

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

G. DA PRATO

E. GIUSTI

Equazioni di evoluzione in L^p

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 21, n° 4 (1967), p. 485-505

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_4_485_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

EQUAZIONI DI EVOLUZIONE IN L^p .

G. DA PRATO · E. GIUSTI (*)

Introduzione.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, A un operatore differenziale fortemente ellittico in Ω di ordine $2m$ a coefficienti $C^\infty(\overline{\Omega})$.

Consideriamo il problema di Dirichlet⁽¹⁾:

$$(1) \quad \begin{cases} Au = f & f \in L^p(\Omega) \\ u \in H_0^m(\Omega). \end{cases}$$

È noto [1] [3] [8] che la realizzazione di A in $L^p(\Omega)$ sotto le condizioni di Dirichlet è un operatore lineare chiuso in $L^p(\Omega)$ con dominio $D_A(L^p) = H^{2m,p}(\Omega) \cap H_0^m(\Omega)$, è generatore infinitesimale di un semigruppato analitico [9], ed il suo risolvente $R(\lambda, A)$ verifica una maggiorazione del tipo:

$$(2) \quad \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{|\lambda|}$$

al variare di λ in un opportuno settore del piano complesso $\mathbb{C}$, che si può sempre supporre contenere il semipiano $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

Applicando il teorema di Hille-Yosida [9] [15], si trova che il problema di Cauchy

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = Au \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

con $u_0 \in D_A$, ammette una ed una sola soluzione $u(x, t)$ appartenente a $C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+)$.

Pervenuto alla Redazione il 20 Dicembre 1966 ed in forma definitiva il 16 Marzo 1967.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del C. N. R.

(1) Per le notazioni vedi il paragrafo 1.

Se in particolare A è formalmente autoaggiunto (cosicchè si può supporre che il suo spettro sia reale negativo) e se $p = 2$, si provano facilmente le maggiorazioni:

$$(4) \quad \|R(\lambda, A)\| \leq \begin{cases} \frac{1}{|\lambda|} & \text{se } \operatorname{Re} \lambda > 0 \\ \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda|} & \text{se } \operatorname{Re} \lambda \leq 0, \operatorname{Im} \lambda \neq 0. \end{cases}$$

Consideriamo allora il problema di Cauchy associato all'equazione di Schrödinger:

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = iAu \\ u(0) = u_0 \in D_A(L^2). \end{cases}$$

Poichè $R(\lambda, iA) = -iR(-i\lambda, A)$, segue da (4), per ogni $t > 0$

$$(6) \quad \|R(t, iA)\| \leq \frac{1}{t}$$

cosicchè iA è generatore infinitesimale di un semigruppò di contrazione (non analitico) [9] ed il problema (5) ha soluzione unica $u \in D_A$ per ogni $t \in \bar{R}_+$.

Un risultato analogo si trova per l'equazione delle onde in $L^2(\Omega)$ [10]. Consideriamo il problema di Cauchy

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au \\ u(0) = u_0 \in D_A(L^2) \\ u'(0) = v_0 \in H_0^m(\Omega) \end{cases}$$

che, come è noto, può scriversi nella forma:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ u(0) = u_0 \in D^A(L^2), v(0) = v_0 \in H_0^m(\Omega). \end{cases}$$

L'operatore $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A & 0 \end{pmatrix}$ è generatore infinitesimale di un semigruppò di contrazione [15], per cui il problema (7) ha soluzione unica $u \in D_A(L^2)$, con $\frac{\partial u}{\partial t} \in H_0^m(\Omega) \forall t \in \bar{R}_+$.

Nel caso in cui p sia diverso da 2, non è noto se iA ed $\mathcal{A}$ siano generatori di semigruppì distribuzioni [11] [13].

In questo lavoro proviamo che ciò avviene ed anzi che iA ed $\mathcal{A}$ sono generatori di semigruppì regolarizzabili [6].

I risultati ottenuti sono riportati nel § 6.

Per quanto riguarda l'equazione di Schrödinger si dimostra che se $u_0 \in D_{A^l}(L^p)^{(2)}$ allora esiste una soluzione unica $u(t) \in D_A(L^p)$ per ogni $t > 0$.

Per l'equazione delle onde, se $\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \in D_{\mathcal{A}^k}(L^p)^{(2)}$ allora esiste una soluzione unica $u(t)$ tale che $\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \end{pmatrix} \in D_{\mathcal{A}}(L^p)$ per ogni $t > 0$.

Per provare che iA e $\mathcal{A}$ sono generatori di R -semigruppì occorre conoscere proprietà spettrali di A più raffinate di quelle contenute nella (2); più precisamente occorre conoscere l'andamento di $\|R(\lambda, A)\|$ per tutti i λ di $\mathbb{C}$ (eccettuati ovviamente i λ reali negativi) mentre (2) dà informazioni per un arbitrario ma fissato settore di centro O di $\mathbb{C}$ escludente l'asse reale negativo.

Abbiamo provato una maggiorazione del tipo:

$$(9) \quad \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M(1 + |\lambda|)^h}{|\lambda| |\cos \theta/2|} \quad h \text{ intero positivo.}$$

Resta per noi aperto il problema di trovare la migliore maggiorazione.

Osserviamo infine che dalla (9) segue che iA e $\mathcal{A}$ sono generatori infinitesimali di semigruppì distribuzioni, ma il Teorema di Lions in [11] assicura soltanto che se ad esempio $u_0 \in D_A$ allora (5) ha una soluzione distribuzione.

Il § 1 è dedicato alle notazioni, i § 2 e 3 allo studio astratto delle equazioni di Schrödinger e delle onde per un operatore A tale che valga la maggiorazione (9), i § 4, 5 alle proprietà spettrali di A rispettivamente in L^2 ed L^p ed il § 6 all'esposizione dei risultati.

Ringraziamo S. Campanato e G. Stampacchia per utili discussioni.

1. Notazioni e richiami.

Se T è uno spazio topologico e Q un sottoinsieme di T , $\overline{Q}$ è la chiusura di Q in T , $T \setminus Q$ è l'insieme dei punti di T non appartenenti a Q .

⁽²⁾ l e k sono due interi positivi dipendenti da p , dalla dimensione dello spazio $\mathbb{R}^n$ e dall'ordine $2m$ di A .

$\mathbb{R}$ (risp. $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$) è l'insieme dei numeri reali (risp. positivi, negativi) munito della topologia abituale.

$\mathbb{C}$ (risp. $\mathbb{C}_+$, $\mathbb{C}_-$) è l'insieme dei numeri complessi (risp. con parte reale positiva, con parte reale negativa) munito della topologia abituale.

$\mathbb{R}^n$ è il prodotto topologico di n copie di $\mathbb{R}$; $x = (x_1, \dots, x_n)$ è il generico elemento di $\mathbb{R}^n$.

Ω è un aperto limitato e convesso di $\mathbb{R}^n$, con frontiera $\partial\Omega$ di classe C^∞ , $|\Omega|$ è la misura di Lebesgue di Ω .

Poniamo:

$$(1.1) \quad D_h^0 = 1, D_h^k = i^{-k} \frac{\partial^k}{\partial x_h^k} \quad (k = 1, 2, \dots; h = 1, \dots, n; x \in \mathbb{R}^n).$$

Se $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$ con $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ interi non negativi, poniamo:

$$(1.2) \quad |\sigma| = \sum_{i=1}^n \sigma_i$$

$$(1.3) \quad D^\sigma = D_1^{\sigma_1} \dots D_n^{\sigma_n}.$$

$L^p(\Omega)$ è lo spazio di Banach delle funzioni misurabili di potenza p sommabile in Ω , con la norma:

$$(1.4) \quad \|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}.$$

$C^\infty(\Omega)$ è l'insieme delle funzioni infinitamente derivabili con continuità in $\bar{\Omega}$ e $C_0^\infty(\Omega)$ il sottoinsieme di C^∞ delle funzioni a supporto compatto contenuto in Ω .

$H^{k,p}(\Omega)$ (risp. $H_0^{k,p}(\Omega)$) è il completamento di $C^\infty(\Omega)$ (risp. $C_0^\infty(\Omega)$) rispetto alla norma:

$$(1.5) \quad \|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\sigma| \leq k} \|D^\sigma u\|_p^p \right)^{1/p} \quad (3).$$

Quando non vi sia possibilità di confusione sopprimeremo Ω dalle notazioni $L^p(\Omega)$, $C^\infty(\Omega)$, ecc.

(3) Per $p = 2$ scriveremo anche $H^k(\Omega)$ (risp. $H_0^k(\Omega)$) in luogo di $H^{k,2}(\Omega)$ (risp. $H_0^{k,2}(\Omega)$); inoltre porremo $\|u\|_k = \|u\|_{k,2}$, $\|u\|_0 = \|u\|_2$, $(u, v)_0 = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx$.

Se X è uno spazio di Banach, 1 rappresenta l'operatore identità in X , $C^k(\mathbb{R}_+; X)$ ($k = 0, 1, 2, \dots, \infty$) è l'insieme delle funzioni su $\mathbb{R}_+$ a valori in X , k volte differenziabili in $\mathbb{R}_+$ rispetto alla topologia forte di X .

Se A è un operatore lineare chiuso in X , $D_A(X)$ rappresenta il dominio di A e, per ogni intero positivo h , $D_{A^h}(X)$ il dominio di A^h :

$$(1.6) \quad D_{A^h} = \{x \in X : A^i x \in D_A, i = 0, 1, \dots, h-1\}.$$

$\sigma(A)$ è lo spettro di A e $R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$ il risolvente di A .

Un semigruppato regolarizzabile (R -semigruppato) H in X è un'applicazione fortemente continua di $\overline{\mathbb{R}}_+$ nell'algebra degli operatori lineari continui in X tale che:

$$(1.7) \quad H(t)H(s) = H(s)H(t) = H(t+s)H(0) \quad \forall t, s \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

$$(1.8) \quad H(0) \text{ è iniettiva e l'immagine di } H^k(0) \text{ è densa in } X \text{ per ogni intero non negativo } k.$$

Un R -semigruppato H è di tipo esponenziale se esistono due costanti M ed ω tali che:

$$(1.9) \quad \|H(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad \forall t \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Nel corso del lavoro indicheremo con c costanti positive che di volta in volta possono essere diverse⁽⁴⁾.

2. Equazione di Schrödinger.

In questo paragrafo A rappresenta un operatore lineare chiuso in uno spazio di Banach X , con dominio D_A denso in X e verificante le seguenti condizioni:

$$(2.1) \quad \sigma(A) \subset \mathbb{R}_-$$

$$(2.2) \quad \|R(\lambda, A)\| \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^s}{|\lambda| \cos \theta/2} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}}_-$$

essendo $\theta = \arg \lambda$ ($-\pi < \theta < \pi$), ed s un numero reale non negativo.

Il seguente lemma è una generalizzazione del Teorema [6.1] in [6].

⁽⁴⁾ Soltanto quando vi sia possibilità di confusione sarà precisata la dipendenza di c da altre variabili.

LEMMA [2.I]. Sia U un operatore lineare chiuso in uno spazio di Banach X , con dominio D_U denso in X , e verificante le seguenti condizioni:

$$(2.3) \quad \sigma(U) \subset \overline{\mathbb{C}}_- \setminus \{0\}$$

$$(2.4) \quad \|R(\lambda, U)\| \leq c(1 + |\lambda|)^s \quad \forall \lambda \in \omega + \mathbb{C}_+, \omega \in \mathbb{R}$$

con s numero reale non negativo.

Allora posto:

$$(2.5) \quad B = U^{-[s]-2}$$

dove $[s]$ è il più grande intero non superiore a s , e

$$(2.6) \quad R_B(\lambda, U) = BR(\lambda, U) \quad \lambda \in \omega + \mathbb{C}_+$$

esiste un unico R -semigruppone esponenziale che ha come trasformata di Laplace $R_B(\lambda, U)$.

La dimostrazione è analoga a quella del Teorema [6.I] in [6].

In modo analogo al Teorema [6.II] in [6] si prova anche il seguente lemma:

LEMMA [2.II]. Se U verifica le condizioni del Lemma [2.I] allora il problema di Cauchy:

$$(2.7) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = Uu \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

con $u(t)$ funzione su $\overline{\mathbb{R}}_+$ a valori in X e $u_0 \in D_{U^{[s]+2+k}}$ ($k = 1, \dots$) ammette una e una sola soluzione $u(t) \in D_{U^k}$.

TEOREMA [2.I]. Sia A un operatore lineare chiuso in uno spazio di Banach X , con dominio D_A denso in X , e verificante le condizioni (2.1) e (2.2). Il problema di Cauchy:

$$(2.8) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = iAu \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

con $u(t)$ funzione su $\overline{\mathbb{R}}_+$ a valori in X e $u_0 \in D_{A^{[s]+2+k}}$ ammette una e una sola soluzione $u(t) \in D_{A^k}$.

DIMOSTRAZIONE. Posto $U = iA$, U è un operatore lineare chiuso in X con $D_U = D_A$ e risulta, come si verifica facilmente:

$$(2.9) \quad R(\lambda, U) = -iR(-i\lambda, A) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Dalla (2.2) si ricava:

$$\|R(\lambda, U)\| = \|R(-i\lambda, A)\| \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^s}{|\lambda| \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} \leq c 2^{1/2} \frac{(1 + |\lambda|)^s}{\operatorname{Re} \lambda}$$

da cui

$$\|R(\lambda, U)\| \leq c(1 + |\lambda|)^s \quad \forall \lambda \in 1 + \mathbb{C}_+.$$

L'operatore U verifica allora le ipotesi del Lemma [2.II], da cui segue la tesi.

3. Equazione delle onde.

Siano Y e Z due spazi di Banach con norma rispettivamente $|\cdot|_Y$ e $|\cdot|_Z$ tali che Y sia contenuto in Z algebricamente e topologicamente ($|x|_Z \leq |x|_Y \quad \forall x \in Y$) e Y sia denso in Z .

Se T è un'applicazione lineare e continua di Z in Z (risp. di Y in Y , risp. di Z in Y) indicheremo con $|T|_Z$ (risp. $|T|_Y$, risp. $|T|_{Z \rightarrow Y}$) la norma di T .

Sia A un operatore lineare chiuso in Z con dominio $D_A(Z)$ ed in Y con dominio $D_A(Y)$ verificante le seguenti condizioni:

- i) $D_A(Z) \subset Y$, $D_A(Z)$ è denso in Y
- ii) lo spettro di A , $\sigma(A)$, è lo stesso sia in Y che in Z e:

$$(3.1) \quad \sigma(A) \subset \mathbb{R}_-$$

- iii) esiste un numero non negativo s tale che $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ risulti:

$$(3.2) \quad |R(\lambda, A)|_Z \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^s}{|\lambda| \cos \theta/2}$$

$$(3.3) \quad |R(\lambda, A)|_Y \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^s}{|\lambda| \cos \theta/2}$$

$$(3.4) \quad |R(\lambda, A)|_{Z \rightarrow Y} \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^s}{|\lambda|^{1/2} \cos \theta/2}$$

dove $\theta = \arg \lambda$ la (3.4) avendo senso in virtù della i).

Muniamo infine $D_A(Z)$ della norma:

$$(3.5) \quad \|x\|_{D_A(Z)} = \|Ax\|_Z \quad \forall x \in D_A(Z)$$

(la (3.5), in virtù della (3.1), definisce una norma equivalente a quella del grafico di A), ed osserviamo che se $\lambda \notin \sigma(A)$, $R(\lambda, A)$ applica Y in $D_A(Y)$ e quindi in $D_A(Z)$. Ha quindi senso l'ulteriore condizione:

iv)

$$(3.6) \quad \|R(\lambda, A)\|_{Y \rightarrow D_A(Z)} \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^s}{|\lambda|^{1/2} \cos \theta/2} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{R}}_-.$$

Indichiamo con X lo spazio di Banach somma diretta di Y e Z :

$$(3.7) \quad X = Y \oplus Z$$

con la norma

$$(3.8) \quad \left\| \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right\| = \|y\|_Y + \|z\|_Z \quad y \in Y, \quad z \in Z.$$

Sia U l'operatore lineare in X così definito:

$$(3.9) \quad U \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ Ay \end{pmatrix}$$

Il dominio di tale operatore è

$$D_U = D_A(Z) \oplus Y$$

e D_U è denso in X .

Nel seguito l'operatore U sarà anche rappresentato con la matrice

$$(3.10) \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

LEMMA [3.1] U è chiuso in X .

DIMOSTRAZIONE. Sia $\{x_n\} = \left\{ \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} \right\}$ una successione in D_U tale che:

$$(3.11) \quad x_n = \begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} \rightarrow x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \text{ in } X$$

$$(3.12) \quad Ux_n = \begin{pmatrix} z_n \\ Ay_n \end{pmatrix} \rightarrow \bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \text{ in } X.$$

Dalla (3.12) segue che $z_n \rightarrow \bar{y}$ in Y , per cui $z = \bar{y} \in Y$. Inoltre, per la (3.11), $y_n \rightarrow y$ in Y , e quindi in Z , mentre, per la (3.12) $Ay_n \rightarrow \bar{z}$ in Z . Poichè A è chiuso, $y \in D_A(Z)$ e $\bar{z} = Ay$; ma allora $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in D_U$ e $Ux = \bar{x}$, cosicchè U è chiuso.

LEMMA [3.II]. Valgono le seguenti relazioni:

$$(3.13) \quad D_{U^{2n}} = D_{A^n}(Y) \oplus D_{A^n}(Z) \quad n = 1, 2, \dots$$

$$(3.14) \quad D_{U^{2n+1}} = D_{A^{n+1}}(Z) \oplus D_{A^n}(Y) \quad n = 0, 1, \dots$$

$$(3.15) \quad \sigma(U) \subset \bar{\mathbb{C}}_- \setminus \{0\}$$

$$(3.16) \quad R(\lambda, U) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda R(\lambda^2, A)y + R(\lambda^2, A)z \\ AR(\lambda^2, A)y + \lambda R(\lambda^2, A)z \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+$$

ovvero, in forma matriciale:

$$(3.17) \quad R(\lambda, U) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ A & \lambda \end{pmatrix} R(\lambda^2, A) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+$$

$$(3.18) \quad \|R(\lambda, U)\| \leq c \frac{(1 + |\lambda|^2)^s}{|\lambda| |\cos \theta|} \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}_+$$

essendo $\theta = \arg \lambda$.

DIMOSTRAZIONE. Le (3.13) e (3.14) seguono dalle relazioni
relazioni

$$U^{2n} = \begin{pmatrix} A^n & O \\ O & A^n \end{pmatrix}; \quad U^{2n+1} = \begin{pmatrix} O & A^n \\ A^{n+1} & O \end{pmatrix}.$$

Sia $\lambda \in \mathbb{C}_+ \cup \{0\}$; allora $\lambda^2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$. Poniamo per tali λ :

$$B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ A & \lambda \end{pmatrix} R(\lambda^2, A)$$

e sia

$$\begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = B(\lambda) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

Si ha:

$$\bar{y} = \lambda R(\lambda^2, A)y + R(\lambda^2, A)z$$

$$\bar{z} = AR(\lambda^2, A)y + \lambda R(\lambda^2, A)z = \lambda^2 R(\lambda^2, A)y - y + \lambda R(\lambda^2, A)z$$

da cui

$$\bar{y} \in D_A(Z)$$

$$\bar{z} \in Y$$

e quindi $\begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \in D_U$. Inoltre, con facili calcoli, si trova

$$(\lambda - U) \begin{pmatrix} \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

ovvero

$$(3.19) \quad (\lambda - U) B(\lambda) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

Viceversa sia $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in D_U$; si ha:

$$(\lambda - U) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda y - z \\ \lambda z - Ay \end{pmatrix}$$

da cui

$$(3.20) \quad B(\lambda) (\lambda - U) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}.$$

Dalle (3.19), (3.20) segue allora $B(\lambda) = R(\lambda, U)$.

Sia infine $\lambda \in \mathbb{C}_+$, $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in X$; si ha:

$$\begin{aligned} \left\| R(\lambda, U) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right\| &= \left| \lambda R(\lambda^2, A)y + R(\lambda^2, A)z \right|_Y + \left| AR(\lambda^2, A)y - \lambda R(\lambda^2, A)z \right|_Z \leq \\ &\leq \left| \lambda \right| \left| R(\lambda^2, A)y \right|_Y + \left| R(\lambda^2, A)z \right|_Y + \left| AR(\lambda^2, A)y \right|_Z + \left| \lambda \right| \left| R(\lambda^2, A)z \right|_Z \end{aligned}$$

e per le (3.2), ..., (3.6):

$$\left\| R(\lambda, U) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \leq c \frac{(1 + |\lambda|^2)^s}{|\lambda| \cos \theta} \left\| \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right\|, \text{ da cui la (3.18).}$$

TEOREMA [3.1]. *Se A verifica le condizioni i), ..., iv), allora il problema di Cauchy:*

$$(3.21) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = Au \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = v_0 \end{cases}$$

con $u(t)$ funzione su $\mathbb{R}_+$ ha valori in X e u_0, v_0 verificanti le condizioni:

$$(3.22) \quad \begin{cases} u_0 \in D_{A^{1/2}([2s]+2+k)}(Y), & v_0 \in D_{A^{1/2}([2s]+2+k)}(Z) \\ \text{se } [2s] + k \text{ è pari} \\ u_0 \in D_{A^{1/2}([2s]+3+k)}(Z), & v_0 \in D_{A^{1/2}([2s]+1+k)}(Y) \\ \text{se } [2s] + k \text{ è dispari} \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione $u(t)$, verificante $\forall t > 0$ le condizioni:

$$(3.23) \quad \begin{cases} u(t) \in D_{A^{k/2}}(Y), & u'(t) \in D_{A^{k/2}}(Z) \text{ se } k \text{ è pari} \\ u(t) \in D_{A^{(k+1)/2}}(Z), & u'(t) \in D_{A^{(k-1)/2}}(Y) \text{ se } k \text{ è dispari.} \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Posto:

$$v(t) = u'(t)$$

$$W(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad W_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

il problema (3.21) diventa:

$$(3.24) \quad \begin{cases} \frac{dW}{dt} = UW \\ W(0) = W_0 \end{cases}$$

e le condizioni (3.22) si riducono a

$$W_0 \in D_{U^{[2s]+2+k}}$$

L'operatore U soddisfa, in virtù del Lemma [3.11], le condizioni del Lemma [2.11]. Il problema (3.24) ha allora soluzione unica $W(t)$ verificante la condizione

$$W(t) \in D_{U^k}$$

che è equivalente alle (3.23).

4. Proprietà spettrali degli operatori ellittici in L^2 .

Sia $\mathcal{Q}$ un operatore limitato di $\mathbb{R}^n$, con frontiera $\partial\mathcal{Q}$ di classe C^∞ e sia A l'operatore differenziale di ordine $2m$:

$$(4.1) \quad Au(x) = - \sum_{\substack{\rho \leq m \\ \sigma \leq m}} D^\rho (a_{\rho\sigma}(x) D^\sigma u(x))$$

con coefficienti $a_{\rho\sigma}(x)$ appartenenti a $C^\infty(\bar{\mathcal{Q}})$.

Sia

$$(4.2) \quad \mathcal{A}(u, v) = - \sum_{\substack{e \leq m \\ \sigma \leq m}} \int_{\Omega} a_{e\sigma}(x) D^{\sigma} u(x) \overline{D^e v(x)} dx$$

la forma associata all'operatore A ; supponiamo che sia:

$$(4.3) \quad -\mathcal{A}(u, u) \geq \nu \|u\|_m^2 \quad \forall u \in C_0^{\infty}(\Omega).$$

La (4.3) equivale all'ipotesi che $-A$ sia fortemente ellittico e formalmente autoaggiunto.

Consideriamo il problema di Dirichlet:

$$(4.4) \quad \begin{cases} \lambda u - Au = f \text{ in } \Omega, & f \in L^2 \\ u \in H_0^m(\Omega). \end{cases}$$

Tale problema ha soluzione unica per ogni λ in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

È noto che A è un operatore lineare chiuso in L^2 con dominio $D_A = H_0^m \cap H^{2m}$, e si verifica facilmente che A è un operatore chiuso in $Y = H_0^m$, con dominio

$$(4.5) \quad D_A(Y) = \{u \in H_0^m : Au \in H_0^m\}.$$

LEMMA [4.I] *Sia $u(x)$ la soluzione del problema (4.4); posto $\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$ ($-\pi < \theta < \pi$) valgono le seguenti maggiorazioni:*

$$(4.6) \quad \|u\|_0 \leq \frac{1}{|\lambda| \cos \theta/2} \|f\|_0$$

$$(4.7) \quad \|u\|_{2m} \leq \frac{c}{\cos \theta/2} \|f\|_0$$

$$(4.8) \quad \|u\|_m \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2} \cos \theta/2} \|f\|_0.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $v \in H_0^m$

$$e^{-i\theta/2} \lambda (u, v)_0 - e^{-i\theta/2} \mathcal{A}(u, v) = e^{-i\theta/2} (f, v)_0.$$

Scegliendo $v = u$, prendendo la parte reale dei due membri e tenendo conto della (4.3) si ha:

$$|\lambda| \cos \theta/2 \|u\|_0^2 \leq \|f\|_0 \|u\|_0$$

da cui la (4.6).

Da questa deriva la (4.7), osservando che

$$\|u\|_{2m} \leq c \|Au\|_0 \leq c \{|\lambda| \|u\|_0 + \|f\|_0\}.$$

Per dimostrare la (4.8) usiamo la nota disuguaglianza:

$$(4.9) \quad \|u\|_m \leq c \{\varepsilon \|u\|_{2m} + \varepsilon^{-1} \|u\|_0\}. \quad (\varepsilon > 0)$$

Scelto $\varepsilon = |\lambda|^{-1/2}$ la (4.8) segue dalle (4.6) e (4.7).

LEMMA [4.11]. *Nelle ipotesi del Lemma [4.1], se $f \in H_0^m$ valgono le seguenti maggiorazioni:*

$$(4.10) \quad \|u\|_m \leq \frac{c}{|\lambda| \cos \theta/2} \|f\|_m$$

$$(4.11) \quad \|u\|_{3m} \leq \frac{c}{\cos \theta/2} \|f\|_m$$

$$(4.12) \quad \|u\|_{2m} \leq \frac{c}{|\lambda|^{1/2} \cos \theta/2} \|f\|_m.$$

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo in primo luogo che la funzione $v = Au$ appartiene a H_0^m ed è la soluzione debole [1] del problema di Dirichlet:

$$(4.13) \quad \begin{cases} \lambda v - Av = - \sum_{|e| \leq m} D^e f_e \\ v \in H_0^m \end{cases}$$

con $f_e = \sum_{|e| \leq m} a_{e\sigma} D^\sigma f \in L^2$.

Si ha allora, $\forall w \in H_0^m$:

$$e^{-i\theta/2} \lambda (v, w)_0 - e^{-i\theta/2} \mathcal{A}(v, w) = - e^{-i\theta/2} \sum_{|e| \leq m} (f_e, D^e w)_0.$$

Scegliendo $w = v$ e tenendo conto della (4.3):

$$\nu \cos \theta/2 \|v\|_m^2 \leq \|v\|_m \sum_{|e| \leq m} \|f_e\|_0 \leq c \|v\|_m \|f\|_m$$

da cui

$$(4.14) \quad \|Au\|_m \leq \frac{c}{\cos \theta/2} \|f\|_m.$$

Da questa relazione deriva la (4.11), dato che, per un noto teorema di regolarizzazione:

$$\|u\|_{3m} \leq c \|Au\|_m.$$

La (4.10) segue dalla (4.14) osservando che

$$\|u\|_m \leq |\lambda|^{-1} \{ \|Au\|_m + \|f\|_m \}$$

e la (4.12) discende dalle altre due, tramite la (4.9).

5. Proprietà spettrali degli operatori ellittici in L^p .

Ricordiamo alcuni noti risultati :

[5.A] *Teorema di Sobolev.*

Se $f \in H^{k,p}(\Omega)$ allora :

$$a_1) \quad \text{se } pk < n, f \in L^{p^*}(\Omega) \text{ con } p^* = pn/(n - pk)$$

$$a_2) \quad \text{se } pk \geq n, f \in L^q(\Omega) \quad \forall q < \infty.$$

In ogni caso si ha la maggiorazione :

$$(5.1) \quad \|f\|_\sigma \leq c \|f\|_{k,p}$$

dove σ indica, a seconda dei casi, gli spazi L^{p^*} o L^q .

[5.B] *Proprietà di inclusione.*

Si ha la seguente inclusione (algebrica e topologica)

$$L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega) \quad \forall p, q \quad 1 \leq p \leq q < +\infty$$

[5.C] *Interpolazione.*

Esiste una costante $c > 0$ tale che $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall p$ ($1 \leq p < +\infty$)

$$(5.2) \quad \|f\|_{m,p} \leq c \{ \varepsilon \|f\|_{2m,p} + \varepsilon^{-1} \|f\|_p \} \quad \forall f \in H^{2m,p}.$$

[5.D] *Regolarizzazione ([3]).*

Sia u la soluzione del problema di Dirichlet :

$$(5.3) \quad \begin{cases} Au = f \\ u \in H_0^m, \end{cases}$$

dove A è l'operatore ellittico (4.1).

Se $f \in H^{k,p}$ ($2 \leq p < +\infty$), allora $u \in H^{2m+k,p}$ e si ha la maggiorazione

$$(5.4) \quad \|u\|_{2m+k,p} \leq c \|f\|_{k,p}.$$

LEMMA [5.I]. Sia u la soluzione del problema di Dirichlet:

$$(5.5) \quad \begin{cases} \lambda u - Au = f \\ u \in H_0^m \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$$

e sia k tale che:

$$4mk < n \leq 4m(k+1).$$

Poniamo:

$$p_h = 2n/(n - 4mh) \quad h = 0, 1, \dots, k$$

e sia p_{k+1} un numero arbitrario maggiore di p_k .

Se $f \in L^{p_h}$ allora $u \in H^{2m,p_h} \cap H_0^m$ e si ha:

$$(5.6) \quad \|u\|_{2m,p_h} \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^h}{\cos \theta/2} \|f\|_{p_h} \quad \theta = \arg \lambda.$$

DIMOSTRAZIONE. Per $h = 0$ la (5.6) si riduce alla (4.7).

Supponiamo che la (5.6) sia vera per h e dimostriamola per $h+1$. La soluzione u del problema (5.5) è anche soluzione (unica) del problema:

$$(5.7) \quad \begin{cases} Aw = \lambda u - f \\ w \in H_0^m. \end{cases}$$

Se $f \in L^{p_{h+1}}$ allora $\lambda u - f \in L^{p_{h+1}}$. Dalla (5.4) si ha allora:

$$\begin{aligned} \|u\|_{2m,p_{h+1}} &\leq c \{ \|f\|_{p_{h+1}} + |\lambda| \|u\|_{p_{h+1}} \} \leq c \{ \|f\|_{p_{h+1}} + |\lambda| \|u\|_{2m,p_h} \} \\ &\leq c \left\{ \|f\|_{p_{h+1}} + |\lambda| \frac{(1 + |\lambda|)^h}{\cos \theta/2} \|f\|_{p_h} \right\} \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^{h+1}}{\cos \theta/2} \|f\|_{p_{h+1}}. \end{aligned}$$

LEMMA [5.II]. Nelle ipotesi del Lemma [5.I], se $f \in H_0^{m,p_h}$ ($h = 0, 1, \dots, k+1$) allora $u \in H^{3m,p_h} \cap H_0^m$ e si ha la maggiorazione:

$$(5.8) \quad \|u\|_{3m,p_h} \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^h}{\cos \theta/2} \|f\|_{m,p_h}.$$

DIMOSTRAZIONE. E' analoga a quella del Lemma [5.I].

I risultati dei Lemmi [5.I] e [5.II] possono essere espressi in termini del risolvete. A è un operatore lineare chiuso in L^p con dominio $D_A(L^p) =$

$= H^{2m,p} \cap H_0^m$ ed in $H_0^{m,p}$ con dominio:

$$D_A(H_0^{m,p}) = \{f \in H_0^{m,p} : Af \in H_0^{m,p}\}.$$

Le maggiorazioni (5.6) e (5.8) prendono allora la forma:

$$(5.9) \quad \|AR(\lambda, A)\|_{X^{p_h}} \leq c(h) \frac{(1 + |\lambda|)^h}{\cos \theta/2} \quad h = 0, 1, \dots, k+1$$

dove X^p indica, a seconda dei casi, L^p o $H_0^{m,p}$.

LEMMA [5.III]. Per ogni $p: 2 \leq p < \infty$

$$(5.10) \quad \|AR(\lambda, A)\|_{X^p} \leq \frac{c(1 + |\lambda|)^{\sigma(p)}}{\cos \theta/2}$$

dove

$$(5.11) \quad \sigma(p) = \begin{cases} n(p-2)/(4mp) & 2 \leq p \leq p_k \\ (1+\varrho)(1+k)(p-2)/p & p_k < p < \infty \quad (\varrho > 0 \text{ arbitrario}) \end{cases}$$

e c dipende da p e da ϱ .

OSSERVAZIONE. Posto $k+1 = n/(4m) + \mu$ ($0 \leq \mu < 1$) si ha:

$$(5.12) \quad \sigma(p) = \begin{cases} n(p-2)/(4mp) & 2 \leq p \leq p_k \\ n(p-2)/(4mp) + (\mu + \varrho')(p-2)/p & p_k < p < \infty, \quad \varrho' = (k+1)\varrho. \end{cases}$$

DIMOSTRAZIONE. Per $2 \leq p \leq p_k$ la (5.10) discende dal Teorema di Riesz-Thorin.

Sia $p_k < p < \infty$. Scelto $\varrho > 0$, se $p/(p-2) \leq 1 + \varrho$ la (5.10) deriva dalla (5.9), in cui si scelga $p_{k+1} = p$.

In caso contrario sia $p' > p$ tale che $p'/(p'-2) = 1 + \varrho$. Scelto nella (5.9) $p_{k+1} = p'$, e interpolando tramite il Teorema di Riesz-Thorin tra X^2 e $X^{p'}$ si ottiene:

$$(5.13) \quad \|AR(\lambda, A)\|_{X^p} \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^{(k+1)(1+t)}}{\cos \theta/2}$$

dove t è tale che

$$(5.14) \quad 1/p = t/2 + (1-t)/p'.$$

La tesi segue introducendo nella (5.13) il valore di t dato dalla (5.14).

LEMMA [5.IV]. *Sussiste la seguente maggiorazione:*

$$(5.15) \quad \|R(\lambda, A)\|_{X^p} \leq \frac{c(1 + |\lambda|)^{\sigma(p)}}{|\lambda| \cos \theta/2}.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dal Lemma [5.III] e dall'identità

$$\lambda R(\lambda, A) = AR(\lambda, A) + 1.$$

LEMMA [5.V]. *Sia $u(x)$ la soluzione del problema di Dirichlet:*

$$(5.16) \quad \begin{cases} \lambda u - Au = f & \lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \\ u \in H_0^m. \end{cases}$$

Allora:

$$(5.17) \quad \|u\|_{m,p} \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^{\sigma(p)}}{|\lambda|^{1/2} \cos \theta/2} \|f\|_p \quad \forall f \in L^p$$

$$(5.18) \quad \|u\|_{2m,p} \leq c \frac{(1 + |\lambda|)^{\sigma(p)}}{|\lambda|^{1/2} \cos \theta/2} \|f\|_{m,p} \quad \forall f \in H_0^{m,p}.$$

DIMOSTRAZIONE. Segue dai Lemmi [5.III] e [5.IV] e dalla (5.2), in cui si scelga $\varepsilon = |\lambda|^{-1/2}$.

6. Equazioni di evoluzione in L^p .

In questo paragrafo p è un numero reale ≥ 2 .

Sia k un intero tale che $4mk \leq n < 4m(k+1)$, poniamo:

$$(6.1) \quad \sigma(p) = \begin{cases} n(p-2)/(4mp) & \text{se } p \leq 2n/(n-4mk) \\ (k+1)(1+\varrho)(p-2)/p & (\varrho > 0 \text{ arbitrario}) \text{ se } p > 2n/(n-4mk). \end{cases}$$

I risultati dei paragrafi 2...5 permettono di enunciare i seguenti Teoremi:

TEOREMA [6.1]. (Equazione di Schrödinger).

Sia A un operatore differenziale su Ω di ordine $2m$, fortemente ellittico e formalmente autoaggiunto, con coefficienti di classe C^∞ .

Indichiamo ancora con A la realizzazione di A in L^p sotto le condizioni ai limiti di Dirichlet, con dominio:

$$(6.2) \quad D_A = H^{2m,p} \cap H_0^m \text{ (5)}.$$

Il problema misto (nel senso di Hadamard):

$$(6.3) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = i A u \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

con $u_0 \in D_{A^{[\sigma(p)]+3}}$ ammette una e una sola soluzione $u(x, t) \in H^{2m,p} \cap H_0^m$ $\forall t \in \mathbb{R}_+$ (6), verificante la maggiorazione:

$$(6.4) \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{H^{2m,p}(\Omega)} \leq c e^t \|u_0\|_{H^{([\sigma(p)]+3)2m,p}(\Omega)}$$

con c indipendente da u_0 .

OSSERVAZIONI.

a) Se h è un intero positivo si ha:

$$(6.5) \quad H_0^{2hm,p} \subset D_{A^h} \subset H^{2hm,p}$$

b) Se $u_0 \in D_{A^{[\sigma(p)]+2+k}}$ allora $u(x, t) \in D_{A^k} \forall t \in \mathbb{R}_+$; o, il che è equivalente, $u \in C^k(\mathbb{R}_+; L^p)$, (k intero positivo). Segue allora dal Teorema di Sobolev che se $u_0 \in C^\infty$ allora $u(x, t)$ è C^∞ in x e in t .

c) Se $m \geq n/4$ comunque fissato p si può scegliere q in (6.1) in modo tale che sia $[\sigma(p)] = 0$.

Posto ad esempio $n = 3$, $A = \Delta$ si trova che il problema di Cauchy (6.3) è risolubile se $u_0 \in D_{A^3}$ (in particolare se $u \in H_0^{6,p}$) e si ha:

$$(6.6) \quad \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{H^{2,p}(\Omega)} \leq c e^t \|u_0\|_{H^{6,p}(\Omega)}.$$

TEOREMA [6.11] (Equazione delle onde).

Sia A un operatore differenziale su Ω di ordine $2m$, fortemente ellittico e formalmente autoaggiunto, con coefficienti di classe C^∞ .

(5) Vedi [8], pag. 92.

(6) ovvero, il che è equivalente, $u \in C^1(\mathbb{R}_+; L^p)$.

$$(6.7) \quad D^A(L^p) = H^{2m,p} \cap H_0^m$$

$$(6.8) \quad D^A(H_0^{m,p}) = \{u \in H_0^{m,p}; \quad Au \in H_0^{m,p}\}$$

$$(6.9) \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au \\ u(0) = u_0 \\ u'(0) = v_0 \end{cases}$$
$$(6.10) \quad \begin{cases} u_0 \in D_{A^{1/2}([2\sigma(p)]+3)}(H_0^{m,p}), v_0 \in D_{A^{1/2}([2\sigma(p)]+3)}(L^p) \\ \hspace{18em} se [2\sigma(p)] \text{ è dispari} \\ u_0 \in D_{A^{1/\varepsilon}([2\sigma(p)]+4)}(L^p), v_0 \in D_{A^{1/2}([2\sigma(p)]+2)}(H_0^{m,p}) \\ \hspace{18em} se [2\sigma(p)] \text{ è pari} \end{cases}$$
$$(6.11) \quad \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{H^m, p(\Omega)} + \|u\|_{H^{2m, p(\Omega)}} \\ \leq c e^t (\|u_0\|_{H^m, ([2\sigma(p)]+4), p(\Omega)} + \|v_0\|_{H^m, ([2\sigma(p)]+3), p(\Omega)})$$

a) Se h è un intero positivo si ha:

$$(6.12) \quad H_0^{2hm, p} \subset D_{4h}(L^p) \subset H^{2hm, p}$$

$$(6.13) \quad H_0^{3hm, p} \subset D_{4h}(H_0^{m, p}) \subset H^{3hm, p} \cap H_0^m.$$

b) Sia k intero tale che $[2\sigma(p)] + k$ è pari (supponiamo per semplicità che k sia pari).

Se $u_0 \in D_{A^{1/2}([2\sigma(p)]+2+k)}(H_0^{m,p})$, $v_0 \in D_{A^{1/2}([2\sigma(p)]+2+k)}(L^p)$ allora $u(x, t) \in D_{A^{k/2}}(H_0^{m,p})$ e $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \in D_{A^{k/2}}(L^p) \forall t \in \mathbb{R}_+$; o, il che è equivalente, $u \in C^{k/2}(\mathbb{R}_+; H_0^{m,p})$ e $u' \in C^{k/2}(\mathbb{R}_+; L^p)$.

Segue allora dal Teorema di Sobolev che se $u_0, v_0 \in C^\infty$ allora $u(x, t)$ è C^∞ in x e in t .

c) Se $m \geq n/4$ per ogni p fissato si può scegliere ϱ in (6.1) in modo che sia $[2\sigma(p)] = 1$.

Posto ad esempio $n = 3$, $A = \Delta$ si trova che il problema di Cauchy (6.9) è risolubile se $u_0 \in D_2(H_0^{1,p})$ e $v_0 \in D_{A^2}(L^p)$ (in particolare se $u_0 \in H_0^{5,p}$ e $v_0 \in H_0^{4,p}$) e si ha:

$$(6.14) \quad \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{H^{1,p}(\Omega)} + \|u\|_{H^{2,p}(\Omega)} \leq \\ \leq ce^t (\|u_0\|_{H^{5,p}(\Omega)} + \|v_0\|_{H^{4,p}(\Omega)}).$$

Università di Pisa

BIBLIOGRAFIA

- [1] S. AGMON, « *Lectures on elliptic boundary value problems* ». Van Nostrand Math. Studies-Princeton N. J.
- [2] S. AGMON, « *On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems* ». Comm. Pure Appl. Math. **15** (1962)-119-147.
- [3] S. AGMON-A. DOUGLIS-N. NIRENBERG « *Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations Satisfying General Boundary Conditions I* ». Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959) 623-727.
- [4] S. AGMON-N. NIRENBERG, « *Properties of Solutions of ordinary differential equations in Banach spaces* ». Comm. Pure Appl. Math. **16** (1963) 121-239.
- [5] F. E. BROWDER, « *On the spectral theory of elliptic differential operators I* ». Math. Annalen **142** (1961) 22-130.
- [6] G. DA PRATO, « *Semigrupperi Regolarizzabili* ». Ricerche di Matematica vol. XV (1966) 224-248.
- [7] C. FOIAS, « *Remarques sur les semi-groupes distributions d'opérateurs normaux* ». Portugaliae Mat. **19** (1960) 227-243.
- [8] G. GEYMONAT-P. GRISVARD, « *Problemes aux limites elliptiques dans L^p* ». Cooperativa Libreria Universitaria Pavese (1964).
- [9] E. HILLE-R. S. PHILLIPS, « *Functional Analysis and semi groups* ». Colloq. Publ. Amer Math. Soc. **31** (1957).
- [10] J. L. LIONS, « *Une Remarque sur les Applications du Théoreme de Hille-Yosida* ». J. Math. Soc. Japan **9** (1957)-62-70.
- [11] J. L. LIONS, « *Les semi-groupes distributions* ». Portugaliae Math. **19** (1960) 141-164.
- [12] W. LITTMAN, « *The Wave Operator and L^p Norms* » J. Math. and Mech. **12** (1963) 55-68.
- [13] J. PEETRE, « *Sur la Théorie des semi-groupes distributions* ». Sem. sur les Equations aux dérivées partielles, College de France Nov. 1963-Mai 1964 76-98.
- [14] K. YOSHINAGA, « *Ultra distributions and semi-groups distributions* ». Bull. Kyushu Inst. Tech. **10** (1963) 1-24.
- [15] K. YOSIDA, « *Functional Analysis* » Springer Verlag (1965).