

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

CLAUDIO REA

Le problème de Cauchy-Riemann pour des structures mixtes

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 22, n° 4 (1968), p. 695-727

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1968_3_22_4_695_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE PROBLÈME DE CAUCHY - RIEMANN POUR DES STRUCTURES MIXTES

CLAUDIO REA (*)

0. On sait que sur une variété de Stein X est résoluble le problème de Cauchy-Riemann paramétrisé

$$\bar{\partial} u_t = f_t$$

où f_t est (pour tout $t \in \mathbf{R}$, $|t| < \delta$) une $(p, q+1)$ -forme, $\bar{\partial}$ -fermée, à valeurs dans un fibré vectoriel holomorphe E , dont les coefficients sont de classe C^∞ sur X et C^k sur $X \times \mathbf{R}$ ($k = 0, 1, \dots, \infty$) et que la solution est aussi régulière que f_t .

Ce résultat, démontré par Andreotti et Grauert [7] peut être obtenu, pour $k = 0$, comme cas particulier d'un théorème de H. Cartan [4].

La démonstration qu'on en donne à la fin de ce travail (prop. 5.5.) m'a été suggérée verbalement par L. Kaup.

Nous avons abordé ici le cas où la structure même de X dépend de t . Le problème prend alors la forme

$$\bar{\partial}_t u_t = f_t.$$

Dans la première partie on a envisagé un feuilletage semi-holomorphe, c'est à dire une variété différentiable $\mathcal{W}$, de dimension $2n + m$, $n > 1$, munie d'un atlas $\{\Phi_i, U_i\}$, avec $\Phi_i: U_i \rightarrow \mathbf{C}^n \times \mathbf{R}^m$, tel que les changements de coordonnées dans $U_i \cap U_j$ soient du type $(z, t) \rightarrow [h(z, t), k(t)]$, où h et k sont de classe C^∞ et h est holomorphe par rapport aux z pour tout t .

Pervenuto alla Redazione il 6 Aprile 1968 ed in forma definitiva il 12 Luglio 1968.

(*) Travail exécuté avec l'aide du C.N.R. Groupe 35.

Les feuilles de $\mathcal{W}$ sont donc douées d'une structure de variété analytique complexe.

On a supposé que $\mathcal{W}$ était *complet*, c'est à dire qu'il existe une fonction réelle $\psi \in C^\infty(\mathcal{W})$ telle que sa restriction aux feuilles soit plurisousharmonique et que l'on ait $\{x \in \mathcal{W}, \psi(x) < c\} \subset\subset \mathcal{W}, \forall c \in \mathbb{R}$. Les feuilles fermées sont donc des variétés de Stein. La première partie du travail est consacrée à établir le

THÉORÈME I. *Soit $\mathcal{W}$ un feuilletage semi-holomorphe complet, f une $(p, q+1)$ -forme verticale à valeurs dans un fibré vectoriel différentiable $E \rightarrow \mathcal{W}$ donné, dont la restriction aux feuilles soit holomorphe. Si les coefficients de f sont $\mathcal{L}_{\text{loc}}^2$ et $\bar{\partial}f = 0$, alors il existe une (p, q) -forme verticale u à valeurs dans E , à coefficients $\mathcal{L}_{\text{loc}}^2$, telle que l'on ait*

$$(1) \quad \bar{\partial}u = f.$$

La méthode employée pour cette démonstration est analogue à celle employée par Andreotti et Vesentini dans [1], [2] et [3]; le formalisme est celui de Hörmander [9] et [10].

Le théorème I n'est pas vrai en général si l'on remplace $\mathcal{L}_{\text{loc}}^2$ par C^∞ (ou même C^0).

Dans la deuxième partie en effet on a du se placer dans le cas, beaucoup plus particulier, où $\mathcal{W}$ est une déformation différentiable, triviale à l'infini, d'une variété de Stein de dimension complexe $n > 1$, et l'on prouve le

THÉORÈME II. *Soit $\mathcal{W} \xrightarrow{\pi} B$ une déformation différentiable, triviale à l'infini, d'une variété de Stein $X \simeq \pi^{-1}(0)$, E un fibré vectoriel différentiable sur $\mathcal{W}$, holomorphe sur chaque feuille. Il existe une restriction $\pi^{-1}B' \rightarrow B'$ de $\mathcal{W}$ telle que: pour toute $(p, q+1)$ -forme verticale f de classe C^∞ sur $\mathcal{W}$, ($k=0, 1, \dots, \infty$), et $\bar{\partial}$ -fermée sur chaque feuille, on peut trouver une (p, q) -forme verticale u , de classe C^∞ sur $\pi^{-1}B'$ qui satisfait $\bar{\partial}u = f$. En plus si toute variété $\pi^{-1}(t)$, $t \in B$, est de Stein, on peut remplacer dans cet énoncé B' par B .*

Ce deuxième résultat a été obtenu en introduisant la notion de *uni-forme w-ellipticité* du fibré vectoriel en question sur une feuilletage semi-holomorphe. La méthode employée pour établir le théorème II dans le cas $k=0$, $f = \llcorner \text{cocycle de déformation de } \mathcal{W} \llcorner$, est la même que celle introduite en [2] et [11]. A la fin du travail on démontre le

THÉORÈME III. *Si la forme f est telle que $\pi|(\text{supp } f)$ soit une application propre, il existe une forme u de classe C^∞ telle que $\bar{\partial}u = f$ et $\pi|(\text{supp } u)$ soit propre.*

Je remercie M. Andreotti qui m'a donné des idées qui ont été indispensables.

I^{ère} P A R T I E

1. Soit $\mathcal{W}$ une variété différentiable ⁽¹⁾ de dimension $2n + m$, $n > 1$, $\mathcal{W}$ sera dite munie d'une structure de variété à feuilletage semi-holomorphe si on donne un recouvrement localement fini $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de $\mathcal{W}$ et, pour tout $i \in I$, une immersion différentiable $\Phi_i: U_i \rightarrow \mathbb{C}^m \times \mathbb{R}^m$ ⁽²⁾ de façon telle que, si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, le difféomorphisme $\Phi_i \circ \Phi_j^{-1}: \Phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \Phi_i(U_i \cap U_j)$ soit de la forme $(z, t) \rightarrow [h(z, t), k(t)]$, h étant une n -ple de fonctions différentiables par rapport à (z, t) , holomorphes par rapport à z pour tout $t \in \text{pr}_2 \Phi_j(U_i \cap U_j)$. Un tel atlas sera dit distingué. On peut supposer que l'on ait $\text{Im } \Phi_i = A_i \times B_i$, où A_i et B_i sont des rectangles ouverts de $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{R}^m$.

Les sous-ensembles $\Phi_i^{-1}[\text{Im } \Phi_i \cap \text{pr}_2^{-1} t]$, $i \in I$, $t \in \text{pr}_2 \text{Im } \Phi_i$, sont des sous-variétés de dimension $2n$ de $\mathcal{W}$ qui s'appellent *plaques*, la restriction de $\text{pr}_2 \circ \Phi_i$ à une plaque $\mathfrak{p}$ est un difféomorphisme $\varphi_{\mathfrak{p}}$ de $\mathfrak{p}$ sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Les intersections des plaques avec les ouverts de $\mathcal{W}$ sont la base d'une nouvelle topologie τ (plus fine) sur l'ensemble $\mathcal{W}$, soit $\widehat{\mathcal{W}}$ le nouvel espace topologique ainsi obtenu. Les composantes connexes de $\widehat{\mathcal{W}}$ sont les *feuilles* de la structure feuilletée. Soit Π l'ensemble des plaques, Π est un recouvrement ouvert de $\widehat{\mathcal{W}}$ (localement fini) et $\{p, \varphi_p\}_{p \in \Pi}$ est un atlas qui induit sur $\widehat{\mathcal{W}}$ une structure de variété analytique complexe dont les feuilles sont des sous-variétés ouvertes.

Une feuille est dite *propre* si elle a la même topologie en tant que sous-ensemble de $\mathcal{W}$ et de $\widehat{\mathcal{W}}$. Une feuille fermée est propre, une feuille propre n'est pas nécessairement fermée. Pour la description topologique d'une telle structure nous renvoyons à [12]. Soit $i: \widehat{\mathcal{W}} \rightarrow \mathcal{W}$ l'immersion de $\widehat{\mathcal{W}}$ dans $\mathcal{W}$. Une fonction différentiable $f: \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite semi-holomorphe si $i \circ f$ est holomorphe, f est semi-holomorphe si, et seulement si elle est

⁽¹⁾ Ici et dans la suite différentiable est synonyme de C^∞ .

⁽²⁾ On peut remplacer, ici et dans la suite, $\mathbb{R}^m$ avec $\mathbb{C}^m$.

différentiable par rapport aux variables $z^1, \dots, z^n$; $t^1, \dots, t^m$ et holomorphe par rapport aux variables $z^1, \dots, z^n$.

Un fibré différentiable sur $\mathcal{W}$ est dit semi-holomorphe si ses fonctions de transition sont semi-holomorphes. Soient $\tilde{T}$ et $\hat{T}$ les fibrés tangents réels de $\mathcal{W}$ et $\hat{\mathcal{W}}$ respectivement, $\tilde{T}_x$ et $\hat{T}_x$ indiquent les espaces tangents à $\mathcal{W}$ et à $\hat{\mathcal{W}}$ en x .

Le complexifié du fibré $\hat{T}$ est la somme directe d'un fibré holomorphe T sur $\hat{\mathcal{W}}$ ($i^*(T)$ est un fibré semi-holomorphe sur $\mathcal{W}$) et de son conjugué $\bar{T}$. Nous allons indiquer dans la suite avec la même lettre les fibrés T et $i^*(T)$, $\bar{T}$ et $i^*(\bar{T})$. Soient $A^{1,0}$ et $A^{0,1}$ les duals de T et $\bar{T}$, on pose $A^{p,q} = (A^{1,0})^{\wedge p} \wedge (A^{0,1})^{\wedge q}$, (le suscript $\wedge p$ veut dire : p -ème puissance extérieure), $A^{p,q}$ sera considéré dans la suite comme fibré de base $\mathcal{W}$.

Nous allons étudier parallèlement les deux cas où $\mathcal{W}$ est un feuilletage et celui plus particulier où $\mathcal{W}$ est une famille différentiable de variétés analytiques complexes, c'est à dire qu'il y ait aussi une application différentiable $\pi: \mathcal{W} \rightarrow B$ (B variété différentiable réelle de dim. m) dont les fibres coïncident avec les feuilles de la structure feuilletée, la fibre au dessus de $t \in B$ sera indiquée avec X_t . Ce deuxième cas sera brièvement dit « cas déformation ». Soit U un ouvert de $\mathcal{W}$, on pose $\hat{U} = i^{-1} U$, $\hat{U}$ est un ouvert de $\hat{\mathcal{W}}$, U et $\hat{U}$ ont les mêmes éléments; soit E un fibré vectoriel semi-holomorphe sur $\mathcal{W}$, $C_{p,q}^\infty(U, E)$ et $C_{p,q}^\infty(\hat{U}, E)$ sont les modules des sections différentiables de $(E \otimes A^{p,q})|_U$ et de $(E \otimes A^{p,q})|_{\hat{U}}$ respectivement.

$C_{p,q}^\infty(U, E)$ est identifiable à un sous-module de $C_{p,q}^\infty(\hat{U}, E)$.

$\mathcal{H}_{p,q}(U, E, \text{loc})$ est le module des sections de $E \otimes A^{p,q}$ sur U dont les coefficients sont des fonctions qui se trouvent dans l'espace de Sobolev $\mathcal{H}_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^{2n+m})$; on peut voir aisément que cette notion est invariante. On pose comme d'habitude $\mathcal{L}_{p,q}^2(U, E, \text{loc}) = \mathcal{H}_{p,q}^0(U, E, \text{loc})$. On a $C_{p,q}^\infty(U, E) \subset \mathcal{L}_{p,q}^2(U, E, \text{loc})$ et, grâce au lemme de Sobolev, $\mathcal{H}^s(U, E, \text{loc}) \subset C_{p,q}^\infty(U, E)$, si $2s > 2n + m + 1$. Entre $C_{p,q}^\infty(\hat{U}, E)$ et $\mathcal{L}_{p,q}^2(U, E)$ au contraire, il n'y a, à priori, aucune relation.

Le fibré E peut être supposé trivial au dessus des ouverts coordonnés de $\mathcal{W}$, $\{e_a\}$ est un système de μ ($=$ rang de E) sections différentiables indépendantes de E au dessus de l'ouvert coordonné U_i , les formes

$$e_a \otimes dz^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz^{\alpha_p} \wedge \bar{d}z^{\beta_1} \wedge \dots \wedge \bar{d}z^{\beta_q}, \quad 1 \leq \alpha_1 < \dots < \alpha_p \leq n,$$

$1 \leq \beta_1 < \dots < \beta_q \leq n$, $a = 1, \dots, \mu$, forment une base pour la fibre de $E \otimes A^{p,q}$ au dessus de chaque point de U_i . On introduit les blocs d'indices, $A = \alpha_1, \dots, \alpha_p$, avec $\alpha_1 < \dots < \alpha_p$, $dz^A = dz^{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz^{\alpha_p}$, $|A|$ est le nombre

d'indices qui forment A . L'opérateur $\bar{\partial} : C_{p,q}^{\infty}(\widehat{\mathcal{W}}, E) \rightarrow C_{p,q+1}^{\infty}(\widehat{\mathcal{W}}, E)$ s'exprime localement par la formule

$$(2) \quad \bar{\partial}(f_{AB}^a e_b \otimes dz^A \wedge d\bar{z}^B) = (-1)^p \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\beta}} f_{AB}^a e_a \otimes dz^A \wedge d\bar{z}^{\beta B}.$$

Si $\varphi \in C^k(\widehat{\mathcal{W}})$, $k \geq 2$, est une fonction à valeurs réelles, la (1.1) forme (de Levi) $\partial\bar{\partial}\varphi$, opère de façon intrinsèque, hermitienne sur T . La matrice de ses coefficients subit, par un changement de coordonnées, une transformation du type $a \rightarrow {}^t b a b$, ses valeurs propres sont donc des fonctions réelles qui appartiennent à $C^{k-2}(\mathcal{W})$, si en plus $\varphi \in C^k(\widehat{\mathcal{W}}) \cap C^k(\mathcal{W})$, les valeurs propres de $\partial\bar{\partial}\varphi$ sont dans $C^{k-2}(\widehat{\mathcal{W}}) \cap C^k(\mathcal{W})$.

DÉFINITION 1.1. Une fonction réelle $\varphi \in C^{\infty}(\mathcal{W})$ est dite *plurisousharmonique* si les valeurs propres de $\partial\bar{\partial}\varphi$ sont positives.

DÉFINITION 1.2. Le feuilletage $\mathcal{W}$ est dit *complet* s'il existe sur $\mathcal{W}$ une fonction plurisousharmonique telle que l'on ait

$$(A) \quad \{x \in W, \varphi(x) < c\} \subset \subset \mathcal{W}, \text{ pour tout } c \in \mathbf{R}.$$

Remarque 1.2. Si $\mathcal{W}$ est complet et en même temps une fibration, alors toute fibre est une variété de Stein.

Pour toute fonction réelle $\psi \in C^2(\mathcal{W})$ nous indiquons avec λ_{ψ} la fonction « plus petite valeur propre de $\partial\bar{\partial}\psi$ ».

LEMME 1.1. Soit g une fonction réelle continue sur le feuilletage complet $\mathcal{W}$. Il existe une fonction réelle plurisousharmonique $\psi \in C^{\infty}(\mathcal{W})$ qui satisfait la propriété (A) et telle que

$$(i) \quad \psi(x) \geq g(x), \quad \forall x \in \mathcal{W}$$

$$(ii) \quad \lambda_{\psi}(x) \geq g(x), \quad \forall x \in \mathcal{W}.$$

Preuve. Soit φ la fonction dont à la définition 1.2, on pose $\varepsilon = \min_{\mathcal{W}} \varphi$, $\mathcal{B}_c = \{x \in \mathcal{W}, \varphi(x) < c\}$.

On peut évidemment choisir une fonction différentiable $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ telle que l'on ait $F'(s) > 0$, $F''(s) > 0$, $\forall s \in \mathbf{R}$ et $\inf_{[s,c]} F' > \sup_{\mathcal{B}_c} \frac{g}{\lambda_{\varphi}}$, $\inf_{[s,c]} F > \sup_{\mathcal{W}_c} g$.

La fonction cherchée est $\psi(x) = F(\varphi(x))$, on a en effet

$$\lambda_{\varphi}(x) \geq F'[\varphi(x)] \lambda_{\varphi}(x) \geq \left(\inf_{[x, \varphi(x)]} F' \right) \lambda_{\varphi}(x) \geq$$

$$\geq \left\{ \sup_{\xi \in \mathcal{B}_{\varphi}(x)} \frac{g(\xi)}{\lambda_{\varphi}(\xi)} \right\} \lambda_{\varphi}(x) \geq g(x);$$

$$\psi(x) \geq \inf_{[x, \varphi(x)]} F \geq \sup_{\mathcal{B}_{\varphi}(x)} g \geq g(x).$$

De la première inégalité et du fait que $F' > 0$ on tire $\lambda_{\psi}(x) > 0$, ψ est donc plurisousharmonique; à cause de la croissance de F' on a $\psi(x) < c \Rightarrow \varphi(x) < F^{-1}(c)$, φ et ψ ont donc aussi les mêmes surfaces de niveau et ψ satisfait la propriété (A). Le lemme est donc prouvé.

DÉFINITION. 1.3. Soient φ et ψ deux fonctions réelles différentiables plurisousharmoniques sur $\mathcal{W}$ et satisfaisant la propriété (A), alors ψ sera dite supérieure à φ si l'on a, pour tout $x \in \mathcal{W}$, $\lambda_{\psi}(x) \geq \lambda_{\varphi}(x)$, $\psi(x) \geq \varphi(x)$.

On peut remarquer que si $g > \varphi$ et $g > \lambda_{\varphi}$ la fonction ψ trouvée au lemme 1.1. est supérieure à la fonction φ .

2. α) On introduit maintenant une métrique riemannienne ds^2 sur $\mathcal{W}$, dont la restriction aux feuilles soit hermitienne (cela peut se faire à l'aide d'une partition de l'unité).

Soit $\{\omega_i^a\}$, $\alpha = 1, \dots, n$, un système orthonormal de sections de $A^{1,0}|U_i$; ds^2 induit alors sur $A^{p,q}|U_i$ une métrique qui peut être écrite sous la forme

$$|\xi|^2 = |\xi_{A,B} \omega_i^A \wedge \bar{\omega}_i^B|^2 = \sum_{A,B} |\xi_{A,B}|^2.$$

On peut douer le fibré E d'une métrique hermitienne en obtenant par conséquent sur $E \otimes A^{p,q}$ aussi une métrique qui peut être définie par la relation $|e \otimes f| = |e| |f|$.

Soit $\{e_a\}$ un système orthonormal de μ sections de $E|U_i$, le produit scalaire des formes $f = f_{A,B}^a e_a \otimes \omega^A \wedge \bar{\omega}^B$ et $u = u_{A,B}^a e_a \otimes \bar{\omega}^A \wedge \bar{\omega}^B$ appartenant à la fibre $(E \otimes A^{p,q})_x$ est donné par

$$\langle f, u \rangle_x = \sum_{a,A,B} f_{A,B}^a u_{A,B}^a.$$

Le nombre positif $|f|_x = (\langle f, f \rangle_x)^{1/2}$ est dit *longueurs de la forme f en x* . Les composantes des formes de $E \otimes A^{p,q}$ seront dans la suite systématiquement rapportées au repère orthonormal $\{e_a \otimes \omega^A \wedge \bar{\omega}^B\}$. Soit $\omega^a = a_{\beta}^a dz^{\beta}$,

$a = (a_\beta^a)$, $b = a^{-1}$ et $V = b_\beta^1 \frac{\partial}{\partial z^1}$. La formule (2) peut être réécrite ainsi :

$$(3) \quad \bar{\partial} f = (-1)^p \sum_{a, A, B} \bar{V}_\beta f_{A, B}^a e_a \otimes \omega^A \wedge \bar{\omega}^{\beta B} + f_{AB}^a \bar{c} (e_a \otimes \omega^A \wedge \bar{\omega}^B),$$

ou bien ainsi :

$$(4) \quad \bar{\partial} f = \left\{ (-1)^p \sum_{a, B, A} \bar{V}_\beta f_{A, B}^a + M_{A, \beta B}^a(f) \right\} e_a \otimes \omega^A \wedge \bar{\omega}^{\beta B},$$

où les $M_{A, \beta B}^a(f)$ sont des combinaisons linéaires des coefficients de la forme f , les coefficients de ces combinaisons sont différentiables par rapport aux variables z et t .

Soit $dV = g^{1/2} dz^1 \dots dz^n \bar{dz}^1 \dots \bar{dz}^n dt^1 \dots dt^m$ (g = déterminant du tenseur métrique) l'élément de volume induit sur $\mathcal{W}$ par la métrique donnée, $d\hat{V}$ la restriction de dV à $\hat{\mathcal{W}}$ ($d\hat{V} = \hat{g}^{1/2} dz^1 \dots dz^n \bar{dz}^1 \dots \bar{dz}^n$) et, dans le cas de formation dV_t l'élément de volume induit sur X_t .

Soit ψ une fonction réelle continue sur $\mathcal{W}$.

On appelle $\mathcal{L}_{p, q}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$ l'espace vectoriel de sections (à coefficients) mesurables de $E \otimes A^{p, q}$ telles que $\|f\|_\psi^2 \stackrel{\text{def}}{=} \int |f|^2 e^{-\psi} dV < \infty$. La forme sesquilinéaire $(f, g)_\psi = \int \langle f, g \rangle e^{-\psi} dV$ permet d'introduire une structure d'espace hilbertien sur $\mathcal{L}_{p, q}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$; l'espace $D_{p, q}(U, E)$ des sections C^∞ à support compact de $E \otimes A^{p, q}$ est dense dans $\mathcal{L}_{p, q}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$; on pose $D(\mathcal{W}, E) = \bigcup_{p, q} D_{p, q}(\mathcal{W}, E)$. L'espace $\mathcal{L}_{p, q}^2(\mathcal{W}, E, \text{loc})$ est formé par les sections de $E \otimes A^{p, q}$ qui sont dans $\mathcal{L}_{p, q}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$ pour quelque $\psi \in C^0(W)$. Il peut être aussi caractérisé comme l'espace des sections de $E \otimes A^{p, q}$ dont la restriction à tout $U \subset \subset \mathcal{W}$ est dans $\mathcal{L}_{p, q}^2(U, E, \psi)$ pour chaque $\psi \in C^0(\bar{U})$.

Nous envisageons maintenant la suite

$$\dots \xrightarrow{\bar{\partial}} D_{p, q-1}(\mathcal{W}, E) \xrightarrow{\bar{\partial}} D_{p, q}(\mathcal{W}, E) \xrightarrow{\bar{\partial}} D_{p, q+1}(\mathcal{W}, E) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots$$

Si $f \in C_{p, q+1}^\infty(\mathcal{W}, E)$ et $u \in D_{p, q}(\mathcal{W}, E)$, on tire de la formule de Green

$$(5) \quad (f, \bar{\partial} u)_\psi = (\bar{\partial} f, u)_\psi,$$

avec

$$(6) \quad \bar{\partial} f = (-1)^{p+1} \sum_{a, A, \beta, B} [\delta_\beta f_{A, \beta B}^a + L_{A, B}^a(f)] e_a \otimes \omega^A \wedge \bar{\omega}^B,$$

les $L_{A,B}^a(f)$ sont des combinaisons linéaire analogues aux $M_{A,B}^a$ considérées tout à l'heure ; l'opérateur δ_β s'exprime par la relation $\delta_\beta h = e^\psi \bar{V}_\beta(e^{-\psi} h)$, $h \in C^\infty(\mathcal{W})$.

LEMME 2.1. *Les opérateurs $\bar{\partial} : D_{p,q+1}(\mathcal{W}, E) \rightarrow \mathcal{L}_{p,q+2}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$ et $\mathfrak{D} : D_{p,q+1}(\mathcal{W}, E) \rightarrow \mathcal{L}_{p,q}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$ sont préfermés.*

Preuve. Soit $\{f_\sigma\} \subset D_{p,q}(\mathcal{W}, E)$ une suite telle que $\{f_\sigma\} \rightarrow 0$ dans $\mathcal{L}_{p,q}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$ et $\{\bar{\partial} f_\sigma\} \rightarrow \varphi$ dans $\mathcal{L}_{p,q+1}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$. On a alors, pour tout $v \in D_{p,q+1}(\mathcal{W}, E)$, $(\bar{\partial} f_\sigma - \varphi, v)_\psi \rightarrow 0$ et $(f_\sigma, \mathfrak{D} v)_\psi \rightarrow 0$; du reste on peut écrire $(\varphi, v)_\psi = (f_\sigma, \mathfrak{D} v)_\psi - (\bar{\partial} f_\sigma - \varphi, v)_\psi$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en passant à la limite pour $\sigma \rightarrow \infty$, on a $(\varphi, v)_\psi = 0$; vu l'arbitraire du choix de v on a $\varphi = 0$. La démonstration du fait que $\mathfrak{D}$ est préfermé est tout à fait analogue à celle-ci.

Les opérateurs $\bar{\partial} : D_{p,q+1}(\mathcal{W}, E) \rightarrow \mathcal{L}_{p,q+2}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$ et $\mathfrak{D} : D_{p,q+1}(\mathcal{W}, E) \rightarrow \mathcal{L}_{p,q}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$ sont donc prolongeables à deux opérateurs fermés

$$S : B_{\bar{\partial}}^{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi) \rightarrow \mathcal{L}_{p,q+2}^2(\mathcal{W}, E, \psi) \quad \text{et}$$

$$T^* : B_{\mathfrak{D}}^{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi) \rightarrow \mathcal{L}_{p,q}^2(\mathcal{W}, E, \psi), \quad \text{où}$$

$B_{\bar{\partial}}^{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$, domaine de l'opérateur S , est le complété de l'espace $D_{p,q+1}(\mathcal{W}, E)$ par rapport à la norme du graphe $(\|\cdot\|^2 + \|\bar{\partial} \cdot\|^2)^{1/2}$, il est identifiable à l'espace des $f \in \mathcal{L}_{p,q+1}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$ telles que $\bar{\partial} f$, fait au sens des distributions, soit dans $\mathcal{L}_{p,q+2}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$ et $B_{\mathfrak{D}}^{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$, domaine de l'opérateur T^* , est le complété de l'espace $D_{p,q+1}(\mathcal{W}, E)$ par rapport à la norme $(\|\cdot\|^2 + \|\mathfrak{D} \cdot\|^2)^{1/2}$, il est identifiable à l'espace des $f \in \mathcal{L}_{p,q+1}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$ telles que $\mathfrak{D} f$, fait au sens des distributions, appartienne à $\mathcal{L}_{p,q}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$. On introduit alors l'espace $W_\psi^{p,q+1}(\mathcal{W}, E) \stackrel{\text{def}}{=} B_{\bar{\partial}}^{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi) \cap B_{\mathfrak{D}}^{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$. $W_\psi^{p,q+1}(\mathcal{W}, E)$ est évidemment le complété de $D_{p,q+1}(\mathcal{W}, E)$ par rapport à la norme $(\|\cdot\|^2 + \|\bar{\partial} \cdot\|^2 + \|\mathfrak{D} \cdot\|^2)^{1/2}$, il est identifiable aux $f \in \mathcal{L}_{p,q+1}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$ telles que $\bar{\partial} f$ et $\mathfrak{D} f$, faits au sens des distributions, soient dans $\mathcal{L}_{p,q+2}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$ et $\mathcal{L}_{p,q}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$ respectivement.

En procédant de la même manière à partir de l'opérateur $\bar{\partial} : D^{p,q-1}(\mathcal{W}, E) \rightarrow \mathcal{L}_{p,q}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$, on obtient un opérateur

$$L : B_{\bar{\partial}}^{p,q-1}(\mathcal{W}, E, \psi) \rightarrow \mathcal{L}_{p,q}^2(\mathcal{W}, E, \psi).$$

On a alors une suite d'opérateurs *densement définis*

$$\dots \rightarrow \mathcal{L}_{p,q-1}^2(\mathcal{W}, E, \psi) \xrightarrow{L} \mathcal{L}_{p,q}^2(\mathcal{W}, E, \psi) \xrightarrow{T} \mathcal{L}_{p,q+1}^2(\mathcal{W}, E, \psi) \xrightarrow{S} \mathcal{L}_{p,q+2}^2(\mathcal{W}, E, \psi) \rightarrow \dots$$

Leurs domaines et ceux de leurs adjoints sont caractérisés par les propriétés que l'on vient d'énoncer. Dans le cas fibration on peut faire les mêmes considération et obtenir, pour tout $t \in B$ la suite

$$\begin{aligned} \rightarrow \mathcal{L}_{p,q-1}^2(X_t, E_t, \psi_t) \xrightarrow{L_t} \mathcal{L}_{p,q}^2(X_t, E_t, \psi_t) \xrightarrow{T_t} \mathcal{L}_{p,q+1}^2(X_t, E_t, \psi_t) \xrightarrow{S_t} \\ \rightarrow \mathcal{L}_{p,q+2}^2(X_t, E_t, \psi_t) \rightarrow \dots, \end{aligned}$$

où on a posé $X_t = \pi^{-1}(t)$, $E_t = E|X_t$, $\psi_t = \psi|X_t$.

β) LEMME 2.2. (Friedrichs). Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $u \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ à support compact, $v \in C^0(\mathbb{R}^N)$; le support de χ soit dans la boule unité de $\mathbb{R}^N$. On pose $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N} \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ et on forme le produit de convolution $u * \chi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$. On a alors

(i) si $\varepsilon \rightarrow 0$, $v(u * \chi_\varepsilon) \rightarrow vu$ dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$ et la distance entre $\text{supp } u$ et $\text{supp } (u * \chi_\varepsilon)$ ne dépasse pas ε .

(ii) Si v est C^1 dans un voisinage de $\text{supp } u$, alors $vD_k(u * \chi_\varepsilon) - (vD_k u) * \chi_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^N)$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Ici $vD_k u$ ($D_k = \partial/\partial x_k$) est défini au sens des distributions.

Pour la démonstration voir, p. ex. ([9], pp. 81 et 110).

Etant donnée alors une fonction réelle $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n+m})$ dont le support soit dans la boule unité de $\mathbb{R}^{2n+m}$ et une partition de l'unité $\{p_i\}$ adapté au recouvrement $\{U_i\}$ on peut poser, pour toute $f \in \mathcal{L}_{p,q}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$ à support compact, $f * \chi_\varepsilon = \sum_i (p_i f|_{U_i}) * \chi_\varepsilon$. Cela a un sens si $|\varepsilon|$ est assez petit.

LEMME 2.3. Soit $f \in \mathcal{L}_{p,q+1}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$ à support compact, et $\delta > 0$ tel qu'il existe $f * \chi_\varepsilon$ quand $|\varepsilon| < \delta$.

(i) Les supports des formes $f * \chi_\varepsilon \in \mathcal{L}_{p,q+1}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$ sont tous contenus dans un même compact de $\mathcal{W}$ et l'on a $f * \chi_\varepsilon \rightarrow f$ dans $\mathcal{L}_{p,q+1}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$.

(ii) La forme f appartient à $B_{\frac{\delta}{2}}^{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$ si et seulement si la famille $\bar{\partial}(f * \chi_\varepsilon)$ converge dans $\mathcal{L}_{p,q+2}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$. Cela étant vérifié on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\partial}(f * \chi_\varepsilon) = S f$.

(iii) La forme f appartient à $B_{\frac{\delta}{2}}^{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$ si et seulement si la famille $d(f * \chi_\varepsilon)$ converge dans $\mathcal{L}_{p,q}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$. Cela étant vérifié on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d(f * \chi_\varepsilon) = T^* f$.

Preuve. La partie (i) de l'énoncé est une conséquence immédiate du lemme 2.2. Soit $f \in B_{\frac{\delta}{2}}^{p,q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$ à support compact.

Si l'on rapporte f à la base $e_a \otimes dz^A \wedge \bar{dz}^B$, on voit aisément de (2) que $Sf * \chi_\varepsilon = \bar{\partial}(f * \chi_\varepsilon)$, en appliquant (i) à la forme Sf on déduit que $\bar{\partial}(f * \chi_\varepsilon) \rightarrow Sf$ dans $\mathcal{L}_{p,q+2}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$. Si au contraire $\bar{\partial}(f * \chi_\varepsilon)$ converge dans $\mathcal{L}_{p,q+2}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$ à une forme g , on a, pour toute $u \in D_{p,q+2}(\mathcal{W}, E)$, $(f, du)_\psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\bar{\partial}(f * \chi_\varepsilon), u)_\psi = (g, u)_\psi$. f est donc dans $B_{\frac{p}{2}, q+1}^{p, q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$ et $g = Sf$. L'énoncé (ii) est prouvé. On peut maintenant remarquer que l'opérateur $\mathfrak{D}$, restreint à un ouvert U_i , peut être identifié, à l'aide des cartes, à un opérateur différentiel linéaire du premier ordre dont les coefficients sont de classe C^∞ dans un voisinage de $A_i \times B_i$. On voit donc, grâce au lemme 2.2 partie (ii), que, si $f \in B_{\frac{p}{2}, q+1}^{p, q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$, alors $\mathfrak{D}(f * \chi_\varepsilon) \rightarrow T^*f$ dans $\mathcal{L}_{p,q}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$. Si au contraire $\mathfrak{D}(f * \chi_\varepsilon)$ converge vers une forme h dans $\mathcal{L}_{p,q}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$ on a, pour tout

$$v \in D_{p,q}(\mathcal{W}, E, \alpha), (f, \bar{\partial}v)_\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f * \chi_\varepsilon, \bar{\partial}v)_\psi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\mathfrak{D}(f * \chi_\varepsilon), v)_\varphi = (h, v)_\varphi.$$

Il s'en suit que $f \in B_\mathfrak{D}(\mathcal{W}, E, \psi)$ et $h = Sf$. Le lemme est donc complètement prouvé

Remarque 2.1. Le lemme 2.3 est aussi valable dans le cas d'une seule variété analytique complexe, voir à ce propos [9], pp. 81, 110.

LEMME 2.4. Soit $f \in \mathcal{L}_{p,q+1}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$ $\{\eta_\nu\}$ une suite de fonctions réelles, $\eta_\nu \in C_0^\infty(\mathcal{W})$, telles que $\bigcup \text{supp } \eta_\nu = \mathcal{W}$, $\eta_\nu \leq 1$, $\eta_\nu(x) = 1$ si $x \in \text{supp } \eta_{\nu-1}$, $|\bar{\partial}\eta_\nu| \leq 1$. On a alors :

- (i) Si $f \in B_{\frac{p}{2}, q+1}^{p, q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$, $S(\eta_\nu f) \rightarrow Sf$ dans $\mathcal{L}_{p,q+2}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$;
- (ii) Si $f \in B_\mathfrak{D}^{p, q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$, $T^*(\eta_\nu f) \rightarrow T^*f$ dans $\mathcal{L}_{p,q}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$.

Preuve. Soit $f \in B_{\frac{p}{2}, q+1}^{p, q+1}(\mathcal{W}, E, \psi)$, on a alors (presque partout)

$$S(\eta_\nu f) = \eta_\nu Sf + \bar{\partial}\eta_\nu \wedge f \quad \text{et donc}$$

$$\|S(\eta_\nu f) - Sf\|_\psi^2 \leq 2 \|\eta_\nu Sf - Sf\|_\psi^2 + 2 \int_{C_\nu - C_{\nu-1}} |f|^2 e^{-\psi} dV$$

où on a posé $C_\nu = \text{supp } \eta_\nu$. Or puisque $Sf \in \mathcal{L}_{p,q+2}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$, on a $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\eta_\nu Sf - Sf\|_\psi^2 = 0$ et puisque $f \in \mathcal{L}_{p,q+1}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$, on a $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{C_\nu - C_{\nu-1}} |f|^2 e^{-\psi} dV = 0$.

L'énoncé (i) est donc prouvé. Soit maintenant $u \in D_{p,q}(\mathcal{M}, E)$ arbitraire, on a

$$(T^* \eta_\nu f - T^* f, u)_\psi = (\eta_\nu T^* f - T^* f, u)_\psi - (f, \bar{\partial} \eta_\nu \wedge u)_\psi.$$

Si $f \in B_{\delta}^{p,q+1}(\mathcal{M}, E, \psi)$, on a, $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (\eta_\nu T^* f - T^* f, u)_\psi = 0$; d'ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le fait que $|\bar{\partial} \eta_\nu| < 1$ nous donnent $|(f, \bar{\partial} \eta_\nu \wedge u)_\psi|^2 \leq \|u\|_\psi^2 \int_{\sigma_\nu = \sigma_{\nu-1}} |f|^2 e^{-\psi} dV$, on a pourtant $\lim_{\nu \rightarrow \infty} (f, \bar{\partial} \eta_\nu \wedge u)_\psi = 0$, cela entraîne $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|T^* f - T^* f\|_\psi = 0$. Le lemme est donc prouvé.

3. W-ellipticité.

DÉFINITION 3.1. Le fibré E est dit $w^{p,q}$ -elliptique par rapport à la fonction ψ s'il existe une constante k telle que l'on ait

$$(7) \quad \|f\|_\psi^2 \leq k (\|\bar{\partial} f\|_\psi^2 + \|df\|_\psi^2), \quad \forall f \in D_{p,q}(\mathcal{M}, E).$$

Tout nombre k tel que (7) soit satisfait s'appelle constante de w -ellipticité de E .

DÉFINITION 3.2. La fibré E est dit uniformément $w^{p,q}$ -elliptique par rapport à la fonction ψ , s'il est w -elliptique et si ses restrictions aux feuilles le sont aussi avec une constante qui ne dépend pas de la feuille.

PROPOSITION 3.1. Soit E $w^{p,q+1}$ -elliptique par rapport à une fonction ψ , alors

(i) l'équation

$$(1)' \quad Tu = f$$

admet une solution $u \in \mathcal{L}_{p,q}^2(\mathcal{M}, E, \psi)$, pour toute $f \in \mathcal{L}_{p,q+1}^2(\mathcal{M}, E, \psi)$, telle que $Sf = 0$.

(ii) Cette solution est unique si on lui impose la condition $L^* u = 0$ ⁽³⁾.

Pour démontrer cette proposition nous avons besoin du

LEMME 3.1. Si E est $w^{p,q+1}$ -elliptique par rapport à ψ on a, pour toute

(3) Cette condition est évidemment inutile si $q = 0$.

constante k de $w^{p,q+1}$ -ellipticité

$$(8) \quad \|f\|_{\psi}^2 \leq k (\|Sf\|_{\psi}^2 + \|T^*f\|_{\psi}^2), \quad \forall f \in W_{\psi}^{p,q+1}(W, E).$$

Preuve. Nous supposons d'abord que le support de f soit compact. La formule (7), appliquée à $f * \chi_{\varepsilon}$ (voir n. 2, point β) nous donne $\|f * \chi_{\varepsilon}\|_{\psi}^2 \leq k (\|\bar{\partial}(f * \chi_{\varepsilon})\|_{\psi}^2 + \|\mathfrak{D}(f * \chi_{\varepsilon})\|_{\psi}^2)$.

En passant alors à la limite pour $\varepsilon \rightarrow 0$, grâce au lemme 2.3. on obtient la formule (8). On peut maintenant laisser tomber l'hypothèse faite sur le support de f et introduire la suite de fonctions $\{\eta_r\}$ du lemme 2.4. On a certainement $\|\eta_r f\|_{\psi}^2 \leq k (\|S\eta_r f\|_{\psi}^2 + \|T^* \eta_r f\|_{\psi}^2)$ pour tout r ; en passant à la limite pour $r \rightarrow \infty$, grâce au lemme 2.4. on obtient la formule (8). Le lemme 3.1. est donc prouvé.

Démonstration de la proposition 3.1. Nous rappelons un théorème classique d'analyse ([9], pp. 78, 79).

Soient H_1 et H_2 deux espaces hilbertiens, D_A un sous-espace dense de H_1 , $A: D_A \rightarrow H_2$ un opérateur linéaire fermé, F un sous-espace fermé de H_2 . Alors F est l'image de A si et seulement s'il existe une constante k telle que l'on ait

$$(9) \quad \|f\|_{H_2}^2 \leq k \|A^*f\|_{H_1}^2, \quad \forall f \in F \cap D_{A^*},$$

D_{A^*} étant le domaine (dans H_2) de l'opérateur A^* adjoint de A . En plus, cela étant vérifié, F est l'image par T de la fermeture de $\mathfrak{D}_m A^*$.

On peut alors appliquer ce théorème en posant

$$H_1 = \mathcal{L}_{p,q}^2(\mathcal{M}, E, \psi), \quad H_2 = \mathcal{L}_{p,q+1}^2(\mathcal{M}, E, \psi), \quad F = \text{Ker } S,$$

$$D_A = B_{\frac{p}{2}}^{p,q}(\mathcal{M}, E, \psi), \quad A = T.$$

On a évidemment $D_{A^*} = B_{\frac{p}{2}}^{p,q+1}(\mathcal{M}, E, \psi)$ et $F \cap D_{A^*} = B_{\frac{p}{2}}^{p,q+1}(\mathcal{M}, E, \psi) \cap \text{Ker } S \subset W_{\psi}^{p,q+1}(\mathcal{M}, E)$. La condition (9), traduite dans notre cas, n'est autre que la relation (8) qu'on vient de prouver, il s'en suit que l'application $T: B_{\frac{p}{2}}^{p,q}(\mathcal{M}, E, \psi) \rightarrow \text{Ker } S$ est surjective. L'énoncé (i) est donc prouvé.

On remarque maintenant que l'on peut choisir la solution u dans la fermeture (dans $\mathcal{L}_{p,q}^2(\mathcal{M}, E, \psi)$) de $\mathfrak{D}_m T^*$, on a donc une suite de Cauchy $\{v_r\}$ dans $B_{\frac{p}{2}}^{p,q+1}(\mathcal{M}, E, \psi)$ telle que $T^* v_r \rightarrow u$ dans $\mathcal{L}_{p,q}^2(\mathcal{M}, E, \psi)$.

Alors du fait que $L^* \circ T^* = 0$, on tire que $L^* u = \lim_{r \rightarrow \infty} L^* \circ T^* v_r = 0$.

Il existe donc une solution u de (1)' telle que $L^* u = 0$. Toute différence u' de deux telles solutions appartient à $W_{\psi}^{p,q}(\mathcal{M}, E)$ puisque $L^* u' = 0$,

$Tu' = 0$; d'ailleurs l'inégalité (8), écrite pour le bidegré (p, q) est $\|u\|^2 \leq k(\|Tu\|_\psi^2 + \|L^*u\|_\psi^2)$, on a donc $u' = 0$.

La proposition 3.1. est donc prouvée.

PROPOSITION 3.2. *Si, pour toute fonction réelle $\gamma \in C^0(W)$ il existe une fonction réelle $\psi \in C^\infty(W)$ telle que $\gamma(x) \leq \psi(x)$ ($\forall x \in W$) et que E soit $\mathcal{W}^{p, q+1}$ -elliptique par rapport à ψ , alors l'équation*

$$(1) \quad \bar{\partial}u = f.$$

a une solution (faible) $u \in \mathcal{L}_{p, q}^2(\mathcal{W}, E, \text{loc})$ pour tout $f \in \mathcal{L}_{p, q+1}^2(\mathcal{W}, E, \text{loc})$ avec $\bar{\partial}f = 0$.

Démonstration. Il existe certainement une fonction continue γ telle que $f \in \mathcal{L}_{p, q+1}^2(\mathcal{W}, E, \gamma)$, on a $f \in \mathcal{L}_{p, q+1}^2(\mathcal{W}, E, \psi)$. On applique alors la proposition précédente (partie (i)) et l'on a une forme $u \in \mathcal{L}_{p, q}^2(\mathcal{W}, E, \psi) \subset \mathcal{L}_{p, q}^2(W, E, \text{loc})$ satisfaisant (1). La proposition est ainsi prouvée.

4. Nous nous proposons ici de prouver le théorème I.

DÉFINITION 4.1. *Le feuilletage $\mathcal{W}$ est dit être une fibration s'il existe une variété différentiable de Hausdorff $B^{(4)}$ et une application différentiable $\pi: \mathcal{W} \rightarrow B$ dont les fibres soient les feuilles de $\mathcal{W}$.*

Remarque. Il n'est pas restrictif de supposer que π soit surjective, dans ce cas doit être $\dim B = m$.

Nous admettrons dans la suite que π soit surjective.

Remarque. On choisit les applications coordonnées Φ_i de façon que leurs images $A_i \times B_i$ soient le produit d'un disque de $\mathbb{C}^n$ par un disque de $\mathbb{R}^m$.

S'il s'agit d'une fibration, on peut même identifier (à un changement de coordonnées près) B_i à un sous-ensemble de B , de façon telle que l'on ait $pr_{B_i} \circ \Phi_i = \pi$.

On pose alors $X_t = \pi^{-1} t$ ($t \in B$), $E_t = E|X_t$.

(⁴) En effet toute variété est supposée ici être de Hausdorff; on a voulu quand même le spécifier à cet endroit car, en otant cette hypothèse à la définition 4.1., on aurait défini la structure de feuilletage simple.

L'indice t en haut ou en bas d'une forme (ou d'une fonction) sert à indiquer : « restriction à X_t » ; d'ailleurs les suffixes t ne seront employés qu'aux endroits où leur manque pourrait gêner la compréhension.

Par exemple, si $w \in D_{p,q}(W, E)$, $\|w\|_{\psi_t}$ veut dire $\int_{X_t} |w^t| e^{-\psi_t} dV_t$.

On revient au cas feuilletage.

La restriction w_i d'une forme (ou fonction) w de $\mathcal{W}$ à un voisinage coordonné U_i peut être naturellement identifiée à une famille de formes (ou fonctions) $\{w_t\}_{t \in B_i}$ sur A_i en posant $w_t = (pr_{A_i} \circ \Phi_i)^* w_i$.

LEMME 4.1. *Soit $U_i \in \mathcal{U}$, il existe une constante c_i qui ne dépend que de l'indice i , telle que l'on ait, pour toute $\psi \in C^0(\mathcal{W}) \cap C^\infty(\widehat{\mathcal{W}})$*

$$\int (\lambda_\psi - c_i) |f|^2 e^{-\psi} dV + \frac{1}{2} \sum_{a, A, \beta, B} \int |\bar{V}_\beta f_{A, B}^a|^2 e^{-\psi} dV \leq \quad (11)$$

$$\leq 2 (\|\bar{\partial} f\|_\varphi^2 + \|\mathfrak{d}f\|_\varphi^2), \quad \text{pour toute } f \in D_{p,q}(U_i, E), \text{ et}$$

$$\int (\lambda_\psi^t - c_i) |u|^2 e^{-\psi_t} dV_t + \frac{1}{2} \sum_{a, A, \beta, B} \int |\bar{V}_\beta^t u_{AB}^a|^2 e^{-\psi_t} dV_t \leq \quad (12)$$

$$\leq 2 (\|\bar{\partial} u\|_{\varphi_t}^2 + \|\mathfrak{d}_t u\|_{\varphi_t}^2), \quad \text{pour tout } u \in D_{p,q}(A_i, E_t), \text{ et tout } t \in B_i.$$

Démonstration. Soit $Af = (-1)^p \bar{V}_\beta f_{AB}^a \omega^A \wedge \bar{\omega}^{\beta B} \otimes e_a$ $Cf = (-1)^{p+1} \cdot \partial_\beta f_{A, \beta \sigma}^a e_a \otimes \omega^A \wedge \bar{\omega}^\sigma$, des formules (4) et (6) on tire

$$|A - \bar{\partial}f| < k_i |f| \quad \text{et} \quad |C - \mathfrak{d}f| < k_i |f|$$

pour toute $f \in D_{p,q}(U_i, E)$, les constantes k_i ne dépendent que de i . De ces deux relations on obtient

$$\|Af\|_\psi^2 + \|Cf\|_\psi^2 \leq 2 (\|\bar{\partial}f\|_\psi^2 + \|\mathfrak{d}f\|_\psi^2 + 2k_i \|f\|_\psi^2) \quad (13)$$

et

$$\|Af\|_{\psi_t}^2 + \|Cf\|_{\psi_t}^2 \leq 2 (\|\bar{\partial}f\|_{\psi_t}^2 + \|\mathfrak{d}f\|_{\psi_t}^2 + 2k_i \|f\|_{\psi_t}^2). \quad (14)$$

Nous posons maintenant $c_\alpha = \frac{\partial}{\partial z_\beta} b_\alpha^\beta$, le lemme de Green nous donne alors

$$(15) \quad \int v \nabla_\alpha u e^{-\psi} dV = - \int u \delta_\alpha v e^{-\psi} dV + \int uv c_\alpha e^{-\psi} dV,$$

pour tout $u, v \in C_0^\infty(U_i)$,

$$(16) \quad \int_{A_i} v_t \nabla_\alpha^t u_t e^{-\psi_t} dV_t = - \int_{A_i} u_t \delta_\alpha^t v_t e^{-\psi_t} dV_t - \int_{A_i} u_t v_t c_{\alpha t} e^{-\psi_t} dV_t,$$

pour tout $u^t, v^t \in C_0^\infty(A_i)$.

On montre avec simples calculs que l'on a

$$(17) \quad [V_\beta, \bar{V}_\gamma] = c_{\gamma\beta}^\lambda V_\lambda - \bar{c}_{\beta\gamma}^\lambda \bar{V}_\lambda, \quad \text{avec } c_{\beta\gamma}^\lambda \in C^\infty(\bar{U}_i) \quad (5)$$

$$(18) \quad [\delta_\beta, \bar{V}_\gamma] = [V_\beta, \bar{V}_\gamma] + \bar{V}_\gamma \nabla_\beta \psi.$$

Nous posons ensuite $\partial \bar{u} = \mathcal{L}_{\beta\gamma} u \bar{\omega}^\gamma \wedge \omega^\beta$, on a alors

$$(19) \quad \mathcal{L}_{\beta\gamma} = \nabla_\beta \bar{V}_\gamma + \bar{c}_{\beta\gamma}^\lambda \bar{V}_\lambda = \bar{V}_\gamma \nabla_\beta + c_{\gamma\beta}^\lambda V_\lambda.$$

On obtient alors par élimination de (17), (18), (19)

$$(20) \quad [\delta_\beta, \bar{V}_\gamma] = c_{\gamma\beta}^\lambda \delta_\lambda - \bar{c}_{\beta\gamma}^\lambda \bar{V}_\lambda + \mathcal{L}_{\beta\gamma} \psi.$$

Pour tout couple u, v de fonctions en $C_0^\infty(U_i)$ on tire de (15)

$$\begin{aligned} \int (\delta_\beta u \bar{\delta}_\gamma \bar{v} - \bar{V}_\gamma u \nabla_\beta \bar{v}) e^{-\psi} dV &= \int \bar{v} [\delta_\beta, \bar{V}_\gamma] u e^{-\psi} dV + \\ &+ \int \bar{v} \delta_\beta u \bar{c}_\gamma e^{-\psi} dV - \int \bar{v} \bar{V}_\gamma u c_\beta e^{-\psi} dV, \end{aligned}$$

la même relation peut être obtenue de la formule (16) avec des intégrales sur A_i , en employant alors (20) et ensuite (15) et (16) on a

$$(21) \quad \int (\delta_\beta u \bar{\delta}_\gamma \bar{v} - \bar{V}_\gamma u \nabla_\beta \bar{v}) e^{-\psi} dV = \int u \bar{v} \mathcal{L}_{\gamma\beta} \psi e^{-\psi} dV + J_1 + J_2 + J_3$$

(*) Les fonctions $c_{\beta\gamma}^\lambda$ peuvent être simplement exprimées à l'aide des matrices « a » et « b » ($= a^{-1}$), on a $c_{\gamma\beta}^\lambda = b_\beta^e \bar{v}_\gamma^e a_e^\lambda$.

et,

$$(22) \quad \int_{A_i} (\delta_\beta^t u_t \overline{\delta_\gamma w_t} - \overline{V_\gamma^t} u_t V_\beta^t \overline{w_t}) e^{-\psi_t} dV_t = \int_{A_i} u_t \overline{w_t} \mathcal{L}_{\gamma\beta} \psi_t e^{-\psi_t} dV_t + \\ + I_1^t + I_2^t + I_3^t,$$

pour tout $u, w \in C_0^\infty(U_i)$, avec

$$I_1^t = \int_{A_i} \overline{w_t} [\overline{c_{\gamma\beta}^\lambda} \overline{V_\lambda^t} u_t + c_\beta^t \overline{V_\gamma^t} u_t] e^{-\psi_t} dV_t, \\ I_2^t = \int_{A_i} u_t [c_{\gamma\beta}^\lambda V_\lambda^t \overline{w_t} + \overline{c_\gamma^t} V_\beta^t \overline{w_t}] e^{-\psi_t} dV_t, \\ I_3^t = \int_{A_i} u_t \overline{w_t} [c_{\gamma\beta}^\lambda c_\lambda^t + c_\beta^t \overline{c_\gamma^t} - V_\lambda^t c_{\gamma\beta}^\lambda - V_\beta^t \overline{c_\gamma^t}] e^{-\psi_t} dV_t,$$

et $J_h = \int_{B_i} I_h^t dt$; $h = 1, 2, 3$. On obtient alors de l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$|I_1^t| \leq c_1 \sigma \int_{A_i} |w_t|^2 e^{-\psi_t} dV_t + \frac{c_1}{\sigma} \int_{A_i} |\overline{V_\lambda^t} u_t|^2 e^{-\psi_t} dV_t, \\ |I_2^t| \leq c_2 \sigma \int_{A_i} |u_t|^2 e^{-\psi_t} dV_t + \frac{c_2}{\sigma} \int_{A_i} |\overline{V_\lambda^t} w_t|^2 e^{-\psi_t} dV_t$$

où c_1 et c_2 sont des constantes et σ un réel positif arbitraire, on a du reste

$$|I_3^t| \leq c_3 \int_{A_i} u_t \overline{w_t} e^{-\psi_t} dV_t \quad (c_3 \text{ constante}).$$

On tire alors de (21) et (22)

$$\int_{A_i} (\delta_\beta^t u_t \overline{\delta_\gamma w_t} - \overline{V_\gamma^t} u_t V_\beta^t \overline{w_t}) e^{-\psi_t} dV_t \geq \int_{A_i} u_t \overline{w_t} (\mathcal{L}_{\gamma\beta} \psi_t - c_3) e^{-\psi_t} dV_t - \\ - c_1 \sigma \int_{A_i} |w_t|^2 e^{-\psi_t} dV_t - c_2 \sigma \int_{A_i} |u_t|^2 e^{-\psi_t} dV_t - \frac{c_1}{\sigma} \int_{A_i} |\overline{V_\lambda^t} u_t|^2 e^{-\psi_t} dV_t - \\ - \frac{c_2}{\sigma} \int_{A_i} |\overline{V_\lambda^t} w_t|^2 e^{-\psi_t} dV_t, \text{ pour tout } u, w \in C_0^\infty(U_i),$$

et la même relation avec les mêmes constantes où les intégrales sont faites sur U_i .

En rappelant que l'on a ([9], p. 112, formule 5.2.5)

$$(24) \quad \|A_t f_t\|_{\psi_t}^2 + \|C_t f_t\|_{\psi_t}^2 = \int_{A_i} \sum_{a,A,B,\beta} |\bar{V}_\beta^t f_{tAB}^a|^2 e^{-\psi_t} dV_t + \\ + \int_{A_i} \sum_{a,A,O,\beta,\gamma} (\delta_\beta^t f_{tA,\beta O}^a \overline{\delta_\gamma^t f_{tA,\beta O}^a} - \bar{V}_\gamma^t f_{tA,\beta O}^a \overline{V_\beta^t f_{tA,\gamma O}^a}) e^{-\psi_t} dV_t$$

et la même formule avec intégration sur U_i , on obtient de (23)

$$\|Af\|_\psi^2 + \|Cf\|_\psi^2 \geq \left(1 - \frac{c_4}{\sigma}\right) \int \sum_{a,A,B,\beta} |\bar{V}_\beta f_{A,B}^a|^2 e^{-\psi} dV + \\ + \int (\lambda - c_5) |f|^2 e^{-\psi} dV \quad \text{et} \\ \|A_t f_t\|_{\psi_t}^2 + \|C_t f_t\|_{\psi_t}^2 \geq \left(1 - \frac{c_4}{\sigma}\right) \int_{A_i} \sum_{a,A,B,\beta} |\bar{V}_\beta^t f_{tA,B}^a|^2 e^{-\psi_t} dV_t + \\ + \int_{A_i} (\lambda^t - c_5) |f_t|^2 e^{-\psi_t} dV_t;$$

l'on pose alors $\sigma = 2c_4$, $f_t = u$, $c_i = c_5 + 4k_i^2$, on substitue ces deux dernières relations dans (13) et (14) respectivement et on obtient (11) et (12).

Le lemme est donc démontré.

LEMME 4.2. *Il existe une fonction continue g sur $\mathcal{W}$, indépendante de ψ , telle que, pour toute $f \in D^{p,q}(\mathcal{W}, E)$, et toute $\psi \in C^2(\widehat{\mathcal{W}}) \cap C^0(\mathcal{W})$ réelle on ait*

$$(25) \quad \int (\lambda_\psi - g) |f|^2 e^{-\psi} dV + \frac{1}{2} \int \sum_{a,A,B,\beta} |\bar{V}_\beta f_{A,B}^a|^2 e^{-\psi} dV \leq \\ \leq 4 (\|\bar{\partial} f\|_\psi^2 + \|\mathfrak{D} f\|_\psi^2)$$

et si $\mathcal{W}$ est une fibration, alors pour tout $u \in D^{p,q}(X_t, E_t)$ et tout $t \in B$, on a

$$(26) \quad \int_{X_t} (\lambda_\psi - g) |u|^2 e^{-\psi} dV_t + \frac{1}{2} \int_{X_t} \sum_{a,A,B\beta} |\bar{V}_\beta u_{A,B}^a|^2 e^{-\psi_t} dV_t \leq \\ \leq 4 (\|\bar{\partial} u\|_{\psi_t}^2 + \|du\|_{\psi_t}^2).$$

Démonstration. Soit $p \in C_0^\infty(U_i)$, on a

$$|\bar{\partial} p f|^2 = |p \bar{\partial} f + \bar{\partial} p \wedge f|^2 \leq 2 |p \bar{\partial} f|^2 + 2 |\bar{\partial} p|^2 |f|^2 \quad \text{et} \\ |\mathfrak{D} p f|^2 = |p \mathfrak{D} f + (-1)^{p+1} f_{A,\beta 0}^a V_\beta p \omega^A \wedge \bar{\omega}^B \otimes e_a|^2 \leq \\ \leq 2 |p \mathfrak{D} f|^2 + 2 \sum_{\beta \gamma} |V_\beta p| |\bar{V}_\gamma p| |f|^2.$$

Soit alors p_i^2 une partition de l'unité sur $\mathcal{W}$ avec $p_i \in C_0^\infty(U_i)$. Des relations précédentes on tire

$$\sum_i \|\bar{\partial} p_i f\|_\psi^2 \leq 2 \|\bar{\partial} f\|_\psi^2 + \|c' f\|_\psi^2, \\ \sum_i \|\mathfrak{D} p_i f\|_{\psi'}^2 \leq 2 \|\mathfrak{D} f\|_{\psi'}^2 + \|c'' f\|_{\psi'}^2, \\ \sum_i \|\bar{\partial} p_i u\|_{\psi_t}^2 \leq 2 \|\bar{\partial} u\|_{\psi_t}^2 + \|c'_t u\|_{\psi_t}^2, \\ \sum_i \|\mathfrak{D} p_i u\|_{\psi_t}^2 \leq 2 \|\mathfrak{D} u\|_{\psi_t}^2 + \|c'_{t'} u\|_{\psi_t}^2$$

où c' et c'' sont deux fonctions continues positives sur $\mathcal{W}$. Soit c une fonction continue sur $\mathcal{W}$ telle que $\sup_{\sigma_i} c < c_i$; il suffit alors de poser $g = c + c' + c''$ pour obtenir (25) et (26).

Démonstration du théorème I. On peut choisir sur $\mathcal{W}$, grâce au lemme 1.1., une fonction plurisousharmonique φ , qui satisfait (A) et telle que

- (i) $\lambda_\varphi(x) > g(x) + 4$, pour tout $x \in \mathcal{W}$, g étant la fonction qui apparaît dans (25).
- (ii) $f \in \mathcal{L}_{p,q+1}^2(\mathcal{W}, E, \varphi)$.

On a par conséquent

$$(27) \quad \|f\|_{\varphi}^2 \leq \|\bar{\partial}f\|_{\varphi}^2 + \|\mathfrak{D}f\|_{\varphi}^2.$$

Le fibré E est donc uniformément $w^{p,q+1}$ -elliptique (de constante 1) par rapport à φ et à toute fonction réelle plurisubharmonique ψ , supérieure à φ .

De la proposition 3.2 et du lemme 1.1 découle donc le théorème.

III^{ème} PARTIE

5. Soit maintenant M une variété différentiable.

Soit $\{v_t\}_{t \in B}$ une famille de champs différentiables de vecteurs sur M , de classe C^k par rapport au paramètre t et aux coordonnées sur M , $\{\gamma_\lambda\}$ un groupe local ⁽¹⁾ sur B de vitesse u . Le couple $(\{v_t\}, \{\gamma_\lambda\})$ détermine d'une façon canonique un groupe local $\{\Gamma_\lambda\}$ sur $M \times B$ de projection $\{\gamma_\lambda\}$, à savoir celui engendré par le champ de vecteurs $w(x, t) = pr_B^{-1} u(t) + pr_M^{-1} v_t(x)$ ⁽²⁾.

On va donner une condition sur $\{v_t\}$ pour que Γ_λ , pour un λ fixé, opère sur un voisinage saturé d'une fibre.

PROPOSITION 5.1. *Si les trajectoires de $\{\gamma_\lambda\}$ ne sont pas closes et on peut fixer sur M une métrique riemannienne complète telle que les longueurs des champs de vecteurs v_t ($t \in B$) soient equibornées, alors, pour tout $t \in B$ et λ tel qu'il existe $\gamma_\lambda t$, les applications Γ_λ définissent un difféomorphisme $\Gamma_\lambda: M \times \{t\} \rightarrow M \times \{\gamma_\lambda t\}$.*

Démonstration. On va d'abord prouver l'énoncé suivant.

(A) Soient t_1 et $t_2 \in B$ sur la même trajectoire de $\{\gamma_\lambda\}$. Toute trajectoire de $\{\Gamma_\lambda\}$ qui rencontre $M \times \{t_1\}$ rencontre aussi $M \times \{t_2\}$.

Soit donc $t_2 = \gamma_\lambda t_1$, on peut supposer $\lambda > 0$, soit $x \in M$, $l \equiv \{\Gamma_\mu(x, t_1), 0 < \mu < \lambda_0\}$ la demi-trajectoire maximale de $\{\Gamma_\lambda\}$ issue de (x, t_1) ⁽³⁾. Nous supposons, par absurde, que $\lambda_0 < \lambda$. Il existe alors $\gamma_{\lambda_0}^t$.

⁽¹⁾ Tous les groupes locaux envisagés dans la suite seront à un seul paramètre formés par des difféomorphismes (locaux).

⁽²⁾ La signification physique de $\{\Gamma_\lambda\}$ est très claire. Si M = espace physique, B = axe temporel, $\{\gamma_\lambda\}$ = translations temporelles, alors $\{\Gamma_\lambda\}$ est le mouvement engendré par le champ de vitesses euclidiennes $v(x, t) = v_t(x)$, v_t ne dépend de $t \iff \{\Gamma_\lambda\}$ stationnaire.

⁽³⁾ S'il était $l \equiv \{\Gamma_\mu(x, t), 0 < \mu < \infty\}$, (A) serait trivial.

On considère alors sur M de chemin $c: \mu \leadsto pr_M \Gamma_\mu(x, t_1)$, $0 < \mu < \lambda_0$; son vecteur tangent au point $c\mu$ est $pr_M \dot{\Gamma}_\mu(x, t_1) = pr_M w(c\mu) = v_{\gamma_\mu t_1}(c\mu)$ dont la longueur est bornée.

Il s'en suit que $\mathfrak{I}_m c$ est borné dans M et donc (M est complète) relativement compact. Le chemin l est contenu dans le produit des ensembles $\mathfrak{I}_m c \subset M$, $\bigcup_{0 \leq \mu < \lambda_0} \gamma_\mu c_1 \subset B$, il est donc relativement compact et il n'est pas fermé car sa projection $\bigcup_{0 \leq \mu < \lambda_0} \gamma_\mu t$ sur B , ne contenant pas le point $\gamma_{\lambda_0} t \in B$, n'est pas compacte. Soit $\{\mu_i\} \rightarrow \lambda_0$ une suite numérique positive croissante, il existe, au choix d'une sous-suite près, $z = \lim_{i \rightarrow \infty} \Gamma_{\mu_i}(x, t_1) \in \bar{l}$. On a alors $pr_B z = \lim_{i \rightarrow \infty} pr_B \Gamma_{\mu_i}(x, t_1) = \lim_{i \rightarrow \infty} \gamma_{\mu_i} t_1 = \gamma_{\lambda_0} t_1$.

Soit $l'': \mu \rightarrow M \times B$ la demi-trajectoire de w issue de z . $l'' \cup \bar{l}$ est un chemin continu, et, en dehors du point $z = l'' \cap \bar{l} = l''(0)$, il est C^∞ . D'ailleurs la relation $\lim_{\mu \rightarrow \lambda_0} \dot{l}(\mu) = \lim_{\mu \rightarrow 0} \dot{l}''(\mu) = w(z)$ entraîne que $l'' \cup l$ est une trajectoire de w , $l'' \cup l$ est donc différentiable. On peut maintenant considérer la trajectoire maximale l' de $\{\Gamma_\lambda\}$ issue de z . Ce qui précède entraîne $l'' \cup l \subset l'$, l est donc contenu dans l' . On pose $(x, t_1) = \Gamma_{\lambda_1} z$. On veut prouver que $\lambda_1 = -\lambda_0$. En effet, sur l'intervalle $0 \leq \mu \leq \lambda_0$ on peut définir une fonction continue φ telle que $\Gamma_\mu(x, t) = \Gamma_{\varphi\mu} z$ et on a $\lim_{\mu \rightarrow 0} \varphi\mu = 0$ et $\lambda_1 + \mu = \varphi\mu$ car $\Gamma_\mu \circ \Gamma_{\lambda_1} z = \Gamma_{\varphi\mu} z$, en passant à la limite pour $\mu \rightarrow \lambda_0$, on a $\lambda_1 = -\lambda_0$. Il en suit $z = \Gamma_{\lambda_0}(x, t)$, ce qu'on avait exclu.

L'énoncé (A) est donc prouvé.

On remarque maintenant qu'aucune trajectoire de $\{\Gamma_\lambda\}$ ne rencontre deux fois la même fibre $M \times \{t\}$, en effet, s'il était, $pr_B \Gamma_{\lambda_1} z = pr_B \Gamma_{\lambda_2} z$ pour quelque $z \in M \times B$, on avait $\gamma_{\lambda_1} pr_B z = \gamma_{\lambda_2} pr_B z$ ce qui entraînerait $\lambda_1 = \lambda_2$, à cause des hypothèses qu'on a fait sur $\{\gamma_\lambda\}$. Les difféomorphismes (locaux) Γ_λ engendrent donc une correspondance biunivoque $\Gamma_\lambda: M \times \{t\} \rightarrow M \times \{\gamma_\lambda t\}$ qui est de classe C^∞ par des arguments bien élémentaires de géométrie différentielle. La proposition est ainsi prouvée.

6. α) Nous énonçons brièvement ici quelques résultats contenus dans [3] n. 2 et dans [15]. Soit X variété hermitienne complète, $\dim_{\mathbb{C}} X > 1$, $E \rightarrow X$ un fibré hermitien de métrique h , $\square = \bar{\partial}\partial + \partial\bar{\partial}$ l'opérateur de Laplace-Beltrami. On a

$$(28) \quad \|\bar{\partial}f\|^2 + \|\partial f\|^2 \leq \sigma \|\square f\|^2 + \frac{1}{\sigma} \|f\|^2, \quad \forall f \in W^{p,q}(X, E), \quad \forall \sigma \in \mathbb{R}^+.$$

On suppose E $W^{p,q+1}$ -elliptique de constante c , c'est à dire que l'on ait

$$\|f\|^2 \leq c \{ \|\bar{\partial}f\|^2 + \|\partial f\|^2 \}, \quad \forall f \in D_{p,q+1}(X, E).$$

On a vu (lemme 3.1) que ceci equivaut à

$$(29) \quad \|f\|^2 \leq c \{ \|\bar{\partial}f\|^2 + \|\mathfrak{D}f\|^2 \}, \quad \forall f \in W^{p, q+1}(X, E).$$

De (28) et (29), pour $\sigma = 2c$, on tire

$$(30) \quad \|f\|^2 \leq 4c^2 \|\square f\|^2, \quad \forall f \in W^{p, q+1}(X, E),$$

$$(31) \quad \|\bar{\partial}f\|^2 + \|\mathfrak{D}f\|^2 \leq 4c \|\square f\|^2, \quad \forall f \in W^{p, q+1}(X, E).$$

LEMMA 6.1. Pour toute $f \in \mathcal{L}_{p, q+1}^2(X, E) \cap C_{p, q+1}^\infty(X, E)$ telle que $\bar{\partial}f = 0$, il existe un seul $w \in W^{p, q+1}(X, E) \cap C_{p, q+1}^\infty(X, E)$, tel que l'on ait $\bar{\partial}\mathfrak{D}w = f$, et $\mathfrak{D}\bar{\partial}w = 0$.

LEMMA 6.2. Pour toute $f \in \mathcal{L}_{p, q+1}^2(X, E) \cap C_{p, q+1}^\infty(X, E)$ il existe un seul $w \in W^{p, q+1}(X, E) \cap C_{p, q+1}^\infty(X, E)$ tel que l'on ait $\square w = f$.

β) Il existe une application linéaire $\kappa: C_{p, q+1}^\infty(X, E) \rightarrow C_{p, q+1}^\infty(X, E)$ telle que l'on ait $(\kappa f, f) \leq \|\bar{\partial}f\|^2 + \|\mathfrak{D}f\|^2, \forall f \in D_{p, q+1}(X, E)$ et les coefficients de κ sont des fonctions continues des coefficients de la métrique de X , de ceux de la métrique de E et de leurs dérivées.

Si l'on a la métrique $h' = e^\psi h$, où $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable, la nouvelle forme κ' est donnée par $(\kappa' f)_{A, B}^a = (\kappa f)_{A, B}^a + \sum_{i=1}^n (\mathcal{L}\psi)_{a, \beta_i} f_{A, B(\beta_i)}^a$, où on a posé $B(\beta_i) = \beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_{q+1}$ (voir [15], p. 94, dernière formule).

Soient μ et λ les fonctions « plus petite valeur propre de κ » et « plus petite valeur propre de $\mathcal{L}\psi$ ». On a donc

$$(\kappa' f, f) \geq \int (\mu + \lambda) |f|^2 dV, \quad \forall f \in D_{p, q+1}(X, E).$$

Fixons un nombre $a > 0$ et choisissons ψ telle que $\lambda(x) \geq \frac{1}{a} - \mu(x), \forall x \in X$.

On a alors

$$\|f\|^2 \leq a \{ \|\bar{\partial}f\|^2 + \|\mathfrak{D}f\|^2 \}, \quad \forall f \in D_{p, q+1}(X, E).$$

Par suite E est $W^{p, q+1}$ -elliptique de constante $a, \forall p, \forall q$.

γ) Soit U un ouvert coordonné de $X, z_0 = (z_0^1, \dots, z_0^n) \in U$. On pose $z^\alpha = x^\alpha + \sqrt{-1} x^{\alpha+n}, \mathcal{V}_\varrho = \left\{ z \in U, \sum_{i=1}^{2n} (x_0^i - x^\alpha)^2 \leq \varrho^2 \right\}$ (ϱ assez petit) et, pour

toute forme $\eta \in C_{p,q}^\infty(\bar{U}, E)$,

$$\|\eta\|_{j,e}^2 = \sum_0^j \sum_{|L| \leq l} \sum_{a, A, B} \int_{\mathcal{B}_e} \left| \frac{\partial^{|L|}}{\partial x^L} \eta_{A,B}^a \right|^2 dV.$$

L'inégalité de Friedrichs ([6] et [11] lemme 3) donne alors

$$(32) \quad \|\eta\|_{j+2, \varepsilon/2}^2 \leq c'(k, \varepsilon) \{ \|\square \eta\|_{j, \varepsilon}^2 + \|\eta\|_{0, \varepsilon}^2 \},$$

où la constante $c'(k, \varepsilon) > 0$ ne dépend que de k et ε .

Soit $D^{(h)}$ un opérateur de dérivation de degré h par rapport aux variables x^i ($i = 1, \dots, 2n$); l'inégalité de Sobolev ([5], pp. 232-233 ou bien [11] lemme 2), donne pour tout $y \in \mathcal{B}_{\varepsilon/2}$,

$$(33) \quad |(D^{(h)} \eta_{A,B}^a)(y)|^2 \leq c''(j, h, \varepsilon) \|\eta\|_{j+h, \varepsilon/2}^2, \quad \forall h, \forall j > n.$$

De (32) et (33) résulte alors

$$(34) \quad |(D^{(h)} \eta_{A,B}^a)(y)|^2 \leq c_1(j, h, \varepsilon) \{ \|\square \eta\|_{j+h-2, \varepsilon}^2 + \|\eta\|_{0, \varepsilon}^2 \}, \quad \forall h, \forall j > n \geq 2.$$

7. Soit $\mathcal{W} \xrightarrow{\pi} B$ une déformation différentiable d'une variété de Stein X , avec $\dim_{\mathbb{C}} X > 1$. On suppose $\mathcal{W} \xrightarrow{\pi} B$ *triviale à l'infini*, c'est à dire qu'il existe en isomorphisme de fibrés différentiables $\mathcal{C}: X_0 \times B \rightarrow \mathcal{W}$ et un compact $C_0 \subset X_0$, tels que $\mathcal{C}|[(X_0 - C_0) \times \{t\}]: X_0 - C_0 \rightarrow X_t$ soit biholomorphe sur son image, $\forall t \in B$. On pose $C = \mathcal{C}(C_0, B)$, $C_t = C \cap X_t = \mathcal{C}(C_0 \times \{t\})$.

On peut supposer que $\mathcal{C}|(X_0 \times \{0\}) = id_{X_0}$. Introduisons les translations $\gamma_{st}: X_s \rightarrow X_t$, obtenues en composant l'application $\mathcal{C}^{-1}|X_s$, l'application triviale $(X_0 \times \{s\}) \rightarrow (X_0 \times \{t\})$, et $\mathcal{C}|(X_0 \times \{t\})$. On a $\gamma_{ss} = id_{X_s}$, $\gamma_{st}\gamma_{tu} = \gamma_{su}$, γ_{st} est un difféomorphisme et applique X_s sur X_t , et $\gamma_{st}|(X_s - C_s): (X_s - C_s) \rightarrow (X_t - C_t)$ est biholomorphe.

PROPOSITION 7.1. *Pour tout fibré semi-holomorphe $E \rightarrow \mathcal{W}$, il existe une restriction $\mathcal{W}_1 \xrightarrow{\pi} B_1$ de $\mathcal{W} \xrightarrow{\pi} B$, une métrique kählerienne complète g sur (les fibres de) $\mathcal{W}_1$ et une métrique hermitienne h sur E , jouissant des propriétés suivantes*

- (i) $\gamma_{st} : (X_s - C_s) \rightarrow (X_t - C_t)$ est une isométrie,
- (ii) γ_{st} induit une isométrie de $E_s | (X_s - C_s)$ sur $E_t | (X_t - C_t)$.
- (iii) $E_t \rightarrow X_t$ est $W^{p, q+1}$ -elliptique de constante c (ne dépendant pas de t) pour tout $t \in B_1$, $\forall p, \forall q > 0$.
- (iv) Toute variété X_t est de Stein.

Preuve. Fixons une fonction $\varphi_0 : X_0 \rightarrow \mathbf{R}$, différentiable, strictement plurisousharmonique et telle que $\{x \in X_0, \varphi_0(x) < c\} \subset\subset X_0$, $\forall c \in \mathbf{R}$ et posons $\varphi = \varphi_0 \circ p_{X_0} \circ \mathcal{T}^{-1} : \mathcal{W} \rightarrow \mathbf{R}$. On a évidemment $\{x \in X_t, \varphi(x) < c\} \subset\subset X_t$, $\forall c \in \mathbf{R}$. Soit $\varphi_t = \varphi | X_t$.

La fonction $\lambda : \mathcal{W} \rightarrow \mathbf{R}$, qui à x associe la plus petite valeur propre de $(\mathcal{L}\varphi)_x$ est continue, et l'on a $\inf_{C_0} \lambda > 0$.

Il existe alors un voisinage $V = \mathcal{T}(A \times N)$ de C_0 dans $\mathcal{W}$ tel que $\inf_V \lambda > \frac{1}{2} \inf_{C_0} \lambda$, A étant un voisinage de C_0 dans X_0 et N un voisinage de 0 dans B . Par suite $\lambda | \pi^{-1} N$ est alors positive. En effet, tout $x \in \pi^{-1} N - V \subset \pi^{-1} N - C$ est du type $x = \mathcal{T}(x_0, t)$ et on a $\lambda(x) = \lambda(x_0) > 0$. Si $x \in V$, $\lambda(x) > \frac{1}{2} \inf_{C_0} \lambda > 0$. On a en plus $\{x \in X_t, \varphi(x) < c\} = \gamma_{0t} \{x \in X_0, \varphi(x) < c\} \subset\subset X_t$. Cela prouve (iv) pour tout $t \in N$.

Considérons une métrique hermitienne h'_0 sur E , et posons $\widehat{h}'_i = \lambda_{0i}^* h'_0$; $\widehat{h}'_i$ n'est pas a priori hermitienne sur C_i , soit h'_i sa partie hermitienne. Introduisons sur X_t la métrique kählerienne $g_{t, \alpha\bar{\beta}} = \mathcal{L}_{\alpha\bar{\beta}} \varphi_t$, on peut supposer que g_0 soit complète.

On peut en effet supposer que X_0 est plongé dans $\mathbf{C}^N$ et que φ_0 est la fonction « distance d'un point fixé de $\mathbf{C}^N$ », la métrique g_0 est alors la restriction à X_0 de la métrique naturelle de $\mathbf{C}^N$. $\mathcal{W} \rightarrow B$ est ainsi une déformation triviale à l'infini d'une variété hermitienne complète (X_0, g_0) . Nous avons prouvé dans [12] que, dans ces conditions, les variétés (X_t, g_t) sont elles aussi complètes, à une restriction de $\mathcal{W} \rightarrow B$ près. On introduit alors une deuxième fonction strictement plurisousharmonique $\psi_0 : X_0 \rightarrow \mathbf{R}$ et on pose $\psi = \psi_0 \circ p_{X_0} \circ \mathcal{T}^{-1} : \mathcal{W} \rightarrow \mathbf{R}$, avec $\{x \in X_0, \psi_0(x) < c\} \subset\subset X_0$, $\forall c \in \mathbf{R}$. Par le même argument que tout à l'heure, on peut supposer $(\mathcal{L}\psi)_x$ définie positive pour tout $x \in \pi^{-1} N$. On considère ensuite les applications κ et $\kappa' : C_{p, q+1}^\infty(\pi^{-1} N, E) \rightarrow C_{p, q+1}^\infty(\pi^{-1} N, E)$ du n. 6, β), correspondant aux métriques h' et $h = e^\psi h'$ sur E . On a vu que, si $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ sont les plus petites valeurs propres de $(\mathcal{L}\varphi)_x$ et de $\langle \kappa' \cdot, \cdot \rangle_x$, on a

$$\int_{X_t} (\mu + \lambda) |f|^2 dV \leq (\kappa f, f)_t \leq \|\partial f\|_t^2 + \|\bar{\partial} f\|_t^2, \quad \forall t \in N, \forall f \in D_{p, q+1}(X_t, E).$$

En répétant le raisonnement de tout à l'heure, on voit bien qu'à une restriction $\mathcal{W}_1 \xrightarrow{\pi} B_1$ de $\pi N \xrightarrow{\pi} N$ près, l'on peut supposer $\lambda(x) \geq \frac{1}{c} - \mu(x)$, $c > 0$ fixé. Cela prouve la proposition.

8. Soit ψ la famille des fermés $K \subset \mathcal{W}$, tels que π/K soit propre. On suppose que E et $\mathcal{W}_1$ soient données des métriques du lemme 7.1.

THÉORÈME 8.1. *Soit $f \in C_{p,q+1}^\infty(\mathcal{W}_1, E)$, $\text{supp } f \in \psi$, $\bar{\partial}f = 0$. Il existe alors $u \in C_{p,q}^\infty(\mathcal{W}_1, E) \cap \mathcal{Q}_{p,q}^2(\widehat{\mathcal{W}}_1, E)$ tel que $\bar{\partial}u = f$ et que $|u|$ soit borné sur tout ouvert du type $\pi^{-1}A$, avec $A \subset \subset B_1$ (*).*

Démonstration. On fixe, pour tout $t \in B_1$, la forme $w_t \in W^{p,q+1}(X_t, E_t) \cap C_{p,q+1}^\infty(X_t, E_t)$ telle que $\bar{\partial}_t \mathfrak{d}_t w_t = f_t$ et que $\mathfrak{d}_t \bar{\partial}_t w_t = 0$ (voir lemme 6.1) et l'on pose $u = \mathfrak{d}w$, on a évidemment $u \in C_{p,q}^\infty(\widehat{\mathcal{W}}_1, E)$, $\bar{\partial}u = f$. Il suffit alors de prouver que $|u|$ est borné sur $\pi^{-1}A$ et que $w \in C_{p,q+1}^\infty(\mathcal{W}_1, E)$. On va partager la démonstration en plusieurs énoncés successifs

$\alpha)$ $|u|$ est borné sur tout ouvert $\pi^{-1}A$, $A \subset \subset B_1$.

De l'inégalité (34) on tire, pour tout $y \in X_t$,

$$|u_{A,B}^a(y)|^2 \leq c_1(0, k, \epsilon) \{ \|\square_t u_t\|_{k-2,\epsilon}^2 + \|u_t\|_{0,\epsilon}^2 \}.$$

Or, d'une part $\square_t u_t = \mathfrak{d}_t f_t$, et d'autre part $\|\mathfrak{d}_t f_t\|_{k-2,\epsilon}^2 \leq \|\mathfrak{d}_t f_t\|_{k-2}^2$ qui est borné si t varie dans A , à cause du fait que f est de classe C^∞ et que $\text{supp } f \in \psi$. De l'inégalité (31) on tire $\|u_t\|_{0,\epsilon} \leq \|u_t\| = \|\mathfrak{d}_t w_t\| \leq 4c \|\square_t w_t\|^2 = 4c \|f_t\|^2$ ce qui est aussi borné si t varie dans A ; $\alpha)$ est donc prouvé.

Soit $\gamma_{st}^*: C_{p,q}^\infty(X_s, T_s) \rightarrow \sum_{p'+q'=p+q} \{C_{p',q'}^\infty(X_t, E_t) \oplus C_{p',q'}^\infty(X_t, \bar{E}_t)\}$ l'isomorphisme (de $\mathbb{C}$ -modules) induit par γ_{st} sur les formes. On peut alors considérer l'homomorphisme surjectif $\widehat{\gamma}_{st}: C_{p,q}^\infty(X_s, T_s) \rightarrow C_{p,q}^\infty(X_t, T_t)$ obtenu en composant γ_{st}^* avec la projection canonique

$$\sum_{p'+q'=p+q} \{C_{p',q'}^\infty(X_t, T_t) \oplus C_{p',q'}^\infty(X_t, \bar{T}_t)\} \rightarrow C_{p,q}^\infty(X_t, T_t).$$

On a évidemment

$$(35) \quad \text{supp } [(\gamma_{st}^* - \widehat{\gamma}_{st})f_s] \subset C_t \quad \forall f_s \in C_{p,q}^\infty(X_t, E_t),$$

$$(36) \quad \widehat{\gamma}_{st}: W^{p,q}(X_s, T_s) \rightarrow W^{p,q}(X_t, E_t),$$

$$(37) \quad \text{supp } [(\widehat{\gamma}_{st} \square_s - \square_t \widehat{\gamma}_{st})f_s] \subset C_s, \quad \forall f_s \in C_{p,q}^\infty(X_s, E_s).$$

(*) On verra à la fin qu'il est même $\text{supp } u \in \psi$ (Th. III)

β) w et toutes les dérivées (de ses coefficients) par rapport aux coordonnées x^i sont continus en $(x^1, \dots, x^{2n}, t^1, \dots, t^m)$.

Soit $x \in \mathcal{W}_1$ fixé, $t = \pi x$, au voisinage de x les composantes de w s'écrivent $w_{A,B}^a(x, t)$. Fixons la boule $\mathcal{B}_{\varepsilon/2} \equiv \left\{ (y, t), \sum_1^{2n} (x^i - y^i)^2 \leq \varepsilon^2/4 \right\}$, soit s un point près de t et soient y et y' dans $\mathcal{B}_{\varepsilon/2}$. On doit prouver que, pour tout opérateur de dérivation $D^{(h)}$ d'ordre h par rapport aux $x^1, \dots, x^{2n}$, on a

$$\lim_{(y', s) \rightarrow (y, t)} |D^{(h)}[w_{A,B}^a(y', s) - w_{A,B}^a(y, t)]| = 0.$$

On a

$$|D^{(h)}[w_{A,B}^a(y', s) - w_{A,B}^a(y, t)]| \leq |D^{(h)}[w_{A,B}^a(y, t) - w_{A,B}^a(y, s)]| + \\ + |D^{(h)}[w_{A,B}^a(y', s) - w_{A,B}^a(y, s)]|,$$

$$|D^{(h)}[w_{A,B}^a(y, s) - w_{A,B}^a(y', s)]| \leq |D^{(h+1)}w_{A,B}^a(\bar{y}, s)| |y - y'|,$$

où $D^{(h+1)}$ est un opérateur convenable par rapport aux z et $\bar{y} \in \mathcal{B}_{\varepsilon/2}$. On va prouver que $|D^{(h+1)}w_{A,B}^a(\bar{y}, s)|$ est borné quand $(\bar{y}, s)$ varie au voisinage de (y, t) . En effet, grâce à (34)

$$|D^{(h+1)}w_{A,B}^a(\bar{y}, s)| \leq c_1(j, h, s) \{ \|f_s\|_{j+h-2, \varepsilon}^2 + \|w_s\|_{0, \varepsilon}^2 \}.$$

On applique alors (30) et l'on tire $|D^{(h+1)}w_{A,B}^a(\bar{y}, s)|^2 \leq c_3 \|f_s\|^2$, avec $c_3 = \sup[4c^2, c_1(j, h, \varepsilon)]$; ceci est borné lorsque s varie dans $A \subset B_1$ à cause du fait que f est différentiable et $\text{supp } f \in \psi$.

Il suffit donc de prouver que $\lim_{s \rightarrow t} |D^{(h)}[w_{A,B}^a(y, t) - w_{A,B}^a(y, s)]| = 0$. On applique de nouveau (34) et l'on a

$$|D^{(h)}[w_{A,B}^a(y, t) - w_{A,B}^a(y, s)]|^2 \leq \\ \leq c_1(h, j, \varepsilon) \{ \|\square_s w_t - \square_s w_s\|_{j+h-2, \varepsilon}^2 + \|w_t - w_s\|_{0, \varepsilon}^2 \}.$$

On va prouver séparément que

$$(38) \quad \lim_{s \rightarrow t} \|\square_s w_t - \square_s w_s\|_{j+h-2, \varepsilon}^2 = 0,$$

$$(39) \quad \lim_{s \rightarrow t} \|w_t - w_s\|_{0, \varepsilon}^2 = 0.$$

Puisque $\square w = f$, on a $\|\square_s w_t - \square_s w_s\|_{j+h-2, \varepsilon}^2 \leq \|f_t - f_s\|_{j+h-2, \varepsilon}^2 + \|(\square_s - \square_t)w_t\|_{j+h-2, \varepsilon}^2$. Ces deux termes tendent vers zéro: le premier à

cause de la différentiabilité de f et le deuxième à cause de la différentiabilité des coefficients de $\square$; (38) est ainsi prouvé. On a ensuite, grâce à (36) et (30)

$$\begin{aligned} \|w_t - w_s\|_{0,s}^2 &\leq \|\widehat{\gamma}_{st} w_s - w_s\|_{0,s}^2 + \\ &+ 4c^2 \{ \|f_t - \widehat{\gamma}_{st} f_s\|^2 + \|(\widehat{\gamma}_{st} \square_s - \square_t \gamma_{st}) w_s\|^2 \}. \end{aligned}$$

Les deux premiers termes du second membre tendent visiblement vers zéro, et le troisième aussi grâce à (37). L'énoncé β) est donc prouvé.

γ) w et les dérivées (de ses coefficients) rapport aux coordonnées x^i sont de classe C^1 par rapport à $(x^1, \dots, x^{2n}, t', \dots, t^m)$.

On fixe un entier ν , $1 \leq \nu \leq m$ et l'on pose $t + \tau = (t^1, \dots, t^{\nu-1}, t^\nu + \tau, t^{\nu+1}, \dots, t^m)$. L'opérateur $\widehat{\gamma}_{st}$ est linéaire et ses coefficients sont C^∞ par rapport aux variables $x^1, \dots, x^n, t^1, \dots, t^m, s^1, \dots, s^m$. Il en est donc de même de l'opérateur $\widehat{\gamma}$ obtenu en dérivant ses coefficients par rapport à s^ν et en posant ensuite $s = t$.

On a $\widehat{\gamma}_t: C_{p,q}^\infty(X_t, E_t) \rightarrow C_{p,q}^\infty(X_t, E_t)$, $\widehat{\gamma}_t u_t = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \{w_t - \widehat{\gamma}_{t+\tau,t} w_t\}$. Si u satisfait β) on a, pour tout entier k ,

$$(40) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\| \widehat{\gamma}_t w_t - \frac{1}{\tau} \{w_t - \widehat{\gamma}_{t+\tau,t} w_t\} \right\|_{k,s} = 0,$$

$$(41) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\tau} (\text{identité} - \widehat{\gamma}_{t+\tau,t}) (w_t - w_{t+\tau}) \right\|_{k,s} = 0.$$

Un simple calcul montre alors que l'on a, $\forall g_t \in C_{p,q+1}^\infty(X_t, T_t)$,

$$(42) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\tau} (w_t - w_{t+\tau}) + \widehat{\gamma}_t w_t + g_t \right\|_{k,s}^2 \leq \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\tau} (w_t - \widehat{\gamma}_{t+\tau,t} w_{t+\tau}) + g_t \right\|_{k,s}^2,$$

cela résulte de l'identité

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (w_t - w_{t+\tau}) + \widehat{\gamma}_t w_t + g_t &= \left[\frac{1}{\tau} (w_t - \widehat{\gamma}_{t+\tau,t} w_{t+\tau}) + g_t \right] + \\ &+ \left[\widehat{\gamma}_t w_t - \frac{1}{\tau} (w_t - \widehat{\gamma}_{t+\tau,t} w_t) \right] + \left[\frac{1}{\tau} (\text{identité} - \widehat{\gamma}_{t+\tau,t}) (w_t - w_{t+\tau}) \right], \end{aligned}$$

et de (40) et (41). On a en plus

$$(42)' \quad \text{supp} [\square_t \widehat{\gamma}_{st} - \widehat{\gamma}_{st} \square_s] h_s \subset C_s, \quad \forall h_s \in C_{p,q}^\infty(X_s, E_s),$$

et l'opérateur $[\square, \widehat{\gamma}]_t: C_{p,q}^\infty(X_t, E_t) \rightarrow C_{p,q}^\infty(X_t, E_t)$ obtenu en dérivant les coefficients de $\square_t \widehat{\gamma}_{st} - \widehat{\gamma}_{st} \square_s$ par rapport à s^v et en posant $t = s$ satisfait la relation

$$(43) \quad \text{supp} [\square, \widehat{\gamma}]_t h_t \subset C_t, \quad \forall h_t \in C_{p,q}^\infty(X_t, E_t).$$

Localement on a

$$(44) \quad [\square, \widehat{\gamma}]_t h_t = \lim_{\tau \rightarrow 0} \{(\square_t \widehat{\gamma}_{t+\tau, t} - \widehat{\gamma}_{t+\tau, t} \square_{t+\tau}) h_t\}.$$

Pour tout u satisfaisant β) on a

$$(45) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\tau} (\square_t \widehat{\gamma}_{t+\tau, t} - \widehat{\gamma}_{t+\tau, t} \square_{t+\tau}) w_{t+\tau} - [\square, \widehat{\gamma}]_t w_t \right\|_{k,s} = 0.$$

C'est une conséquence de la relation

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\tau} (\square_t \widehat{\gamma}_{t+\tau, t} - \widehat{\gamma}_{t+\tau, t} \square_{t+\tau}) (w_{t+\tau} - w_t) \right\|_{k,s} = 0.$$

Soient alors ξ_t et η_t les formes dans $C_{p,q+1}^\infty(X_t, E_t) \cap \mathcal{L}_{p,q+1}^2(X_t, E_t)$ qui satisfont $\square_t \xi_t = \widehat{\gamma}_t f_t$ et $\square_t \eta_t = [\square, \widehat{\gamma}]_t w_t$. Les formes ξ et η satisfont β) par la même raison que w . Nous allons prouver la relation

$$(46) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\tau} (w_t - w_{t+\tau}) + \widehat{\gamma}_t w_t - \xi_t + \eta_t \right\|_{k,e/2} = 0, \quad \forall k \geq 2.$$

Il suffit de prouver, grâce à (42), que l'on a

$$(47) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\tau} (w_t - \widehat{\gamma}_{t+\tau, t} w_{t+\tau}) - \xi_t + \eta_t \right\|_{k,e/2} = 0, \quad \forall k \geq 2.$$

De (32) on tire

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\tau} (w_t - \widehat{\gamma}_{t+\tau, t} w_{t+\tau}) - \xi_t + \eta_t \right\|_{k, s/2}^2 \leq \\ & \leq c'(k, \varepsilon) \left\{ \left\| \frac{1}{\tau} (f_t - \widehat{\gamma}_{t+\tau, t} f_{t+\tau}) - \dot{\gamma}_t f_t \right\|_{k-2, \varepsilon} + \right. \\ & + \left\| \frac{1}{\tau} (\widehat{\gamma}_{t+\tau, t} \square_{t+\tau} - \square_t \widehat{\gamma}_{t+\tau, t}) w_{t+\tau} + [\square, \widehat{\gamma}]_t w_t \right\|_{k-2, \varepsilon}^2 + \\ & \left. + \left\| \frac{1}{\tau} (w_t - \widehat{\gamma}_{t+\tau, t} w_{t+\tau}) - \xi_t - \eta_t \right\|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Le premier terme du second membre tend trivialement vers zéro, et le deuxième aussi à cause de (45). On va démontrer que l'on a

$$(48) \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\| \frac{1}{\tau} (w_t - \widehat{\gamma}_{t+\tau, t} w_{t+\tau}) - \xi_t - \eta_t \right\|^2 = 0,$$

Puisque ce qui se trouve entre $\| \quad \|$ appartient à $W^{p, q+1}(X_t, E_t)$, on tire de (30)

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{\tau} w_t - \widehat{\gamma}_{t+\tau, t} w_{t+\tau} - \xi_t + \eta_t \right\|^2 \leq 4c^2 \left\{ \left\| \frac{1}{\tau} (f_t - \widehat{\gamma}_{t+\tau, t} f_{t+\tau}) - \dot{\gamma}_t f_t \right\|^2 + \right. \\ & \left. + \left\| \frac{1}{\tau} (\widehat{\gamma}_{t+\tau, t} \square_{t+\tau} - \square_t \widehat{\gamma}_{t+\tau, t}) w_{t+\tau} + [\square, \widehat{\gamma}]_t w_t \right\|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Le premier terme de droite tend vers zéro ainsi que le deuxième par (42)' et (43). On a prouvé (48) et, par conséquent, (46).

Il ne reste alors qu'appliquer l'inégalité de Sobolev (33) pour en déduire qu'il existe $\frac{\partial}{\partial t''} D^{(h)} w_{A, B}^a$ et que l'on a

$$(49) \quad \frac{\partial}{\partial t''} D^{(h)} w_{A, B}^a = (\dot{\gamma}_t w_t - \xi_t + \eta_t)_{A, B}^a.$$

Le deuxième membre est continu à cause de β), le premier l'est donc aussi. L'énoncé γ) est prouvé.

$\delta)$ w est de classe C^∞ par rapport à $(x^1, \dots, x^{2n}, t^1, \dots, t^m)$. On sait déjà que w est C^0 par rapport à toutes les variables et C^∞ par rapport aux x . On suppose w de classe C^k , $\hat{\gamma} w$, ξ et η le sont a donc aussi, et de (49) résulte alors que w est de classe C^{k+1} . Le théorème 8.1. est ainsi complètement démontré.

9. Soit $J_0 \equiv \{i \in I, U_i \cap C_0 \neq \emptyset\}$, $J_1 \equiv \{i \in I, U_i \cap X_0 \neq \emptyset, U_i \cap C_0 = \emptyset\}$; on a $J_0 \cap J_1 = \emptyset$, $J_0 \cup J_1 \equiv \{i \in I, U_i \cap X_0 \neq \emptyset\}$. J_0 est fini.

Soit $B_2 \subset B_1$ un voisinage ouvert de 0 dans $\bigcap_{j \in J_0} \pi U_j$, et soit $\mathcal{W}_2 \xrightarrow{\pi} B_2$ la restriction de $\mathcal{W}_1 \xrightarrow{\pi} B_1$ qui lui correspond. On pose

$$\tilde{U}_j \begin{cases} = U_j \cap \mathcal{W}_2, & \text{si } j \in J_0 \\ = \mathcal{C}[(U_j \cap X_0) \times B_2], & \text{si } j \in J_1, \end{cases}$$

et, pour tout $x \in \tilde{U}_j$,

$$\psi(x) \begin{cases} = \gamma_j(x), & \text{si } j \in J_0 \\ = p_{\mathbb{C}^n} \circ \varphi \circ p_{X_0} \circ \mathcal{C}^{-1}(x), & \text{si } j \in J_1. \end{cases}$$

$\{\tilde{U}_j, \psi_j\}_{j \in J}$ est un atlas pour $\mathcal{W}_2 \xrightarrow{\pi} B_2$. On a $\pi \tilde{U}_j = B_2$, $\forall j \in J$. Soient x et y deux points de $\tilde{U}_{j, i \in J}$; pour que $z_j^a(y) = z_j^a(x)$ il faut et suffit qu'il existe $x_0 \in X_0 - C_0$ tel que $\mathcal{C}(x_0, \pi x) = x$, et $\mathcal{C}(x_0, \pi y) = y$. On pose $D_j^* = \left(\frac{\hat{c}}{\partial t^*} \right)_{z_j = \text{const}}$ sur $\tilde{U}_j$. On vérifie immédiatement que l'on a $\pi D_j^* = \frac{\partial}{\partial t^*}$,

que le champ $D_i^* - D_j^*$, sur $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j$ et vertical (réel), que sa partie holomorphe $(D_i^* - D_j^*)^* \in C_{0,0}^\infty(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j, T)$ est $\bar{\partial}$ -fermée. Si $i, j \in J_1$, $D_i^* - D_j^*$ est nul. Soit $\{\varrho_i\}_{i \in J}$ une partition de l'unité sur $\mathcal{W}_2$ relative à $\{\tilde{U}_j\}$. On pose, sur $\tilde{U}_i$, $v_i = D_i^* - \sum_j \varrho_j D_j^*$, v_i est vertical, il est nul si $i \in J_1$. Sa partie holomorphe $\widehat{v}_i$ satisfait, sur $\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j$, la relation $\bar{\partial} \widehat{v}_i = \bar{\partial} \widehat{v}_j$. En fait on a $\bar{\partial}(\widehat{v}_i - \widehat{v}_j) = \bar{\partial}[(D_i^* - D_j^*)^*] = 0$. Le champ vectoriel $v = v_i + D_i^*$ est visiblement global, $\widehat{v} \in C_{0,0}^\infty(\mathcal{W}_2, T)$. On pose $D^* = D_i^*$, pour $i \in J_1$, $A = \bigcup_{j \in J_0} \tilde{U}_j$.

D^* est un champ global sur $\mathcal{W}_2 - A$ de projection $\frac{\partial}{\partial t^*}$, $v|_{(\mathcal{W}_2 - A)} = D^*$.

$\bar{\partial} \widehat{v}_i$ définit une forme $f^* \in C_{0,1}^\infty(\mathcal{W}_2, T)$, avec $\bar{\partial} f^* = 0$, $\text{supp } f^* \subset K \in \mathcal{V}$.

Soit $\widehat{u}^*$ le champ vectoriel qui satisfait $\bar{\partial} \widehat{u}^* = f^*$, donné par le théorème 8.1.

On pose $u^* = \widehat{u}^* + \widehat{v}^*$, $w = -v_i + u^* + D_i^*$. w est un champ global sur $\mathcal{W}_2$. $|w|$ est borné sur $\pi^{-1}N$, $\forall N \subset B_2$, et la projection sur $\mathbb{C}^n$ de sa partie holomorphe, faite à l'aide des ψ_j , est $\bar{\partial}$ -fermée.

On pose $\tau_\lambda^r t = (t^1, \dots, t^{r-1}, t^r + \lambda, t^{r+1}, \dots, t^m)$. Le groupe local $\{\Phi_\lambda^r\}$ engendré par u^r se projette dans le groupe local $\{\tau_\lambda^r\}$ de translation de B_2 . En plus, pour tout ouvert $V \subset \mathcal{W}_2$, l'application $\Phi_\lambda^r: V \cap X_t \rightarrow X_{\tau_\lambda^r t}$ est biholomorphe sur son image.

D'ailleurs, comme $|w|$ est borné sur $\pi^{-1}N$, $\forall N \subset B_2$ et puisque les trajectoires de $\{\tau_\lambda^r\}$ sont des segments de droites, on peut appliquer la prop. 5.1 et affirmer que le groupe $\{\Phi_\lambda^r\}$ engendre des applications biholomorphes $\Phi_\lambda^r: X_t \rightarrow X_{\tau_\lambda^r t}$. On choisit alors $\delta > 0$ tel que $B' \equiv \{t \in B_2, |t^r| < \delta, r = 1, \dots, m\} \subset B_2$. On pose, pour tout $(x, t) \in X_0 \times B'$, $\tau^{-1}(x, t) = \Phi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \Phi_{t_m}^m(x)$. On peut résumer les propriétés de τ dans le

LEMME 9.1. $\tau: \mathcal{W}' \rightarrow X_0 \times B'$ est un isomorphisme de fibrés différentiables de base B' . Pour tout $t \in B'$, l'application $\tau|_{X_t}: X_t \rightarrow X_0$ est biholomorphe.

10. Démonstration du théorème II. Grâce au lemme 9.1, la démonstration de la première partie du théorème II se réduit à prouver le

LEMME 10.1. Soit E un fibré vectoriel holomorphe sur une variété de Stein X , $\{f_t\}_{t \in B}$ une famille de formes $f_t \in C_{p,q+1}^\infty(X, E)$, $\bar{\partial}$ -fermées. B est un ouvert de $\mathbf{R}^m$ et (les coefficients des) f_t sont supposés de classe C^∞ sur $U_i \times B$, U_i étant un voisinage coordonné de X . Il existe une famille $\{u_t\}_{t \in B}$, dont les éléments $u_t \in C_{p,q}^\infty(X, E)$, vérifient $\bar{\partial}u_t = f_t$, et qui a même régularité que $\{f_t\}$.

Démonstration. Soit $\tilde{E} = E \times B \rightarrow X \times B$, et soient $\mathcal{F}^p$ et $\mathcal{A}^{p,q}$ les faisceaux définis de la façon suivante :

$$\mathcal{F}^p: U \rightarrow \begin{cases} \text{Module des sections différentiables de } \tilde{E} \times A^{p,0} \text{ au dessus de} \\ U \times B, \text{ holomorphes au dessus des fibres } U \times \{t\}, (t \in B). \end{cases}$$

$$\mathcal{A}^{p,q}: U \rightarrow \begin{cases} \text{Module des sections différentiables de } \tilde{E} \times A^{p,q} \text{ au dessus de} \\ U \times B. \end{cases}$$

La suite

$$(\Sigma) \quad 0 \rightarrow \mathcal{F}^p \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,n-1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,n} \rightarrow 0$$

est exacte au cause du lemme de Poincaré-Grothendieck avec paramètres (cf. [7]); les faisceaux $\mathcal{A}^{p,0}, \dots, \mathcal{A}^{p,n}$ sont fins, (Σ) est donc une résolution acyclique de $\mathcal{F}^p$ et l'on a

$$H^q(X, \mathcal{F}^p) \simeq \frac{\text{Ker } \{\bar{\partial} : C_{p,q}^\infty(X, E) \rightarrow C_{p,q+1}^\infty(X, E)\}}{\text{Im } \{\bar{\partial} : C_{p,q-1}^\infty(X, E) \rightarrow C_{p,q}^\infty(X, E)\}}.$$

Le lemme 10.1. équivaut donc à

$$(50) \quad H^q(X, \mathcal{F}^p) = 0 \quad (q = 1, \dots, n; \quad p = 0, \dots, n).$$

PROPOSITION 10.1. *Soit X une variété de Stein, B un ouvert de $\mathbb{R}^m$, F un fibré vectoriel holomorphe sur X , soit $\mathcal{G}$ le faisceau associé au pré-faisceau dont les sections au dessus d'un ouvert U sont les familles $\{\sigma_t\}_{t \in B}$ de sections holomorphes $U \xrightarrow{\sigma_t} F$ qui sont différentiables en tant que sections de $F \times B \rightarrow U \times B$. On a alors*

$$(51) \quad H^q(X, \mathcal{G}) = 0 \quad (q > 0)$$

$$(52) \quad H_k^q(X, \mathcal{G}) = 0. \quad (q < n).$$

Démonstration. Soit $\bar{\mathcal{O}}$ le faisceau des germes des sections holomorphes de F , et soit $C^\infty(B)$ l'espace de Fréchet des fonctions différentiables $B \rightarrow \mathbb{C}$, muni de la topologie de la convergence compacte de chaque dérivée.

$\mathcal{G}$ est isomorphe au produit tensoriel topologique de $\bar{\mathcal{O}}$ par l'espace vectoriel $C^\infty(B)$. Du théorème des coefficients universels on tire alors

$$H^i(X, \mathcal{G}) \simeq H^i(X, \bar{\mathcal{O}}) \hat{\otimes}_\bullet C^\infty(B),$$

$$H_k^j(X, \mathcal{G}) \simeq H_k^j(X, \bar{\mathcal{O}}) \hat{\otimes}_\bullet (B),$$

car les espaces $H^i(X, \bar{\mathcal{O}})$ et $H_k^j(X, \bar{\mathcal{O}})$ sont de Hausdorff (en fait, ceci est toujours vrai si i et j sont nuls, et si $i > 0, j < n$, on a $H^i(X, \bar{\mathcal{O}}) = 0, H_k^j(X, \bar{\mathcal{O}}) = 0$). On a ainsi prouvé la proposition, en particulier la formule (50), le lemme 10.1. et la première partie du théorème II.

On revient au cas où B est une variété différentiable réelle de dimension m et où chaque variété X_t est de Stein. On vient de prouver que, pour tout $t \in B$, il existe un voisinage U_t de t dans B et une forme $u^* \in C_{p,q}^\infty(\pi^{-1} U_t, E)$ telle que $\bar{\partial} u^* = f$. Soit alors $\{B_i\}_{i \in I}$ un recouvrement localement fini par de tels voisinages; pour chaque i soit $u_i^* \in C_{p,q}^\infty(\pi^{-1} U_i, E)$

tel que $\bar{\partial} u_i^* = f$; soit enfin $\{p_i\}$ une partition de l'unité de B , subordonnée à $\{B_i\}_{i \in I}$. La forme $u(x) = \sum_i p_i(\pi x) u_i(x)$ satisfait aux conditions voulues.

11. Démonstration du théorème III. Grâce au lemme 9.1, démontrer la première partie de l'énoncé du théorème III se ramène à prouver le lemme 10.1. modifié de la façon suivante: on fait l'hypothèse que, pour tout compact $C \subset B$, $\bigcup_{t \in C} \text{supp } f_t$ est compact dans X , et on exige dans la conclusion que u possède la même propriété.

On peut alors supposer que l'on a $\bigcup_{t \in B} \text{supp } f_t \subset \overset{\circ}{K}$, où $\overset{\circ}{K}$ est un ouvert de Stein dans X et K est compact. En mettant alors dans (52) $\mathcal{F}^p$ à la place de $\mathcal{G}$ et $\overset{\circ}{K}$ à celle de X on obtient trivialement l'existence de la forme u . La démonstration de la deuxième partie du théorème III est parfaitement identique à celle du théorème II, voir fin du n. précédent.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ANDREOTTI A. et VESENTINI, E. *Les théorèmes fondamentaux de la théorie des espaces holomorphiquement complets*, Séminaire Ehresmann, 4 (1962-63), 1-31, Paris, Secrétariat Mathématique.
- [2] ANDREOTTI, A. et VESENTINI, E. *On deformations of discontinuous groups* Acta mathematica, 112, (1964), 249-298.
- [3] ANDREOTTI, A. et VESENTINI, E. *Carleman estimates for the Laplace-Beltrami equation on complex manifolds*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., 25, (1965), 81-130.
- [4] CARTAN, H. *Espaces fibrés analytiques*. Symp. Int. de Topologia alg., Mexico, (1953), 97-121.
- [5] COURANT HILBERT, D., *Methods of mathematical physics*, vol. II, Interscience Publishers, New York, 1962.
- [6] FRIEDRICHS, K. O., *On the differentiability of the solution of partial differential equations*. Comm. Pure Appl. Math. 6, (1953), 299-326.
- [7] ANDREOTTI, A. et GRAUERT, H., *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. Fr, t. 90, (1962), 192-259.
- [8] HAEFLIGER, A. *Variétés feuilletées*. Cours d'été sur « Topologia differenziale », C. I. M. E. Urbino (1962). Edit. Cremonese. Roma.
- [9] HÖRMANDER, L. *An Introduction to complex analysis in several variables*. D. Van Nostrand Publ., Princeton, (1966).
- [10] HÖRMANDER, L. *L^2 -estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator.*, Acta Math. 113, (1965), 89-152.
- [11] KODAIRA, K. et SPENCER, D. C. *On deformations of complex analytic structures III*, Ann. of Math., 71, (1960) 43-76.
- [12] REA, C. *Un'osservazione sulle deformazioni di una varietà completa*. Boll. U. M. I, 22, (1967), 345-349.
- [13] REEB, G. *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*, Act. Sc. et Ind., Herman, Paris, (1952).
- [14] TOGNOLI A. *Un criterio di isomorfismo per il primo gruppo di coomologia nel caso non abeliano*. À paraître.
- [15] VESENTINI E. *Lectures on Levi convexity of complex manifolds and cohomology vanishing theorems*. Tata Inst of found. research. Bombay. (1967).