ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SERGIO LEVONI

Sull'integrazione delle equazioni della termoelasticità di solidi incomprimibili

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 22, nº 3 (1968), p. 515-525

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1968_3_22_3_515_0>

SULL'INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI DELLA TERMOELASTICITÀ DI SOLIDI INCOMPRIMIBILI (*)

SERGIO LEVONI (**)

SUNTO. Si espone un procedimento generale riguardante l'integrazione delle equazioni che reggono le trasformazioni termoelastiche linearizzate di solidi incomprimibili; il metodo può essere considerato come una estensione a tali problemi di quello delle funzioni di GALERKIN nell'elastostatica lineare. Si esaminano poi alcuni casi particolari.

1. Introduzione.

Nell'ambito della termoelasticità sono stati considerati, per la prima volta da T. MANACORDA [1], corpi incomprimibili nel senso più generale di SIGNORINI, per i quali cioè la dilatazione cubica relativa a trasformazioni linearizzate è proporzionale alla variazione della temperatura; l'Autore citato ha ricavato [1] le equazioni che reggono tali fenomeni sia nel caso delle trasformazioni finite che nel caso linearizzato; relativamente a quest'ultimo ha studiato poi le onde elementari [2]. Al momento non siamo a conoscenza di altri lavori su questo argomento che certamente è anche di interesse pratico.

Nella presente nota ci si propone di dare un contributo all'integrazione, nel caso generale e in alcuni casi particolari, delle equazioni linearizzate introdotte da MANACORDA. Il metodo seguito è analogo a quello, ormai classico, di GALERKIN della elastostatica [3] e alla sua generalizzazione alla elastodinamica dovuta a M. JACOVACHE [4]. Infatti, eliminando le altre incognite, si ottiene anzitutto (n. 2) una equazione nella sola incognita $\bar{u}$, vet-

---

Pervenuto alla Redazione il 22 Marzo 1968.

(*) Istituto Matematico dell'Università, Modena.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

tore spostamento elastico; quindi si esprimono le componenti di $\bar{u}$ mediante tre funzioni φ_i: queste si riducono alle funzioni di GALERKIN [3] e a quelle generalizzate [4] nel caso particolare dell'elastostatica e dell'elastodinamica rispettivamente. La determinazione delle tre funziani φ_i è legata alla risoluzione di un'unica equazione differenziale che ammette, tra le soluzioni, una classe di funzioni dipendenti da una equazione delle onde. Inoltre le funzioni φ_i, così introdotte permettono di determinare (n. 4), oltre ad $\bar{u}$, la temperatura Θ e lo scalare q che rappresenta, nell'espressione degli sforzi, il vincolo interno di incomprimibilità. A conclusione del lavoro si considerano alcuni casi particolari: onde di distorsione, conducibilità termica nulla, q costante; in questi casi le equazioni in questione si possono ricondurre facilmente ad equazioni note, quali quella delle onde, quella di FOURIER e quella delle piccole oscillazioni elastiche nelle quali però i coefficienti risultano alterati, rispetto a quelli usuali, dall'interazione termoelastica.

2. Deduzione di una equazione nella sola $\bar{u}$.

Le trasformazioni termoelastiche linearizzate di solidi incomprimibili sono rette dalle equazioni [1]

$$\nabla^2 \Theta = \frac{cT_0}{k} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{L}{k} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \bar{u} - \frac{a}{k} \frac{\partial q}{\partial t} \tag{1}$$

$$\varrho_0 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \mu_T \nabla^2 \bar{u} + (\lambda_T + \mu_T) \nabla\nabla \cdot \bar{u} - LT_0 \nabla\Theta - \nabla q \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \bar{u} = aT_0 \Theta, \tag{3}$$

dove con ϱ_0 e T_0 si sono indicate rispettivamente la densità del mezzo e la temperatara relative alla configurazione di riferimento; $\Theta = (T - T_0)/T_0$ indicata la variazione specifica della temperatura, $\bar{u}$ il vettore spostamento elastico, k è il coefficiente di conducibilità termica, a, c, L, λ_T e μ_T sono delle costanti caratteristiche del mezzo; q infine rappresenta nell'espressione degli sforzi il termine che deriva dal vincolo interno di incomprimibilità.

Deduciamo da (3) le seguenti relazioni

$$\begin{cases} \nabla^2\Theta = \dfrac{1}{aT_0} \nabla^2 (\nabla \cdot \bar{u}) \\ T_0 \dfrac{\partial \Theta}{\partial t} = \dfrac{1}{a} \dfrac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \bar{u}) \\ T_0 \nabla\Theta = \dfrac{1}{a} \nabla\nabla \cdot \bar{u}. \end{cases} \tag{4}$$

Per le prime due di (4) la (1) si può scrivere

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \left(\frac{c}{a^2} + \frac{L}{a}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \bar{u}) - \frac{k}{a^2 T_0}\nabla^2 (\nabla \cdot \bar{u}), \tag{5}$$

mentre, in virtù dell'ultima delle (4), la (2) diventa

$$\nabla q = \mu_T \nabla^2 \bar{u} + \left(\lambda_T + \mu_T - \frac{L}{a}\right)\nabla\nabla \cdot \bar{u} - \varrho_0 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}. \tag{6}$$

Per ottenere una sola equazione in $\bar{u}$, eliminiamo q tra la (5) e la (6); a questo scopo prendiamo il gradiente della (5) e deriviamo la (6) rispetto al tempo

$$\nabla \frac{\partial q}{\partial t} = \left(\frac{c}{a^2} + \frac{L}{a}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\nabla \cdot \bar{u}) - \frac{k}{a^2 T_0}\nabla\nabla^2 (\nabla \cdot \bar{u}) \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla q = \mu_T \frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 \bar{u} + \left(\lambda_T + \mu_T - \frac{L}{a}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\nabla \cdot \bar{u}) - \varrho_0 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t^3}. \tag{8}$$

Ora uguagliando i secondi membri di (7) e (8) si ottiene la seguente equazione nella sola incognita $\bar{u}$

$$\varrho_0 \frac{\partial^3 \bar{u}}{\partial t^3} = \mu_T \frac{\partial}{\partial t}\nabla^2 \bar{u} + \left(\lambda_T + \mu_T - \frac{2L}{a} - \frac{c}{a^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\nabla \cdot \bar{u}) + \frac{k}{a^2 T_0}\nabla\nabla^2 (\nabla \cdot \bar{u}) \tag{9}$$ (1).

Questa equazione al limite per $a \to \infty$ fornisce formalmente (2) l'equazione delle piccole oscillazioni elastiche derivata rispetto al tempo o, se si vuole, l'equazione dell'elasticità lineare in cui il vettore spostamento elastico è sostituito da $\dot{\bar{u}}$.

3. Applicazione del metodo di Galerkin.

L'integrazione dell'equazione (9) può essere ricondotta alla ricerca di tre funzioni secondo il metodo di GALERKIN [3] dell'elastostatica.

---

(1) A tale equazione soddisfa anche la temperatura Θ come si vede prendendo la divergenza di ambo i membri di (9) e applicando la (3).

(2) Questo passaggio al limite deve essere inteso in senso formale, in modo che, quando $a \to \infty$, i coefficienti $\frac{L}{a}$, $\frac{c}{a^2}$ e $\frac{k}{a^2 T_0}$ tendano a zero.

A questo scopo introduciamo gli operatori

$$(10) \qquad \Box_2^2 = \nabla^2 - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad \Box_1^2 = \nabla^2 - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial}{\partial t}$$

dove si è posto

$$(11) \qquad v^2 = \mu_T/\varrho_0, \qquad \alpha = \frac{\mu_T \beta}{\dfrac{2L}{a} + \dfrac{c}{a^2} - (\lambda_T + \mu_T)}, \qquad \beta = \frac{k}{\mu_T T_0 a^2}.$$

Allora la (9) può scriversi

$$(12) \qquad \left(\Box_2^2 \frac{\partial}{\partial t} + \beta \Box_1^2 \nabla\nabla\cdot\right)\bar{u} = 0$$

o anche, più sinteticamente

$$(13) \qquad L_{ij} u^j = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

dove gli operatori L_{ij} sono così definiti

$$(14) \qquad L_{ij} = \Box_2^2 \frac{\partial}{\partial t} \delta_{ij} + \beta \Box_1^2 \partial_i \partial_j \qquad \left(\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_i}\right),$$

essendo δ_{ij} il simbolo di KRONECKER.

Esprimiamo ora le u_i mediante tre funzioni χ_i nel seguente modo

$$(15) \qquad \begin{vmatrix} \chi_1 & L_{12} & L_{13} \\ \chi_2 & L_{22} & L_{23} \\ \chi_3 & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}, \quad u_2 = \begin{vmatrix} L_{11} & \chi_1 & L_{13} \\ L_{21} & \chi_2 & L_{23} \\ L_{31} & \chi_3 & L_{33} \end{vmatrix}, \quad u_3 = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \chi_1 \\ L_{21} & L_{22} & \chi_2 \\ L_{31} & L_{32} & \chi_3 \end{vmatrix}.$$

Introducendo inoltre le funzioni φ_i definite da

$$(16) \qquad \varphi_i = \Box_2^2 \frac{\partial}{\partial t} \chi_i \qquad (i = 1, 2, 3),$$

le (15) si possono scrivere nella forma

$$(17) \qquad u_i = \left[\left(\Box_2^2 \frac{\partial}{\partial t} + \beta \Box_1^2 \nabla^2\right)\delta_{ij} - \beta \Box_1^2 \partial_i \partial_j\right]\varphi^j \qquad (i, j = 1, 2, 3).$$

Le relazioni (17) ora trovate forniscono direttamente le componenti u_i del vettor spostamento elastico qualora siano note le tre funzioni φ_i. Si tratta ora di trovare le equazioni alle quali soddisfano le φ_i. Innanzitutto sostituendo le (15) in (13) si trova l'equazione che definisce le χ_i

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} \chi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{18}$$

questa sviluppata fornisce

$$\left[\Box_2^2 \frac{\partial}{\partial t}\left(\Box_2^2 \frac{\partial}{\partial t} + \beta \Box_1^2 \nabla^2\right)\right] \Box_2^2 \frac{\partial}{\partial t} \chi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{19}$$

da cui segue, per le (16), che ciascuna funzione φ_i deve soddisfare all'equazione

$$\left[\Box_2^2 \left(\Box_2^2 \frac{\partial}{\partial t} + \beta \Box_1^2 \nabla^2\right)\right] \dot{\varphi}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{20}$$

4. **Determinazione di Θ e q.**

Le equazioni (17) dunque permettono di calcolare le componenti u_i del vettor spostamento elastico qualora siano note le tre funzioni φ_i. Vediamo ora come si possano esprimere la temperatura Θ e lo scalare q in funzione delle φ_i o delle u_i. La temperatura Θ si ottiene direttamente dalla (3)

$$\Theta = \frac{1}{aT^0} u_i^{/i} = \frac{1}{aT_0}\left[\left(\Box_2^2 \frac{\partial}{\partial t} + \beta \Box_1^2 \nabla^2\right)\delta_{ij} - \beta \Box_1^2 \partial_i \partial_j\right] \varphi^{j/i}. \tag{21}$$

Per esprimere q conviene invece servirsi della (5); da essa si ricava

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \left(\frac{c}{a^2} + \frac{L}{a}\right)\left[\left(\Box_2^2 \frac{\partial}{\partial t} + \beta \Box_1^2 \nabla^2\right)\delta_{ij} - \beta \Box_1^2 \partial_i \partial_j\right] \dot{\varphi}^{j/i} -$$

$$- \frac{k}{a^2 T_0}\left[\left(\Box_2^2 \frac{\partial}{\partial t} + \beta \Box_1^2 \nabla^2\right)\delta_{ij} - \beta \Box_1^2 \partial_i \partial_j\right] \nabla^2 \varphi^{j/i}$$

ossia, a meno di una funzione arbitraria del posto,

$$(22) \qquad q = \left[\left(\square_2^2 \frac{\partial}{\partial t} + \beta \square_1^2 V^2\right)\delta_{ij} - \beta \square_1^2 \partial_i \partial_j\right] \left\{\left(\frac{c}{a^2} + \frac{L}{a}\right) - \frac{k}{a^2 T_0} V^2 \int dt\right\} \varphi^{j/i}$$

dove, ovviamente, il simbolo $\left(\int dt\right) f$ sta ad indicare una primitiva, rispetto al tempo, della funzione f.

Espressioni più semplici (almeno formalmente) di (17), (21) e (22) per le componenti u_i dello spostamento, per la temperatura Θ e per q si possono ottenere in base alla seguente osservazione. Le (17) si possono scrivere

$$u_i = \left(\square_2^2 \frac{\partial}{\partial t} + \beta \square_1^2 V^2\right) \varphi_i - \beta \square_1^2 \partial_i \partial_j \varphi^j$$

da cui, in virtù delle (20), si ottiene

$$(23) \qquad \square_2^2 \frac{\partial}{\partial t} u_i = - \beta \square_2^2 \frac{\partial}{\partial t} \square_1^2 \partial_i \partial_j \varphi^j .$$

Le u_i allora si possono esprimere anche nel seguente modo

$$(24) \qquad u_i = - \beta \square_1^2 \partial_i \partial_j \varphi^j + \psi_i \qquad (i = 1, 2, 3)$$

dove le ψ_i sono soluzioni dell'equazione, ben nota,

$$(25) \qquad \square_2^2 \frac{\partial}{\partial t} \psi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Ne consegue che per Θ e q si possono avere le seguenti espressioni

$$(26) \qquad \Theta = \frac{1}{a T_0} \left[\psi_i^{/i} - \beta \square_1^2 \partial_i \partial_j \varphi^{j/i}\right]$$

$$(27) \qquad q = \left\{\left(\frac{c}{a^2} + \frac{L}{a}\right) - \frac{k}{a^2 T^0} V^2 \int dt\right\} \left[\psi_i^{/i} - \beta \square_1^2 \partial_i \partial_j \varphi^{j/i}\right]$$

quest'ultima, sempre a meno di una funzione arbitraria del posto.

Infine dal confronto tra la (26) e la (27), come d'altra parte tra la (21) e la (22), si può dedurre la relazione

$$(28) \qquad q = \left\{T_0 \left(\frac{c}{a} + L\right) - \frac{k}{a} V^2 \int dt\right\} \Theta$$

che lega, in generale, q e Θ direttamente tra loro.

5. Alcune osservazioni sull'equazione (20).

In conclusione, il problema dell'integrazione del sistema delle equazioni (1), (2) e (3) che reggono le trasformazioni termoelastiche linearizzate di solidi incomprimibili, è stato ricondotto all'integrazione dell'unica equazione (20). Anche se non è facile ricavare la soluzione generale della (20), se ne può tuttavia ottenere una classe abbastanza vasta di soluzioni particolari. Infatti è immediato verificare che ogni soluzione $\dot{\varphi}_i$ di tale equazione si può scrivere come somma di due funzioni

$$\dot{\varphi}_i = f_i + g_i$$

definite dalle equazioni ([3])

$$\Box_2^2 f_i = 0 \qquad \text{e} \qquad \left(\Box_2^2 \frac{\partial}{\partial t} + \beta \Box_1^2 \nabla^2\right) g_i = 0 ;$$

ora le soluzioni della prima di tali due equazioni sono ben note essendo le soluzioni dell'equazione delle onde. Quindi una classe di soluzioni particolari dell'equazione (20) è fornita da tutte le soluzioni dell'equazione

$$\Box_2^2 \dot{\varphi}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

In questo caso particolare le (17) diventano

$$u_i = \beta \Box_1^2 (\nabla^2 \delta_{ij} - \partial_i \partial_j) \varphi^j \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Analogamente, da (21) e (22) si ottengono le corrispondenti espressioni per Θ e q.

Dimostriamo infine che dal punto di vista matematico i risultati dedotti dalle equazioni (20) contengono, come caso particolare, quelli ben noti dell'elasticità lineare. Si è già osservato infatti, alla fine del n. 2, che per $a \to \infty$ l'equazione (9) fornisce quella delle piccole oscillazioni elastiche in

---

([3]) Osserviamo che nel caso della sola elasticità, le funzioni generalizzate di GALERKIN si possono ottenere come somma di due funzioni f e g soluzioni rispettivamente dell'equazione delle onde di distorsione e di compressione. Nel nostro caso le f_i sono ancora soluzioni di una equazione analoga a quella delle onde di distorsione mentre le g_i soddisfano un'equazione più complicata di quella delle onde di compressione.

cui lo spostamento $\bar{u}^*$ sia sostituito dal nostro $\dot{\bar{u}}$. Passando quindi al limite per $a \rightarrow \infty$ (4), le (20) diventano

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\mu_T/\varrho_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\nabla^2 - \frac{1}{(2\mu_T+\lambda_T)/\varrho_0}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\ddot{\varphi}_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{29}$$

Quindi le funzioni $\ddot{\varphi}_i$, per $a \rightarrow \infty$, diventano soluzioni della equazione ripetuta delle onde in cui le velocità delle onde di distorsione e di compressione sono date rispettivamente da μ_T/ϱ_0 e $(2\mu_T + \lambda_T)/\varrho_0$. L'espressione del vettore spostamento elastico $\bar{u}^*$ segue dunque dalle (17) ancora facendo $a \rightarrow \infty$

$$u_i^* \equiv \dot{u} = \left[\square_2^2\, \delta_{ij} + \frac{\lambda_T + \mu_T}{\mu_T}\,(\nabla^2\, \delta_{ij} - \partial_i\, \partial_j)\right]\ddot{\varphi}^j \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{30}$$

Queste coincidono formalmente con le espressioni che forniscono il vettore spostamento elastico nell'elasticità lineare (5) ossia le funzioni $\ddot{\varphi}_i$, soluzioni delle (29), non sono altro che le funzioni generalizzate di GALERKIN [4] (6).

6. Alcuni casi particolari.

Consideriamo ora, per concludere, alcuni casi particolari nei quali è particolarmente agevole l'integrazione del sistema delle equazioni (1), (2) e (3).

a) Onde di distorsione.

Se supponiamo che sia

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \tag{31}$$

le (1) e (3) diventano rispettivamente

$$\nabla^2\, \Theta = \frac{cT_0}{k}\frac{\partial \Theta}{\partial t} - \frac{a}{k}\frac{\partial q}{\partial t} \tag{32}$$

$$aT_0\, \Theta = 0. \tag{33}$$

(4) Dalla (11), per $a \rightarrow \infty$, si ricava $\beta \rightarrow 0$ e $(\beta/\alpha) \rightarrow -\dfrac{\lambda_T + \mu_T}{\mu_T}$.

(5) Si veda, ad esempio, [5], pag. 26, (34).

(6) Nei problemi stazionari e nell'elastostatica le (29) si riducono a $\nabla^2\nabla^2\ddot{\varphi}_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, cioè le $\ddot{\varphi}_i$ diventano biarmoniche e quindi si identificano con le funzioni di GALERKIN [3].

Nel caso $a \neq 0$, la (33) fornisce $\Theta = 0$, cioè la soluzione particolare in questione è isoterma, mentre da (12) si ottiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \Box_2^2 \bar{u} = 0 \tag{34}$$

cioè $\dot{\bar{u}}$ è soluzione dell'equazione delle onde con velocità data da μ_T/ϱ_0.

Infine la (32) fornisce $\frac{\partial q}{\partial t} = 0$ cioè q non dipende dal tempo.

Nel caso invece di $a = 0$ la (32) diventa

$$\nabla^2 \Theta = \frac{c_0 T_0}{k} \frac{\partial \Theta}{\partial t} \text{ (7)} \tag{35}$$

per cui il problema termico è quello tradizionale ed è indipendente da quello dinamico. Per avere $\bar{u}$ consideriamo la (2) che ora si può scrivere

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\mu_T/\varrho_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \bar{u} - \nabla (L T_0 \Theta + q) = 0. \tag{36}$$

La (36) è soddisfatta se si prende, per esempio,

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{\mu_T/\varrho_0} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \bar{u} = 0 \quad \text{e}$$

$$\Delta (L T_0 \Theta + q) = 0.$$

Sono cioè possibili per $\bar{u}$ le soluzioni dell'equazione delle onde di distorsione mentre per q ne consegue l'espressione

$$q = - L T_0 \Theta + f(t), \tag{37}$$

dove $f(t)$ è una funzione arbitraria del tempo e Θ è ottenuta dall'equazione di FOURIER (35) (8).

b) Mezzo con conducibilità termica nulla, $k = 0$.

In questo caso l'equazione (1) diventa

$$c T_0 \frac{\partial \Theta}{\partial t} + L \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \bar{u} - a \frac{\partial q}{\partial t} = 0 \tag{38}$$

---

(7) Con c_0 si è indicato ciò a cui si riduce c per $a = 0$.

(8) Per questi risultati, nel caso delle onde elementari, si veda [2], n. 2.1, pag. 504-505.

mentre la (9) assume la forma

$$\varrho_0 \frac{\partial^3 \overline{u}}{\partial t^3} = \mu_T \nabla^2 \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + (\lambda^* + \mu_T) \frac{\partial}{\partial t} \nabla\nabla \cdot \overline{u} \tag{39}$$

dove si è posto

$$\lambda^* = \lambda_T - \frac{1}{a}\left(2L + \frac{c}{a}\right). \tag{40}$$

Si deduce quindi che la velocità di spostamento $\dot{\overline{u}}$ è soluzione dell'equazione delle piccole oscillazioni elastiche in cui il coefficiente λ_T è alterato secondo la relazione (40): in questo caso la presenza del campo termico modifica solo le onde di compressione. Ricavato in tal modo $\dot{\overline{u}}$ dalla (39) e quindi $\overline{u}$, dalla (3) si ottiene il valore della temperatura Θ; infine, dalla (38), tenendo presente la (3), si ricava

$$q = T_0 \left(L + \frac{c}{a}\right) \Theta + g(P) \tag{41}$$

dove $g(P)$ è una funzione arbitraria del posto.

c) $q =$ ***costante.***

Se si suppone costante la funzione q che rappresenta il vincolo interno di incomprimibilità, le equazioni (1) e (2) diventano rispettivamente

$$\nabla^2 \Theta = \frac{c\, T_0}{k} \frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{L}{k} \frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \overline{u} \tag{42}$$

$$\varrho_0 \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} = \mu_T \nabla^2 \overline{u} + (\lambda_T + \mu_T) \nabla\nabla \cdot \overline{u} - L T_0 \nabla \Theta. \tag{43}$$

Da queste, per la (3), si deduce

$$\nabla^2 \Theta = \frac{T_0}{k}(c + La) \frac{\partial \Theta}{\partial t} \tag{44}$$

$$\varrho_0 \frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} = \mu_T \nabla^2 \overline{u} + \left(\lambda_T + \mu_T - \frac{L}{a}\right) \nabla\nabla \cdot \overline{u}. \tag{45}$$

Si conclude quindi che la temperatura soddisfa a una equazione di FOURIER in cui il coefficiente di diffusione è alterato dall'interazione termoelastica e analogamente il vettore spostamento elastico soddisfa all'equazione delle piccole oscillazioni elastiche in cui sono alterate solo le onde di compressione.

BIBLIOGRAFIA

[1] T. Manacorda, *Sulla termoelasticità dei solidi incomprimibili*, Riv. Mat. Univ. Parma (2), 1 (1960), 149-170;

[2] T. Manacorda, *Onde elementari nella termoelasticità di solidi incomprimibili*, Atti Acc. Sci. Torino, **101** (1966-67), 503-509;

[3] B. G. Galerkin, *Determination of stresses and strains in an elastic body by means of three functions* (in Russian), Isv. Nautshno-Issl. Inst. Gidr., **5** (1931);

[4] M. Jacovache, *O extindere a metodei lui Galerkin pentru sistemul ecuatiilar elasticitatii*, Bull. Stiint., Acad. Repub. Pop. Romane, Al (1949), 593;

[5] W. Nowacki, *Thermoelasticity*, Int. Series of Monographs on Aeronautics and Astronautics, Addison Wesley, 1962.