}\varrho} \leq \| \xi \|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\,\varrho}$. Nach Sat (3.5.2) folgt:

(i) Für $q = 0$ gilt $\| \xi_i |\, U_i'(\varrho) \|_{U_{i\varrho}'} \leq M(\varrho)\, \| \xi_i \|_{U_i \mathfrak{V}\,\varrho}$

(ii) Für $q > 0$ gilt: Es gibt ein $\eta_i \in C^{q-1}(U_i'(\varrho) \cap V', \mathcal{S})$ mit $\delta\eta_i = \xi_i \,|\, U_i'(\varrho) \cap V'$ und $\| \eta \|_{U_i' \mathfrak{V}'\varrho} \leq M(\varrho)\, \| \xi_i \|_{U_i \mathfrak{V}\,\varrho}$.

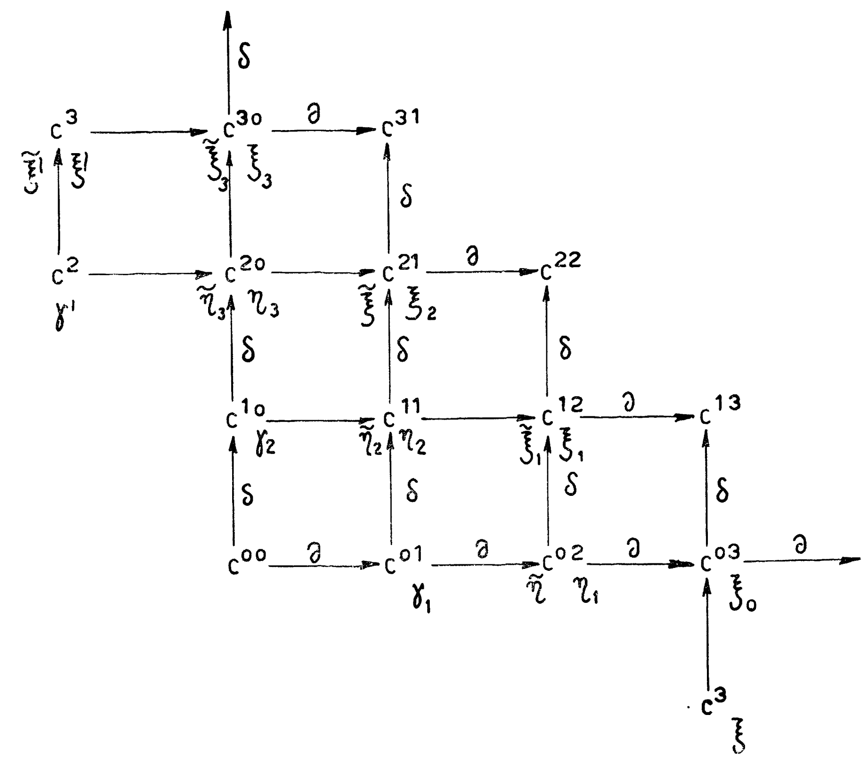
Setzen wir noch $\eta = (\eta_i)_{i \in I^{p+1}}$, so folgt aus (i) und (ii) sofort das Lemma (*).

Nun zum Beweis von (3.5.3). Es sei

$$\mathfrak{U}' \subset\subset \mathfrak{V}_p \subset\subset \mathfrak{V}_{p-1} \subset\subset \ldots \subset\subset \mathfrak{V}_1 \subset\subset \mathfrak{V}_0 \subset\subset \mathfrak{V} \subset$$
$$\subset \mathfrak{U}' \subset\subset \mathfrak{U}_p \subset\subset \mathfrak{U}_{p-1} \subset\subset \ldots \subset\subset \mathfrak{U}_1 \subset\subset \mathfrak{U}$$

die vorausgesetzte Messüberdeckungskette. Lemma (*) wird jetzt endlich oft mal angewandt. Für diese endlich vielen Anwendungen gibt es simultan eine Dreiecksmenge Δ und eine Abbildung $P : \Delta \longrightarrow \mathbf{R}_+$, wie sie in Lemma (*) behauptet sind.

Es ist zweckmässig, den Gang des Beweises am folgende Diagramm für den Fall $p = 3$ zu verfolgen:



Sei $\varrho \in \varDelta$, und sei $\xi = (\xi_{j_0 \dots j_p}) \in Z^p(V(\varrho), \mathcal{S})$ mit $\| \xi \|_{\mathfrak{V}\varrho} < \infty$. Es wird jetzt

$$\xi_0 \in C^{0,p}(U(\varrho), V(\varrho)),$$

$$\xi_\nu \in C^{\nu, p-\nu}(U_\nu(\varrho), V_\nu(\varrho)), \qquad 1 \leq \nu \leq p$$

$$\eta_\nu \in C^{\nu-1, p-\nu}(U_\nu(\varrho), V_\nu(\varrho)), \quad 1 \leq \nu \leq p$$

$$M_\nu : \varDelta(\delta_1, \dots, \delta_m) \to \mathbf{R}_+, \quad 0 \leq \nu \leq p$$

$$M_\nu' : \varDelta(\delta_1, \dots, \delta_m) \to \mathbf{R}_+, \quad 1 \leq \nu \leq p$$

induktiv definiert, derart $\partial \eta_\nu = \xi_{\nu-1}$, $\| \xi_\nu \|_{\mathfrak{U}_\nu \mathfrak{V}_\nu \varrho} \leq M_\nu(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{V}\varrho}$ und $\| \eta_\nu \|_{\mathfrak{U}_\nu \mathfrak{V}_\nu \varrho} \leq M_\nu'(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{V}\varrho}$ gilt.

Induktionsanfang: Es wird $\xi_0 = (\xi_{i_0 j_0 \dots j_p})$ mit $\xi_{i_0 j_0 \dots j_p} = \xi_{i_0 j_0 \dots j_p} \mid U_{i_0} \cap V_{j_0 \dots j_p}$ gesetzt. Jetzt ist $\| \xi_0 \|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\varrho} \leq \| \xi \|_{\mathfrak{V}\varrho}$, somit kann $M_0 = 1$ gesetzt werden. Offensichtlich gilt $\partial \xi_0 = 0$. Nach Lemma (*), angewandt auf $\mathfrak{V}_1 \subset\subset \mathfrak{V} \subset \mathfrak{U}_1 \subset\subset \mathfrak{U}$, gibt es ein $\eta_1 \in C^{0, p-1}(U_1(\varrho), V_1(\varrho))$ mit

$\partial \eta_1 = \xi_0$ und $\| \eta_1 \|_{\mathfrak{U}_1 \mathfrak{V}_1 \varrho} \leq P_1(\varrho) \| \xi_0 \|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}\varrho}$. Somit gilt $\| \eta_1 \|_{\mathfrak{U}_1 \mathfrak{V}_1 \varrho} \leq$ $\leq P(\varrho) M_0(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{V}\varrho}$ und es wird $M_1'(\varrho) = P(\varrho) M_0(\varrho)$ gesetzt.

Induktionschritt: Für $\nu > 1$ sei bereits $\eta_{\nu-1}, \xi_{\nu-2}, M_{\nu-2}, M'_{\nu-1}$ definiert. Dann wird $\xi_{\nu-1} = \delta \eta_{\nu-1}$ gesetzt. Offensichtlich gilt $\| \xi_{\nu-1} \|_{\mathfrak{U}_{\nu-1} \mathfrak{V}_{\nu-1} \varrho} \leq$ $\leq (\nu-1) \| \eta_{\nu-1} \|_{\mathfrak{U}_{\nu-1} \mathfrak{V}_{\nu-1} \varrho}$ und $\partial \xi_{\nu-1} = 0$. Damit gilt $\| \xi_{\nu-1} \|_{\mathfrak{U}_{\nu-1} \mathfrak{V}_{\nu-1} \varrho} \leq$ $\leq (\nu - 1) M'_{\nu-1}(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{V}\varrho}$ und es wird $M_{\nu-1}(\varrho) = (\nu - 1) M'_{\nu-1}(\varrho)$ gesetzt. Nach Lemma (*), angewandt auf $\mathfrak{V}_\nu \subset\subset \mathfrak{V}_{\nu-1} \subset \mathfrak{U}_\nu \subset\subset \mathfrak{U}_{\nu-1}$, gibt es ein $\eta_\nu \in C^{\nu-1, p-\nu}(U_\nu(\varrho), V_\nu(\varrho))$ mit $\partial \eta_\nu = \xi_{\nu-1}$ und

$$\| \eta_\nu \|_{\mathfrak{U}_\nu \mathfrak{V}_\nu \varrho} \leq P(\varrho) \| \xi \|_{\nu-1\, \mathfrak{V}_{\nu-1} \varrho}.$$

Somit gilt $\| \eta_\nu \|_{\mathfrak{U}_\nu \mathfrak{V}_\nu \varrho} \leq P(\varrho) M_{\nu-1}(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{V}\varrho}$ und es wird $M_\nu'(\varrho) =$ $= P(\varrho) M_{\nu-1}(\varrho)$ gesetzt. Für $\nu = p$ gilt offensichtlich $\partial \xi_p = 0$ und $\delta \xi_p = 0$. Nach Lemma (*), angewandt auf $\mathfrak{V}' \subset\subset \mathfrak{V}_p \subset \mathfrak{U}' \subset\subset \mathfrak{U}_p$, folgt: ξ_p lässt sich als Cozyklus ξ' aus $Z^p(U'(\varrho), \mathcal{S})$ auffassen und es gilt die Ungleichung

$$\| \xi' \|_{\mathfrak{U}' \varrho} \leq P(\varrho) \| \xi_p \|_{\mathfrak{U}_p \mathfrak{V}_p \varrho}.$$

Somit gilt $\| \xi' \|_{\mathfrak{U}' \varrho} \leq P(\varrho) M_p(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{V}\varrho}$ und es wird $M(\varrho) = P(\varrho) M_p(\varrho)$ gesetzt.

Es werden folgende Zahlen induktiv definiert: $\sigma_1 = +1$ und $\sigma_\nu =$ $= \sigma_{\nu-1}(-1)^{\nu-1}$ für $2 \leq \nu \leq p$. Jetzt wird

$$\tilde{\eta}_\nu = \sigma_\nu (\xi_{\iota_0 \dots \iota_{\nu-1} j_0 \dots j_{p-\nu}}) \text{ aus } C^{\nu-1, p-\nu}(V(\varrho), V(\varrho)) \qquad 1 \leq \nu \leq p$$

gesetzt. Damit gilt $\partial \tilde{\eta}_1 = \xi_0$ und $\partial \tilde{\eta}_\nu = \delta \tilde{\eta}_{\nu-1}$, $2 \leq \nu \leq p$. Denn:

$$(\partial \tilde{\eta}_1)_{\iota_0 j_0 \dots j_p} = \sum_{\chi=0}^{p} (-1)^\chi \xi_{\iota_0 j_0 \dots \hat{j}_\chi \dots j_p}$$

$$= \xi_{\hat{\iota}_0 j_0 \dots j_p} - \left(\xi_{\hat{\iota}_0 j_0 \dots j_p} + \sum_{\chi=0}^{p} (-1)^{\chi+1} \xi_{\iota_0 j_0 \dots \hat{j}_\chi \dots j_p} \right)$$

$$= \xi_{j_0 \dots j_p} \mid V_{\iota_0} \cap V_{j_0 \dots j_p}.$$

$$(\delta \tilde{\eta}_{\nu-1} - \partial \tilde{\eta}_\nu)_{\iota_0 \dots \iota_{\nu-1} j_0 \dots j_{p-\nu+1}} =$$

$$= \sigma_{\nu-1} \sum_{\chi=0}^{\nu-1} (-1)^\chi \xi_{\iota_0 \dots \hat{\iota}_\chi \dots \iota_{\nu-1} j_0 \dots j_{p-\nu+1}}$$

$$- \sigma_\nu \sum_{\nu=0}^{p-\nu+1} (-1)^{\chi+\nu} \xi_{\iota_0 \dots \iota_{\nu-1} j_0 \dots \hat{j}_\chi \dots j_{p-\nu+1}}$$

$$= \sigma_{\nu-1} \left(\sum_{\chi=0}^{\nu-1} (-1)^\chi \xi_{\iota_0 \dots \hat{\iota}_\chi \dots \iota_{\nu-1} \dots j_{p-\nu+1}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\chi=0}^{p-\nu+1} (-1)^{\chi+\nu} \xi_{\iota_0 \dots \iota_{\nu-1} j_0 \dots \hat{j}_\chi \dots j_{p-\nu+1}} \right) = 0.$$

Jetzt wird $\delta \widetilde{\eta}_\nu = \widetilde{\xi}$, $1 \leq \nu \leq p$ gesetzt. Wegen

$$(\delta \widetilde{\eta}_p)_{\iota_0 \ldots \iota_p j_0} = \sigma_p \sum_{\chi=0}^{p} (-1)^\chi \xi_{\iota_0 \ldots \hat{\iota}_\chi \ldots \iota_p j_0}$$

$$= \sigma_p \left(\sum_{\chi=0}^{p} (-1)^\chi \xi_{\iota_0 \ldots \hat{\iota}_\chi \ldots \iota_p j_0} + (-1)^p \xi_{\iota_0 \ldots \iota_p \hat{j}_0} \right) +$$

$$+ \sigma_p (-1)^{p+1} \xi_{\iota_0 \ldots \iota_p \hat{j}_0}$$

$$= \sigma_p (-1)^{p+1} \xi_{\iota_0 \ldots \iota_p} \mid V_{j_0} \cap V_{\iota_0 \ldots \iota_p}$$

folgt $\widetilde{\xi}_p = \sigma_p (-1)^{p+1} \xi_0$ in $C^{p,0}(V(\varrho), V(\varrho))$, $\widetilde{\xi}_p$ lässt sich als Cozyklus $\widetilde{\xi}'$ in $C^p(V(\varrho), \mathcal{S})$ auffassen, und damit hat man $\widetilde{\xi}' = \sigma_p (-1)^{p+1} \xi$ in $C^p(V(\varrho), \mathcal{S})$. Jetzt werden die $\widetilde{\eta}_\nu$ so beschränkt, dass $\widetilde{\eta}_1 \in C^{0,p-1}(V(\varrho), V_1(\varrho))$ und $\widetilde{\eta}_\nu \in C^{\nu-1, p-\nu}(V_{\nu-2}(\varrho), V_\nu(\varrho))$, $2 \leq \nu \leq p$ ist. Jetzt gilt offensichtlich $\| \widetilde{\eta}_1 \|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}_1 \varrho} \leq$ $\leq \| \xi \|_{\mathfrak{V} \varrho}$ und $\| \widetilde{\eta}_\nu \|_{\mathfrak{V}_{\nu-2} \mathfrak{V}_\nu \varrho} \leq \| \xi \|_{\mathfrak{V} \varrho}$, $2 \leq \nu \leq p$. Es wird jetzt

$$\gamma_\nu \in C^{\nu-1, p-\nu-1}(V_{\nu-1}(\varrho), V_{\nu+1}(\varrho)), \qquad 1 \leq \nu \leq p-1$$

$$N_\nu : \Delta(\delta_1, \ldots, \delta_m) \rightarrow \mathbf{R}_+ , \qquad 1 \leq \nu \leq p-1$$

$$N_\nu' : \Delta(\delta_1, \ldots, \delta_m) \rightarrow \mathbf{R}_+ , \qquad 1 \leq \nu \leq p$$

induktiv definiert, derart dass

$$\partial \gamma_1 = \widetilde{\eta}_1 = \eta_1 ,$$

$$\partial \gamma_\nu = \widetilde{\eta}_\nu - \eta_\nu - \delta \gamma_{\nu-1} \qquad \text{für } 2 \leq \nu \leq p-1,$$

$$\| \gamma_\nu \|_{\mathfrak{V}_{\nu-1} \mathfrak{V}_{\nu+1} \varrho} \leq N_\nu(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{V} \varrho} ,$$

$$\| \widetilde{\eta}_1 - \eta_1 \|_{\mathfrak{U}\mathfrak{V}_1 \varrho} \leq N_1'(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{V} \varrho} ,$$

$$\| \widetilde{\eta}_\nu - \eta_\nu - \delta \gamma_{\nu-1} \|_{\mathfrak{V}_{\nu-2} \mathfrak{V}_\nu \varrho} \leq N_\nu'(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{V} \varrho} \qquad \text{für } 2 \leq \nu \leq p-1.$$

Induktionsanfang: Es gilt jetzt $\partial(\tilde{\eta}_1 - \eta_1) = 0$, $\| \tilde{\eta}_1 - \eta_1 \|_{\mathfrak{V}\mathfrak{V}_1\varrho} \leq \leq (1 + M_1'(\varrho)) \| \xi \|_{\mathfrak{V}\varrho}$ und es wird $N_1'(\varrho) = 1 + M_1'(\varrho)$ gesetzt. Nach Lemma (*), angewandt auf $\mathfrak{V}_2 \subset\subset \mathfrak{V}_1 \subset\subset \mathfrak{V}_0 \subset\subset \mathfrak{V}$, gibt es ein $\gamma_1 \in C^{0,p-2}(V_0(\varrho), V_2(\varrho))$ mit $\partial\gamma_1 = \tilde{\eta}_1 - \eta_1$ und $\| \gamma_1 \|_{\mathfrak{V}_0\mathfrak{V}_2\varrho} \leq P(\varrho) \| \tilde{\eta}_1 - \eta_1 \|_{\mathfrak{V}\mathfrak{V}_1\varrho}$. Somit gilt

$$\| \gamma_1 \|_{\mathfrak{V}_0\mathfrak{V}_2\varrho} \leq P(\varrho)\, N_1'(\varrho)\, \| \xi \|_{\mathfrak{V}\varrho}$$

und es wird $N_1(\varrho) = P(\varrho)\, N_1'(\varrho)$ gesetzt.

Induktionsschritt: Für $\nu \geq 2$ sei bereits $\gamma_{\nu-1}$, $N_{\nu-1}$, $N'_{\nu-1}$ definiert. Jetzt gilt $\partial(\tilde{\eta}_\nu - \eta_\nu - \delta\gamma_{\nu-1}) = 0$,

$$\| \tilde{\eta}_\nu - \eta_\nu - \delta\gamma_{\nu-1} \|_{\mathfrak{V}_{\nu-2}\mathfrak{V}_\nu\varrho} \leq (1 + M_\nu'(\varrho) + (\nu - 1)\, N_{\nu-1}(\varrho))\, \| \xi \|_{\mathfrak{V}\varrho}\,.$$

Es wird $N_\nu'(\varrho) = 1 + M_\nu'(\varrho) + (\nu - 1)\, N_{\nu-1}(\varrho)$ gesetzt.

Nach Lemma (*), angewandt auf $\mathfrak{V}_{\nu+1} \subset\subset \mathfrak{V}_\nu \subset\subset \mathfrak{V}_{\nu-1} \subset\subset \mathfrak{V}_{\nu-2}$, gibt es ein $\gamma_\nu \in C^{\nu-1,p-\nu-1}(V_{\nu-1}(\varrho), V_{\nu+1}(\varrho))$ mit $\delta\gamma_\nu = \tilde{\eta}_\nu - \eta_\nu - \delta\gamma_{\nu-1}$ und

$$\| \gamma_\nu \|_{\mathfrak{V}_{\nu-1}\mathfrak{V}_{\nu+1}\varrho} \leq P(\varrho)\, \| \tilde{\eta}_\nu - \eta_\nu - \delta\gamma_{\nu-1} \|_{\mathfrak{V}_{\nu-2}\mathfrak{V}_\nu\varrho}\,.$$

Somit gilt $\| \gamma_\nu \|_{\mathfrak{V}_{\nu-1}\mathfrak{V}_{\nu+1}\varrho} \leq P(\varrho)\, N_\nu'(\varrho)\, \| \xi \|_{\mathfrak{V}\varrho}$ und es wird $N_\nu(\varrho) = P(\varrho) N_\nu'(\varrho)$ gesetzt.

Für $\nu = p$ hat man insbesondere $\partial(\tilde{\eta}_p - \eta_p - \delta\gamma_{p-1}) = 0$ und

$$\| \tilde{\eta}_p - \eta_p - \delta\gamma_{p-1} \|_{\mathfrak{V}_{p-2}\mathfrak{V}_p\varrho} \leq N_p'(\varrho)\, \| \xi \|_{\mathfrak{V}\varrho}\,.$$

Nach Lemma (*), angewandt auf $\mathfrak{V}' \subset\subset \mathfrak{V}_p \subset\subset \mathfrak{V}_{p-1} \subset\subset \mathfrak{V}_{p-2}$, folgt: $\tilde{\eta}_p - \eta_p - \delta\gamma_{p-1}$ lässt sich als Cokette γ' in $C^{p-1}(V'(\varrho), \mathcal{S})$ auffassen und es gilt:

$$\| \gamma' \|_{\mathfrak{V}'\varrho} \leq P(\varrho)\, \| \tilde{\eta}_p - \eta_p - \delta\gamma_{p-1} \|_{\mathfrak{V}_{p-2}\mathfrak{V}_p\varrho}\,.$$

Somit gilt die Ungleichung $\| \gamma' \|_{\mathfrak{V}'\varrho} \leq P(\varrho)\, N_p'(\varrho)\, \| \xi \|_{\mathfrak{V}\varrho}$. Es wird $N(\varrho) = P(\varrho)\, N_p'(\varrho)$ gesetzt.

Jetzt gilt $\delta(\tilde{\eta}_p - \eta_p - \delta\gamma_{p-1}) = \tilde{\xi}_p - \xi_p$, also gilt auch $\delta\gamma' = \tilde{\xi}' - \xi'$ und somit $\delta\gamma' = \sigma_p(-1)^{p+1}\xi - \xi'$. Damit ist der Beweis vollständig erbracht.

3.6 Einige Sätze über Messüberdeckungen

(3.6.1) Bezeichnungen: Mit t_1 wird die Abbildung von $\mathbf{C}^m$ nach $\mathbf{C}$ bezeichnet, die jedem $z = (z_1, \ldots, z_m)$ aus $\mathbf{C}^m$ die komplexe Zahl z_1 zuordnet. Die Komposition $t_1 \circ \pi$ wird wieder mit t_1 bezeichnet (Verwechslungen sind dabei nicht zu befürchten). Sei $\mathcal{S}$ ein kohärenter $\mathcal{H}$-Modul und d eine natürliche Zahl. Mit $p(d)$ wird der Garbenmorphismus von $\mathcal{S}$ nach $\mathcal{S}$ bezeichnet, der jeden Schnitt s von $\mathcal{S}$ den Schnitt $t_1^d s$ zuordnet. Die Untergarbe **im** $p(d)$ von $\mathcal{S}$ wird mit $\mathcal{S}^d$, der Quotient $\mathcal{S}/\mathcal{S}^d$ mit $\mathcal{S}_d$ und die kanonische Surjektion $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}_d$ mit $q(d)$ bezeichnet. Sei $\mathfrak{A} = (W_\chi, \Phi_\chi, E_\chi, R_\chi)_{\chi \in K}$ ein Messatlas bezüglich $(0, \varrho_0)$, der K als Indexmenge hat. Der Bequemlichkeit halber wird von den Funktoren R_χ folgendes vorausgesetzt: Wenn $R_\chi(\mathcal{S})$ die Auflösung $\mathcal{O}^p \xrightarrow{h} \mathcal{O}^q \xrightarrow{\alpha} (\Phi_\chi)_*(\mathcal{S}) \longrightarrow 0$ ist, dann ist $R_\chi(\mathcal{S}_d)$ die Auflösung $\mathcal{O}^p \xrightarrow{h} \mathcal{O}^q \xrightarrow{(q_\chi(d)) \circ \alpha} (\Phi_\chi)_*(\mathcal{S}_d) \longrightarrow 0$ Dabei wurde $(\Phi_\chi)_*(q(d)) = q_\chi(d)$ gesetzt.

SATZ (3.6.2). — Voraussetzung: $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ Messüberdeckungskette
Behauptung: (i) Für jedes $\xi \in C^p(U(\varrho), \mathcal{S})$ gilt: $\|\xi\|_{\mathfrak{V}\varrho} \geq \|(q(d))(\xi)\|_{\mathfrak{V}\varrho}$.
(ii) Es gibt eine (von ϱ unabhängige) Konstante $c > 0$, so dass gilt: Zu jedem $\xi' \in C^p(U(\varrho), \mathcal{S}_d)$ mit $\|\xi'\|_{\mathfrak{V}\varrho} < \infty$ gibt es ein $\xi \in C^p(V(\varrho), \mathcal{S})$ mit $(q(d))(\xi) = \xi'$ und $\|\xi\|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq c\,\|\xi'\|_{\mathfrak{V}\varrho}$.

Beweis. — (i) Sei $\xi = (\xi_i) \in C^p(U(\varrho), \mathcal{S})$. Nach Definition (3.4.2) gilt:

$$\|\xi_i\|_{U_i\varrho} = \sup_{\chi \in M(i)} \inf_{\tilde{\xi} \in \chi(\xi_i)} \|\tilde{\xi}\|_{F_{\chi;i}\varrho},$$

$$\|(q(d))(\xi_i)\|_{U_i\varrho} = \sup_{\chi \in M(i)} \inf_{\tilde{\xi} \in \chi(q(d))(\xi_i))} \|\tilde{\xi}\|_{F_{\chi;i}\varrho}$$

Da aber $\chi(q(d))(\xi_i) \supset \chi(\xi_i)$ ist, folgt $\|\xi_i\|_{U_i\varrho} \geq \|(q(d))(\xi_i)\|_{U_i\varrho}$. (ii) Sei $\xi' = (\xi'_i) \in C^p(U(\varrho), \mathcal{S}_d)$. Nach Definition (3.4.3) gilt: $\|\xi'_i\|_{U_i\varrho} < \infty$ und nach (3.4.2) ist $\|\xi'_i\|_{U_i\varrho} = \sup_{\chi \in M(i)} \inf_{\tilde{\xi} \in \chi(\xi'_i)} \|\tilde{\xi}\|_{F_{\chi;i}\varrho}$. Über $F_{\chi;i} \times K(\varrho)$ hat man folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 & & \\
(\phi_k)_*(\mathcal{S}_d) \arrow[u] & & \\
\mathcal{O}^{q_k} \arrow[u, "\alpha_k^d"] \arrow[r, "\alpha_k"'] & (\phi_k)_*(\mathcal{S}) \arrow[ul, "q_k(d)"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Zunächst gibt es ein $\tilde{\xi} \in \chi(\xi'_i)$ mit $\|\tilde{\xi}\|_{F_{\chi;i}\varrho} \leq 2\,\|\xi'\|_{U_i\varrho}$.

Jetzt gibt es ein $f \in \Gamma(F_{\chi;i} \times K(\varrho), \mathcal{O}^{q_\gamma})$ mit $\alpha_\chi^d(f) = \tilde{\xi}$ und $\|f\|_{F_{\chi;i}\varrho} \leq 2\,\|\tilde{\xi}\|_{F_{\chi;i}\varrho}$. Es wird $\alpha_\chi(f) = \tilde{\tilde{\xi}} \in \Gamma(F_{\chi;i} \times K(\varrho), (\Phi_\chi)_*(\mathcal{S}))$ gesetzt und es ist $\|\tilde{\tilde{\xi}}\|_{F_{\chi;i}\varrho} \leq \|f\|_{F_{\chi;i}\varrho}$. Jetzt definiert $\tilde{\tilde{\xi}}$ einen Schnitt $\xi_i \in \Gamma(U_i(\varrho), \mathcal{S})$; es ist also $\tilde{\tilde{\xi}} \in \chi(\xi_i)$. Weiterhin ist $\|\tilde{\tilde{\xi}}\|_{F_{\chi;i}\varrho} \leq 4\,\|\xi_i'\|_{U_i\varrho}$. Beschränken wir ξ_i auf $V_i(\varrho)$, so gibt es wegen (3.1.6) (V5) und (1.1.10) eine Konstante $c > 0$ mit $\|\xi_i\|_{V\varrho} \leq c\,\|\xi'\|_{U_i\varrho}$.

Satz (3.6.3). — Voraussetzung: $\mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}$ Messüberdeckungskette

Behauptung: Für jedes $\xi \in C^l(U(\varrho), \mathcal{S})$ und jedes echt kleinere $\varrho' < \varrho$ ist $\|\xi \mid V(\varrho')\|_{\mathfrak{V}\varrho'} < \infty$.

Beweis. — Es wird eine Messüberdeckungskette $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{U}_1 \supset \mathfrak{U}_2 \supset \mathfrak{V}$ gewählt. Sei $\chi : J^{l+1} \to K$ eine Abbildung mit $\chi(j) \in N'(j)$, wenn $V_j(\varrho) \neq \emptyset$. Sei $\tau : J \to I$ die Verfeinerungsabbildung $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$, und sei $i = \tau(j)$, dann wird $\chi(i) = \chi(j)$ gesetzt. Nach (3.1.5) (V3) gilt $\chi(i) \in M'(i)$. Sei jetzt $\xi = (\xi_i) \in C^l(U(\varrho), \mathcal{S})$, dann ist $(\Phi_{\chi(i)})_*(\xi_i) \in \Gamma(\Phi_{\chi(i)}(U_i(\varrho))\ (\Phi_{\chi(i)})_*(\mathcal{S}))$. Nach (3.1.5) (V4) lässt sich $(\Phi_{\chi(i)})_*(\xi_i)$ auf $F^{(i)}_{\chi(i);i} \times K(\varrho)$ beschränken; damit erhält man einen Schnitt $\gamma_i \in \Gamma(F^{(i)}_{\chi(i);i} \times K(\varrho), (\Phi_{\chi(i)})_*(\mathcal{S}))$ Nach Theorem B gibt es ein $\tilde{\gamma}_i \in \Gamma(F^{(1)}_{\chi(i);i} \times K(\varrho), \mathcal{O}^{q_{\chi(i)}})$ mit $\alpha_{\chi(i)}(\tilde{\gamma}_i) = \gamma_i$. Jetzt wird γ_i auf $F^{(2)}_{\chi(i);i} \times K(\varrho')$ beschränkt.

Wegen (3.1.5) (V2) und (1.1.4) (ii) folgt $\|\tilde{\gamma}_i\|_{F^{(2)}_{\chi(i);i}\varrho'} < \infty$; somit ist auch $\|\gamma_i\|_{F^{(2)}_{\chi(i);i}\varrho} < \infty$. Beschränkt man jetzt ξ auf $V(\varrho')$, so ist $(\Phi_{\chi(j)})_*(\xi_j) = \gamma_j$ wobei $\xi_j = \xi_i \mid V_j$ und $\gamma_j = \gamma_i \mid G_{\chi(j);j} \times K(\varrho')$ ist. Wegen (3.1.5) (V5) und (1.1.10) gilt $\|\xi\|_{\mathfrak{V}\varrho'} < \infty$ (vergleiche dazu den Beweis von (3.5.1)).

Corollar (3.6.4). — Voraussetzung: Sei $\mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}$ eine Messüberdeckungs kette, und sei $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$ (hinreichend klein).

Behauptung: Für jedes $\xi \in H^l(X(\varrho), \mathcal{S})$ und jedes echt kleinere $\varrho' < \varrho$ gibt es einen Cozyklus $\xi' \in Z^l(V(\varrho'), \mathcal{S})$ mit $\|\xi'\|_{\mathfrak{V}\varrho'} < \infty$ der $\xi \mid V(\varrho')$ repräsentiert.

Beweis. — Da $U(\varrho)$ eine Steinsche Überdeckung ist, gibt es einen Zyklus $\tilde{\xi} \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{S})$ der ξ repräsentiert. Aus (3.6.3) folgt jetzt sofort das Corollar.

Corollar (3.6.5). — Voraussetzung: Sei $\mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}$ eine Messüberdeckungskette, $\mathcal{S}$ ein kohärenter $\mathcal{H}$-Modul, d eine natürliche Zahl und sei $0 \to \mathcal{S}^d \to \mathcal{S} \to \mathcal{S}_d \to 0$ die kanonische exakte Sequenz.

Behauptung: Wenn $\xi \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{S}_d)$ und ξ in $H^{l+1}(U(\varrho), \mathcal{S}^d)$ Null ist, dann gibt es zu jedem echt kleineren $\varrho' < \varrho$ ein $\tilde{\xi} \in Z^l(V(\varrho'), \mathcal{S})$ mit $(q(d))(\tilde{\xi}) = \xi \mid V(\varrho')$ und $\|\tilde{\xi}\|_{\mathfrak{V}\varrho'} < \infty$.

Beweis. — Das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^{l+1}(U(\varrho), \mathcal{S}^d) \arrow[r, "p(d)"] & C^{l+1}(U(\varrho), \mathcal{S}) \arrow[r, "q(d)"] & C^{l+1}(U(\varrho), \mathcal{S}_d) \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{l}(U(\varrho), \mathcal{S}^d) \arrow[r, "p(d)"] \arrow[u, "\partial"] & C^{l}(U(\varrho), \mathcal{S}) \arrow[r, "q(d)"] \arrow[u, "\partial"] & C^{l}(U(\varrho), \mathcal{S}_d) \arrow[r] \arrow[u, "\partial"] & 0
\end{tikzcd}$$

hat exakte Zeilen, da $U(\varrho)$ eine Steinsche Überdeckung ist.

Sei $\xi \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{S}_d)$ und bezeichne $\bar{\xi} \in H^l(U(\varrho), \mathcal{S}_d)$ die Cohomologieklasse, die durch ξ repräsentiert wird. Nach Voraussetzung ist $\delta(\bar{\xi}) = 0$ in $H^{l+1}(U(\varrho), \mathcal{S}^d)$. Aus dem obigen Diagramm folgt: Es gibt ein $\zeta \in C^l(U(\varrho), \mathcal{S})$ mit $(q(d))(\zeta) = \xi$. Somit gilt $(q(d))(\delta(\zeta)) = 0$. Es gibt also ein $\eta \in C^{l+1}(U(\varrho), \mathcal{S}^d)$ mit $(p(d))(\eta) = \partial(\zeta)$. Da $p(d)$ injektiv ist, gilt sogar $\eta \in Z^{l+1}(U(\varrho), \mathcal{S}^d)$. Da $\delta(\bar{\xi}) = 0$ ist, heisst das aber: Es gibt ein $\eta_1 \in C^l(U(\varrho), \mathcal{S}^d)$ mit $\delta(\eta_1) = \eta$. Jetzt ist $\zeta - (p(d))(\eta_1) \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{S})$ und $(q(d))(\zeta - (p(d))(\eta_1)) = \xi$. Nach (3.6.4) folgt jetzt sofort die Behauptung.

SATZ (3.6.6). — Voraussetzung : Sei $\mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}$ Messüberdeckungskette und l eine natürliche Zahl.

Behauptung : Es gibt eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und eine Abbildung $M : \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \to \mathbf{R}_+$, so dass für jede natürliche Zahl d und jedes hinreichend kleine $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ die Aussage gilt : Zu jedem $\eta \in C^l(U(\varrho), \mathcal{S}^d)$ mit $\| \eta \|_{\mathfrak{U}\varrho} < \infty$ [1] gibt es ein $\tilde{\eta} \in C^l(V(\varrho), \mathcal{S})$ derart, dass $\left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^d \tilde{\eta} = \eta$ in $C^l(V(\varrho), \mathcal{S})$ und $\| \tilde{\eta} \|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq M(\varrho) \| \eta \|_{\mathfrak{U}\varrho}$ gilt.

Beweis. — Es wird eine Messüberdeckungskette $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}_1 \supset \mathfrak{V}$ gewählt, wobei $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}_1)$ eine l-privilegierte Verfeinerung ist. Sei $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ eine Dreiecksmenge und $M : \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \to \mathbf{R}_+$ eine Abbildung wie sie in (3.1.7) für $(\mathfrak{U}, \mathfrak{V}_1)$ gefordert wird. Sei $\chi : J^{l+1} \to K$ eine Abbildung mit $\chi(j) \in N'(j)$ wenn $V_j \neq \varnothing$. Sei $\tau : J_1 \to I$ die Verfeinerungsabbildung von $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}_1$, und sei $i = \tau(j)$, dann wird $\chi(i) = \chi(j)$ gesetzt. Nach (3.1.5) (V3) gilt $\chi(i) \in M'(i)$.

Sei $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ hinreichend klein, und sei $\eta = (\eta_i) \in C^l(U(\varrho), \mathcal{S}^d)$ mit $\| \eta \|_{\mathfrak{U}\varrho} < \infty$. Nach (3.4.2) und (3.4.3) gilt jetzt $\| \eta \|_{\mathfrak{U}\varrho} \geq \| \eta_i \|_{U_i \varrho} \geq$

$$\geq \inf_{\tilde{\eta} \in (\chi(i))(\eta_i)} \| \tilde{\eta} \|_{F_{\chi(i)}; i\varrho} .$$

[1] η wird als Cozyklus mit Werten in $\mathcal{S}$ angefasst ; die Norm $\| \eta \|_{\mathfrak{V}\varrho}$ ist bezüglich $\mathcal{S}$ gemeint.

Es gibt ein $\tilde{\eta}_i \in (\chi(i))(\eta_i)$, so dass $2 \| \eta \|_{\mathfrak{U}\,\varrho} \geq \| \tilde{\eta}_i \|_{F_{\chi(i)};\,i\varrho}$ gilt Über $E_{\chi(i)} \times K(\varrho_0)$ hat man folgendes kommutative Diagramm mit exakten Zeilen:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}^{p_{k(i)}} \arrow[r, "h_{k(i)}"] \arrow[d, "q_2"] & \mathcal{O}^{q_{k(i)}} \arrow[r, "\alpha_{k(i)}"] \arrow[d, "q_1"] & (\Phi_{k(i)})_*(\mathcal{S}) \arrow[r] \arrow[d, "q_0"] & 0 \\
\mathcal{O}^{p_{k(i)}}/t_i^d\,\mathcal{O}^{p_{k(i)}} \arrow[r, "h^d_{k(i)}"'] & \mathcal{O}^{q_{k(i)}}/t_i^d\,\mathcal{O}^{q_{k(i)}} \arrow[r, "\alpha^d_{k(i)}"'] & (\Phi_{k(i)})_*(\mathcal{S}_d) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Es ist $\tilde{\eta}_i \in \Gamma(F_{\chi(i)};\,i \times K(\varrho), (\Phi_{\chi(i)})_*(\mathcal{S}^d)) \subset \Gamma(F_{\chi(i)};\,i \times K(\varrho), (\Phi_{\chi(i)})_*(\mathcal{S}))$ (1). Es gibt jetzt ein

$$f_i \in \Gamma(F_{\chi(i)};\,i \times K(\varrho), \mathcal{O}^{q_{\chi(i)}}) \text{ mit } \| f_i \|_{F_{\chi(i)};\,i\varrho} \leq 2 \, \| \eta_i \|_{F_{\chi(i)};\,i\varrho}.$$

Nach (3.1.7) gibt es jetzt ein $K_{\chi(j)};\,j$ mit $G_{\chi(j)};\,j \subset K_{\chi(j)};\,j \subset F_{\chi(i)};\,i$. Jetzt ist aber $\alpha^d_{\chi(i)}(q_1(f_i)) = 0$ (siehe obiges Diagramm), nach Theorem (1.4.4) gibt es ein $g_j \in \Gamma(K_{\chi(j)};\,j \times K(\varrho), \mathcal{O}^{p_{\chi(i)}}/t_1^d\,\mathcal{O}^{p_{\chi(i)}})$ mit $h^d_{\chi(j)}(g_j) = q_1(f_i) \,|\, K_{\chi(j)};\,j$ und $\| g_j \|_{G_{\chi(j)};\,j\varrho} \leq M(\varrho) \, \| f_i \|_{F_{\chi(i)};\,j\varrho}$. Nach (1.1.11) gibt es eine Konstante $c > 0$ mit $\| h_{\chi(j)}(g_j) \|_{G_{(j)};\,j\varrho} \leq c \, \| g_j \|_{G_{\chi(j)};\,j\varrho}$.

Jetzt ist aber $q_1(f_i - h_{\chi(j)}(g_j)) = 0$ in $\Gamma(G_{\chi(j)};\,j \times K(\varrho), \mathcal{O}^{q_{\chi(j)}}/t_1^d\,\mathcal{O}^{q_{\chi(j)}}$ (siehe obiges Diagramm) und es gilt $\| f_i - h_{\chi(j)}(g_j) \|_{G_{\chi(j)};\,j\varrho} \leq 4(1 + cM(\varrho)) \, \| \eta \|_{\mathfrak{U}\,\varrho}$. Mann kann daher schreiben: $f_i - h_{\chi(j)}(g_j) = \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^d \tilde{f}_j$ wobei $\tilde{f} \in \Gamma(G^{(1)}_{\chi(j)};\,j \times K(\varrho), \mathcal{O}^{q_{\chi(i)}})$ und $\| \tilde{f}_j \|_{G^{(1)}_{\chi(j)};\,j\varrho} \leq 4(1 + cM(\varrho)) \, \| \eta \|_{\mathfrak{U}\,\varrho}$.

Jetzt wird $\eta'_j = (\alpha_{\chi(i)})(\tilde{f}_j)$ gesetzt, und es gilt: $\| \eta'_j \|_{G^{(1)}_{\chi(j)};\,j\varrho} \leq 4(1 + cM(\varrho)) \, \| \eta \|_{\mathfrak{U}\,\varrho}$. Offensichtlich gilt auf $G^{(1)}_{\chi(j)};\,j \times K(\varrho)$ die Beziehung $\left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^d \eta'_j = \eta_i$. Die η'_j definieren eine Cokette $\tilde{\eta} = (\tilde{\eta}_j) \in C^l(V(\varrho), \mathcal{S})$ mit $(\Phi_{\chi(j)})_*(\tilde{\eta}_j) = \eta'_j \,|\, G_{\chi(j)};\,j \times K(\varrho)$. Somit gilt auf $V(\varrho)$ die Beziehung $\left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^d \tilde{\eta} = \eta$.

(1) Hier muss genauer noch eine Überdeckung $\mathfrak{U}_1$ zwischen $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}_1$ eingeschoben werden.

Wegen (3.1.5) (V5) und (1.1.10) gibt es eine Konstante $c' > 0$, so dass $\| \tilde{\eta} \|_{\mathfrak{V}\,\varrho} \leq 4c'(1 + cM(\varrho)) \| \eta \|_{\mathfrak{U}\,\varrho}$ gilt.

SATZ (3.6.7). — Voraussetzung: Sei $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ eine Messüberdeckungskette, und sei ϱ_1^* eine hinreichend kleine positive Zahl.

Behauptung: Es gibt eine Konstante $c > 0$ so dass für hinreichend kleines $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_m)$ aus $\mathbf{R}_+^m$ gilt: Für jedes $\eta \in C^l(U(\varrho), \mathcal{S})$ mit $\| \eta \|_{\mathfrak{U}\,\varrho} < \infty$ gibt es eine Familie $(\eta_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ von Coketten $\eta_\nu \in C^l(V(\varrho^*), \mathcal{S})$, $\varrho^* = (\varrho_1^*, \varrho_2, \dots, \varrho_m)$ derart, dass $\eta = \sum_{\nu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \eta_\nu$ und $\| \eta_\nu \|_{\mathfrak{V}\,\varrho^*} \leq c \| \eta \|_{\mathfrak{U}\,\varrho}$ gilt.

Die Formel $\eta = \sum_{\nu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \eta_\nu$ bedeutet folgendes: Für jedes $\varrho' = (\varrho_1', \varrho_2, \dots$ $\dots, \varrho_m)$ mit $\varrho_1' < \varrho_1$ gilt $\lim_{n \to \infty} \left\| \eta - \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \eta_\nu \right\|_{\mathfrak{V}\,\varrho'} = 0$.

Beweis. — Sei $\chi : J^{l+1} \to K$ eine Abbildung mit $\chi(j) \in N'(j)$ wenn $V_j \neq \emptyset$. Es wird wieder $i = \tau(j)$ und $\chi(i) = \chi(j)$ gesetzt, wobei $\tau : J \to I$ die Verfeinerungsabbildung von $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ ist. Über $E_{\chi(i)} \times K(\varrho_0)$ hat man die exakte Sequenz $\mathcal{O}^{q\chi(i)} \xrightarrow{\alpha_{\chi(i)}} (\Phi_{\chi(i)})_*(\mathcal{S}) \to 0$.

Sei $\eta = (\eta_i) \in C^l\, U(\varrho), \mathcal{S})$ mit $\| \eta \|_{\mathfrak{U}\,\varrho} < \infty$. Es gibt jetzt ein

$$\tilde{\eta}_i \in \Gamma(F_{\chi(i);\,i} \times K(\varrho), (\Phi_{\chi(i)})_*(\mathcal{S})) \text{ mit } \tilde{\eta}_i \mid \Phi_{\chi(i)}(U_i(\varrho)) = (\Phi_{\chi(i)})_*(\eta_i)$$

und $\| \tilde{\eta}_i \|_{F_{\chi(i);\,i}\,\varrho} \leq 2 \| \eta \|_{\mathfrak{U}\,\varrho}$. Es gibt jetzt ein $\xi_i \in \Gamma\, F_{\chi(i);\,i} \times K(\varrho), \mathcal{O}^{q\chi(i)})$ mit $\alpha_{\chi(i)}(\xi_i) = \tilde{\eta}_i$ und $\| \xi_i \|_{F_{\chi(i);\,i}\,\varrho} \leq 2 \| \tilde{\eta}_i \|_{F_{\chi(i);\,i}\,\varrho}$.

Insgesamt hat man also $\| \xi_i \|_{F_{\chi(i);\,i}\,\varrho} \leq 4 \| \eta \|_{\mathfrak{U}\,\varrho}$.

Jetzt lässt sich ξ_i nach t_1/ϱ_1 in eine kompakt konvergente. Potenzreihe $\xi_i = \sum_{\nu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \xi_i^{(\nu)}$ entwickeln, und es gilt $\| \xi_i^{(\nu)} \|_{F_{\chi(i);\,i}} \leq \| \xi_i \|_{F_{\chi(i);\,i}\,\varrho}$, da ja $\xi_i^{(\nu)}$ nicht mehr von t_1 abhängt. Insgesamt hat man also $\| \xi_i^{(\nu)} \|_{F_{\chi(i);\,i}\,\varrho^*} \leq 4 \| \eta \|_{\mathfrak{U}\,\varrho}$. Wir fassen $\xi_i^{(\nu)}$ als Schnitt aus $\Gamma(F_{\chi(i);\,i} \times K(\varrho^*), \mathcal{O}^{q\chi(i)})$ auf und setzen $\eta_i^{(\nu)} = \alpha_{\chi(i)}(\xi_i^{(\nu)})$. Es gilt: $\| \tilde{\eta}_i^{(\nu)} \|_{F_{\chi(i);\,i}\,\varrho^*} \leq 4 \| \eta \|_{\mathfrak{U}\,\varrho}$. Jetzt definiert $\tilde{\eta}_i^{(\nu)}$ einen Schnitt $\eta_i^{(\nu)} \in \Gamma(U_i(\varrho^*), \mathcal{S})$. Nach (3.1.5) (V5) und (1.1.10) gibt es eine Konstante $c > 0$ (unabhängig von ϱ), so dass $\| \eta_i^{(\nu)} \|_{V_i\,\varrho^*} \leq 4c \| \eta \|_{\mathfrak{U}\,\varrho}$ gilt. Jetzt gilt $\lim_{n \to \infty} \| \xi_i - \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \xi_i^{(\nu)} \|_{F_{\chi(i);\,i}\,\varrho} = 0$. Für jedes $\varrho' = (\varrho_1', \varrho_2, \dots, \varrho_m)$ mit $\varrho_1' < \varrho_1$. Weiter gilt noch $\left\| \tilde{\eta}_i - \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \tilde{\eta}_i^{(\nu)} \right\|_{F_{\chi(i);\,i}\,\varrho'} \leq \left\| \xi_i - \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \xi_i^{(\nu)} \right\|_{F_{\chi(i);\,i}\,\varrho'}$. Nach (3.1.5) ($V$ 5) gibt es eine Konstante $c > 0$ so dass $\left\| \eta_i - \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \eta_i^{(\nu)} \right\|_{V_i\,\varrho'} \leq$ $\leq c \left\| \eta_i - \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \eta_i^{(\nu)} \right\|_{F_{\chi(i);\,i}\,\varrho'}$, gilt. Damit ist $\lim_{n \to \infty} \left\| \eta_i - \sum_{\nu=0}^{n} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \eta_i^{(\nu)} \right\|_{V_i\,\varrho'} = 0$, womit dann alles bewiesen ist.

Satz (3.6.8). Voraussetzung: Sei $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ eine Messüberdeckungskette, $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$ hinreichend klein, $s = \sum_{\nu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu s_\nu$ eine p-Cokette mit $s_\nu = (s_i^{(\nu)}) \in C^p(U(\varrho), \mathcal{S})$. Sei $M \in \mathbf{R}_+$ derart, dass $\| s_\nu \|_{\mathfrak{U}\varrho} \leq M$ für alle $\nu \in \mathbf{N}$. Sei χ eine Abbildung von I^{p+1} nach K derart, dass $\chi(i) \in M(i)$ gilt, wenn $U_i \neq \emptyset$ ist. Sei $c' \in \mathbf{R}_+$ und sei zu jedem $(\nu, i) \in \mathbf{N} \times I^{p+1}$ ein Schnitt $f_i^{(\nu)} \in \Gamma(F_{\chi(i);i} \times K(\varrho), \mathcal{O}^{q_{\chi(i)}})$ gegeben, derart, dass gilt:

1) $\alpha_{\chi(i)}(f_i^{(\nu)}) \mid \Phi_{\chi(i)}(U_i) = (\Phi_{\chi(i)})_*(s_i^{(\nu)})$,
2) $f_i^{(\nu)}$ unabhängig von t_1,
3) $\| f_i^{(\nu)} \|_{F_{\chi(i);i}\varrho} \leq c' M$.

Behauptung: Es gibt eine Konstante $c > 0$ (unabhängig von ϱ) derart, dass $\| s \|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq cc' M$ ist.

Beweis. — Sei $j \in J^{p+1}$ und sei $i = \tau(j)$ gesetzt. Wegen (3) kann man $f_i = \sum_{\nu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu f_i^{(\nu)}$ schreiben. Jetzt gilt offensichtlich

$$\alpha_{\chi(i)}(f_i) \mid \Phi_{\chi(i)}(U_i(\varrho)) = (\Phi_{\chi(i)})_*(s_i) \quad \text{und} \quad \| f_i \|_{F_{\chi(i);i}\varrho} \leq \sup_\nu \| f_i^{(\nu)} \|_{F_{\chi(i);i}\varrho} \leq c' M.$$

Nach Corollar (1.1.10) und Definition (3.1.6) gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass gilt $\| s_j \|_{V_j\varrho} \leq cc' M$ und damit hat man $\| s \|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq cc' M$.

Satz (3.6.9). Voraussetzung: Seien $\mathcal{S}_1$ und $\mathcal{S}_2$ zwei kohärente $\mathcal{H}$-Moduln, $\psi: \mathcal{S}_1 \to \mathcal{S}_2$ ein analytischer Homomorphismus und $\mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}$ eine Messüberdeckungskette.

Behauptung: Er gibt ein $c > 0$ (unabhängig von ϱ) derart, dass für jedes $\xi \in C^l(U(\varrho), \mathcal{S}_1)$ mit $\| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho} < \infty$ die Ungleichung $\| \psi(\xi) \|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq c \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}$ gilt.

Beweis. — Der Satz folgt sofort aus den Definitionen (3.1.5) und (3.1.6) unter Anwendung von Corollar (1.1.10).

Satz (3.6.10). Voraussetzung: Sei $\mathcal{S}$ ein kohärenter $\mathcal{H}$-Modul und $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ eine Messüberdeckungskette. Sei $\xi \in C^p(U(\varrho_1), \mathcal{S})$ mit $\| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho_1} < \infty$.

Behauptung: Zu jedem $\tilde{\varrho} < \varrho_1$ gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass für jedem $\varrho < \tilde{\varrho}$ und jedes $a \in \Gamma(K(\varrho), \mathcal{O})$ die Ungleichung $\| a\xi \|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq c \| a \|_\varrho \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho_1}$ gilt.

Beweis. — Der Satz folgt leicht aus Corollar (1.1.16) unter Verwendung von Corollar (1.1.10) und Definition (3.1.6).

4. Der Kohärenzsatz von Grauert

4.1 Formulierung der Hauptsätze

(4.1.1) Für die Nummern (4.1) bis (4.4) werden folgende generelle Voraussetzungen gemacht:

$(X, \mathcal{H})$ sei ein komplexer Raum,

m^* sei eine natürliche Zahl, $K = K_1 \times \dots \times K_{m^*}$ ein Polyzylinder mit 0 als Zentrum in $\mathbf{C}^{m^*}$,

$\pi : X \longrightarrow K$ sei eine eigentliche holomorphe Abbildung,

W sei eine endliche Steinsche Überdeckung von X,

$(\varrho_t)_{t \in \mathbf{C}^{m^*}}$, $(\mathfrak{A}_t)_{t \in \mathbf{C}^{m^*}}$ seien zwei Familien derart, dass $\varrho_t \in \mathbf{R}_+^{m^*}$ mit $\varrho_t > 0$ und $\mathfrak{A}_t$ Messatlas bezüglich (t, ϱ_t) ist.

(4.1.2) Bezeichnung. — Sei m eine natürliche Zahl mit $0 \leq m \leq m^*$ und $t_0 = (t_1^{(0)}, \dots, t_{m^*}^{(0)})$ ein Punkt aus K. Wir setzen:

$$X_{t_0, m} = \pi^{-1}(\mathbf{C}^m \times \{(t_{m+1}^{(0)}, \dots, t_{m^*}^{(0)})\}) \quad \text{für} \quad m \neq 0,$$

$$X_{t_0, m} = X_{t_0} = \pi^{-1}(t_0) \qquad \text{für} \quad m = 0,$$

$$K_{t_0, m} = K \cap \{\mathbf{C}^m \times \{(t_{m+1}^{(0)}, \dots, t_{m^*}^{(0)})\}, \quad K_m = K_{0, m}$$

Die von π induzierte Abbildung

$$X_{t_0, m} \longrightarrow K_{t_0, m} \quad \text{für} \quad m \neq 0,$$
$$X_{t_0} \longrightarrow \{t_1^{(0)}\} \quad \text{für} \quad m = 0$$

wird wieder mit π bezeichnet.

Mit t_i: $\mathbf{C}^{m^*} \longrightarrow \mathbf{C}$ wird, die durch die Zuordnung $z = (z_1, \dots, z_i, \dots, z_m) \longmapsto z$ definierte holomorphe Funktion bezeichnet. Die durch π geliftete holomorphe Funktion $t_i \circ \pi$ wird wieder mit t_i bezeichnet. Weiter wird gesetzt:

$$\mathcal{H}^{(t_0, m)} = (t_1 - t_1^{(0)})\,\mathcal{H} + \dots + (t_{m-m^*} - t_{m-m^*}^{(0)})\,\mathcal{H},$$
$$\mathcal{H}_{(t_0, m)} = \mathcal{H} / \mathcal{H}^{(t_0, m)},$$
$$W_{t_0, m} = W \cap X_{t_0, m}.$$

Offensichtlich ist $(X_{t_0, m}, \mathcal{H}_{(t_0, m)})$ ein komplexer Raum, $\pi : X_{t_0, m} \to \mathbf{C}^m$ eine eigentliche holomorphe Abbildung und $W_{t_0, m}$ eine endliche Steinsche Überdeckung won $X_{t_0, m}$.

Sei l eine natürliche Zahl. Der l-te Bildgarbenfunktor $R^l \pi_*$ wird mit π_l bezeichnet.

Sei $\mathcal{S}$ ein kohärenter $\mathcal{H}_{(t_0, m)}$-Modul und $e = (e_1, \dots, e_m)$ ein m-tupel natürlicher Zahlen. Wir setzen

$$\mathcal{S}^{t_0, e} = (t_1 - t_1^{(0)})^{e_1} \mathcal{S} + \dots + (t_m - t_m^{(0)})^{e_m} \mathcal{S},$$

$$\mathcal{S}_{t_0, e} = \mathcal{S} / \mathcal{S}^{t_0, e}$$

und es bezeichne $p(t_0, e) : \mathcal{S}^{t_0, e} \to \mathcal{S}$, $q(t_0, e) : \mathcal{S} \to \mathcal{S}_{t_0, e}$ die kanonischen Abbildungen. Wenn t_0 speziell der Nullpunkt ist, so führen wir für $\mathcal{S}^{t_0, e}$, $\mathcal{S}_{t_0, e}$, $p(t_0, e)$, $q(t_0, e)$ der Reihe nach die bequemeren Bezeichnungen $\mathcal{S}^e$, $\mathcal{S}_e$, $p(e)$, $q(e)$ ein.

Mit $\mathcal{O}$ werde stets die kanonische Strukturgarbe des $\mathbf{C}^m$ bezeichnet. $\mathcal{I}(t_0, e)$ bezeichne die Idealgarbe $(t_1 - t_1^{(0)})^{e_1} \mathcal{O} + \dots + (t_m - t_m^{(0)})^{e_m} \mathcal{O}$. Wenn $t_0 = 0$ ist, dann wird anstelle von $\mathcal{I}(t_0, e)$ die bequemere Bezeichnung $\mathcal{I}(e)$ benutzt.

Sei $\mathfrak{U} = (U, M, M', F)$ eine Messüberdeckung bezüglich $\mathfrak{A}_{t_0}$. Wenn $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$ ist, dann wird gesetzt:

$K(t_0, \varrho)$ Polyzylinder mit Zentrum $(t_1^{(0)}, \dots, t_m^{(0)})$ und Radius ϱ,

$X(t_0, \varrho) = \pi^{-1}(K(t_0, \varrho))$,

$U(t_0, \varrho) = U \cap X(t_0, \varrho)$.

Wenn t_0 der Nullpunkt des $\mathbf{C}^{m*}$ ist, dann wird für $K(t_0, \varrho)$, $X(t_0, \varrho)$, $U(t_0, \varrho)$ der Reihe nach die bequemere Schreibweise $K(\varrho)$, $X(\varrho)$, $U(\varrho)$ benutzt.

(4.1.3) Jetzt lassen sich die Haupttheoreme formulieren:

Theorem $\mathrm{I}_{l, m}$. — Voraussetzung: Sei t_0 ein Punkt aus K und $\mathcal{S}$ eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$.

Behauptung: Für alle $\lambda \geq l$ sind die Bildgarben $\pi_\lambda(\mathcal{S})$ kohärente $\mathcal{O}$-Moduln.

Theorem $\mathrm{II}_{l, m}$. — Voraussetzung: Sei t_0 ein Punkt aus K, $\mathcal{S}$ eine kohärente analylische Garbe auf $X_{t_0, m}$, $\mathfrak{V} \subset\subset \mathfrak{U} \subset\subset \mathfrak{U}_0$ eine Messüberdekkungskette bezüghich $\mathfrak{A}_{t_0}$.

Behauptung: Es gibt

1) ein $\varrho_1 \in \mathbf{R}_+^m$, $\varrho_1 > 0$ (unabhängig von $\mathcal{S}$),

2) $\xi_1, \dots, \xi_s \in Z^l(U(t_0, \varrho_1), \mathcal{S})$,

3) zu jedem $e \in \mathbf{N}^m$ eine m-dimensionale Dreiecksmenge Δ_e,

4) zu jedem $e \in \mathbf{N}^m$ zwei Abbildungen M_e nnd N_e von Δ_e nach $\mathbf{R}_+$,

5) eine Abbildung F: $\mathbf{N}^m \to \mathbf{N}^m$ mit $\lim_{e \to \infty} F(e) = \infty$,

so dass für jedes $e \in \mathbf{N}^m$ und für hinreichend kleines $\varrho \in \Delta_e$ gilt:

Zu jedem $\xi \in Z^l(U(t_0, \varrho), \mathcal{S})$ mit $\| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho} < \infty$ und $q(t_0, e)(\xi) = 0$ gibt es $a_1, \dots, a_s \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{J}(t_0, F(e)))$ und ein $\eta \in C^{l-1}(V(t_0, \varrho), \mathcal{S})$, so dass gilt:

$$\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_s \xi_s + \delta\eta \quad \text{auf} \quad V(t_0, \varrho)$$

$$\| a_j \|_\varrho \leq M_e(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}, \quad 1 \leq j \leq s,$$

$$\| \eta \|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq N_e(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}.$$

Ersetzen wir in Theorem $\mathrm{II}_{l,m}$ die Menge $\mathbf{N}^m$ durch die einpunktige Menge $\{0 : 0 \in \mathbf{N}^m\}$, so erhalten wir ein Theorem, das wir mit Theorem $\mathrm{II}'_{l,m}$ bezeichnen.

(4.1.4) Aus Theorem $\mathrm{II}_{l,m}$ wird ein etwas allgemeineres Theorem hergeleitet. Dazu werden noch folgende Bezeichnungen eingeführt:

$\mathcal{Q}$ sei eine kohärente $\mathcal{O}$-Garbe auf $K_{t_0, m}$, $\lambda: \pi_l(\mathcal{S}) \to \mathcal{Q}$ sei ein $\mathcal{O}$-Garben. homomorphismus.

Mit π_l: $H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}) \to \Gamma(K(t_0, \varrho), \pi_l(\mathcal{S}))$ werde der kanonische Homomorphismus bezeichnet. Wir setzen:

$$H^l_\lambda(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}) = \pi_l^{-1}(\Gamma(K(t_0, \varrho), \ker \lambda)).$$

Sei $U(t_0, \varrho)$ ein Steinsche Überdeckung von $X(t_0, \varrho)$ und bezeichne

$$q: Z^l(U(t_0, \varrho), \mathcal{S}) \to H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S})$$

den kanonischen Homomorphismus, dann wird gesetzt:

$$Z^l_\lambda(U(t_0, \varrho), \mathcal{S}) = q^{-1}(H^l_\lambda(X(t_0, \varrho), \mathcal{S})).$$

Jetzt können wir ein dem Theorem $\mathrm{II}_{l,m}$ gleichwertiges Theorem hinschreiben:

Theorem $\mathrm{III}_{l,m}$. — Voraussetzung: Sei t_0 ein Punkt aus K, $\mathcal{S}$ eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0,m}$, Q eine kohärente analytische Garbe auf $K_{t_0,m}$, $\lambda : \pi_l(\mathcal{S}) \longrightarrow Q$ ein $\mathcal{O}$-Garbenhomomorphismus, $\mathfrak{V} \subset\subset \mathfrak{U} \subset\subset \mathfrak{U}_0$ eine Messüberdeckungskette bezüglich $\mathfrak{A}_{t_0}$.

Behauptung: Es gibt

1) ein $\varrho_1 \in \mathbf{R}_+^m$, $\varrho_1 > 0$ (unabhängig von $\mathcal{S}$),

2) $\xi_1, \dots, \xi_s \in Z_\lambda^l(U(t_0, \varrho_1), \mathcal{S})$,

3) zu jedem $e \in \mathbf{N}^m$ eine m dimensionale Dreiecksmenge Δ_e,

4) zu jedem $e \in \mathbf{N}^m$ zwei Abbildungen M_e und N_e von Δ_e nach $\mathbf{R}_+$,

5) eine Abbildung $F : \mathbf{N}^m \longrightarrow \mathbf{N}^m$ mit $\lim\limits_{e \to \infty} F(e) = \infty$, so dass für jedes $e \in \mathbf{N}^m$ und für hinreichend kleines $\varrho \in \Delta_e$ gilt:

Zu jedem $\xi \in Z_\lambda^l(U(t_0, \varrho), \mathcal{S})$ mit $\| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho} < \infty$ und $q(t_0, e)(\xi) = 0$ gibt es $a_1, \dots, a_s \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{I}(t_0, F(e)))$ und ein $\eta \in C^{l-1}(V(t_0, \varrho), \mathcal{S})$ so dass gilt:

$$\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_s \xi_s + \delta\eta \text{ auf } V(t_0, \varrho),$$

$$\| a_j \|_\varrho \leq M_e(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho},$$

$$\| \eta \|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq N_e(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}.$$

Ersetzen wir in Theorem $\mathrm{III}_{l,m}$ die Menge $\mathbf{N}^m$ durch die einpunktige Menge $\{0 : 0 \in \mathbf{N}^m\}$, so erhalten wir ein Theorem, das wir mit Theorem $\mathrm{III}'_{l,m}$ bezeichnen.

(4.1.5) Aus Theorem $\mathrm{III}_{l,m}$ folgt ein für uns wichtiges

Corollar $\mathrm{IV}_{l,m}$. — Voraussetzung: Sei t_0 ein Punkt aus K, $\mathcal{S}$ eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0,m}$, $\mathfrak{V} \subset\subset \mathfrak{U} \subset\subset \mathfrak{U}_0$ eine Messüberdeckungskette bezüglich $\mathfrak{A}_{t_0}$, $\pi_l(\mathcal{S})$ soll eine kohärente analytische Garbe auf $\mathbf{C}^m$ sein.

Behauptung: Es gibt

1) eine m-dimensionale Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$,

2) eine Abbildung $N : \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) \longrightarrow \mathbf{R}_+$, so dass für hinreichend kleines $\varrho \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ gilt:

Zu jedem $\xi \in Z^l(U(t_0, \varrho), \mathcal{S})$ mit $\| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho} < \infty$ und $\pi_l(\xi) = 0$ gibt es ein $\eta \in C^{l-1}(V(t_0, \varrho), \mathcal{S})$ mit $\delta\eta = \xi$ auf $V(t_0, \varrho)$ und $\| \eta \|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq N(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}$.

SATZ (4.1.4). — Theorem $\mathrm{III}'_{l,m} \Longrightarrow$ Corollar $\mathrm{IV}_{l,m}$.

Beweis. — Der bequemeren Schreibweise wegen nehmen wir t_0 als den Nullpunkt des $\mathbf{C}^{m^*}$ an. Sei dann $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}$ eine Messüberdeckungskette bezüglich $\mathfrak{Z}_0$. Theorem $\mathrm{III}'_{l,m}$ wird auf die Situation $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}$, $\lambda: \pi_l(\mathcal{S}) \longrightarrow \pi_l(\mathcal{S})$, $\lambda = id$ angewandt. Seien ϱ'_1; $\xi_1, \dots, \xi_s \in Z^l_\lambda(U(\varrho'_1), \mathcal{S})$, Δ der Reihe nach die in $\mathrm{III}'_{l,m}$ (1), (2), (3) versprochenen Daten. Wegen der speziellen Wahl von λ gilt offensichtlich $\pi_l(\xi_\nu) = 0$, $1 \leq \nu \leq s$. Es gibt daher ein $\varrho''_1 \leq \varrho'_1$ und es gibt Coketten $\eta_\nu \in C^{l-1}(U(\varrho''_1), \mathcal{S})$ mit $\xi_\nu = \delta\eta_\nu$ auf $U(\varrho''_1)$, $1 \leq \nu \leq s$. Jetzt wird $\varrho_1 < \inf(\varrho'_1, \varrho''_1)$ gewählt.

Sei $\varrho \in \Delta$, $\varrho < \varrho_1$ und sei $\xi \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{S})$ mit $\| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho} < \infty$ und $\pi_l(\xi) = 0$. Es ist also $\xi \in Z^l_\lambda(U(\varrho), \mathcal{S})$. Nach Theorem $\mathrm{III}'_{l,m}$ gilt daher auf $V(\varrho)$ die Beziehung $\xi = a_1\xi_1 + \dots + a_s\xi_s + \delta\eta^*$, ($a_\nu \in \Gamma(K(\varrho), \mathcal{O})$ und $\eta^* \in C^l(V(\varrho), \mathcal{S})$), $\| a_\nu \|_\varrho \leq M(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}$ und $\| \eta^* \|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq N(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}$.

Nach Satz (3.6.3), angewandt auf $\mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}$, gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass auf $V(\varrho)$ die Beziehung $\| \eta_\nu \|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq c \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}$ für $1 \leq \nu \leq s$ gilt. Auf $V(\varrho)$ gilt nach Satz (3.6.10) jetzt $\xi = \delta(a_1\eta_1 + \dots + a_s\eta_s + \eta^*)$ und $\| a_1\eta_1 + \dots + a_s\eta_s + \eta^* \|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq (scM(\varrho) + N(\varrho)) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}$.

SATZ (4.1.5). — Theorem $\mathrm{II}_{l,m} \Longleftrightarrow$ Theorem $\mathrm{III}_{l,m}$.

Offensichtlich braucht nur die Richtung Theorem $\mathrm{II}_{l,m} \Longrightarrow$ Theorem $\mathrm{III}_{l,m}$ bewiesen werden. Der einfacheren Schreibweise wegen sei t_0 wieder Nullpunkt des $\mathbf{C}^{m^*}$. Sei $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}$ eine Messüberdeckungskette bezüglich $\mathfrak{Z}_0$. Theorem $\mathrm{II}_{l,m}$ wird auf $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}$ angewandt. Die in $\mathrm{II}_{l,m}$ (1), (3) versprochenen Daten sind der Reihe nach ϱ'_1 und Δ'.

Sei Q eine kohärente Garbe auf $K_{t_0,m}$ und $\lambda: \pi_l(\mathcal{S}) \longrightarrow Q$ ein $\mathcal{O}$-Garbenhomomorphismus. $\xi_1, \dots, \xi_s \in Z^l(U(\varrho'_1), \mathcal{S})$ seien die in Theorem $\mathrm{II}_{l,m}$ versprochenen Cozyklen. $\gamma: \mathcal{O}^s \longrightarrow \pi_l(\mathcal{S})$ sei der durch die Zuordnung $(a_1, \dots a_s) \longmapsto a_1\pi_l(\xi_1) + \dots + a_s\pi_l(\xi_s)$ definierte Homomorphismus. Jetzt ist $\ker(\lambda\circ\gamma)$ kohärent. Für hinreichend kleines ϱ' gibt es eine exakte Sequenz $\mathcal{O}^r \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}^s \xrightarrow{\lambda\circ\gamma} Q$ über $K(\varrho')$. β wird durch Schnitte $b_i = (b_{i1}, \dots, b_{is}) \in \Gamma(K(\varrho'), \ker(\lambda\circ\gamma))$, $1 \leq i \leq r$ definiert. Auf β wird Theorem (1.4.4) angewandt, Δ'' sei die dort versprochene Dreiecksmenge. Wir setzen:

$$\varrho_1 \leq \inf(\varrho'_1, \varrho')$$

$$\Delta = \Delta' \cap \Delta''$$

und

$$\widetilde{\xi}_i = b_{i1}\,\xi_1 + \dots + b_{is}\,\xi_s\,, \qquad 1 \leq i \leq r.$$

Behauptung: $\widetilde{\xi}_1, \dots, \widetilde{\xi}_r \in Z^l_\lambda(U(\varrho_1), \mathcal{S})$ sind Cozyklen, wie sie in Theorem $\mathrm{III}_{l,m}$ verlangt werden.

Sei $\varrho \in \Delta$ hinreichend klein und $\xi \in Z^l_\lambda(U(\varrho), \mathcal{S})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\,\varrho} < \infty$.

Nach Theorem $\mathrm{II}_{l,m}$ gilt auf $V(\varrho)$:

$$\xi = a_1\,\xi_1 + \dots + a_s\,\xi_s + \delta\eta$$

wobei $a_\nu \in \Gamma(K(\varrho), \mathcal{O})$ und $\eta \in C^{l-1}(V(\varrho), \mathcal{S})$ sind, und es gilt:

$$\|a_\nu\|_\varrho \leq M(\varrho)\,\|\xi\|_{\mathfrak{U}\,\varrho}$$

$$\|\eta\|_{\mathfrak{V}\,\varrho} \leq N(\varrho)\,\|\xi\|_{\mathfrak{U}\,\varrho}\,.$$

Offensichtlich $(a_1, \dots, a_s) \in \Gamma(K(\varrho), \ker(\lambda \circ \gamma))$. Nach Theorem (1.4.4) gilt:

Es gibt ein $\quad (c_1, \dots, c_r) \in \Gamma(K(\varrho), \mathcal{O}^r)$ mit

$$c_1\,b_1 + \dots + c_r\,b_r = (a_1, \dots, a_s) \quad \text{und}$$

$$\|(c_1, \dots, c_r)\|_\varrho \leq C(\varrho)\,\|(a_1, \dots, a_s)\|_\varrho\,.$$

Somit hat man $\quad \xi = c_1\,\widetilde{\xi}_1 + \dots + c_r\,\widetilde{\xi}_r + \delta\eta \quad$ und

$$\|c_\nu\|_\varrho \leq s\,C(\varrho)\,M(\varrho)$$

Gilt für ξ zusätzlich noch $q(e)(\xi) = 0$, dann lassen sich nach Theorem $\mathrm{II}_{l,m}$ die a_ν sogar aus $\Gamma(K(\varrho), \mathcal{J}(F(e)))$ wählen. Nach Theorem (1.4.4) II lassen sich jetzt die c_ν aus $\Gamma(K(\varrho), \mathcal{J}(\widehat{F} \circ F(e)))$ wählen, wobei $\widehat{F}$ die in (1.4.4) II versprochene Funktion ist. Damit ist Theorem $\mathrm{III}_{l,m}$ vollständig bewiesen.

(4.1.6) Die Theoreme $\mathrm{I}_{l,m}$ und $\mathrm{II}_{l,m}$ werden durch eine Doppelinduktion nach folgendem Schema bewiesen:

Induktionsanfang:

$I_{l,0}$ und $II_{l,0}$ für alle $l \in \mathrm{N}$

$I_{l^*,m}$ und $II_{l^*,m}$ für alle m mit $\quad 0 \leq m \leq m^*$

dabei ist $l^* = \dim W$ (Überdeckungsdimension der Überdeckung W).

1. Induktionsschritt:

$$I_{l+1,\,m} \text{ und } II_{l,\,m-1} \text{ und } II_{l+1,\,m} \Longrightarrow II_{l,\,m}$$

2. Induktionsschritt

$$I_{0,\,m-1}\,,\ I_{l+1,\,m}\,,\ II_{l,\,m}\,,\ II_{l+1,\,m}\,, \Longrightarrow I_{l,\,m}$$

4.2 Induktionsanfang

(4.2.1) Wir schreiben noch einmal die Theoreme $\mathrm{I}_{l,\,0}$ und $\mathrm{II}_{l,\,0}$ hin:

Theorem $\mathrm{I}_{l,\,0}$. — Voraussetzung: Sei t_0 ein Punkt aus dem K, $\mathcal{S}$ eine kohärente analytische Garbe auf X_{t_0}.

Behauptung: Für alle $\lambda \geq 1$ sind $H^{\lambda}(X_{t_0}, \mathcal{S})$ endlichdimensionale Vektorräume über $\mathbf{C}$.

Beweis. — Da X_{t_0} kompakt ist, ist $I_{l,\,0}$ nichts anderes als der wohlbekannte Endlichkeitssatz von Cartan-Serre.

Theorem $\mathrm{II}_{l,\,0}$. — Voraussetzung: Sei t_0 ein Punkt aus K, $\mathcal{S}$ eine kohärente analytische Garbe auf X_{t_0}, $\mathfrak{U} \supset \mathfrak{V}$ eine Messüberdeckungskette bezüglich $\mathfrak{A}_{t_0}$.

Behauptung: Es $\xi_1, \ldots, \xi_s \in Z^1(U \cap X_{t_0}, \mathcal{S})$ und eine Konstante $c > 0$, so dass gilt:

Zu jedem $\xi \in Z^1(U \cap X_{t_0}, \mathcal{S})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}} < \infty$ gibt es komplexe Zahlen $a_1, \ldots, a_s \in \mathbf{C}$ und eine Cokette $\eta \in C^{l-1}(V \cap X_{t_0}, \mathcal{S})$ mit

$$\xi = a_1\,\xi_1 + \ldots + a_s\,\xi_s + \delta\eta \text{ auf } V \cap X_{t_0}\,,$$

$$|\,a_\nu\,| \leq M\,\|\,\xi\,\|_{\mathfrak{U}} \text{ und}$$

$$\|\,\eta\,\|_{\mathfrak{V}} \leq N\,\|\,\xi\,\|_{\mathfrak{U}}\,.$$

Dabei haben wir folgende Bezeichnung benutzt: Wenn $m = 0$ ist, d.h. $\varrho \in \mathbf{R}_{+}^{0}$ ist, dann schreiben wir $\|\,\xi\,\|_{\mathfrak{U}}$ für $\|\,\xi\,\|_{\mathfrak{U}_\varrho}$.

Beweis. — Sei weiter $t_0 = 0$ gesetzt. $U \cap X_0$ ist eine Steinsche Überdeckung von X_0, also gilt $H^1(X_0, \mathcal{S}) = H^1(U \cap X_0, \mathcal{S})$. Nach Cartan-Serre gibt es Cozyklen $\xi_1, \ldots, \xi_s \in Z^1(U \cap X_0, \mathcal{S})$, die den $\mathbf{C}$-Vektorraum $H^l(X_0, \mathcal{S})$ erzeugen.

Somit ist also die Abbildung

$$\mathbf{C}^s \times C^{l-1}(U \cap X_0, \mathcal{S}) \longrightarrow Z^l(U \cap X_0, \mathcal{S}), \text{ definiert durch}$$

$$(a_1, \dots, a_s, \eta) \longrightarrow a_1 \xi_1 + \dots + a_s \xi_s + \delta\eta, \text{ surjektiv.}$$

In $\mathbf{C}^s \times C^{l-1}(U \cap X_0, \mathcal{S})$ haben wir die Pseudonorm

$$\|(a_1, \dots, a_s, \eta)\| = \sup(|a_1|, \dots, |a_s|, \|\eta\|_{\mathfrak{V}}).$$

Jetzt ist $\|\ \|$ eine s-Norm und $\|\ \|_{\mathfrak{U}}$ eine 0-Norm (2.1.2). Nach Lemma (2.1.3) gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass gilt: Zu jedem $\xi \in Z^l(U \cap X_0, \mathcal{S})$ gibt es ein $(a_1, \dots, a_s, \eta)$ mit $\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_s \xi_s + \delta\eta$, $|a_\nu| \leq c \|\xi\|_{\mathfrak{U}}$ und $\|\eta\|_{\mathfrak{V}} \leq c \|\xi\|_{\mathfrak{U}}$.

(4.2.2) Wir schreiben noch einmal die Theoreme $\mathrm{I}_{l^*, m}$ und $\mathrm{II}_{l^*, m}$ hin:

THEOREM $\mathrm{I}_{l^*, m}$. — Voraussetzung: Sei t_0 ein Punkt aus K, $\mathcal{S}$ eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$.

Behauptung: Für alle $\lambda \geq l^*$ gilt: $\pi_\lambda(\mathcal{S}) = 0$.

Beweis. — $W_{t_0, m}$ ist eine endliche Steinsche Überdeckung von $X_{t_0, m}$ mit der Überdeckungsdimension dim $W_{t_0, m} \leq l^*$. Sei $V = (V_j)_{j \in J}$ ein fundamentales Überdeckungssystem von Steinschen Mengen eines Punktes $t \in K_m$; für jedes $j \in J$ gilt: $0 = H^\lambda(W_{t_0, m} \cap \pi^{-1}(V_j), \mathcal{S}) = H^\lambda(\pi^{-1}(V_j), \mathcal{S})$.

Somit folgt für den Halm.

$$(\pi_\lambda(\mathcal{S}))_t = \varinjlim_{j \in J} H^\lambda(\pi^{-1}(V_j), \mathcal{S}) = 0.$$

Damit ist auch $\pi^\lambda(\mathcal{S}) = 0$.

THEOREM $\mathrm{II}_{l^*, m}$. — Voraussetzung: Sei t_0 ein Punkt aus K, $\mathcal{S}$ eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$, $\mathfrak{V} \supset \mathfrak{U}$ eine Messüberdeckungskette bezüglich $\mathfrak{A}_{t_0}$.

Behauptung: Zu jedem $\varrho > 0$ gibt es eine Konstante $N(\varrho) > 0$, so dass gilt:

Zu jedem $\xi \in Z^{l^*}(U(t_0, \varrho), \mathcal{S})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\varrho} < \infty$ gibt es ein

$$\eta \in C^{l^*-1}(V(t_0, \varrho), \mathcal{S}) \text{ mit}$$

$$\delta\eta = \xi \text{ auf } V(t_0, \varrho)$$

$$\|\eta\|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq N(\varrho) \|\xi\|_{\mathfrak{U}\varrho}.$$

Der Beweis von Theorem $\mathrm{II}_{l^*,m}$ ist trivial, wenn man sich von vorneherein nur auf alternierende Koketten beschränkt. Offensichtlich lassen sich alle Sätze dieser Arbeit auf dem Niveau alternierender Koketten beweisen. Beschränkt man sich nicht auf alternierende Koketten, so wird der Beweis an dieser Stelle etwas komplizierter.

4.3 1. Induktionsschritt

(4.3.1) Ersetzen wir in Theorem $\mathrm{II}'_{l,m}$ die Voraussetzung « $\mathcal{S}$ kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0,m}$ » durch « $\mathcal{S}$ $(t_1 - t_1^{(0)})$-torsionsrechte kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0,m}$ », so erhalten wir ein Theorem, das wir mit Theorem $\mathrm{II}''_{l,m}$ bezeichnen.

In allen Beweisen der Nummer 4.3 wird, der bequemeren Schreibweise wegen, t_0 als der Nullpuukt des $\mathbf{C}^{m^*}$ angenommen. Wir setzen dann dort auch anstelle von $X_{t_0,m}$, $\mathcal{H}^{(t_0,m)}$, $\mathcal{H}_{(t_0,m)}$ der Reihe nach X_m, $\mathcal{H}^{(m)}$, $\mathcal{H}_{(m)}$.

Satz (4.3.2). — Voraussetzung: $\mathrm{I}_{l+1,m}$, $\mathrm{II}_{l,m-1}$.
Behauptung: $\mathrm{II}''_{l,m} \Longrightarrow \mathrm{II}'_{l,m}$.

Beweis. — $\mathcal{S}$ eine kohärente analytische Garbe auf X_m. Es wird ein $d \in \mathrm{N}$ so gewählt, dass $\mathcal{S}^d$ t_1-torsionsrecht ist. Bezüglich $\mathfrak{Z}_0$ wird eine Messüberdeckkungskette

$$\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}_1 \supset\supset \mathfrak{V}_2 \supset\supset \mathfrak{V}_3 \supset\supset \mathfrak{V}_4 \supset\supset \mathfrak{V}$$

gewählt. Auf X_m haben wir folgende kanonische exakte Scquenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^d \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}_d \longrightarrow 0$$

Jetzt lässt sich $\mathcal{S}_d$ als kohärente Garbe auf X_{m-1} auffassen.

Auf $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}_1$ wird Theorem $\mathrm{III}'_{l,m-1}$ angewandt, ϱ''_1 sei ein in $\mathrm{III}'_{l,m-1}$ (1) und Δ'' sei ein in $\mathrm{III}'_{l,m-1}$ (3) versprochenes Objekt. Auf $\mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}_1$ wird Corollar (3.6.5) angewandt, $\tilde{\varrho}_1$ sei ein dort verlangter Polyradius. Auf $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}_3 \supset\supset \mathfrak{V}_4$ wird der Grauert-Leraysche Satz angewandt, Δ_L sei eine dort versprochene Dreicksmenge. Auf $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}_4$ wird Theorem $\mathrm{II}''_{l,m}$ angewandt, ϱ'_1 sei ein in $\mathrm{II}''_{l,m}$ (1) und Δ' sei ein in $\mathrm{II}''_{l,m}$ (3) versprochenes Objekt. Theorem $\mathrm{II}'_{l,m}$ wird für die Messüberdeckungskette $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}$ bewiesen. ϱ_1 und Δ sind Objekte, wie sie in $\mathrm{II}'_{l,m}$ (1), (3) verlangt werden. Sie sind folgendermassen konstruiert: Wir wählen $\tilde{\varrho}_1 = (\tilde{\varrho}_1^{(1)}, \dots, \tilde{\varrho}_1^{(m)})$ so, dass $(\widetilde{\varrho}_1^{(2)}, \dots, \widetilde{\varrho}_1^{(m)}) \leq \varrho_1''$ ist und ein ϱ_1 mit $\varrho_1 < \inf(\widetilde{\varrho}_1, \varrho_1')$; als Dreiecksmenge Δ nehmen wir $(\mathbf{R}_+ \cap \Delta'') \cap \Delta_L \cap \Delta'$.

Sei $\varrho \in \Delta$ und $\xi \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{S})$ mit $\| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho} < \infty$. Dann ist $q(d)(\xi) \in Z_\delta^l(U(\varrho), \mathcal{S}_d)$, wobei $\delta : \pi_l(\mathcal{S}_d) \to \pi_{l+1}(\mathcal{S}^d)$ der kanonische Zusammenhangshomomorphismus ist.

Nach (3.6.2) (i) gilt: $\| q(d)(\xi) \|_{\mathfrak{U}\varrho} \leq \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}$.

Seien $\xi_1'', \dots, \xi_q'' \in Z_\delta^l(U(\varrho_1'), \mathcal{S}_d)$ die in Theorem $\mathrm{III}'_{l,m-1}$ versprochenen Cozyklen.

Nach Theorem $\mathrm{III}'_{l,m-1}$ gibt es:

$$a_1, \dots, a_q \in \Gamma(K(\varrho), \mathcal{O}),$$

und ein

$$\eta'' \in C^{l-1}(V_1(\varrho), \mathcal{S}_d),$$

so dass gilt:

$$q(d)(\xi) = a_1 \xi_1'' + \dots + a_q \xi_q'' + \delta\eta'' \quad \text{auf} \quad V_1(\varrho),$$

$$\| a_\nu \|_\varrho \leq M''(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho},$$

$$\| \eta'' \|_{\mathfrak{V}_1\varrho} \leq N''(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}.$$

Nach Satz (3.6.5), angewandt auf $\mathfrak{V}_1 \supset\supset \mathfrak{V}_2$, gilt:

es gibt $\quad \xi_1, \dots, \xi_q \in Z^l(V_1(\widetilde{\varrho}_1), \mathcal{S})$ mit

$$q(d)(\xi_\nu) = \xi_\nu'' \quad \text{auf} \quad V_1(\widetilde{\varrho}_1), \qquad 1 \leq \nu \leq q,$$

$$\| \xi_\nu \|_{\mathfrak{V}_1 \widetilde{\varrho}_1} \leq c_0 < \infty, \qquad 1 \leq \nu \leq q$$

Nach (3.6.2) (ii) gilt:

es gibt ein $\eta_2 \in C^{l-1}(V_2(\varrho), \mathcal{S})$ mit

$$q(d)(\eta_2) = \eta'' \quad \text{auf} \quad V_2(\varrho)$$

$$\| \eta_2 \|_{\mathfrak{V}_2\varrho} \leq c \| \eta'' \|_{\mathfrak{V}_1\varrho}$$

Jetzt wird gesetzt:

$$\xi^* = \xi - (a_1 \xi_1 + \dots + a_q \xi_q + \delta\eta_2) \qquad \text{auf} \quad V_2(\varrho).$$

Offensichtlich gilt jetzt nach Satz (3.6.10) die Beziehung

$$\| \xi^* \|_{\mathfrak{V}_2 \varrho} \leq \widetilde{M}(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U} \varrho},$$

wobei $\widetilde{M}$ eine Abbildung ist, die aus dem Hintereinanderschalten obiger Ungleichungen resultiert.

Da $q(d)(\xi^*) = 0$ ist, folgt $\xi^* \in Z^l(V_2(\varrho), \mathcal{S}^d)$.

Die Normen bezüglich der Garbe $\mathcal{S}^d$ bezeichnen wir mit $\| \ \|^+$.

Nach Satz (3.6.6), angewandt auf $\mathfrak{V}_2 \supset\supset \mathfrak{V}_3$, gilt:

$$\| \xi^* \|^+_{\mathfrak{V}_3 \varrho} \leq c_1(\varrho) \| \xi^* \|_{\mathfrak{V}_2 \varrho}.$$

Nach Grauert-Leray (3.5.3) gibt es:

$$\text{ein} \quad \xi^{**} \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{S}^d),$$

$$\text{und ein} \quad \eta_1^* \in C^{l-1}(V_4(\varrho), \mathcal{S}^d),$$

so dass gilt:

$$\xi^* = \xi^{**} + \delta\eta_1^* \qquad \text{auf} \quad V_4(\varrho),$$

$$\| \xi^{**} \|^+_{\mathfrak{U} \varrho} \leq L_1(\varrho) \| \xi^* \|^+_{\mathfrak{V}_3 \varrho},$$

$$\| \eta_1^* \|^+_{\mathfrak{V}_4 \varrho} \leq L_2(\varrho) \| \xi^* \|^+_{\mathfrak{V}_3 \varrho},$$

Seien $\xi_1', \dots, \xi_p' \in Z^l(U_1(\varrho_1'), \mathcal{S}^d)$ die in Theorem $\mathrm{II}_{l,m}''$ versprochenen Cozyklen.

Nach Theorem $\mathrm{II}_{l,m}''$ gibt es:

$$b_1, \dots, b_p \in \Gamma(K(\varrho), \mathcal{O})$$

$$\text{und ein} \qquad \eta' \in C^{l-1}(V_4(\varrho), \mathcal{S}^d)$$

so dass gilt:

$$\xi^{**} = b_1 \xi_1' + \dots + b_p \xi_p' + \eta\delta' \qquad \text{auf} \quad V_4(\varrho),$$

$$\| b_\nu \|_\varrho \leq M'(\varrho) \| \xi^{**} \|^+_{\mathfrak{U} \varrho},$$

$$\| \eta' \|^+_{\mathfrak{V}_4 \varrho} \leq N'(\varrho) \| \xi^{**} \|_{\mathfrak{U} \varrho}.$$

Nach Satz (3.6.9), angewandt auf $\mathfrak{V}_4 \supset\supset \mathfrak{V}$, gilt:

$$\| \eta_1^* \|_{\mathfrak{V}\,\varrho} \leq c_2 \| \eta_1 \|^+_{\mathfrak{V}_4\,\varrho} ,$$

$$\| \eta' \|_{\mathfrak{V}\,\varrho} \leq c_2 \| \eta' \|^+_{\mathfrak{V}_4\,\varrho} .$$

Auf $V(\varrho)$ gilt jetzt:

$$\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_q \xi_q + b_1 \xi_1' + \dots + b_p \xi_p' + \delta (\eta_2 + \eta_1^* + \eta'),$$

und es gelten die Ungleichungen:

$$\| a_\nu \|_\varrho \leq L(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\,\varrho} , \quad 1 \leq \nu \leq q , \quad \| b_\nu \|_\varrho \leq M(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\,\varrho} , \quad 1 \leq \nu \leq p ,$$

$\| \eta_2 + \eta_1 + \eta' \|_{\mathfrak{V}\,\varrho} \leq N(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\,\varrho}$, wobei die Funktionen L, M und N aus dem Hintereinanderschalten der obigen Ungleichungen resultieren.

Satz (4.3.3). — Voraussetzung: $\mathrm{I}_{l+1,m}$, $\mathrm{II}_{l+1,m}$, t_0 sei ein Punkt aus K, $\mathcal{S}$ sei eine $(t_1 - t_1^{(0)})$ — torsionsrechte kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0,m}$, $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}_1 \supset\supset \mathfrak{V}$ sei eine Messüberdeckungskette bezüglich $\mathfrak{A}_{t_0}$, c sei eine positive reelle Zahl.

Behauptung: Es gibt eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$ und von ϱ_1 unabhängige Abbildungen M und N von $\Delta(1/2\,\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ nach $\mathbf{R}_+$ derart, dass für jedes $\varrho \in \Delta(1/2\,\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ gilt:

Zu jedem $\xi \in Z^l(U(t_0, \varrho), \mathcal{S})$ mit $\| \xi \|_{\mathfrak{U}\,\varrho} < \infty$, $\xi = \sum_{\nu \geq 0} ((t_1 - t_1^{(0)})^\nu / \varrho_1^\nu)\, \xi_\nu'$, wobei $\xi_\nu' \in C^l(V_1(t_0, \varrho^*), \mathcal{S})$, $\varrho^* = (3/4\,\delta_1(\varrho_m, \dots, \varrho_2), \varrho_2, \dots, \varrho_m)$ und $\| \xi_\nu' \|_{\mathfrak{V}_1\,\varrho^*} \leq c \| \xi \|_{\mathfrak{U}\,\varrho}$ ist, gibt es eine Folge $(\sigma_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}}$ von Coketten $\sigma_\nu \in C^l(V(t_0, \varrho^*), \mathcal{S})$, so dass, wenn man $\xi_0 = \xi_0' + ((t_1 - t_1^{(0)})/\varrho_1^*)\, \sigma_1$ und $\xi_\nu = \xi_\nu' + (\varrho_1/\varrho_1^*)\, \sigma_\nu + ((t_1 - t_1^{(0)})/\varrho_1^*)\, \sigma_{\nu+1}$, $\nu > 0$ setzt, gilt:

(i) $$\xi = \sum_{\nu \geq 0} ((t_1 - t_1^{(0)})^\nu / \varrho_1^\nu)\, \xi_\nu ,$$

(ii) $$\xi_\nu \in Z^l(V(t_0, \varrho^*), \mathcal{S}),$$

(iii) $$\| \xi_\nu \|_{\mathfrak{V}\,\varrho^*} \leq M(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\,\varrho} ,$$

$$\| \sigma_\nu \|_{\mathfrak{V}\,\varrho^*} \leq N(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\,\varrho} .$$

Beweis. — Wir wählen ein Messüberdeckungskette $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}_1 \supset\supset \mathfrak{V}_2 \supset\supset \mathfrak{V}$ bezüglich $\mathfrak{A}_0$.

Auf $\mathfrak{V}_1 \supset\supset \mathfrak{V}_2$ wird Satz (3.6.6) angewandt, Δ' sei eine dort versprochene Dreiecksmenge. Corollar (1.4.7) liefert eine Dreiecksmenge Δ''. Auf $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \supset\supset \mathfrak{V}_2 \supset\supset \mathfrak{V}$ wird Corollar $\mathrm{IV}_{l+1,m}$ angewandt und Δ''' sei eine dort versprochene Dreiecksmenge.

Der Satz (4.3.3) wird für die Messüberdeckungskette $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}$ bewiesen. Für die dort verlangte Dreiecksmenge nehmen wir $\Delta(\delta_1, \dots, \delta_m) = = \Delta' \cap \Delta'' \cap \Delta'''$. Sei jetzt $\varrho \in \Delta(1/2\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ hinreichend klein, dann ist $\varrho^* \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m)$. Sei jetzt $\xi \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{S})$ und $\| \xi'_\mu \|_{\mathfrak{V}_1 \varrho^*} \leq c \| \xi \|_{\mathfrak{V}\varrho}$. Wir schreiben jetzt $\xi = \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \left(\frac{t^1}{\varrho_1}\right)^\mu \xi'_\mu + \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \sum_{\mu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\mu \xi'_{\mu+\nu}$ und setzen $\eta_\nu = = \sum_{\mu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\mu \xi'_{\nu+\mu} \in C^l(V_1(\varrho), \mathcal{S})$,

$$\gamma_\nu = - \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_1^*}\right)^{\nu+1} \partial \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\mu \xi'_\mu \in Z^{l+1}(V_1(\varrho^*), \mathcal{S}).$$

Offensichtlich gilt $\| \gamma_\nu \|_{\mathfrak{V}\varrho^*} \leq (l+1) c \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}$.

Da ξ ein Cozyklus ist, gilt auf $V_1(\varrho)$:

$$\gamma_\nu = \frac{\varrho_1^*}{\varrho_1} \left(\frac{t_1}{\varrho_1^*}\right)^\nu \partial \eta_\nu.$$

Es gilt sogar $\gamma_\nu \in Z^{l+1}(V_1(\varrho^*), \mathcal{S}^\nu)$. Nach Satz (3.6.6) folgt:

Es gibt ein $\tilde{\gamma}_\nu \in C^{l+1}(V_2(\varrho^*), \mathcal{S})$ mit

$$\left(\frac{t_1}{\varrho_1^*}\right)^\nu \tilde{\gamma}_\nu = \gamma_\nu \qquad \text{auf } V_2(\varrho^*) \text{ und}$$

$$\| \tilde{\gamma}_\nu \|_{\mathfrak{V}_2 \varrho^*} \leq M(\varrho^*) \| \gamma_\nu \|_{\mathfrak{V}_1 \varrho^*}.$$

Da $\mathcal{S}$ t_1-torsionsrecht ist, gilt sogar

$$\tilde{\gamma}_\nu \in Z^{l+1}(V_2(\varrho^*), \mathcal{S})$$

und auf $V_2(\varrho)$ gilt:

$$\tilde{\gamma}_\nu = \frac{\varrho_1^*}{\varrho_1} \partial \eta_\nu$$

Somit gilt also

$$\pi_{l+1}(\tilde{\gamma}_\nu) = 0 \text{ in } \Gamma(K(\varrho), \pi_{l+1}(\mathcal{S})).$$

Wegen Theorem $\mathrm{I}_{l+1,\,m}$ gilt nach Corollar (1.4.7) sogar

$$\pi_{l+1}(\widetilde{\gamma_\nu}) = 0 \text{ in } \Gamma(K(\varrho^*), \pi_{l+1}(\mathcal{S})).$$

Nach Corollar $\mathrm{II}_{l+1,\,m}$ gilt:
es gibt ein $\sigma_\nu \in C^l(V(\varrho^*), \mathcal{S})$ mit

$$\partial\sigma_\nu = \widetilde{\gamma}_\nu \text{ auf } V(\varrho^*) \text{ und}$$

$$\| \sigma_\nu \|_{\mathfrak{V}\varrho^*} \leq N(\varrho^*) \| \widetilde{\gamma}_\nu \|_{\mathfrak{V}_2\varrho^*}$$

Insbesondere gilt:

$$\| \sigma_\nu \|_{\mathfrak{V}\varrho^*} \leq N(\varrho^*)\, M(\varrho^*)\, (l+1)\, c \, \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}$$

Jetzt wird gesetzt:

$$\xi_0 = \xi_0' + \frac{t_1}{\varrho_1^*}\sigma_1$$

$$\xi_\nu = \xi_\nu' - \frac{\varrho_1}{\varrho_1^*}\sigma_\nu + \frac{t_1}{\varrho_1^*}\sigma_{\nu+1}, \qquad \nu > 0.$$

Eine elementare Rechnung zeigt

$$\left(\frac{t_1/\varrho_1^*}{\varrho_1/\varrho_1^*}\right)^\nu \partial\xi_\nu = 0, \qquad \nu \geq 0.$$

Da $\mathcal{S}$ t_1-torsionsrecht ist, folgt sogar

$$\xi_\nu \in Z^l(V(\varrho^*), \mathcal{S})$$

weiter gilt noch $\xi = \sum\limits_{\nu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \xi_\nu$ und $\| \xi_\nu \|_{\mathfrak{V}\varrho^*} \leq L(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}$, wobei die Funktion L aus dem Hintereinanderschalten obiger Ungleichungen resultiert.

Satz (4.3.4). — Voraussetzung: $\mathrm{I}_{l+1,\,m}$, $\mathrm{II}_{l+1,\,m}$, $\mathrm{II}_{l,\,m-1}$, t_0 sei ein Punkt aus K, $\mathcal{S}$ sei eine $(t_1 - t_1^{(0)})$-torsionrechte, kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0,\,m}$, $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}$ sei eine Messüberdeckungskette bezüglich $\mathfrak{A}_{t_0}$.

Behauptung: Es gibt

1) ein $\varrho_0 \in \mathbf{R}_+^m$, $\varrho_0 > 0$ (unabhängig von $\mathcal{S}$),

2) eine Dreiecksmenge $\Delta(\delta_1, \ldots, \delta_m)$,

3) $\xi_1, \ldots, \xi_s \in Z^l(U(t_0, \varrho_0), \mathcal{S})$,

4) von ϱ_1 unabhängige Abbildungen L, M, N von $\Delta(1/2\,\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ nach $\mathbf{R}_+$, so dass für jedes hinreichend kleine $\varrho \in \Delta(1/2\,\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$ gilt:

Zu jedem $\xi \in Z^l(U(t_0, \varrho), \mathcal{S})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\varrho} < \infty$ gibt es $a_1, \dots, a_s$ aus $\Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{O})$, ein $\eta \in C^{l-1}(V(t_0, \varrho), \mathcal{S})$ und ein $\tilde{\xi} \in Z^l(V(t_0, \varrho), \mathcal{S})$ derart, dass

$$\xi = a_1\,\xi_1 + \dots + a_s\,\xi_s + \delta\eta + \frac{\varrho_1}{\varrho_1^*}\,\tilde{\xi} \text{ auf } V(\varrho),$$

$$\|a_j\|_\varrho \leq L(\varrho)\,\|\xi\|_{\mathfrak{U}\varrho}, \qquad 1 \leq j \leq s,$$

$$\|\eta\|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq M(\varrho)\,\|\xi\|_{\mathfrak{U}\varrho},$$

$$\|\tilde{\xi}\|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq N(\varrho)\,\|\xi\|_{\mathfrak{U}\varrho} \text{ gilt.}$$

Wir wählen eine Messüberdeckungskette

$$\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}' \supset\supset \mathfrak{V}_1 \supset\supset \mathfrak{V}_2 \supset\supset \mathfrak{V}_3 \supset\supset \mathfrak{V}$$

bezüglich $\mathfrak{A}_0$.

Auf $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}' \supset\supset \mathfrak{V}_1$ wird Satz (4.3.3) angewandt Δ' sei die dort versprochene Dreiecksmenge. Auf $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{V}_1 \supset\supset \mathfrak{V}_2$ wird Theorem $\mathrm{III}_{l,\,m-1}$ angewandt, ϱ_1'' und Δ'' seien die in $\mathrm{III}_{l,\,m-1}$ (1) und (2) versprochenen Objekte. Auf $\mathfrak{V}_3 \supset\supset \mathfrak{V}$ wird Satz (3.6.6) angewandt, Δ''' sei die dort versprochene Dreiecksmenge. Auf $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}_2 \supset\supset \mathfrak{V}$ wird der Grauert-Leraysche Satz (3.5.3) angewandt, Δ_L sei die dort versprochene Dreiecksmenge. Es werden m-tupel $\varrho_1^{**}, \tilde{\varrho}_1, \varrho_0$ aus $\mathbf{R}_+^m$ so gewählt, dass $\varrho_0 < \varrho_1 \leq (\tilde{\varrho}_1^{(1)}, \varrho_1'') < \varrho_1^{**}$ und $\varrho_0 \in \Delta_L$ gilt.

Satz (4.3.4) wird für die Messüberdeckungskette $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}$ bewiesen. ϱ_0 und Δ sind die in (4.3.4) (1) und (2) verlangten Objekte, dabei wurde $\Delta = \Delta' \cap (\mathbf{R}_+ \times \Delta'') \cap \Delta''' \cap \Delta_L$ gesetzt. Sei jetzt $\varrho \in \Delta(1/2\,\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m)$, dann ist

$$\varrho^* = (3/4\,\delta_1(\varrho_m, \dots, \varrho_2), \varrho_2, \dots, \varrho_m) \in \Delta(\delta_1, \dots, \delta_m).$$

Sei jetzt $\xi \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{S})$ mit $\|\xi\|_{\mathfrak{U}\varrho} < \infty$.

Nach Satz (3.6.7) gilt:

$$\xi = \sum_{\nu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \xi_\nu' \text{ auf } V'(\varrho)$$

$$\xi_\nu' \in C^l(V'(\varrho^*), \mathcal{S})$$

$$\|\xi_\nu'\|_{\mathfrak{V}_1\varrho^*} \leq c\,\|\xi\|_{\mathfrak{U}\varrho}.$$

Nach Satz (4.3.3) gibt es eine Familie $(\sigma_\nu)_{\nu \in N}$, $\sigma_\nu \in C^l(V_1(\varrho^*), \mathcal{S})$ so dass, wenn man noch

$$\xi_0 = \xi_0' + \frac{t_1}{\varrho_1^*}\sigma_1$$

$$\xi_\nu = \xi_\nu' - \frac{\varrho_1}{\varrho_1^*}\sigma_\nu + \frac{t_1}{\varrho_1^*}\sigma_{\nu+1}, \qquad \nu > 0, \text{ setzt, gilt:}$$

$$\xi = \sum_{\nu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \xi_\nu \text{ auf } V_1(\varrho),$$

$$\xi_\nu \in Z^l(V_1(\varrho_*), \mathcal{S}),$$

$$\| \xi_\nu \|_{\mathfrak{V}_1 \varrho^*} \leq M(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U} \varrho},$$

$$\| \sigma_\nu \|_{\mathfrak{V}_1 \varrho^*} \leq N(\delta) \| \xi \|_{\mathfrak{U} \varrho}.$$

Auf $X_{t_0, m}$ hat man die kanonische kurze exakte Sequenz:

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^1 \longrightarrow \mathcal{S} \xrightarrow{q(1)} \mathcal{S}_1 \longrightarrow 0$$

$\mathcal{S}_1$ kann als kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m-1}$ aufgefasst werden. Man hat noch den kanonischen Homomorphismus $\delta : \pi_l(\mathcal{S}_1) \longrightarrow \pi_{l+1}(\mathcal{S}^1)$.

Jetzt gilt:

$$q(1)(\xi_0) = q(1)(\xi_0') \quad \in Z_\delta^l(V_1(\varrho^*), \mathcal{S}_1),$$

$$q(1)(\xi_\nu) = q(1)\left(\xi_\nu' - \frac{1}{\varrho_1^*}\sigma_\nu\right) \quad \in Z_\delta^l(V_1(\varrho^*), \mathcal{S}_1), \qquad \nu > 0.$$

Nach Satz (3.6.2) (i) gilt:

$$\| q(1)(\xi_\nu) \|_{\mathfrak{V}_1 \varrho^*} \leq \| \xi_\nu \|_{\mathfrak{V}_1 \varrho^*}$$

Seien $\widehat{\xi}_1, \dots, \widehat{\xi}_s \in Z_\delta^l(V_1(\varrho_1''), \mathcal{S}_1)$ die in Theorem $\mathrm{III}_{l, m-1}$ versprochenen Cozyklen.

Nach Theorem $\mathrm{III}_{l, m-1}$ gibt es:

$$a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu s} \in \Gamma(K(\varrho^*), \mathcal{O})$$

und ein $\widehat{\omega}_\gamma \in C^{l-1}(V_2(\varrho^*), \mathcal{S}_1)$

so dass gilt:

$$q(1)(\xi_\nu) = a_{\nu 1}\widehat{\xi}_1 + \dots + a_{\nu s}\widehat{\xi}_s + \delta\widehat{\omega}_\nu \quad \text{auf } V_2(\varrho^*)$$

$$\| a_{\nu j} \|_{\varrho^*} \leq M'(\varrho^*) \| \xi_\nu \|_{\mathfrak{V}_1 \varrho^*}, \qquad 1 \leq j \leq s$$

$$\| \widehat{\omega}_\nu \|_{\mathfrak{V}_2 \varrho^*} \leq N'(\varrho^*) \| \xi_\nu \|_{\mathfrak{V}_1 \varrho^*}$$

Nach Corollar (3.6.5), angewandt auf $\mathfrak{V}_1 \subset\subset \mathfrak{V}_2$, gilt:

$$\text{es gibt } \check{\xi}_1, \dots, \check{\xi}_s \in Z^l(V_2(\tilde{\varrho}_1), \mathcal{S}) \quad \text{mit}$$

$$q(1)(\check{\xi}_j) = \widehat{\xi}_j \quad \text{auf } V_2(\tilde{\varrho}_1), \qquad 1 \leq j \leq s$$

$$\| \check{\xi}_j \|_{\mathfrak{V}_2 \tilde{\varrho}_1} \leq c_0 < \infty, \qquad 1 \leq j \leq s$$

Nach Satz (3.6.2) (ii), angewandt auf $\mathfrak{V}_2 \supset\supset \mathfrak{V}_3$, gilt:

$$\text{es gibt ein } \check{\omega}_\nu \in C^{l-1}(V_3(\varrho^*), \mathcal{S}) \quad \text{mit}$$

$$q(1)(\check{\omega}_\nu) = \widehat{\omega}_\nu \qquad \text{auf } V_3(\varrho^*)$$

$$\| \check{\omega}_\nu \|_{\mathfrak{V}_3 \varrho^*} \leq c \| \widehat{\omega}_\nu \|_{\mathfrak{V}_2 \varrho^*}$$

Jetzt wird gesetzt:

$$\xi_0^* = \xi_0' - (a_{01}\check{\xi}_1 + \dots + a_{0s}\check{\xi}_s + \delta\check{\omega}_0) \qquad \text{auf } V_3(\varrho^*)$$

$$\xi_\nu^* = \xi_\nu' - \frac{\varrho_1}{\varrho_1^*}\sigma_\nu - (a_{\nu 1}\check{\xi}_1 + \dots + a_{\nu s}\check{\xi}_s + \delta\check{\omega}_\nu) \quad \text{auf } V_3(\varrho^*), \ \nu \geq 1$$

Nach Satz (3.6.10) gilt jetzt

$$\| \xi^* \|_{\mathfrak{V}_3 \varrho^*} \leq \widetilde{M}(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{V} \varrho}$$

dabei wurde

$$\widetilde{M}(\varrho) = M(\varrho)(1 + sM'(\varrho^*)c_0 + lcN'(\varrho^*))$$

gesetzt. Man beachte, dass $\widetilde{M}$ eine von ϱ_1 unabhängige Funktion ist! Da $q(1)(\xi_\nu^*) = 0$ ist, folgt $\xi_\nu^* \in Z^l(V_3(\varrho^*), \mathcal{S}^1)$

Nach Satz (3.6.6) gilt:

es gibt ein $\tilde{\xi}_\nu^* \in C^l(V(\varrho^*), \mathcal{S})$ mit

$$\frac{t_1}{\varrho_1^*} \tilde{\xi}_\nu^* = \xi_\nu^* \text{ auf } V(\varrho^*)$$

$$\| \tilde{\xi}_\nu^* \|_{\mathfrak{v}\,\varrho^*} \leq M''(\varrho^*) \| \xi_\nu^* \|_{\mathfrak{v}_3\,\varrho^*}$$

Auf $V(\varrho^*)$ gilt somit:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_1^*}\left(\frac{t_1}{\varrho_1} \tilde{\xi}_\nu^* + \sigma_\nu\right) = \xi_\nu' - (a_{\nu 1} \check{\xi}_1 + \dots + a_{\nu s} \check{\xi}_s + \delta \check{\omega}_\nu)$$

Jetzt wird gesetzt:

$$a_j = \sum_{\nu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu a_{\nu j}, \qquad 1 \leq j \leq s$$

$$\check{\omega} = \sum_{\nu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \check{\omega}_\nu$$

$$\tilde{\xi} = \sum_{\nu \geq 0} \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^\nu \left(\frac{t_1}{\varrho_1} \tilde{\xi}_\nu^* + \sigma_\nu\right)$$

Insgesamt gibt es nach Anwendung von Satz (3.6.8) Funktionen L^*, M^*, N^* von Δ nach $\mathbf{R}_+$ derart, dass die Ungleichungen $\| a_j \|_\varrho \leq L^*(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\,\varrho}$, $\| \check{\omega} \|_{\mathfrak{v}\varrho} \leq M^*(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\,\varrho}$, $\| \tilde{\xi} \|_{\mathfrak{v}\varrho} \leq N^*(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\,\varrho}$ gelten.
Auf $V(\varrho)$ gilt jetzt:

$$\xi = a_1 \check{\xi}_1 + \dots + a_s \check{\xi}_s\, \delta \check{\omega} + \frac{\varrho_1}{\varrho_1^*} \tilde{\xi}$$

Nach Grauert-Laray (3.5.3) gibt es

$$\xi_1, \dots, \xi_s \in Z^l(U(\varrho_0), \mathcal{S}),$$

$$\eta_1, \dots, \eta_s \in C^{l-1}(V(\varrho_0), \mathcal{S}),$$

so dass auf $V(\varrho)$ gilt:

$$\check{\xi}_j = \xi_j + \delta \eta_j, \qquad 1 \leq j \leq s$$

$$\| \eta_j \|_{\mathfrak{v}\varrho_0} \leq L_2(\varrho_1) \| \xi_j \|_{\mathfrak{v}_2\,\varrho_0}$$

Somit gilt jetzt auf $V(\varrho)$:

$$\xi = \sum_{j=1}^{s} a_j \xi_j + \delta\left(\breve{\omega} + \sum_{j=1}^{s} a_j \eta_j\right) + \frac{\varrho_1}{\varrho_1^*} \tilde{\xi}$$

Und es gibt nach Anwendung von Satz (3.6.10) eine Funktion M^{**} von Δ nach $\mathbf{R}_+$ derart, dass

$$\| \breve{\omega} + \sum_{j=1}^{s} a_j \eta_j \|_{\mathfrak{V}_\varrho} \leq M^{**}(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}_\varrho} \quad \text{gilt.}$$

Satz (4.3.5). — $\mathrm{I}_{l+1,m}$ und $\mathrm{II}_{l+1,m}$ und $\mathrm{II}_{l,m-1} \Longrightarrow \mathrm{II}''_{l,m}$.

Beweis. — Wir wählen eine Messüberdeckungskette

$$\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}_1 \supset\supset \mathfrak{V} \quad \text{bezüglich } \mathfrak{A}_0 .$$

Auf $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}_1$ wird Satz (4.3.4) angewandt, ϱ_0, Δ'', $\xi_1, \ldots, \xi_s \in Z^l(U(\varrho_1), \mathcal{S})$ und L, M, N seien die in (4.3.4) (1) bis (4) versprochenen Objekte. Auf $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}_1 \supset\supset \mathfrak{V}$ wird der Grauert-Leraysche Satz (3.5.3) angewandt, Δ_L, L_1 und L_2 seien die dort versprochenen Objekte. Der Satz (4.3.5) wird für die Messüberdeckungskette $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}$ bewiesen. ϱ_0 ist das in $\mathrm{II}''_{l,m}$ versprochene m-tupel. Die in $\mathrm{II}''_{l,m}$ versprochene Dreiecksmenge Δ wird fongendermassen konstruiert:

Es wird gesetzt:

$$\Delta''(\delta_1, \ldots, \delta_m) = \Delta' \cap \Delta_L ,$$

$$\varrho_1^* = 3/4\, \delta_1 (\varrho_2, \ldots, \varrho_m)$$

$$\hat{\delta}_1 = \inf\left(1/2\, \delta_1 , \frac{\varrho_1^*}{2L_1 N}\right)$$

$$\Delta = (\hat{\delta}_1 , \delta_2 , \ldots , \delta_m)$$

Man beachte, dass L_1, N, ϱ_1^* von ϱ_1 unabhängige Funktionen sind!

Sei jetzt $\varrho \in \Delta$ und $\xi \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{S})$ mit $\| \xi \|_{\mathfrak{U}_\varrho} < \infty$ Vermöge Satz (4.3.4) und Satz (3.5.2) werden Folgen

$$(\xi_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}} \qquad \xi_\nu \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{S})$$

$$(\xi'_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}} \qquad \xi'_\nu \in Z^l(V_1(\varrho), \mathcal{S})$$

$$(\eta'_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}} \qquad \eta'_\nu \in C^{l-1}(V_1(\varrho), \mathcal{S})$$

$$(\eta_\nu)_{\nu \in \mathrm{N}} \qquad \eta_\nu \in C^{l-1}(V(\varrho), \mathcal{S})$$

$$(a_{\nu j})_{\nu \in \mathrm{N}} \qquad a_{\nu j} \in \Gamma(K(\varrho), \mathcal{O}) \qquad\qquad 1 \leq j \leq s$$

induktiv definiert, so dass gilt:

$$\xi_0 = \xi, \; \xi_0' = 0$$

$$\xi_\nu = a_{\nu 1}\, \xi_1 + \dots + a_{\nu s}\, \xi_s + \delta\, \eta_\nu' + \xi_{\nu+1}'$$

$$\xi_{\nu+1}' = \xi_{\nu+1} + \delta\, \eta_\nu$$

$$\| a_{\nu j} \|_\varrho \leq L(\varrho) \, \| \xi_\nu \|_{\mathfrak{U}\varrho}$$

$$\| \eta_\nu' \|_{\mathfrak{V}_1 \varrho} \leq M(\varrho) \, \| \xi_\nu \|_{\mathfrak{U}\varrho}$$

$$\| \xi_{\nu+1} \|_{\mathfrak{V}_1 \varrho} \leq \frac{\varrho_1}{\varrho_1^*(\varrho)} N(\varrho) \, \| \xi_\nu \|_{\mathfrak{U}\varrho}$$

$$\| \xi_{\nu+1} \|_{\mathfrak{U}\varrho} \leq L_1(\varrho) \, \| \xi_{\nu+1}' \|_{\mathfrak{V}_1 \varrho}$$

$$\| \eta_\nu \|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq L_2(\varrho) \, \| \xi_{\nu+1} \|_{\mathfrak{V}_1 \varrho}$$

Setzen wir jetzt

$$\omega_\nu = \eta_\nu' + \eta_\nu \quad \text{auf } V(\varrho)$$

dann gilt offensichtlich:

$$\xi_\nu = a_{\nu 1}\, \xi_1 + \dots + a_{\nu s}\, \xi_s + \omega_\nu + \xi_{\nu+1}$$

$$\| \omega_\nu \|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq \widetilde{M}(\varrho) \, \| \xi_\nu \|_{\mathfrak{U}\varrho}$$

$$\| \xi_{\nu+1} \|_{\mathfrak{U}\varrho} \leq \frac{\varrho_1}{\varrho_1^*} L_1(\varrho)\, N(\varrho) \, \| \xi_\nu \|_{\mathfrak{U}\varrho}$$

dabei wurde

$$\widetilde{M}(\varrho) = M(\varrho) + \frac{\varrho_1}{\varrho_1^*} L_2(\varrho)\, N(\varrho)$$

gesetzt.

Aus der letzten Ungleichung folgt durch Iteration

$$\| \xi_\nu \|_{\mathfrak{U}\varrho} \leq \left(\frac{\varrho_1}{\varrho_1^*}\right)^\nu (L_1(\varrho)\, N(\varrho))^\nu \, \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}$$

Da aber $\frac{\varrho_1}{\varrho_1^*} L_1(\varrho) N(\varrho) \leq 1/2$ ist folgt:

$$\| \xi_\nu \|_{\mathfrak{U}\varrho} \leq \frac{1}{2^\nu} \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}$$

$$\| a_{\nu j} \|_\varrho \leq \frac{1}{2^\nu} L(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}, \qquad 1 \leq j \leq s$$

$$\| \omega_\nu \|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq \frac{1}{2^\nu} \widetilde{M}(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}$$

Jetzt wird gesetzt:

$$a_j = \sum_{\nu \geq 0} a_{\nu j}, \qquad 1 \leq j \leq s$$

$$\omega = \sum_{\nu \geq 0} \omega_\nu$$

dann gilt

$$\xi = a_1 \xi_1 + \ldots + a_s \xi_s + \delta\omega \quad \text{auf } V(\varrho)$$

$$\| a_j \|_\varrho \leq 2L(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho},$$

$$\| \omega_\nu \|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq 2\widetilde{M}(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}.$$

SATZ (4.3.6). — Voraussetzung: $\mathrm{I}_{l+1,m}$, $\mathrm{II}_{l+1,m}$, $\mathrm{II}_{l,m-1}$.
Behauptung: $\mathrm{II}'_{l,m} \Longrightarrow \mathrm{II}_{l,m}$.

Beweis: Wir wählen eine Messüberdeckungskette

$$\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{U}_1 \supset\supset \mathfrak{U}_2 \supset\supset \mathfrak{U}_3 \supset\supset \mathfrak{V} \quad \text{bezüglich } \mathfrak{B}_0.$$

Sei $d^+ \in \mathbf{N}$ so gewählt, dass $\mathcal{S}^{d^+}$ t_1-torsionsrecht ist. Sei nun $e \in \mathbf{N}^m$ und ohne Einschränkung sei $e_1 > d^+$.

Auf $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{U}_1$ wird Theorem $\mathrm{III}_{l,m-1}$ angewandt; ϱ'_1, Δ'_e, F_{e_1} sind die in $\mathrm{III}_{l,m-1}$ versprochenen Objekte. Auf $\mathfrak{U}_1 \supset\supset \mathfrak{U}_2$ wird Satz (3.6.6) angewandt, Δ'' sei die dort versprochene Dreiecksmenge. Auf $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{U}_3 \supset\supset \mathfrak{V}$ wird der Grauert-Leraysche Satz (3.5.2) angewandt, Δ_L sei die dort versprochene Dreiecksmenge. Auf $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}$ wird Theorem $\mathrm{II}'_{l,m}$ angewandt; ϱ'''_1, Δ''' sind die in $\mathrm{II}'_{l,m}$ (1), (3) versprochenen Objekte.

Theorem $\mathrm{II}_{l,m}$ wird für die Messüberdeckungskette $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}$ bewiesen. Es werden $\varrho_0, \bar{\varrho}, \tilde{\varrho} \in \mathbf{R}^m_+$ so gewählt, dass $\varrho_0 < \bar{\varrho} < \varrho'''_1 < \tilde{\varrho} < \varrho'_1$ und $\bar{\varrho} \in \Delta'''$ gilt.

Es wird

$$\Delta_e = (\mathbf{R}_+ \times \Delta_e') \cap \Delta'' \cap \Delta \cap \Delta''' \quad \text{(unterhalb } \varrho_1)$$

gesetzt. Die Abbildung $F : \mathbf{N}^m \longrightarrow \mathbf{N}^m$ wird durch

$$(e_1, e_2, \dots, e_m) \longmapsto (e_1 - d^+, F_{e_1}(e_2, \dots, e_m)) \quad \text{wenn} \quad e_1 > d^+$$

$$(e_1, e_2, \dots, e_m) \longmapsto (0, \dots, 0) \quad \text{wenn} \quad e_1 < d^+$$

erklärt.

Sei jetzt $\varrho \in \Delta_e$ und $\xi \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{S})$ mit $\| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho} < \infty$ und $q(e)(\xi) = 0$.

Seien $\widetilde{\xi}_1, \dots, \widetilde{\xi}_s \in Z^l(U(\varrho_1'), \mathcal{S}_{e_1})$ die in Theorem $\mathrm{III}_{l, m-1}$ versprochenen Cozyklen.

Nach Theorem $\mathrm{III}_{l, m-1}$ gibt es:

$$a_1, \dots, a_s \in \Gamma(K(\varrho), \mathcal{I}(F_{e_1}(e_2, \dots, e_m))),$$

$$\text{und ein} \quad \widetilde{\eta} \in C^{l-1}(U_1(\varrho), \mathcal{S}_{e_1}),$$

so dass gilt:

$$q(e_1)(\xi) = a_1 \widetilde{\xi}_1 + \dots + a_s \widetilde{\xi}_s + \delta\widetilde{\eta} \quad \text{auf } U_1(\varrho),$$

$$\| a_j \|_\varrho \leq M_e'(\varrho) \, \| q(d)(\xi) \|_{\mathfrak{U}\varrho},$$

$$\| \widetilde{\eta} \|_{\mathfrak{U}_1\varrho}^{e_1} \leq N_e'(\varrho) \, \| q(d)(\xi) \|_{\mathfrak{U}\varrho}.$$

Nach Satz (3.6.2) (i) gilt:

$$\| q(e_1)(\xi) \|_{\mathfrak{U}\varrho} \leq \| \xi \|_{\mathfrak{U}\varrho}.$$

Nach Corollar (3.6.5), angewandt auf $\mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{U}_1$, gibt es

$$\xi_1', \dots, \xi_s' \in Z^l(U_1(\widetilde{\varrho}), \mathcal{S}) \quad \text{mit}$$

$$q(e_1)(\xi_j') = \widetilde{\xi} \quad \text{auf} \quad U_1(\widetilde{\varrho}), \qquad 1 \leq j \leq s,$$

$$\| \xi_j' \|_{\mathfrak{U}_1\widetilde{\varrho}} < c_0, \qquad 1 \leq j \leq s$$

Nach Satz (3.6.2) gibt es

$$\bar{\eta} \in C^{l-1}(U_2(\varrho), \mathcal{S}) \qquad \text{mit}$$

$$q(e_1)(\bar{\eta}) = \tilde{\eta} \quad \text{auf} \quad U_2(\varrho)$$

$$\|\bar{\eta}\|_{\mathfrak{U}_2\,\varrho} \leq c\,\|\eta\|_{\mathfrak{U}_1\,\varrho}$$

Jetzt wird gesetzt:

$$\xi^* = \xi - (a_1\,\xi_1' + \dots + a_s\,\xi_s' + \delta\bar{\eta}) \qquad \text{auf} \quad U_2(\varrho)$$

Wegen Satz (3.6.10) gilt:

$$\|\xi^*\|_{\mathfrak{U}_2\,\varrho} \leq \tilde{M}(\varrho)\,\|\xi\|_{\mathfrak{U}\,\varrho}$$

dabei wurde

$$\tilde{M}(\varrho) = 1 + s\,M_e'(\varrho)\,c_0 + l\,c\,N_e'(\varrho)$$

gesetzt. Offensichtlich ist $\xi^* \in Z^l(U_2(\varrho), \mathcal{S}^{e_1})$.
Nach Satz (3.6.6) gibt es

$$\hat{\xi} \in C^l(U_3(\varrho), \mathcal{S}) \quad \text{mit}$$

$$\left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{e_1} \hat{\xi} = \xi^* \quad \text{auf} \quad U_3(\varrho)$$

$$\|\hat{\xi}\|_{\mathfrak{U}_3\,\varrho} \leq M(\varrho)\,\|\xi^*\|_{\mathfrak{U}_2\,\varrho}$$

Da $\mathcal{S}^{d+}$ t_1-torsionsrecht ist, gilt sogar

$$\left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{d+} \hat{\xi} \in Z^l(U_3(\varrho), \mathcal{S})$$

Nach Satz (3.5.2) gibt es:

$$\xi^{**} \in Z^l(U(\varrho), \mathcal{S}),$$

$$\eta^{**} \in C^{l-1}(V(\varrho), \mathcal{S}),$$

so dass gilt:

$$\left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{d+}\hat{\xi} = \xi^{**} + \delta\eta^{**} \quad \text{auf} \quad V(\varrho),$$

$$\| \xi^{**} \|_{\mathfrak{U}\varrho} \leq L_1(\varrho) \| \hat{\xi} \|_{\mathfrak{U}_3\varrho},$$

$$\| \eta^{**} \|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq L_2(\varrho) \| \hat{\xi} \|_{\mathfrak{U}_3\varrho}.$$

Seien $\xi_1, \dots, \xi_r \in Z^l(U(\varrho_1'''), \mathcal{S})$ die in Theorem $\mathrm{II}'_{l,m}$ versprochenen Cozyklen.

Nach Theorem $\check{\mathrm{II}}'_{l,m}$ gibt es:

$$b_1, \dots, b_r \in \Gamma(K(\varrho), \mathcal{O}),$$

$$\text{und ein} \quad \eta^* \in C^{l-1}(V(\varrho), \mathcal{S})$$

so dass gilt

$$\xi^{**} = b_1\xi_1 + \dots + b_r\xi_r + \delta\eta^*,$$

$$\| b_j \|_\varrho \leq M''(\varrho) \| \xi^{**} \|_{\mathfrak{U}\varrho}, \qquad 1 \leq j \leq r,$$

$$\| \eta^* \|_{\mathfrak{V}\varrho} \leq N''(\varrho) \| \xi^{**} \|_{\mathfrak{U}\varrho}.$$

Jetzt gilt auf $V(\varrho)$:

$$\xi = \sum_1^s a_j \xi'_j + \sum_1^r \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{e_1-d+} b_j \xi + \delta\bar{\eta} + \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{e_1-d+} \delta(\eta^{**} + \eta^*)$$

Nach Theorem $\mathrm{II}'_{l,m}$ gibt es:

$$c_{i1}, \dots, c_{ir} \in \Gamma(K(\bar{\varrho}), \mathcal{O}), \qquad 1 \leq i \leq s,$$

$$\text{und ein} \quad \eta_i \in C^{l-1}(V(\bar{\varrho}), \mathcal{S}),$$

so dass gilt:

$$\xi'_i = c_{i1}\xi_1 + \dots + c_{ir}\xi_r + \delta\eta_i \quad \text{auf} \quad V(\varrho),$$

$$\| c_{ij} \|_{\bar{\varrho}} \leq M''(\bar{\varrho})\, c_0, \qquad 1 \leq i \leq s,\ 1 \leq j \leq r,$$

$$\| \eta_i \|_{\mathfrak{V}\bar{\varrho}} \leq N''(\bar{\varrho})\, c_0, \qquad 1 \leq i \leq s.$$

Jetzt wird gesetzt:

$$\alpha_j = \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{e_1-d+} b_j + \sum_{i=1}^{s} a_i c_{ij} \qquad 1 \leq j \leq r,$$

$$\eta = \bar{\eta} + \left(\frac{t_1}{\varrho_1}\right)^{e_1-d+} (\eta^{**} + \eta^*) + \sum_{i=1}^{s} a_i \eta_i,$$

und damit gilt

$$\xi = \alpha_1 \xi_1 + \ldots + \alpha_r \xi_r + \delta\eta.$$

Wegen Satz (3.6.10) gelten noch die Ungleichungen

$$\| \alpha_j \|_\varrho \leq M_e(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}_\varrho}, \qquad 1 \leq j \leq r,$$

$$\| \eta \|_{\mathfrak{V}_\varrho} \leq N_e(\varrho) \| \xi \|_{\mathfrak{U}_\varrho},$$

Dabei sind M_e und N_e Funktionen, die sich aus dem Hintereinanderschalten obiger Ungleichungen ergeben.

4.4 2. Induktionsschritt

(4.4.1) Sei $e^* \in \mathbf{N}^m$ und $e^* > 0$ und t_0 ein Punkt aus K, dann gilt:

$$(\pi_l(\mathcal{S}_{t_0, e^*}))_{t_0} = H^l(X, \mathcal{S}_{t_0, e^*}) = H^l(X_{t_0}, \mathcal{S}_{t_0, e^*})$$

Man kann also insbesondere $H^l(X, \mathcal{S}_{t_0, e^*})$ als Cohomologiemodul mit Werten in einer kohärenten Garbe auf einem kompakten komplexen Raum auffassen. Daher ist $H^l(X, \mathcal{S}_{t_0, e^*})$ ein endlichdimensionaler $\mathbf{C}$-Vektorraum.

Man hat stets folgende kanonische Homomorphismen:

$$q(t_0, e^*) \;:\; H^l(X(\varrho_0), \mathcal{S}) \longrightarrow H^l(X, \mathcal{S}_{t_0, e})$$

$$q(t_0, e^*)_{t_0} : (\pi_l(\mathcal{S}))_{t_0} \longrightarrow (\pi_l(\mathcal{S}_{t_0, e^*}))_{t_0}$$

DEFINITION (4.4.2). — Sei $\varrho_0 \in \mathbf{R}^m_+$, $\varrho_0 > 0$ und t_0 ein Punkt K aus. Ein endliches System $\xi_1, \ldots, \xi_s \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S})$ heisst ein $q(t_0, e^*)$-Erzeugendensystem, wenn $q(t_0, e^*)(\xi_1), \ldots, q(t_0, e^*)(\xi_s)$ über $\mathbf{C}$ das (im $q(t_0, e^*))_{t_0}$ erzeugen.

(4.4.3) Da $H^d(X, \mathcal{S}_{e^*})$ ein endlichdimensionaler $\mathbf{C}$-Vektorraum ist, gibt es für hinreichend kleine ϱ_0 $q(t_0, e^*)$-Erzeugendensysteme.

Aus Theorem $\mathrm{II}_{l,m}$ leiten wir das foldende für den 2. Induktionsschritt wichtige Theorem her:

THEOREM $\mathrm{V}_{l,m}$. — Voraussetzung: Sei t_0 ein Punkt aus K, $\mathcal{S}$ eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0,m}$.

Behauptung: Es gibt:

1) ein $e^* \in \mathbf{N}^m$, $e^* > 0$,

2) eine Abbildung $F: \mathbf{N}^m \longrightarrow \mathbf{N}^m$ mit $\lim_{e \to \infty} F(e) = \infty$,

3) zu jedem $e \in \mathbf{N}^m$ eine Dreiecksmenge Δ_e,

4) zu jedem $q(t_0, e^*)$-Erzeugendensystem $\xi_1, \dots, \xi_s \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S})$ ein $\varrho^* \in \mathbf{R}_+^m$, $\varrho^* \leq \varrho_0$,

so dass für jedes $e \in \mathbf{N}^m$ und jedes $\varrho \in \Delta_e$ mit $\varrho < \varrho^*$ gilt:

Zu jedem $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho^*), \mathcal{S})$ mit $q(t_0, e)(\xi) = 0$, gibt es $a_1, \dots, a_s \in \Gamma(K(\varrho), \mathcal{I}(t_0, F(e)))$ mit

$$\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_s \xi_s \text{ auf } X(t_0, \varrho).$$

SATZ (4.4.4). — Theorem $\mathrm{II}_{l,m} \Longrightarrow$ Theorem $\mathrm{V}_{l,m}$

Beweis. — Es wird eine Messüberdeckungskette $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}$ bezüglich $\mathfrak{B}_0$ gewählt. Auf $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U}$ wird Cor. (3.6.4) und auf $\mathfrak{U}_0 \supset\supset \mathfrak{U} \supset\supset \mathfrak{V}$ wird Theorem $\mathrm{II}_{l,m}$ angewandt.

Seien $\varrho_+ > 0$,

$$\gamma_1^*, \dots, \gamma_p^* \in Z^l(U(\varrho_+), \mathcal{S}),$$

$$(\Delta_e)_{e \in \mathbf{N}^m},$$

$$F: \mathbf{N}^m \longrightarrow \mathbf{N}^m,$$

die in Theorem $\mathrm{II}_{l,m}$ versprochenen Elemente.

Wir wählen ein $e^* \in \mathbf{N}^m$ so, dass $F(e^*) > 0$ ist.

Sei jetzt $\xi_1, \dots, \xi_s \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S})$ ein $q(t_0, e^*)$-Erzeugendensystem, und sei $\tilde{\varrho} \in \Delta_{e^*}$ so gewählt, dass $\tilde{\varrho} < \varrho_0$ ist.

Nach Corollar (3.6.4) gibt es

$$\xi_1^*, \dots, \xi_s^* \in Z^l(U(t_0, \tilde{\varrho}), \mathcal{S}),$$

so dass gilt:

$$\xi_\mu^* \text{ repräsentiert } \xi_\mu \mid X(t_0, \tilde{\varrho}), \ \| \xi_\mu^* \|_{\mathfrak{U}\tilde{\varrho}} < \infty.$$

Es gibt jetzt $C_{\nu\mu} \in \mathbf{C}$, $1 \leq \nu \leq p$, $1 \leq \mu \leq s$ mit

$$q(t_0, e^*)\left(\gamma_\nu^* - \sum_{\mu=1}^{s} c_{\nu\mu}\, \xi_\mu^*\right) = 0, \qquad 1 \leq \nu \leq p.$$

Nach Theorem $\mathrm{II}_{l,m}$ gibt es

$$a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu p} \in \Gamma(K(t_0\, \tilde{\varrho}), \mathcal{J}(t_0, F(e^*))), \qquad 1 \leq \nu \leq p,$$

so dass gilt:

$$(*) \qquad \gamma_\nu^* - \sum_{\mu=1}^{s} c_{\nu\mu}\, \xi_\mu^* = \sum_{\lambda=1}^{p} a_{\nu\lambda}\, \gamma_\lambda^*, \qquad 1 \leq \nu \leq p.$$

Da die $a_{\nu\lambda}$ im Punkte t_0 verschwinden, lässt sich das Gleichungssystem in einer Umgebung von t_0 holomorph nach den γ_ν^* auflösen. Es gibt also ein $\varrho^* \leq \tilde{\varrho}$ und $b_{\nu\mu} \in \Gamma(K(\varrho^*), \mathcal{O})$ so dass gilt:

$$\gamma_\nu^* = \sum_{\mu=1}^{s} v_{\nu\mu}\, \xi_\mu^* \quad \text{auf } X(\varrho^*).$$

Sei jetzt $e \in \mathbf{N}^m$, $\varrho \in \Delta_e$ mit $\varrho < \varrho^*$, und $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho^*), \mathcal{S})$ mit $q(t_0, e)(\xi) = 0$.

Nach Corollar (3.6.4) gibt es ein $\xi^* \in Z^l(U(t_0, \varrho), \mathcal{S})$ mit

$$\xi^* \text{ repräsentiert } \xi \mid X(t_0, \varrho) \quad \text{und}$$
$$\|\xi^*\|_{\mathfrak{U}\,\varrho} < \infty.$$

Nach Theorem $\mathrm{II}_{l,m}$ gibt es

$$a_1, \dots, a_p \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{J}(t_0, F(e)))$$
$$\eta \in C^{l-1}(V(t_0, \varrho), \mathcal{S}) \quad \text{mit}$$
$$\xi^* = a_1 \gamma_1^* + \dots + a_p \gamma_p^* + \delta\eta \quad \text{auf} \quad V(t_0, \varrho).$$

Auf $X(t_0, \varrho)$ gilt somit

$$\xi = \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu\, \gamma_\nu = \sum_{\mu=1}^{s}\left(\sum_{\nu=1}^{p} a_\nu\, b_{\nu\mu}\right)\xi_\mu.$$

(4.4.5) Bezeichnungen:

$\mathcal{S}$ kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$,

$t^* \in K_{t_0, m}$,

$d \in \mathbf{N}$.

Für jedes $e \in \mathbf{N}^m$ wird definiert:

$$e^+ = (e_1 + d, e_2, \dots, e_m),$$

$$q(e^+, t^*) : H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}) \longrightarrow H^l(X(t_0, \varrho) \mathcal{S}_{t^*, e^+})$$

$$\tilde{q}(e^+, t^*) : H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}_{t^*, 3d+e_1}) \longrightarrow H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}_{t^*, e^+}).$$

SATZ (4.4.6). — Voraussetzung: $\mathrm{I}_{l+1, m}$, $\mathrm{II}_{l+1, m}$, t_0, t zwei Punkte aus K,

$\mathcal{S}$ eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$,

$\mathcal{S}^{t^*, d}$ $(t_1 - t_1^*)$-torsionsrecht,

$(\pi_{l+1}(\mathcal{S}))^{(t^*, d)}$ $(t_1 - t_1^*)$-torsionsrecht.

Behauptung: Es gibt eine Dreiecksmenge Δ, so dass für jedes Paar (ϱ, ϱ_0) mit $\varrho \in \Delta$, $\varrho < \varrho_0$ und jeden $e \in \mathbf{N}^m$ gilt:

Zu jedem $\xi^* \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t^*, 3d+e_1})$ gibt es ein $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S})$ so dass gilt:

$$q(e^+, t^*)(\xi) = \tilde{q}(e^+, t^*)(\xi^*).$$

Beweis. — Auf die Daten t_0, $\mathcal{S}$, $\pi_{l+1}(\mathcal{S})$ wird das Corollar $\mathrm{IV}_{l+1, m}$ aus (4.1.5) angewandt. Sei Δ die in Corollar $\mathrm{IV}_{l+1, m}$ versprochenen Dreiecksmenge. Sei jetzt $\varrho \in \Delta$, $\varrho_0 \in \mathbf{R}_+^m$, $\varrho < \varrho_0$, $e \in \mathbf{N}^m$ und $\xi^* \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t^*, 3d+e_1})$.

Die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^{t^*, 3d+e_1} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}_{t^*, 3d+e_1} \longrightarrow 0$$

liefert die exakte Cohomologiesequenz

$$H^l(X\, t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t^*, 3d+e_1}) \longrightarrow H^{l+1}(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}^{t^*, 3d+e_1}) \xrightarrow{a} H^{l+1}(X(t_0, \varrho_0) \mathcal{S}) \longrightarrow$$

Da $\mathcal{S}^{t^*, d}$ torsionsrecht ist, gilt:

$$H^{l+1}(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}^{t^*, d}) \xrightarrow{\simeq (t_1 - t_1^*)^{2d+e_1}} H^{l+1}(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}^{t^*, 3d+e})$$

Es gilt also

$$a(\xi^*) / (t_1 - t_1^*)^{2d+e_1} \in H^{l+1}(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}^{t^*, d})$$

Aus der Kommutativitat des Diagramms

$$\begin{tikzcd}
H^{l+1}(X(t_0, \varrho_0) \mathcal{S}^{t^*, 3d+e_1}) \arrow[r, "\alpha"] & H^{l+1}(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}) \arrow[r, "\pi_{l+1}"] & \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \pi_{l+1}(\mathcal{S})) \\
H^{l+1}(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}^{t^*, d}) \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[u, "(t_1 - t_1^*)^{2d+e_1}", "\wr"'] & H^{l+1}(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}) \arrow[r, "\pi_{l+1}"] \arrow[u, "(t_1 - t_1^*)^{2d+e_1}"] & \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \pi_{l+1}(\mathcal{S})) \arrow[u, "(t_1 - t_1^*)^{2d+e_1}"]
\end{tikzcd}$$

folgt:

$$\pi_{l+1}((\alpha \circ a)(\xi^*)) = (t_1 - t_1^*)^{2d+e_1} \pi_{l+1} \{\alpha' (a (\xi^* / (t_1 - t_1^*)^{2d+e_1}))\}$$

und aus der exakten Cohomologiesequenz folgt:

$$\pi_{l+1}((\alpha \circ a)(\xi^*)) = 0.$$

Offensichtlich gilt:

$$(t_1 - t_1^*)^d \pi_{l+1} \alpha' (a (\xi^*) / (t_1 - t_1^*)^{2d+e_1}) = \pi_{l+1} \alpha' (a (\xi^*) / (t_1 - t_1^*)^{d+e_1}) \in$$
$$\in \Gamma(K(t_0, \varrho_0), (t_1 - t_1^*)^d \pi_{l+1}(\mathcal{S})).$$

Nach dem obigen folgt daher:

$$(t_1 - t_1^*)^{d+e_1} \pi_{l+1} (\alpha' (a (\xi^*) / (t_1 - t_1^*)^{d+e_1}) = 0.$$

Da $(t_1 - t_1^*)^d \pi_{l+1}(\mathcal{S})$ torsionsrecht ist, gilt:

$$\pi_{l+1} \alpha' (a (\xi^*) / (t_1 - t_1^*)^{d+e_1}) = 0.$$

Wenden wir Corollar (1.4.7) und dann Corollar $\mathrm{IV}_{l+1, m}$ an, so folgt:

$$\alpha' (a \xi^* / (t_1 - t_1^*)^{d+e_1}) \mid X(\varrho) = 0.$$

Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{S}^{t^*, 3d+e_1} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathcal{S} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{id}"] & \mathcal{S}_{t^*, 3d+e_1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{S}^{t^*, d+e_1} \arrow[r] & \mathcal{S} \arrow[r] & \mathcal{S}_{t^*, d+e_1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

folgt das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}) \arrow[r] \arrow[d, "id"] & H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}_{t^*, 3d+e_1}) \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b_1"] & H^{l+1}(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}^{t^*, 3d+e_1}) \arrow[d, "b_2"] \\
H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}) \arrow[r, "c"] & H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}_{t^*, d+e_1}) \arrow[r, "\hat{a}"] & H^{l+1}(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}^{t^*, d+e_1})
\end{tikzcd}$$

Es gibt ein $z \in Z^{l+1}(X(t_0, \varrho), \mathcal{S})$ so dass gilt:

$$z \text{ repräsentiert } \quad \alpha'(a\xi^*/(t_1 - t_1^*)^{d+e_1}) \quad \text{auf} \quad X(\varrho).$$

Somit ist

$$(t_1 - t_1^*)^{d+e_1} z \in Z^{l+1}(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}^{t^*, d+e_1})$$

und

$$(t_1 - t_1^*)^{d+e_1} z \text{ repräsentiert } b_2\, a(\xi^*) \in H^{l+1}(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}^{t, d+e_1}).$$

Wegen oben gilt:

Es gibt ein $z' \in C^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S})$ mit $\delta z' = z$;
somit ist

$$(t_1 - t_1^*)^{d+e_1} z' \in C^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}^{t^*, d+e_1})$$

$$\delta((t_1 - t_1^*)^{d+e_1} z') = (t_1 - t_1^*)^{d+e_1} z$$

und daraus folgt:

$$(b_2 \circ a)(\xi^*) = (\widehat{a} \cdot b_1)(\xi^*) = 0 \text{ in } H^{l+1}(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}^{t^*, d+e_1})$$

d. h. aber, es gibt ein $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho)\mathcal{S})$ mit

$$c(\xi) = b_1(\xi^*) \quad \text{in} \quad H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S})$$

und somit gilt auch

$$q(e^+, t^*)(\xi) = q(e^+, t^*)(\xi^*).$$

Satz (4.4.7). — Voraussetzung: $\mathrm{I}_{0, m-1}$, $\mathrm{I}_{l+1, m}$, $\mathrm{II}_{l+1, m}$, t_0 ein Punkt aus K, $\mathcal{S}$ eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$.

Behauptung: Es gibt eine Dreiecksmenge Δ, so dass für jedes $\varrho \in \Delta$ gilt: Zu jedem $e \in \mathbf{N}^m$, $e > 0$ und jedem $t^* \in K(t_0, \varrho)$ gibt es ein $q(t^*, e)$-Erzeugendensystem $\xi_1, \ldots, \xi_s \in H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S})$.

Beweis. — 1) Sei $\mathcal{S}$ eine kohärente analytische analytische Garbe auf $X_{(t_0, m-1)}$ aufgefasst als kohärente analytische Garbe $X_{(t_0, m)}$: Sei ϱ_0 beliebig und $t^* \in K(t_0, \varrho_0)$ und $e \in \mathbf{N}^m$, $e > 0$. Wegen Theorem $\mathrm{I}_{0, m-1}$ sind alle Bildgarben von $\mathcal{S}$ und $\mathcal{S}_{t^* e}$ kohärent, und damit sind auch alle Bildgarben von $\mathcal{S}^{t^* e}$ kohärent. Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}^{t^* e} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}_{t^* e} \longrightarrow 0$$

liefert das kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}) \arrow[r, "q(e, t^*)"] \arrow[d, "\wr", "\pi_l"'] & H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t^*, e}) \arrow[r, "\hat{b}"] \arrow[d, "\wr", "\pi_l"'] & H^{l+1}(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}^{t^*, e}) \arrow[d, "\wr", "\pi_{l+1}"'] \\
\Gamma(K(t_0, \varrho_0), \pi_l(\mathcal{S})) \arrow[r] & \Gamma(K(t_0, \varrho_0)\, \pi_l(\mathcal{S}_{t^*, e})) \arrow[r, "b"] & \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \pi_{l+1}(\mathcal{S}^{t^*, e}))
\end{tikzcd}$$

Die vertikalen Abbildungen sind Isomorphismen (siehe Anhang (1)). Sei jetzt

$$\zeta \in \operatorname{im}((\pi_l(\mathcal{S}))_{t^*} \longrightarrow H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t^* e})), \text{ dann ist } b(\pi_l(\zeta)) = 0$$

dies braucht nur im Halm über t^* in der exakten Sequenz

$$\pi_l(\mathcal{S}) \longrightarrow \pi_l(\mathcal{S}_{t^* e}) \longrightarrow \pi_{l+1}(\mathcal{S}_{t^* e})$$

nachgeprüft werden). Es gilt also $\pi_{l+1}(\widehat{b}(\zeta)) = 0$. Somit auch $\widehat{b}(\zeta) = 0$. Das heisst aber: es gibt ein $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S})$ mit $q(e, t^*)(\xi) = \zeta$. Da

$$\operatorname{im}(\pi_l(\mathcal{S}))_{t^*} \longrightarrow H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t^* e}))$$

ein endlichdimensionaler $\mathbf{C}$-Vektorraum ist, ist also die Behauptung in diesem Fall bewiesen.

2) Sei $\mathcal{S}$ eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$, $t^* \in \mathbf{C}^m$ und sei $d \in \mathbf{N}$ so gewählt, dass $\mathcal{S}^{t^*, d}$ und $(\pi_{l+1})(\mathcal{S}))^{t^*, d}$ $(t_1 - t_1^*)$-torsionsrecht sind. Sei ϱ_0 wie in (1) gewählt. Sei Δ die in Satz (4.4.6) versprochene Dreiecksmenge.

Sei jetzt $\varrho \in \Delta$, $\varrho < \varrho_0$. Nach 1) gibt es $\widehat{\xi_1}, \ldots, \widehat{\xi_s} \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t^*, 3d+e_1})$ so dass $\widetilde{q}(e, t_0)(\widehat{\xi_\nu})$ das $\operatorname{im}((\pi_l(\mathcal{S}_{t^*, 3d+e_1}))_{t_0} \longrightarrow H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}_{t^*, e}))$ erzeugen. Jetzt gilt aber

$$\operatorname{im}((\pi_l(\mathcal{S}_{t^*, 3d+e_1}))_{t_0} \longrightarrow H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}_{t^*, e})) = \operatorname{im}((\pi_l(\mathcal{S}))_{t_0} \longrightarrow H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}_{t^*, e}))$$

Nach Satz (4.4.7) folgt:

$$\text{Es gibt } \xi_1, \dots, \xi_s \in H^t(X(t_0, \varrho), \mathcal{S}) \text{ mit}$$
$$q(e, t^*)(\xi_\nu) = \widetilde{q}(e, t^*)(\widehat{\xi_\nu}), \qquad 1 \leq \nu \leq s$$

SATZ (4.4.8). — Voraussetzung: $\mathrm{I}_{0, m-1}$, $\mathrm{I}_{l+1, m}$, $\mathrm{II}_{l+1, m}$, $\mathrm{II}_{l, m}$,

t_0 ein Punkt aus K,

$\mathcal{S}$ eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$.

Behauptung: Es gibt:

1) ein $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$, $\varrho > 0$,

2) $\xi_1, \dots, \xi_r \in H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S})$

3) zu jedem $t^* \in K(t_0, \varrho)$ eine Abbildung $F_{t^*} : \mathbf{N}^m \longrightarrow \mathbf{N}^m$ mit $\lim\limits_{e \to \infty} F_{t^*}(e) = \infty$

so dass für jedes $t^* \in K(t_0, \varrho)$ und jedes $e \in \mathbf{N}^m$ gilt:

Zu jedem $\gamma \in (\pi^l(\mathcal{S}))_{t^*}$ mit $q(t^*, e)(\gamma) = 0$ gibt es

$$c_1, \dots, c_r \in (\mathcal{I}(t^*, F_{t^*}(e)))_{t^*} \quad \text{mit } \gamma = c_1(\pi_l(\xi_1))_{t^*} + \dots + (\pi^l(\xi_r))_{t^*}$$

BEMERKUNG. — Insbesondere folgt aus Satz (4.4.9), dass $\pi_l(\mathcal{S})$ von endlichem Typ ist.

Beweis: Auf den Punkt t_0 wird Satz (4.4.7) angewandt, Δ sei die dort versprochene Dreiecksmenge. Dann wird Theorem $\mathrm{V}_{l, m}$ bezüglich des Punktes t_0 angewandt; $e^*(t_0)$ und Δ_0 seien die dort versprochenen Objekte. Jetzt wird auf t^* Satz (4.4.7) angewandt und dann wird. Theorem $\mathrm{V}_{l,m}$ auf den Punkt t angewandt; Δ'_e, $e^*(t^*)$, F seien die dort versprochenen Objekte. Für die in Satz (4.4.8) (3) verlangte Funktion können wir F_{t^*} nehmen.

Sei $\varrho_1 \in \Delta$. Nach Satz (4.4.7) gibt es zu dem Paar $(e^*(t_0), t_0)$ ein $q(t_0, e^*(t_0))$-Erzeugungssystem $\xi_1, \dots, \xi_r \in H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{S})$.

Nach Theorem $\mathrm{V}_{l,m}$ gibt es ein $\varrho \in \Delta_0$, so dass gilt:

Zu jedem $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{S})$ gibt es $a_\nu \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{O})$ mit

$$\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_r \xi_r \quad \text{in } H^l(X(t_0, \varrho), \mathcal{S})$$

Nach Satz (4.4.7) gibt es zu jedem Paar $(e^*(t^*), t^*)$ mii $t^* \in K(t_0, \varrho)$ ein $q(t^*, e^*(t^*))$-Erzeugendensystem $\xi_1^{(t^*)}, \dots, \xi_{s(t^*)}^{(t^*)} \in H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{S})$. Benutzen wir die vorhergehende Aussage: Zu jedem $t^* \in K(t_0, \varrho)$, gibt es $a_{1\nu}^{(t^*)}, \dots, a_{r\nu}^{(t^*)} \in$

$\in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{O})$, $1 \leq \nu \leq s(t^*)$, so dass gilt:

$$\xi_\nu^{(t^*)} = \sum_{\mu=1}^{\nu} a_{\mu\nu}^{(t^*)} \xi_\mu, \qquad 1 \leq \nu \leq s(t^*).$$

Sei jetzt $e \in \mathbf{N}^m$ und $\gamma \in (\pi_l(\mathcal{S}))_{t^*}$ mit $q(t^*, e)(\gamma) = 0$. Zu γ gibt es ein ϱ^* (so klein gewählt, dass $K(t^*, \varrho^*) \subset K(t_0, \varrho)$ ist) und ein $\widehat{\xi} \in H^l(X(t^*, \varrho^*), \mathcal{S})$ mit

$$(\pi_l(\widehat{\xi}))_{t^*} = \gamma \quad \text{und} \quad q(t^*, e)(\widehat{\xi}) = 0.$$

Nach Theorem $\mathrm{V}_{l, m}$ gibt es ein $\varrho^{**} \in \Delta'_e$

und $$a_1^{(\gamma)}, \ldots, a_{s(t^*)}^{(\gamma)} \in \Gamma(K(\varrho^{**}), \mathcal{J}(t^*, F_{t^*}(e))) \quad \text{mit}$$

$$\widehat{\xi} = a_1^{(\gamma)} \xi_1^{(t^*)} + \ldots + a_{s(t^*)}^{(\gamma)} \xi_{s(t^*)}^{(t^*)} \quad \text{in } H^l(X(t^*, \varrho^{**}), \mathcal{S})$$

somit gilt in $H^l(X(t^*, \varrho^{**}), \mathcal{S})$:

$$\widehat{\xi} = \sum_{\nu=1}^{s(t^*)} a_\nu^{(\gamma)} \sum_{\mu=1}^{r} a_{\mu\nu}^{(t^*)} \xi_\mu = \sum_{\mu=1}^{r} \left(\sum_{\nu=1}^{s(t^*)} a_\nu^{(\gamma)} a_{\mu\nu}^{(t^*)} \right) \xi_\mu.$$

SATZ (4.4.9). — Varaussetzungen: $\mathrm{I}_{0, m-1}$, $\mathrm{I}_{l+1, m}$, $\mathrm{II}_{l+1, m}$, $\mathrm{II}_{l, m}$,

t_0 ein Punkt aus K,

$\mathcal{S}$ eine kohärent analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$,

e^*, Δ sind die bezüglich $\mathcal{S}, t_0$ in Theorem $\mathrm{V}_{l, m}$ versprochenen Daten

Behauptung: Es gibt

1) $\varrho, \varrho_1 \in \mathbf{R}_+^m$ mit $\varrho \leq \varrho_1$ und $\varrho \in \Delta$

2) zu jedem $t^* \in K(t_0, \varrho)$ ein $F_{t^*}: \mathbf{N}^m \longrightarrow \mathbf{N}^m$ mit $\lim_{e \to \infty} F(e) = \infty$ so dass für jedes $q(t_0, e^*)$-Erzeugendensystem $\xi_1, \ldots, \xi_r \in H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{S})$,

jedes $t^* \in K(t_0, \varrho)$ uud jedes $e \in \mathbf{N}^m$ gilt:

Zu jedem $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{S})$ mit $q(t^*, e)(\xi) = 0$ gibt es

$$a_1, \ldots, a_r \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{J}(t^*, F_{t^*}(e))) \quad \text{mit}$$

$$\xi = a_1 \xi_1 + \ldots + a_r \xi_r \quad \text{auf } X(t_0, \varrho).$$

Beweis. — Zunächst muss ein Hilfssatz bewiesen werden:

Hilfssatz (4.4.9.1). — Voraussetzung: $\mathrm{I}_{0,m-1}$, $\mathrm{I}_{l+1,m}$, $\mathrm{II}_{l+1,m}$, $\mathrm{II}_{l,m}$, t_0 ein Punkt aus K, $\mathcal{S}$ eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0,m}$.

Behauptung: Es gibt ein $\varrho_0 \in \mathbf{R}_+^m$ und zu jedem $d \in \mathbf{N}$ und jedem $t^* \in$ $\in K(t_0, \varrho_0)$ gibt es

1) $\xi_1^{(t^*)}, \dots, \xi_{s(t^*)}^{(t^*)} \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t^*, d})$,

2) $F_{t^*}: \mathbf{N}^m \to \mathbf{N}^m$ mit $\lim\limits_{e \to \infty} F_{t^*}(e) = \infty$,

so dass für jedes $e \in \mathbf{N}^m$ mit $e_1 \geq d$ gilt:

Zu jedem $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t^*, d})$ mit $\delta\xi = 0$ und $q(t^*, e)(\xi) = 0$ gibt es $a_1, \dots, a_{s(t^*)} \in \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \mathcal{J}(t^*, F_{t^*}(e_1, \dots, e_m)))$ derart, dass $\xi = a_1 \xi_1^{(t^*)} + \dots +$ $+ a_{s(t^*)} \xi_{s(t^*)}^{(t^*)}$ ist.

Beweis zum Hilfssatz (4.4.9.1). — Sei ϱ_0 der im Satz (4.4.8) versprochene Polyradius. Da $\pi_1(\mathcal{S}_{t^*, d})$ kohärent ist, gibt es nach Theorem A Schnitte $s_1, \dots, s_q \in \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \pi_l(\mathcal{S}_{t^*, d}))$, so dass die Sequenz

$$\mathcal{O}^q \xrightarrow{\alpha} \pi_l(\mathcal{S}_{t^*, d}) \to 0$$

$$(a_1, \dots, a_q) \mapsto a_1 s_1 + \dots + a_q s_q$$

über $K(t_0, \varrho_0)$ exakt ist. Sei F_{t^*} die in Satz (4.4.8) versprochenen Abbildung.

Sei $d \in \mathbf{N}$, $t^* \in K(t_0, \varrho_0)$ und $e \in \mathbf{N}^m$ mit $F_{t^*}(e) > 0$.

Sei jetzt $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t^*, d})$ mit $\delta\xi = 0$ und $q(t^*, e)(\xi) = 0$. Aus der exakten Sequenz

$$H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}) \xrightarrow{q(t^*, d)} H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t, d}) \xrightarrow{\delta} H^{l+1}(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}^{t^*, d})$$

folgt:

Es gibt ein $\widehat{\xi} \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S})$ mit $q(t^*, d)(\widehat{\xi}) = \xi$ und $q(t^*, e)(\widehat{\xi}) = 0$.

Nach Satz (4.4.8) gilt:

$$(\pi_l(\widehat{\xi}))_{t^*} \in (\pi_l(\mathcal{S})\, \mathcal{J}(t^*, F_{t^*}(e)))_{t^*}.$$

Beachten wir den Morphismus

$$\pi_l(\mathcal{S}) \to \pi_l(\mathcal{S}_{t^*, d}),$$

so sieht man, dass

$$(\pi_l(\xi))_{t^*} \in (\pi_l(\mathcal{S}_{t^*, d})\, \mathcal{J}(t^*, F_{t^*}(e)))_{t^*} \quad \text{ist.}$$

Zur Abkürzung wird $\mathcal{J} = \mathcal{J}(t^*, F_{t^*}(e))$ gesetzt.

Aus der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \pi_l(\mathcal{S}_{t^*,d})\,\mathcal{J} \longrightarrow \pi_l(\mathcal{S}_{t^*,d}) \longrightarrow \pi_l(\mathcal{S}_{t^*,d})/\pi_l(\mathcal{S}_{t^*,d})\,\mathcal{J} \longrightarrow 0$$

folgt nach Theorem B die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \pi_l(\mathcal{S}_{t^*,d})\,\mathcal{J}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \pi_l(\mathcal{S}_{t^*,d})) \xrightarrow{\beta} \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \pi_l(\mathcal{S}_{t^*,d})/\pi_l(\mathcal{S}_{t^*,d})\,\mathcal{J}) \longrightarrow 0.$$

Jetzt ist $\pi_l(\xi) \in \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \pi_l(\mathcal{S}_{t^*,d}))$, und da $F_{t^*}(e) > 0$ ist, gilt $\beta(\pi_l(\xi)) = 0$ (dies braucht nur im Halm über t^* nachgeprüft werden). Es gilt also $\pi_l(\xi) \in \Gamma(K(\varrho_1), \pi_l(\mathcal{S}_{t^*,d})\,\mathcal{J}(t^*, F_{t^*}(e)))$.

Aus dem kommntativen Diagram mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}^q \arrow[r] & \pi_l(\mathcal{S}_{t^*,d}) \arrow[r] & 0 \\
\mathcal{O}^q \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{J} \arrow[u] \arrow[r, "\alpha \otimes 1"] & \pi_l(\mathcal{S}_{t^*,d}) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{J} \arrow[u] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

und aus den Formeln

$$\pi_l(\mathcal{S}_{t^*,d})\,\mathcal{J} = \operatorname{im}\,(\pi_l(\mathcal{S}_{t^*,d}) \otimes \mathcal{J} \longrightarrow \pi_l(\mathcal{S}_{t^*,d}))$$

$$\mathcal{J}^{\oplus q} = \mathcal{O}^q \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{J}$$

folgt wegen Theorem B:

Es gibt ein $a = (a_1, \dots, a_q) \in \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \mathcal{J}^{\oplus q})$ mit

$$a_1 s_1 + \dots + a_q s_q = \alpha(a) = \pi_l(\xi)\,.$$

Wegen $H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t^*,d}) \approx \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \pi_l(\mathcal{S}_{t^*,d}))$ folgt die Behauptung in diesen Fall. (Anhang 1).

2) Sei jetzt $\mathcal{S}$ eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$. Wir wenden Satz (4.4.6) an, ϱ_0 und Δ' seien die dort versprochenen Objekte.

Dann wenden wir Satz (4.4.7) und Theorem $\mathrm{V}_{l,m}$ an; Δ'', Δ sind der Reihe nach die dort versprochenen Dreiecksmengen.

Seien $\varrho_0, \varrho_1, \varrho$ so gewählt, dass $\varrho \leq \varrho_1 < \varrho_0$, $\varrho_1 \in \Delta' \cap \Delta''$ und $\varrho \in \Delta$. Sei $e^* \in \mathrm{N}^m$, so wie es in Theorem $\mathrm{V}_{l,m}$ versprochen wird. Nach Satz (4.4.7) gibt es ein $q(t_0, e^*)$-Erzeugendensystem $\xi_1, \dots, \xi_r \in H^l(X(t_0, \varrho_1)\mathcal{S})$.

Sei jetzt $t^* \in K(t_0, \varrho)$ und $e^{++} = (3d + e_1, e_2, \dots, e_m) \in \mathrm{N}^m$.

Sei jetzt $\xi \in H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{S})$ mit $q(t^*, e^{++})(\xi) = 0$. Man hat das kommutative Diagramm mit exakter Zeile:

$$\begin{tikzcd}
 & & H^l(X(t_0,\varrho_1),\mathcal{S}_{t^*,3d+e_1}) \arrow[d, "\beta"] \\
H^l(X(t_0,\varrho_1),\mathcal{S}^{t^*,d+e_1}) \arrow[r, "\varepsilon"] & H^l(X(t_0,\varrho_1),\mathcal{S}) \arrow[r, "\gamma"] \arrow[ur, "\alpha"] & H^l(X(t_0,\varrho_1),\mathcal{S}_{t^*,d+e_1})
\end{tikzcd}$$

Nach Hilfssatz (4.4.9.1) gibt es:

1) $\widehat{\xi}_1^{(t^*)}, \dots, \widehat{\xi}_{s(t^*)}^{(t^*)} \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S}_{t, 3d+e_1})$

2) $F_{t^*}: \mathrm{N}^m \longrightarrow \mathrm{N}^m$ mit $\lim\limits_{e \to \infty} F_{t^*}(e) = \infty$

so dass gilt:

Es gibt $a_1, \dots, a_{s(t^*)} \in \Gamma(K(t_0, \varrho_0), \mathcal{I}(t^*, F_{t^*}(e_1, e_2, \dots, e_m))$ mit

$$\alpha(\xi) = a_1 \widehat{\xi}_1^{(t^*)} + \dots + a_{s(t^*)} \widehat{\xi}_{s(t^*)}^{(t^*)}.$$

Nach Satz (4.4.6) gibt es $\xi_1^{(t^*)}, \dots, \xi_{s(t^*)}^{(t^*)} \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S})$ mit

$$\gamma(\xi_\nu^{(t^*)}) = \beta(\widehat{\xi}_\nu^{(t^*)}).$$

Jetzt gilt:

$$\gamma(\xi - a_1 \xi_1^{(t)} - \dots - a_{s(t^*)} \xi_{s(t^*)}^{(t^*)}) = 0.$$

Es gibt also ein $\zeta \in H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{S}^{t^*, d+e_1})$ mit

$$\varepsilon(\zeta) = \xi - (a_1 \xi_1^{(t^*)} + \dots + a_{s(t^*)} \xi_{s(t^*)}^{(t^*)}).$$

Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}^{t_1^*,d} \arrow[r, "(t_1-t_1^*)^{e_1}"] \arrow[d, hook] & \mathcal{S}^{t_1^*,d+e_1} \arrow[d, hook] \\ \mathcal{S} \arrow[r, "(t_1-t_1^*)^{e_1}"] & \mathcal{S} \end{tikzcd}$$

folgt das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} H^1(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{S}^{t_1^*,d}) \arrow[r, "(t_1-t_1^*)^{e_1}"] \arrow[d, dash, "\varepsilon"'] & H^1(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{S}^{t_1^*,d+e_1}) \arrow[d, dash, "\varepsilon"'] \\ H^1(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{S}) \arrow[r, "(t_1-t_1^*)^{e_1}"] & H^1(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{S}) \end{tikzcd}$$

und daraus folgt:

Es gibt ein $\zeta_0 \in H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{S}^{t^* d})$ mit

$$\zeta = (t_1 - t_1^*)^{e_1} \zeta_0$$

somit gilt:

$$\xi = a_1 \xi_1^{(t^*)} + \dots + a_{s(t^*)} \xi_{s(t^*)}^{(t^*)} + (t_1 - t_1^*)^{e_1} \varepsilon(\zeta_0),$$

Nach Theorem $V_{l, m}$ gilt:

Es gibt $b_1, \dots, b_r \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{O})$

$$b_{\nu 1}^{(t^*)}, \dots, b_{\nu r}^{(t^*)} \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{O}, \qquad 1 \leq \nu \leq s(t^*)$$

so dass gilt:

$$\varepsilon(\zeta_0) = b_1 \xi_1 + \dots + b_r \xi_r$$
$$\xi_\nu^{(t^*)} = b_{\nu 1}^{(t^*)} \xi_1 + \dots + b_{\nu r}^{(t^*)} \xi_r$$

Nach elementarem Einsetzen folgt:

$$\xi = c_1 \xi_1 + \dots + c_r \xi_r,$$

wobei $c_r \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{J}(t^*, F_{t^*}(e))$ ist.

SATZ (4.4.10). — Voraussetzungen: $I_{0, m-1}$, $I_{l+1, m}$, $II_{l+1, m}$, $II_{l, m}$, t_0 ein Punkt aus K, $\mathcal{S}$ eine kohärente analytische Garbe auf $X_{t_0, m}$.

Behauptung: Es gibt ein $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$ und es gibt Schnitte $s_1, \dots, s_r \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \pi_l(\mathcal{S}))$, die jeden Halm von $\pi_l(\mathcal{S})$ über $K(t_0, \varrho)$ erzeugen und jeder Halm über $K(t_0, \varrho)$ der Relationengarbe $\mathcal{R}(s_1, \dots, s_r)$ wird durch Schnitte aus $\Gamma(K(t_0, \varrho) R(s_1, \dots s_r))$ erzeugt.

Bemerkung: Nach (1.3.5) ist also $\mathcal{R}(s_1, \dots, s_r)$ kohärent, und damit ist auch $\pi_l(\mathcal{S})$ kohärent.

Beweis. — Seien $\varrho_0 \in \mathbf{R}_+^m$ und $\widetilde{\xi}_1, \dots, \widetilde{\xi}_q \in H^l(X(t_0, \varrho_0), \mathcal{S})$ die in Satz (4.4.8) versprochenen Dinge.

Nach Satz (4.4.9) gibt es $\varrho, \varrho_1 \in \mathbf{R}_+^m$ mit $\varrho \leq \varrho_1 < \varrho_0$ und ein $q(t_0, e^*)$-Erzeugendensystem $\xi_1, \dots, \xi_r \in H^l(X(t_0, \varrho_1), \mathcal{S})$.

Nach Theorem $\mathrm{V}_{l,m}$ gibt es

$$a_{\nu 1}, \dots, a_{\nu r} \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{O}) \qquad 1 \leq \nu \leq q$$

so dass gilt:

$$\widetilde{\xi}_\nu = a_{\nu 1}\xi_1 + \dots + a_{\nu r}\xi_r \qquad \text{auf } K(t_0, \varrho)$$

Es wird

$$s_\nu = \pi_l(\xi_\nu), \quad 1 \leq \nu \leq r \qquad \text{gesetzt, und es gilt:}$$

$$\pi_l(\widetilde{\xi}_\nu) = a_{\nu 1} s_1 + \dots + a_{\nu r} s_r$$

Die $s_1, \dots, s_r$ erzeugen also über $K(t_0, \varrho)$ jeden Halm von $\pi_l(\mathcal{S})$. Sei $t^* \in K(t_0, \varrho)$ und sei $\gamma = (f_{1t^*}, \dots, f_{rt^*}) \in (\mathcal{R}(s_1, \dots, s_r))_{t^*}$; es gilt also $f_{1t^*} s_{1t^*} + \dots + f_{rt^*} s_{rt^*} = 0$.

Es gibt einen Polyzylinder $K(t^*, \varrho^*) \subset K(t_0, \varrho)$ und es gibt holomorphe Funktionen $f_1, \dots, f_r \in \Gamma(K(t^*, \varrho^*), \mathcal{O})$, so dass gilt: $(f_1, \dots, f_r)_{t^*} = \gamma$ und $f_1 s_1 + \dots + f_r s_r = 0$ auf $K(t^*, \varrho^*)$.

Zu jedem $e \in \mathbf{N}^m$ gibt es holomorphe Funktionen (Potenzreihenabschnitte) $f_1^{(e)}, \dots, f_r^{(e)} \in \Gamma(K(t_0, \varrho_1), \mathcal{O})$ so dass gilt:

$$f_\nu - f_\nu^{(e)} \in \Gamma(K(t^*, \varrho^*), \mathcal{J}(t^*, e)).$$

Wegen

$$0 = q(t^*, e)((f_1 - f_1^{(e)})\xi_1 + \dots + (f_r - f_r^{(e)})\xi_r) =$$

$$= q(t^*, e)(f_1 s_1 + \dots + f_r s_r) - q(t^*, e)(f_1^{(e)}\xi_1 + \dots + f_r^{(e)}\xi_r)$$

gilt also

$$q(t^*, e)(f_1^{(e)}\xi_1 + \dots + f_r^{(e)}\xi_r) = 0.$$

Nach Satz (4.4.9) gibt es

$$a_\nu^{(e)} \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{J}(t^*, F_{t^*}(e))), \qquad 1 \leq \nu \geqq r$$

so dass gilt:

$$f_1^{(e)} \xi_1 + \dots + f_r^{(e)} \xi_r = a_1^{(e)} \xi_1 + \dots + a_r^{(e)} \xi_r$$

Man hat also

$$(f_1^{(e)} - a_1^{(e)}, \dots, f_r^{(e)} - a_r^{(e)}) \in \Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{R}(s_1, \dots, s_r))$$

$$(f_\nu^{(e)} - a_\nu^{(e)}) - f_\nu \in \mathcal{J}(t^*, F_{t^*}(e)).$$

Wegen $\lim\limits_{e \to \infty} F_{t^*}(e) = \infty$ folgt nach dem Krulllemma, dass $\gamma = (f_{1t^*}, \dots, f_{rt^*})$ in dem durch $\Gamma(K(t_0, \varrho), \mathcal{R}(s_1, \dots, s_r))$ erzeugten $\mathcal{O}_{t^*}$-Modul liegt.

4.5 Die Haupttheoreme von Grauert.

(4.5.1) Seien X, Y komplexe Räume, $\pi : X \longrightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, $\mathcal{S}$ eine kohärente analytische Garbe auf X und y ein Punkt aus Y. Mit m werde die Idealgarbe der analytischen Menge $\{y\} \subset Y$ bezeichnet. Der Halm von m über y ist also nichts anderes als das maximale Ideal von $\mathcal{H}_{Y,y}$, wenn mit $\mathcal{H}_Y$ die Strukturgarbe von Y bezeichnet wird. Wir betrachten die Urbildgarbe $\pi^*(m) = \widehat{m}$; sie ist eine kohärente analytische Garbe auf X mit $\operatorname{supp}(\widehat{m}) = X_y$, $X_y = \pi^{-1}(y)$.

Sei $n \in \mathbf{N}$; aus der kanonischen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \widehat{m}^{n+1} \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S} / \widehat{m}^{n+1} \mathcal{S} \longrightarrow 0$$

folgt die exakte Bildgarbensequenz

$$\longrightarrow \pi_l(\widehat{m}^{n+1} \mathcal{S}) \longrightarrow \pi_l(\mathcal{S}) \xrightarrow{q_{n+1}} \pi_l(\mathcal{S} / \widehat{m}^{n+1} \mathcal{S}) \longrightarrow .$$

Wegen den Beziehungen

$$(m^{n+1} \pi_l(\mathcal{S}))_y \subset \operatorname{im}((\pi_l(\widehat{m}^{n+1} \mathcal{S}))_y \longrightarrow (\pi_l(\mathcal{S}))_y)$$

$$H^l(X_y, \mathcal{S} / \widehat{m}^{n+1} \mathcal{S}) = (\pi_l(\mathcal{S}) / \widehat{m}^{n+1} \mathcal{S}))_y$$

hat man einen kanonischen Morphismus

$$p_n : (\pi_l(\mathcal{S}) \,/\, m^{n+1}\, \pi_l(\mathcal{S}))_y \longrightarrow H^l(X_y\,,\, \mathcal{S} \,/\, \widehat{m}^{n+1}\, \mathcal{S}),$$

somit auch einen kanonischen Morphismus:

(4.5.1.1)

$$\varprojlim_{n \in \mathbf{N}} (\pi_l(\mathcal{S}) \,/\, m^{n+1}\, \pi_l(\mathcal{S}))_y \longrightarrow \varprojlim_{n \in \mathbf{N}} H^l(X_y\,.\, \mathcal{S} \,/\, \widehat{m}^{n+1}\, \mathcal{S})$$

(4.5.2) Die Haupttheoreme von Grauert lauten:

Theorem I. — Voraussetzung:

X, Y komplexe Räume

$\pi : X \longrightarrow Y$ eigentliche holomorphe Abbildung

$\mathcal{S}$ kohärente analytische Garbe auf X

Beauptung: Für alle $l \in \mathbf{N}$ sind die Bildgarben $\pi_l(\mathcal{S})$ kohärente analytische Garben auf Y.

Theorem II. — Voraussetzung:

X, Y komplexe Räume

$\pi : X \longrightarrow Y$ eigentliche holomorphe Abbildung

$\mathcal{S}$ kohärente analytische Garbe

$y \in Y$, $l \in \mathbf{N}$

Behauptung: Der kanonische Homomorphismus

$$\varprojlim_{n \in \mathbf{N}} (\pi_l(\mathcal{S}) \,/\, m^{n+1}\, \pi_l(\mathcal{S}))_y \longrightarrow \varprojlim_{n \in \mathbf{N}} H^l(X_y\,,\, \mathcal{S} \,/\, \widehat{m}^{n+1}\, \mathcal{S})$$

ist ein Isomorphismus.

(4.5.3) Beweis zu Theorem I. — Das Theorem I ist in Bezug auf Y von lokaler Natur. Wir dürfen also annehmen, dass der unterliegende topologische Raum von Y eine analytische Menge in einem m-dimensionalen Poyzylinder $K \subset \mathbf{C}^m$ und dass die Strukturgarbe $\mathcal{H}_Y$ isomorph zu $\mathcal{O}/\mathcal{I}$ ist. Dabei bezeichne $\mathcal{O}$ die übliche Garbe der holomorphen Funktionen auf K, $\mathcal{I}$ eine kohärente Idealgarbe von $\mathcal{O}$ mit $\operatorname{supp}(\mathcal{O}/\mathcal{I}) = Y$. Wir haben also eine eigentliche holomophe Abbildung $\pi : X \longrightarrow K$. Sei $l \in \mathbf{N}$ und sei $\mathcal{S}$ eine kohärente analytische Garbe auf X, dann ist $\pi_l(\mathcal{S})$ ein $\mathcal{O}/\mathcal{I}$-Modul und vermöge der Abbildung $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}/\mathcal{I}$ auch ein $\mathcal{O}$-Modul. Nach Theorem $\mathrm{I}_{l,m}$ ist aber $\pi_l(\mathcal{S})$ ein kohärenter $\mathcal{O}$-Modul, und wegen Anhang (2) ist $\pi_l(\mathcal{S})$ auch ein kohärenter $\mathcal{O}/\mathcal{I}$-Modul. Damit ist der Kohärenzsatz bewiesen.

Um Theorem II zu beweisen, brauchen wir noch das folgende

LEMMA (4.5.4). — Voraussetzung: wie in Theorem II

Behauptung: Es gibt eine Abbildung $F : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} F(n) = \infty$, so dass gilt:

$$(m^{F(n)}\,\pi_l(\mathcal{S}))_y \supset \operatorname{im}\left((\pi_l(\widehat{m^n}\,\mathcal{S}))_y \longrightarrow (\pi_l(\mathcal{S}))_y\right)$$

Beweis. — Wie im Beweis zu Theorem I dürfen wir annehmen, dass Y eine analytische Menge in einem m-dimensionalen Polyzylinder $K \subset \mathbf{C}^m$ ist.

Sei jetzt $\xi \in \ker\left((\pi_l(\mathcal{S}))_y \longrightarrow (\pi_l(\mathcal{S}/\widehat{m^n}\,\mathcal{S}))_y\right)$, dann gibt es ein $\varrho \in \mathbf{R}_+^m$ und ein

$$\widehat{\xi} \in \ker\left(H^l(X(y,\varrho), \mathcal{S}) \longrightarrow H^l(X(y,\varrho), \mathcal{S}/\widehat{m^n}\,\mathcal{S})\right)$$

mit $(\widehat{\xi})_y = \xi$. Nach Theorem $\mathrm{V}_{l,m}$ gibt es eine Funktion $F : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{N}$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} F(n) = \infty$ so dass gilt:

$$\widehat{\xi} = a_1\,\xi_1 + \dots + a_s\,\xi_s \qquad \text{auf} \quad X(y,\varrho)$$

wobei

$$a_1, \dots, a_s \in \Gamma(K(\varrho), m^{F(n)}).$$

(dabei wurde ϱ schon aus der Dreiecksmenge von Theorem $\mathrm{V}_{l,m}$ gewählt). Jetzt folgt

$$\xi = (\pi_l(\widehat{\xi}))_y = a_{1y}(\pi_l(\xi_1))_y + \dots + a_{sy}(\pi_l(\xi_s))_y$$

somit liegt $\xi \in (m^{F(n)}\,\pi_l(\mathcal{S}))_y$.

(4.5.5). — Beweis zu Theorem II. — (i) Der Homomorphismus (4.5.11) ist injektiv!

Sei $(\xi_n)_{n \geq 1} \in \varprojlim\limits_{n \in \mathbf{N}} (\pi_l(\mathcal{S})/m^{n+1}\,\pi_l(\mathcal{S}))_y$ mit $p_n(\xi_n) = 0$ für alle $n \geq 1$. Zu jedem $n \geq 1$, gibt es ein $n^+ \geq 1$ mit $F(n^+) \geq n$. Dabei ist F die in Lemma (4.5.4) versprochene Abbildung. Man hat folgendes kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
(\pi_l(\hat{m}^{n^+}\mathcal{S}))_y \arrow[r] & (\pi_l(\mathcal{S}))_y \arrow[r, "q_{n^+}"] \arrow[d, "\alpha_{n^+}"] & (\pi_l(\mathcal{S}/\hat{m}^{n^+}\mathcal{S}))_y \\
 & \pi_l(\mathcal{S})/m^{n^+}\pi_l(\mathcal{S}) \arrow[ur, "p_{n^+}"'] &
\end{tikzcd}$$

Es gibt ein $\widehat{\xi}_{n^+} \in (\pi_l(\mathcal{O}))_y$ mit $\alpha_{n^+}(\xi_{n^+}) = 0$ somit gilt also $q_{n^+}(\widehat{\xi}_{n^+}) = 0$. Nach Lemma (4.5.4) ist $\alpha_{F(n^+)}(\widehat{\xi}_{n^+}) = 0$. Andererseits ist $\alpha_{F(n^+)}(\widehat{\xi}_{n^+}) = \xi_{F(n^+)}$. Da $F(n^+) \geq n$ ist, folgt dass $\xi_n = 0$ ist.

(ii) Der Homomorphismus (4.5.1.1) ist surjektiv!

Sei $(\xi_\nu)_{\nu \geq 1} \in \varprojlim_{\nu \in \mathbb{N}} (\pi_l(\mathcal{O}/\widehat{m}^{\nu+1}\mathcal{O}))_y$. Für $\mu \geq \nu$ hat man das kanonische kommutative Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{tikzcd}
\pi_l(\mathcal{S}) \arrow[r, "q_\mu"] \arrow[d, equal] & \pi_l(\mathcal{S}/\hat{m}^\mu\mathcal{S}) \arrow[r, "r_\mu"] \arrow[d, "q_{\nu\mu}"] & \pi_{l+1}(\hat{m}^\mu\mathcal{S}) \arrow[d, "q^{\nu\mu}"] \\
\pi_l(\mathcal{S}) \arrow[r, "q_\nu"] & \pi_l(\mathcal{S}/\hat{m}^\nu\mathcal{S}) \arrow[r, "r_\nu"] & \pi_{l+1}(\hat{m}^\nu\mathcal{S})
\end{tikzcd}$$

Aus diesem Diagramm folgt:

$$r_\nu(\xi_\nu) = q^{\nu\mu} r_\mu(\xi_\mu), \qquad \mu \geq \nu$$

Jetzt wird Lemma (4.5.4) auf die Garbe $\widehat{m}^\nu \mathcal{O}$ angewandt.

Für jedes $\mu \geq \nu$ gilt somit:

$$r_\nu(\xi_\nu) \in (m^{F(\mu)} \pi_l(\widehat{m^\nu} \mathcal{S}))_y$$

Nach dem Krullschen Lemma folgt $r_\nu(\xi_\nu) = 0$. Es gibt also ein

$$\xi_\nu \in (\pi_l(\mathcal{S}))_y \quad \text{mit} \quad q_\nu(\widehat{\xi_\nu}) = \xi_\nu .$$

Bezeichnet

$$\alpha_\nu : (\pi_l(\mathcal{S}))_y \longrightarrow (\pi_l(\mathcal{S}) / m^\nu \pi_l(\mathcal{S}))_y$$

den kanonischen Epimorphismus, dann setzen wir $\check{\xi} = \alpha_\nu(\widehat{\xi_\nu})$. Offensichtlich ist $(\check{\xi}_\nu)_{\nu \geq 1}$ das gesuchte Element, das vermöge (4.5.1.1) auf $(\xi_\nu)_{\nu \geq 1}$ abgebildet wird.

ANHANG

(1) SATZ. — Sei $(X, \mathcal{H}_X)$ und $(X, \mathcal{H}_Y)$ komplexe Räume $f: X \longrightarrow Y$ eine holomorphe Abbildung, $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{H}_X$-Modul und seien die Bildgarben $R^q f_*(\mathcal{F})$ für alle $q \geq 0$ kohärent, dann gilt für jede Steinsche Menge U von Y, dass $H^n(f^{-1}(U), \mathcal{F}) \approx \Gamma(U, R^n f_*(\mathcal{F}))$ ist für alle $n \geq 0$.

(2) SATZ. — Voraussetzung: Sei $(X, \mathcal{O})$ ein geringeter Raum, $\mathcal{O}$ ein kohärenter $\mathcal{O}$-Modul, $\mathcal{J}$ ein kohärentes $\mathcal{O}$-Ideal und $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}/\mathcal{J}$-Modul. Behauptng: $\mathcal{F}$ ist genau dann ein kohärenter $\mathcal{O}/\mathcal{J}$-Modul, wenn $\mathcal{F}$ aufgefasst vermöge der kanonischen Abbildung $\mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}/\mathcal{J}$ ein kohärenter $\mathcal{O}$-Modul ist. Insbesondere ist $\mathcal{O}/\mathcal{J}$ ein kohärenter $\mathcal{O}/\mathcal{J}$-Modul.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] H. GRAUERT. — *Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen.* (Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques, n° 5).

[1] M. HERVÉ. — *Several complex variables.* Oxford University Press 1963.

[3] A. GROTHENDIECK - J. DIEUDONNÉ. — *Elements de géométrie algébrique,* I. *Le langage des schémas.* (Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques, n° 4).