

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GUIDO VITERBO

Sulle onde sismiche superficiali

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 21, n° 4 (1967), p. 639-656

[<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_4_639_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_4_639_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLE ONDE SISMICHE SUPERFICIALI

GUIDO VITERBO

- § 1. Introduzione
- § 2. Impostazione matematica del problema
- § 3. Primo caso
- § 4. Secondo caso
- § 5. Terzo caso
- § 6. Esame dell'onda secondaria
- § 7. Analisi della componente superficiale.

§ 1. Introduzione.

Le equazioni dell'elasticità ammettono vari tipi di soluzioni particolari che rappresentano matematicamente possibili onde sismiche: tra queste la più famosa è la soluzione di Lord Rayleigh. Questa soluzione *descrive* molto bene le onde della fase principale di un terremoto, ma *non spiega affatto* il meccanismo di formazione e di propagazione di tale onde.

Scopo di questo lavoro è di colmare questa lacuna, impostando matematicamente il problema della formazione e della propagazione delle onde sismiche in modo che corrisponda esattamente al fenomeno fisico, così come ci appare sulla realtà, e dimostrando che la risoluzione del problema matematico, porta nella maniera più naturale, alle onde superficiali di Rayleigh.

In sismologia si ammette che un terremoto abbia origine da una improvvisa perturbazione, che interessa una piccolissima regione V del sottosuolo e che la Terra, comportandosi come un corpo elastico, trasmette in tutte le direzioni. Senonchè lo spostamento elastico nei punti di V supera di gran lunga i valori per i quali è lecito applicare la teoria matematica dell'elasticità; di conseguenza un'impostazione matematica coerente del problema esige di rappresentare l'onda sismica, che ha origine nella regione V ,

Pervenuto alla Redazione il 26 Giugno 1967.

Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato per la Matematica del C.N.R. (anno 1966-67).

mediante una soluzione delle equazioni dell'elasticità, che presenta una singolarità isolata nel punto I di V , detto ipocentro, nel quale lo spostamento elastico ha, nella realtà fisica, modulo massimo.

Consideriamo dunque un'onda elastica sinusoidale, emessa dall'ipocentro in un dato intervallo di tempo $0 \leq t \leq T$, che chiameremo brevemente *onda primaria*. La componente dell'onda che presenta maggiore interesse è ovviamente quella che si annulla all'infinito come $\frac{1}{R}$, essendo R la distanza dall'ipocentro: essa sarà rappresentata da una soluzione delle equazioni dell'elasticità del tipo:

$$(1) \quad \vec{S}_p = \text{rot } \vec{U}_p + \text{grad } \Phi_p$$

con

$$\vec{U} = \frac{e^{-jk_1 R}}{R} (A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}) e^{j\omega t}$$

$$(2) \quad \Phi_p = D \frac{e^{-jk_2 R}}{R} e^{j\omega t}$$

k_1 e k_2 essendo due costanti dipendenti dalle caratteristiche elastiche del mezzo e della pulsazione ω dell'onda, A, B, C e D quattro costanti arbitrarie, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ i versori della Terra di riferimento e j l'unità immaginaria.

Quando l'onda primaria, rappresentata da (1) e (2), raggiunge la superficie terrestre, si genera, per riflessione, un'altra onda che chiameremo *onda secondaria*.

Orbene in questo lavoro costruiremo, con un metodo simile a quello eseguito da Sommerfeld nello studio delle onde elettromagnetiche, la soluzione delle equazioni dell'elasticità che rappresenta l'onda secondaria e constateremo che una parte di essa si propaga praticamente alla superficie della Terra con tutte le caratteristiche della soluzione trovate da Lord Rayleigh.

§ 2. Impostazione matematica del problema.

Schematizziamo la Terra in un semi-spazio elastico omogeneo, assumiamo la superficie libera come piano $z = 0$ e, orientato l'asse z normalmente verso l'interno, scegliamo l'ipocentro nel punto I dell'asse z ad una profondità d dal suolo.

Sappiamo che il più generale tipo di oscillazione sinusoidale è dato dalla sovrapposizione di onde di condensazione, caratterizzate da un potenziale scalare Φ , e di onde di distorsione, caratterizzate da un potenziale

vettore U , e che detti potenziali soddisfano rispettivamente le equazioni:

$$(3) \quad \Delta_2 \Phi + k_2^2 \Phi = 0, \quad \Delta_2 \vec{U} + k_1^2 \vec{U} = 0,$$

ove le costanti k_1 e k_2 sono legate ai parametri elastici di Lamé λ e μ , alla

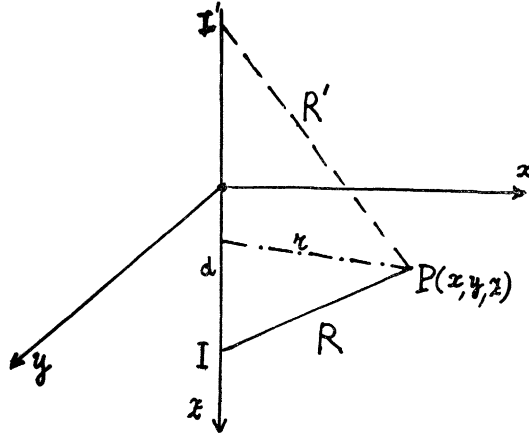


Fig. 1

densità ρ , alla costante c di smorzamento ed alla pulsazione ω dalle relazioni:

$$(4) \quad k_1 = \sqrt{\frac{\rho\omega^2 - j c \omega}{\mu}}, \quad k_2 = \sqrt{\frac{\rho\omega^2 - j c \omega}{\lambda + 2\mu}}.$$

Si noti che, tanto per k_1 , quanto per k_2 , si assume la determinazione a parte immaginaria negativa.

Ovviamente lo scalare Φ_p ed il vettore $\vec{U}_p$, definiti da (2), soddisfano le (3): come pure debbono soddisfare le (3) il potenziale scalare φ_s ed il potenziale vettore $\vec{u}_s$, legati allo spostamento elastico $\vec{S}_s$, che rappresenta l'onda secondaria, dalla relazione:

$$(5) \quad \vec{S}_s = \text{rot } \vec{u}_s + \text{grad } \varphi_s.$$

Naturalmente lo scalare φ_s ed il vettore $\vec{u}_s$ dovranno essere determinati in modo che si annullino le componenti dello sforzo sul piano $z = 0$, e cioè

in modo che siano soddisfatte le tre condizioni :

$$\begin{aligned}
 (Z_x)_{z=0} &= -\mu \left[\frac{\partial}{\partial z} (S_{px} + S_{sx}) + \frac{\partial}{\partial x} (S_{pz} + S_{sz}) \right]_{z=0} = 0 \\
 (6) \quad (Z_y)_{z=0} &= -\mu \left[\frac{\partial}{\partial z} (S_{py} + S_{sy}) + \frac{\partial}{\partial y} (S_{pz} + S_{sz}) \right]_{z=0} = 0 \\
 (Z_z)_{z=0} &= \left[-\lambda \operatorname{div} (\vec{S}_p + \vec{S}_s) + 2 \frac{\partial}{\partial z} (S_{pz} + S_{sz}) \right]_{z=0} = 0.
 \end{aligned}$$

La risoluzione delle equazioni differenziali (3), associate alle condizioni al contorno (6), si effettua, come vedremo, nel modo più semplice, osservando che, se J_0 è la funzione di Bessel di prima specie e di ordine zero e se $g(\tau)$ è una funzione arbitraria del parametro τ , l'equazione differenziale :

$$(7) \quad \Delta_2 f + k^2 f = 0$$

risulta soddisfatta sia dalla funzione :

$$(7') \quad f = \int_0^\infty g(\tau) J_0(\tau r) e^{-\sqrt{\tau^2 - k^2} z} d\tau,$$

sia dalle funzioni indipendenti che si ottengono derivando la f rispetto a x e rispetto a y .

Scegliendo opportunamente le funzioni $g(\tau)$ che entrano in gioco nella costruzione del potenziale scalare φ_s e del potenziale vettore $\vec{u}_s$, si riesce appunto a imporre le (6).

Per semplificare i calcoli si può, data la linearità ed omogeneità del problema, trattare separatamente i casi elementari che si ottengono prendendo uguali a zero o l'uno o l'altra delle costanti A, B, C, D che compaiono nella (2). La trattazione del caso generale si può così ridurre alla trattazione dei seguenti tre casi particolari :

$$1^0 \text{ caso : } A = B = C = 0$$

$$2^0 \text{ caso : } C = D = 0$$

$$3^0 \text{ caso : } A = B = D = 0.$$

Esamineremo separatamente questi tre casi, determinando, in ciascuno di essi, il potenziale scalare ed il potenziale vettore dell'onda secondaria.

§ 3. Primo caso.

Consideriamo un'onda primaria di condensazione di potenziale

$$(8) \quad \Phi_p = D \frac{e^{-jk_2 R}}{R} = \int_0^{\infty} \frac{\tau J_0(\tau r)}{\sqrt{\tau^2 - k_2^2}} e^{\sqrt{\tau^2 - k_2^2}(z-d)} d\tau \quad \text{per } z \leq d$$

(espressa nell'ultimo membro come sovrapposizione di onde cilindriche) che si compone con un'onda secondaria dipendente sia dal potenziale scalare

$$(9) \quad \varphi_s = \int_0^{\infty} g(\tau) J_0(\tau r) e^{-\sqrt{\tau^2 - k_2^2} z} d\tau$$

sia dal potenziale vettore

$$(10) \quad \vec{u}_s = \int_0^{\infty} \frac{J_1(\tau r)}{\tau r} [f_1(\tau) y \vec{i} + f_2(\tau) x \vec{j}] e^{-\sqrt{\tau^2 - k_1^2} z} d\tau.$$

Si osservi che nelle formule (9), (10) ed (11) si assumono per $\sqrt{\tau^2 - k_1^2}$ e $\sqrt{\tau^2 - k_2^2}$ le determinazioni a parte reale non negativa, in quanto a noi interessano i valori dello spostamento elastico per i valori di z compresi nell'intervallo $0 \leq z \leq d$. (Se interessassero i valori dello spostamento elastico per $z > d$ basterebbe sostituire nella (8) $(z - d)$ con $(d - z)$).

Tenendo presente che per la (4) è

$$(4') \quad k_1^2 = (\lambda + 2\mu) k_2^2$$

e ponendo per brevità

$$(11) \quad \lambda_1(\tau) = \sqrt{\tau^2 - k_1^2} \text{ e } \lambda_2(\tau) = \sqrt{\tau^2 - k_2^2},$$

ricaviamo per la componente Z_z dello sforzo l'espressione

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} Z_z = & \int_0^{\infty} J_0(\tau r) \left\{ g(\tau) e^{-\lambda_2(\tau)z} + D \frac{\tau e^{\lambda_2(\tau)(z-d)}}{\lambda_2(\tau)} (k_1^2 - 2\tau^2) + \right. \\ & \left. + [f_2(\tau) - f_1(\tau)] \lambda_1(\tau) e^{-\lambda_1(\tau)z} \right\} d\tau + \\ & + \left(1 - \frac{2x^2}{r^2} \right) \int_0^{\infty} J_0(\tau r) [f_1(\tau) - f_2(\tau)] \lambda_1(\tau) e^{-\lambda_1(\tau)z} d\tau \end{aligned}$$

che dovendo essere identicamente nulla sul piano $z=0$, dà luogo alle due equazioni

$$(a) \quad f_1(\tau) = -f_2(\tau)$$

$$(b) \quad g(\tau) (k_1^2 - 2\tau^2) - 2f_1(\tau) \lambda_1(\tau) = D \frac{2\tau^2 - k_1^2}{\lambda_2(\tau)} e^{-\lambda_2(\tau)d}.$$

Per Z_x e Z_y si ricavano invece le espressioni

$$\begin{aligned} \frac{2}{\mu x} Z_x = \frac{2}{\mu y} Z_y = & \int_0^{\infty} [J_0(\tau r) + J_2(\tau r)] [2\tau^2 g(\tau) \lambda_2(\tau) e^{-\lambda_2(\tau)z} + \\ & + f_1(\tau) (2\tau^2 - k_1^2) e^{-\lambda_1(\tau)z} - 2D \tau^3 e^{\lambda_2(\tau)(z-d)}] d\tau \end{aligned}$$

che, dovendo essere identicamente nulla sul piano $z=0$, conducono all'unica equazione

$$(c) \quad 2\tau^2 g(\tau) \lambda_2(\tau) + f_1(\tau) (2\tau^2 - k_1^2) = 2D \tau^3 e^{-\lambda_2(\tau)d}.$$

Dal sistema di equazioni (a), (b) e (c) si ricavano le funzioni incognite

$$\begin{aligned} f_1(\tau) = -f_2(\tau) &= D \frac{4\tau^3 (k_1^2 - 2\tau^2)}{N(\tau^2)} e^{-\lambda_2(\tau)d} \\ g(\tau) &= D \frac{e^{-\lambda_2(\tau)d}}{\lambda_2(\tau)} + D \frac{2\tau (2\tau^2 - k_1^2)}{\lambda_1(\tau) N(\tau^2)} e^{-\lambda_2(\tau)d}, \end{aligned}$$

avendo posto

$$(12) \quad N(\tau^2) = 4\tau^2 \lambda_1(\tau) \lambda_2(\tau) - (2\tau^2 - k_1^2)^2 = 4\tau^2 \sqrt{\tau^2 - k_1^2} \sqrt{\tau^2 - k_2^2} - (2\tau^2 - k_1^2)^2.$$

Sostituendo queste funzioni nella (9) e nella (10), introducendo la distanza R' dal punto I' , simmetrico di I rispetto al piano $z = 0$ (vedi fig. 1) e ricordando che analogamente alla (8)

$$(8') \quad \frac{e^{-jkR'}}{R'} = \int_0^{\infty} \frac{\tau J_0(\tau r)}{\sqrt{\tau^2 - k^2}} e^{-\sqrt{\tau^2 - k^2}(z+d)} d\tau,$$

si ottengono per i potenziali dell'onda secondaria le espressioni

$$(13) \quad \varphi_s = D \frac{e^{-jk_1 R'}}{R'} + D \int_0^{\infty} J(\tau r) \frac{2\tau(2\tau^2 - k_1^2)^2}{\lambda_2(\tau) N(\tau^2)} e^{-\lambda_2(\tau)(d+z)} d\tau$$

$$\vec{u}_s = D \frac{y\vec{i} - x\vec{j}}{r} \int_0^{\infty} J(\tau r) \frac{4\tau^2(k_1^2 - 2\tau^2 e^{-\lambda_2(\tau)d})}{N(\tau^2)} e^{-\lambda_1(\tau)z} d\tau.$$

§ 4. Secondo caso.

Consideriamo ora un'onda primaria di distorsione⁽¹⁾ di potenziale

$$(15) \quad \vec{U} = A \frac{e^{-jk_1 R}}{R} \vec{i}$$

ed un'onda secondaria dipendente sia dal potenziale scalare

$$(16) \quad \varphi_s = \int_0^{\infty} \frac{J_1(\tau r)}{\tau r} [f_1(\tau)v + f_2(\tau)y] e^{-\lambda_2(\tau)z} d\tau$$

sia dal potenziale vettore

$$(17) \quad \vec{u}_s = \int_0^{\infty} J_0(\tau r) [g_1(\tau)\vec{i} + g_2(\tau)\vec{j}] e^{-\lambda_1(\tau)z} d\tau +$$

$$+ \int_0^{\infty} \frac{J_1(\tau r)}{\tau r} [l_1(\tau)x + l_2(\tau)y] \vec{k} e^{-\lambda_1(\tau)z} d\tau.$$

⁽¹⁾ Non si lede la generalità dello studio ponendo in questo secondo caso $B = 0$. Ciò infatti equivale ad una opportuna scelta dell'asse delle x del riferimento, scelta non ancora sfruttata in precedenza.

Per le componenti delle tensioni sul piano $z = 0$, si trovano, tenendo presenti le (11), le seguenti espressioni;

$$\begin{aligned}
 \frac{2}{\mu} Z_x = & \int_0^\infty J_0(\tau r) [l_2(\tau) \lambda_1(\tau) + 2f_1(\tau) \lambda_2(\tau) + g_2(\tau) (3\tau^2 - 2k_1^2)] d\tau - \\
 & - \frac{x^2 - y^2}{r^2} \int_0^\infty J_2(\tau r) [g_2(\tau) \tau^2 + 2f_1(\tau) \lambda_2(\tau) - l_2(\tau) \lambda_1(\tau)] d\tau - \\
 & - \frac{xy}{r^2} \int_0^\infty J_2(\tau r) \left[l_1(\tau) \lambda_1(\tau) - g_1(\tau) \tau^2 + 2f_2(\tau) \lambda_2(\tau) - \frac{A\tau^3}{\lambda_1(\tau)} e^{-\lambda_1(\tau)d} \right] d\tau; \\
 \frac{2}{\mu} Z_y = & \int_0^\infty J_0(\tau r) \left[l_1(\tau) \lambda_1(\tau) + 2f_2(\tau) \lambda_2(\tau) + \right. \\
 & \left. + g_1(\tau) (3\tau^2 - 2k_1^2) + \frac{A\tau^3}{\lambda_1(\tau)} e^{-\lambda_1(\tau)d} + 2A\tau \lambda_1(\tau) e^{-\lambda_1(\tau)d} \right] d\tau + \\
 & + \frac{y^2 - x^2}{r^2} \int_0^\infty J_2(\tau r) \left[g_1(\tau) \tau^2 + 2f_2(\tau) \lambda_2(\tau) - l_1(\tau) \lambda_1(\tau) + \frac{A\tau^3}{\lambda_1(\tau)} e^{-\lambda_1(\tau)d} \right] d\tau + \\
 & + \frac{xy}{r^2} \int_0^\infty J_2(\tau r) [g_2(\tau) \tau^2 - l_2(\tau) \lambda_1(\tau) - 2f_1(\tau) \lambda_2(\tau)] d\tau; \\
 \frac{2}{\mu} Z_z = & x \int_0^\infty [J_0(\tau r) + J_2(\tau r)] [f_1(\tau) (k_1^2 - 2\tau^2) - 2g_2(\tau) \tau^2 \lambda_1(\tau)] d\tau + \\
 & + y \int_0^\infty [J_0(\tau r) + J_2(\tau r)] [f_2(\tau) (k_1^2 - 2\tau^2) + 2g_1(\tau) \tau^2 \lambda_1(\tau) - 2A\tau^3 e^{-\lambda_1(\tau)d}] d\tau.
 \end{aligned}$$

Imponendo ancora le condizioni che Z_x ; Z_y , Z_z si annullano identicamente sul piano $z = 0$, si ottiene il sistema

$$\begin{aligned}
 g_1(\tau) \tau^2 - 2f_2(\tau) \lambda_2(\tau) - l_1(\tau) \lambda_1(\tau) &= - \frac{A\tau^3}{\lambda_1(\tau)} e^{-\lambda_1(\tau)d} \\
 g_1(\tau) \lambda_1(\tau) + l_1(\tau) &= - A\tau e^{-\lambda_1(\tau)d}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g_1(\tau) \tau^2 \lambda_1(\tau) + f_2(\tau) (k_1^2 - 2\tau^2) &= 2A\tau^3 e^{-\lambda_1(\tau)d} \\
g_2(\tau) \tau^2 - 2f_1(\tau) \lambda_2(\tau) - l_2(\tau) \lambda_1(\tau) &= 0 \\
g_2(\tau) \lambda_1(\tau) + l_2(\tau) &= 0 \\
2g_2(\tau) \tau^2 \lambda_1(\tau) + f_1(\tau) (k_1^2 - 2\tau^2) &= 0
\end{aligned}$$

dal quale si ricava, con la stessa posizione (12)

$$\begin{aligned}
g_1(\tau) &= \frac{A\tau}{\lambda_1(\tau)} \cdot \frac{4\tau^2 \lambda_1(\tau) \lambda_2(\tau) + (2\tau^2 - k_1^2)^2}{N(\tau^2)} e^{-\lambda_1(\tau)d} \\
f_2(\tau) &= \frac{4A\tau^3 (2\tau^2 - k_1^2)}{N(\tau^2)} e^{-\lambda_1(\tau)d} \\
l_1(\tau) &= -\frac{8A\tau^3 \lambda_1(\tau) \lambda_2(\tau)}{N(\tau^2)} e^{-\lambda_1(\tau)d} \\
f_1(\tau) &= g_2(\tau) = l_2(\tau) = 0.
\end{aligned}$$

che, sostituisce nelle (16) e (17), danno i potenziali dell'onda secondaria in questo secondo caso

$$(18) \quad \varphi_s = A \frac{y}{r} \int_0^\infty J_1(\tau r) \frac{4\tau^2 (2\tau^2 - k_1^2) e^{-\lambda_1(\tau)d}}{N(\tau^2)} e^{-\lambda_2(\tau)z} d\tau$$

$$\begin{aligned}
(20) \quad \vec{u}_s &= A \frac{e^{-jk_1 R'}}{R'} \vec{i} + A \vec{i} \int_0^\infty J_0(\tau r) \frac{2\tau (k_1^2 - 2\tau^2)^2}{\lambda_1(\tau) N(\tau^2)} e^{-\lambda_1(\tau)(z+d)} d\tau - \\
&\quad - 8A \frac{x}{r} \vec{k} \int_0^\infty J(\tau r) \frac{\tau^2 \lambda_1(\tau) \lambda_2(\tau)}{N(\tau^2)} e^{-\lambda_1(\tau)(z+d)} d\tau.
\end{aligned}$$

§ 5. Terzo caso.

Resta da esaminare l'ultimo caso di un'onda primaria di distorsione di potenziale

$$(20) \quad \vec{U}_p = C \frac{e^{-jk_1 R}}{R} \vec{k}$$

alla quale è sufficiente associare un'onda secondaria pure di distorsione di potenziale :

$$(21) \quad \vec{u}_s = \int_0^{\infty} J_0(\tau r) g(\tau) \vec{k} e^{-\lambda_1(\tau) z} d\tau.$$

Imponendo le solite condizioni sul piano $z = 0$ si trova

$$g(\tau) = C \frac{\tau e^{-\lambda_1(\tau) d}}{\lambda_1(\tau)}.$$

Sostituendo nella (21) troviamo per $\vec{u}_s$ l'espressione

$$(22) \quad \vec{u}_s = C \frac{e^{-jk_1 R'}}{R'} \vec{k}.$$

§ 6. Esame dell'onda secondaria.

I potenziali dell'onda secondaria, che abbiamo trovato, dipendono da funzioni del tipo

$$(23) \quad F = \int_0^{\infty} \frac{J_n(\tau r)}{N(\tau^2)} \tau^{n+1} [M(\tau^2, x, y) e^{-\lambda_1(\tau) z} + Q(\tau^2, x, y) e^{-\lambda_2(\tau) z}] d\tau$$

(con M nullo per onde di condensazione ed Q nullo per onde di distorsione) M , Q e N essendo funzioni polidrome aventi come punti di diramazione od i due punti $\tau = \pm k_1$ oppure i due punti $\tau = \pm k_2$ o tutti e quattro i punti considerati. La funzione integranda presenta inoltre, nel piano complesso $\tau = \tau' + j\tau''$, singolarità polari nelle radici della equazione

$$(24) \quad N(\tau^2) = 4\tau^2 \sqrt{\tau^2 - k_1^2} \sqrt{\tau^2 - k_2^2} - (2\tau^2 - k_1^2)^2 = 0.$$

Risolviamo anzitutto questa equazione; ponendo in essa $\tau^2 = \frac{wk_1^2}{2}$, elevando a quadrato e ricordando il legame tra k_1 e k_2 dato dalle 4'), si ottiene l'equazione conseguenza :

$$(25) \quad 2w^3 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} - 2w^2 \frac{3\lambda + 4\mu}{\lambda + 2\mu} - 4w - 1 = 0.$$

Ora, per i materiali che compongono la crosta terrestre, i sismologi hanno trovato che λ è praticamente eguale a μ (da cui segue il valore di $\frac{1}{4}$ per il modulo di Poisson). Poniamo dunque nella (25) $\lambda = \mu$ (il che in-

plica $k_1^2 = 3k_2^2$ ⁽²⁾. La (25) si riduce a

$$4w^3 - 14w^2 + 12w - 3 = 0$$

che ammette le radici

$$\frac{1}{2}; \quad \frac{3 - \sqrt{3}}{2}; \quad \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

e quindi per τ^2 i corrispondenti valori

$$\tau_1^2 = \frac{k_1^2}{4}; \quad \tau_2^2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4} k_1^2; \quad \tau^{*2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{4} k_1^2.$$

Tenendo presente l'espressione di k_1^2 , data dalla (4), e la medesima determinazione dei segni dei radicali, facciamo vedere che solo τ^* soddisfa la nostra equazione, la cui soluzioni sono quindi i due soli valori $\pm \frac{\sqrt{3 + \sqrt{3}}}{2} k_1$, che cadono uno nel secondo quadrante del piano complesso e l'altro, che *unicamente ci interessa*, nel quarto.

Infatti poichè sia $\frac{1}{4}$ che $\frac{3 - \sqrt{3}}{4}$ sono minori di $\frac{1}{3}$, i due radicanti dell'equazione (24) calcolati in τ_1 od in τ_2 cadono nel secondo quadrante del piano complesso; il prodotto dei radicali ancora nel secondo quadrante e l'espressione $4\tau_i^2 \lambda_1(\tau_i) \lambda_2(\tau_i)$ con $i = 1$ o 2 , nel primo o secondo quadrante.

Invece $(2\tau_i^2 - k_1^2)^2$, sempre con $i = 1$ o 2 , non può cadere che nel terzo o quarto quadrante; da cui l'impossibilità che la differenza che compare nella (24) sia nulla per $\tau = \tau_1$ o per $\tau = \tau_2$. Invece poichè $\frac{3 + \sqrt{3}}{4}$ è maggiore di 1 si vede, con analogo ragionamento, che sia $4\tau^{*2} \lambda_1(\tau^*) \lambda_2(\tau^*)$ quanto $(2\tau^{*2} - k_1^2)^2$ cadono nel terzo o nel quarto quadrante; ma non potendo essi che essere od eguali od opposti, necessariamente coincidono.

Per eliminare la polidromia della funzione integranda, tagliamo il piano complesso lungo le linee l_1 e l_2 , uscenti dai punti k_1 e k_2 , di equazioni

$$\sqrt{\tau^2 - k_1^2} = jp, \quad \sqrt{\tau^2 - k_2^2} = jp$$

essendo p parametro reale.

Con riferimento alla figura indichiamo con γ' e γ'' le linee Bk_1C e Dk_2E costituite dai bordi dei tagli, con γ^* una circonferenza con centro τ^* e raggio minore delle distanze del punto τ^* dai punti k_1 k_2 e dall'asse reale;

(2) $\lambda \cong \mu$ le conclusioni che interessano sono analoghe.

infine, detto ε un numero maggiore di $|k_1|$, di $|k_2|$ e della massima distanza dall'origine dei punti di γ^* , indichiamo con Γ l'insieme degli archi AB , CD e EM di circonferenza di centro O e raggio ε e con Γ' l'arco AL della stessa circonferenza.

Ciò premesso decomponiamo l'integrale F in due parti, esprimendo la funzione di Bessel che vi compare per mezzo delle funzioni di Hanchel dello stesso ordine.

In conseguenza di tale decomposizione, che ha significato se r è diverso da zero, possiamo scrivere

$$F = F_1 + F_2$$

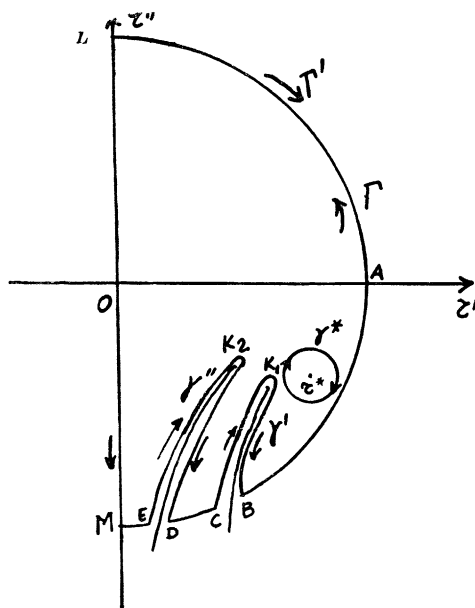
con

$$F_1 = \int_0^\infty h_n^{(1)} d\tau = \int_0^\infty \frac{H_n^{(1)}(\tau r) \tau^{n+1}}{N(\tau^2)} [M(\tau^2, x, y) e^{-\lambda_1(\tau)z} + Q(\tau^2, x, y) e^{-\lambda_2(\tau)z}] d\tau$$

e

$$F_2 = \int_0^\infty h_n^{(2)} d\tau = \int_0^\infty \frac{H_n^{(2)}(\tau r) \tau^{n+1}}{N(\tau^2)} [M(\tau^2, x, y) e^{-\lambda_1(\tau)z} + Q(\tau^2, x, y) e^{-\lambda_2(\tau)z}] d\tau,$$

interpretabili come integrali estesi al semiasse positivo τ' del piano complesso $\tau = \tau' + j\tau''$. Per il teorema di Cauchy, con evidente orientamento dei cam-



mini di integrazione, si ha

$$F_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left[\int_0^L h_n^{(1)} d\tau + \int_{\Gamma'} h_n^{(1)} d\tau \right]$$

$$F_2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \left[\int_0^M h_n^{(2)} d\tau + \int_{\gamma} h_n^{(2)} d\tau + \int_{\Gamma} h_n^{(2)} d\tau + \int_{\gamma^*} h_n^{(2)} d\tau \right],$$

avendo posto

$$\gamma = \gamma' + \gamma''.$$

Ma per la proprietà delle funzioni di Hankel di ordine intero, espressa dalle uguaglianze

$$H_{2n}^{(2)}(-x) = -H_{2n}^{(1)}(x) \quad \text{e} \quad H_{2n+1}^{(2)}(-x) = H_{2n+1}^{(1)}(x)$$

si ha in tutti i nostri integrali

$$\int_0^L h_n^{(1)} d\tau = - \int_0^M h_n^{(2)} d\tau;$$

inoltre, dalle espressioni asintotiche delle stesse funzioni

$$(26) \quad H_{\nu}^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{j\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right)}, \quad H_{\nu}^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-j\left(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\nu\pi}{2}\right)}$$

segue

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{\Gamma'} h_n^{(1)} d\tau = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} h_n^{(2)} d\tau = 0;$$

infine, per la proprietà delle funzioni analitiche in un polo

$$\int_{\gamma^*} h_n^{(2)} d\tau = -2\pi j R^*$$

con R^* residuo della funzione integranda in τ^* .

Tale residuo può essere calcolato come

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau^*} H_n^{(2)}(\tau r) \tau^{n+1} [M(\tau^2, x, y) e^{-\lambda_1(\tau)z} + Q(\tau^2, x, y) e^{-\lambda_2(\tau)z}] \frac{\tau - \tau^*}{N(\tau^2)} =$$

$$= H_n^{(2)}(\tau^* r) \tau^{*n+1} [M(\tau^{*2}, x, y) e^{-\lambda_1(\tau^*)z} + Q(\tau^{*2}, x, y) e^{-\lambda_2(\tau^*)z}] \lim_{\tau \rightarrow \tau^*} \frac{\tau - \tau^*}{N(\tau^2)};$$

applicando la regola di L'Hospital;

$$\lim_{\tau \rightarrow \tau^*} \frac{\tau - \tau^*}{N(\tau^2)} = \frac{3}{8\tau^* k_1^2 \left[3 - \frac{2\tau^{*2} k_1^2}{(2\tau^{*2} - k_1^2)^2} \right]} = \frac{1}{4k_1^3} \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}}.$$

Concludendo si ha,

$$(27) \quad F = \int_{\gamma} h_n^{(2)} d\tau - \\ - \frac{j\pi}{2k_1^3} \sqrt{\frac{3 - \sqrt{3}}{3}} H_n^{(2)}(\tau^* r) [M(\tau^{*2}, x, y) e^{-\lambda_1(\tau^*)z} + Q(\tau^{*2}, x, y) e^{-\lambda_2(\tau^*)z}] \tau^{*n-1}.$$

Nella (27) l'ultimo termine può esse interpretato, per la presenza del fattore esponenziale, come potenziale di un'onda *superficiale*, cioè di un'onda la cui densità di energia è praticamente diversa da zero soltanto nei punti dello stato compreso tra i piani $z=0$ e $z=h$, essendo il valore di h tale da rendere trascurabili i due moduli

$$|e^{-\lambda_1(\tau^*)h}| \quad e \quad |e^{-\lambda_2(\tau^*)h}|.$$

Invece nella (27) l'integrale esteso a γ rappresenta un'onda cosiddetta *spaziale*, e cioè un'onda la cui ampiezza non si smorza esponenzialmente col crescere di z . Infatti, se si tiene presente che la funzione $\lambda_1(\tau)$ risulta immaginaria pura sulla linea γ' ed a parte reale negativa su γ'' , mentre la funzione $\lambda_2(\tau)$ risulta immaginaria pura sulla linea γ'' ed a parte reale negativa su γ' , se ne conclude che la funzione integranda risulta uguale, per ogni valore di τ, x e y , alla somma di due funzioni di z , l'una sinusoidale pura, l'altra sinusoidale smorzata.

§ 7. Analisi della componente superficiale.

Nel paragrafo precedente abbiamo dimostrato la possibilità di decomporre l'onda sismica secondaria nella somma di un'onda superficiale e di un'onda spaziale. Analizziamo ora a fondo le caratteristiche dell'onda superficiale mettendone particolarmente in evidenza il suo comportamento asintotico.

Con l'opportuna scelta del riferimento (vedi nota 1) i potenziali della componente superficiale dell'onda sismica risultano, in ogni punto fuori del-

l'asse z ($r \neq 0$);

$$(28) \quad \varphi^* = -j \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} k_1 \left[D \sqrt{3\sqrt{3}-3} H_0^{(2)}(\tau^* r) e^{-\lambda_2^*} + \right. \\ \left. + A \sqrt{3+\sqrt{3}} \frac{y}{r} H_1^{(2)}(\tau^* r) e^{-\lambda_1^* d} \right] e^{-\lambda_2^* z + j\omega t};$$

$$(29) \quad \vec{u}^* = j \frac{\pi(1+\sqrt{2})}{2\sqrt{3}} k_1 \left\{ \left[D \sqrt{3+\sqrt{3}} \frac{y}{r} H_1^{(2)}(\tau^* r) e^{-\lambda_2^* d} - \right. \right. \\ \left. - A \sqrt{5+3\sqrt{3}} H_1^{(2)}(\tau^* r) e^{-\lambda_1^* d} \right] \vec{i} - D \sqrt{3+\sqrt{3}} \frac{x}{r} H_1^{(2)}(\tau^* r) e^{-\lambda_2^*} \vec{j} + \\ \left. + A \sqrt{\frac{3+\sqrt{3}}{3}} \frac{x}{r} H_1^{(2)}(\tau^* r) e^{-\lambda_1^* d} \vec{k} \right\} e^{-\lambda_2^* z + j\omega t},$$

dove abbiamo indicato con λ_1^* e λ_2^* i valori di $\lambda_1(\tau)$ e $\lambda_2(\tau)$ in τ^* , cioè

$$\lambda_1^* = \sqrt{\tau^{*2} - k_1^2} = \frac{\sqrt{3-1}}{2} k_1 \quad \text{e} \quad \lambda_2^* = \sqrt{\tau^{*2} - k_2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5+3\sqrt{3}}{3}} k_1.$$

Possiamo allora ricavarci il relativo spostamento

$$\vec{S}^* = (\text{grad } \varphi^* + \text{rot } \vec{u}^*) e^{j\omega t}$$

per i punti P del piano (x, y) origine esclusa. Introducendo in tale piano un sistema di coordinate polari (r, ϑ) col semiasse polare coincidente con il semiasse positivo delle x , indicando con $\vec{n}_1$ il versore radiale, cioè il versore di $(P-0)$, e con $\vec{n}_2$ il versore trasverso, tale spostamento è espresso da

$$(29) \quad \vec{S} = -j \frac{\pi(1+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}} k_1^2 \left\{ \left[D \sqrt{2\sqrt{3}-3} H_0^{(2)}(\tau^* r) e^{-\lambda_2^* d} + \right. \right. \\ \left. + A \sin \vartheta \frac{H_0^{(2)}(\tau^* r) - H_2(\tau^* r)}{2} e^{-\lambda_1^* d} \right] \vec{n}_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + \cos \vartheta \frac{H_0^{(2)}(\tau^* r) + H_2^{(2)}(\tau^* r)}{2} e^{-\lambda_1^* d} \vec{n}_2 + \\
& + \left[DH_0^{(2)}(\tau^* r) e^{-\lambda_2^* d} + A \sqrt{\frac{3+2\sqrt{3}}{3}} \sin \vartheta H_1^{(2)}(\tau^* r) e^{-\lambda_1^* d} \right] \vec{k} \Big\} e^{j\omega t}.
\end{aligned}$$

Per i punti lontani dall'epicentro, sostituendo alle funzioni di Hankel le loro espressioni asintotiche, si ha :

$$\begin{aligned}
(30) \quad \vec{S}_\infty = & \sqrt{\frac{\pi}{r}} \sqrt{\frac{9+5\sqrt{3}}{3}} k_1^2 [\sqrt{2\sqrt{3}-3} D e^{-\lambda_2^* d - j\frac{\pi}{2}} + \\
& + A \sin \vartheta e^{-\lambda_1^* d}] e^{-j(\tau^* r - \frac{\pi}{2} - \omega t)} \vec{n}_1 + \\
& + \frac{\sqrt{\pi}}{r\sqrt{r}} \sqrt{\frac{9+5\sqrt{3}}{3}} k_1^2 A \cos \vartheta e^{-\lambda_1^* d} e^{-j(\tau^* r + \frac{3}{4}\pi - \omega t)} \vec{n}_2 + \\
& + \sqrt{\frac{9+5\sqrt{3}}{3}} \sqrt{\frac{2\sqrt{3}-3}{3}} k_1^2 [\sqrt{2\sqrt{3}-3} D e^{-\lambda_2^* d - j\frac{\pi}{2}} + \\
& + A \sin \vartheta e^{-\lambda_1^* d}] e^{-j(\tau^* r + \frac{\pi}{4} - \omega t)} \vec{k}.
\end{aligned}$$

Queste onde si trasmettono quindi, in assenza di smorzamento, con la velocità

$$(31) \quad v = \frac{\omega}{\tau_2} = \sqrt{\frac{2\mu}{e} \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3}}$$

caratteristica delle onde di Rayleigh.

Se, con evidente riferimento alla direzione di propagazione dell'onda, chiamiamo le tre componenti cilindriche dello spostamento

$$S_r = \vec{S} \cdot \vec{n}_1, \quad S_\vartheta = \vec{S} \cdot \vec{n}_2, \quad S_z = \vec{S} \cdot \vec{k}$$

rispettivamente componente orizzontale longitudinale, componente orizzontale trasversale e componente verticale, dalla (30) discende che a grande distanza dall'epicentro la componente orizzontale trasversale è trascurabile rispetto alle altre due : risultato in evidente accordo con la teoria di Rayleigh secondo la quale tale componente è nulla.

Ricordiamo che A e D sono costanti complesse, dipendenti delle caratteristiche dell'onda primaria, come d'altronde k_1 , λ_1^* e λ_2^* , posto

$$D_0 = k_1^2 D e^{-\lambda_2^* d - j \frac{\pi}{2}} = D'_0 + j D''_0$$

$$A_0 = k_1^2 A e^{-\lambda_1^* d} = A'_0 + j A''_0$$

si ricava :

$$(32) \quad S_{\text{cor}}^* = \sqrt{\frac{\pi}{r}} \sqrt{\frac{9+5\sqrt{3}}{3}} \left[\sqrt{2\sqrt{3}-3} D'_0 + A'_0 \sin \vartheta + j (\sqrt{2\sqrt{3}-3} D''_0 + A''_0 \sin \vartheta) \right] e^{-j \left(\tau^* r - \frac{\pi}{4} + \omega t \right)}$$

$$S_{\text{coz}}^* = \sqrt{\frac{\pi}{r}} \sqrt{\frac{9+5\sqrt{3}}{3}} \sqrt{\frac{2\sqrt{3}+3}{3}} \left[\sqrt{2\sqrt{3}+3} D'_0 + A'_0 \sin \vartheta + j (\sqrt{2\sqrt{3}-3} D''_0 + A''_0 \sin \vartheta) \right] e^{-j \left(\tau^* r + \frac{\pi}{4} + \omega t \right)}$$

Ponendo quindi

$$E = \sqrt{[(2\sqrt{3}-3) |D'_0|^2 + \sin^2 \vartheta |A'_0|^2 + 2\sqrt{2\sqrt{3}-3} \sin \vartheta (A'_0 D'_0 + A''_0 D''_0)] \pi} \sqrt{\frac{9+5\sqrt{3}}{3}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\sqrt{2\sqrt{3}-3} D''_0 + A''_0 \sin \vartheta}{\sqrt{2\sqrt{3}-3} D'_0 + A'_0 \sin \vartheta}$$

l'espressioni di S_{cor}^* e di S_{coz}^* diventano

$$S_{\text{cor}}^* = \frac{E}{\sqrt{r}} e^{-j \left(\tau^* r - \omega t - \alpha - \frac{\pi}{4} \right)}$$

$$S_{\text{coz}}^* = \frac{E}{\sqrt{r}} \sqrt{\frac{2\sqrt{3}+3}{3}} e^{-j \left(\tau^* r - \omega t - \alpha + \frac{\pi}{4} \right)}$$

Dalle (33) e (34) si ricava anzitutto

a) che in una data stazione di osservazione lo sfasamento tra le due componenti S_{cor}^* e S_{coz}^* è uguale a $\frac{\pi}{2}$;

b) che il rapporto tra le ampiezze della componente verticale e della componente orizzontale longitudinale è indipendente dalla stazione di osservazione ed è uguale a $\sqrt{\frac{2\sqrt{3}+3}{3}}$.

Questi risultati concordano pienamente con quelli della teoria delle onde superficiali di Rayleigh.

Ma dalla (33) e (34) si ricava inoltre un risultato nuovo e cioè che, se $A \neq 0$, cioè *se è presente una componente orizzontale del potenziale vettore dell'onda primaria, sia l'ampiezza sia lo spostamento di fase delle due componenti orizzontale longitudinale e verticale dello spostamento dipendono da ϑ* , cioè dall'angolo che la direzione del componente orizzontale del potenziale vettore forma con la direzione della retta che congiunge l'epicentro con la stazione di osservazione.

Tale dipendenza da ϑ non poteva essere messa in evidenza che da una trattazione che impostasse globalmente e non localmente il problema della formazione e della propagazione delle onde sismiche superficiali. Sarebbe interessante, studiando i sismogrammi di uno *stesso* terremoto in *varie* stazioni di osservazione, trovare una conferma sperimentale della legge espressa dalle (33).

*Facoltà di Ingegneria
Università di Pisa*