

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GIORGIO TALENTI

## **Sopra una diseguaglianza integrale**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 21, n° 2 (1967), p. 167-188*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1967\\_3\\_21\\_2\\_167\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1967_3_21_2_167_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## SOPRA UNA DISEGUAGLIANZA INTEGRALE

di GIORGIO TALENTI (a Genova) (\*)

### Introduzione.

È noto che se  $y(x)$  è una funzione assolutamente continua nell'intervallo  $[0, l]$  ( $0 < l \leq +\infty$ ) tale che  $y(0) = 0$ , sussiste la diseguaglianza:

$$(1) \quad \int_0^l \frac{y(x)^2}{x^2} dx \leq 4 \int_0^l y'(x)^2 dx \quad (1).$$

Più in generale, se  $f(x)$  è una funzione misurabile non negativa, per ogni esponente  $p > 1$  vale la diseguaglianza di Hardy (cfr. [2]):

$$(2) \quad \int_0^l \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^l f(x)^p dx.$$

Le costanti 4 e  $(p/p-1)^p$  in (1) e (2) sono le migliori possibili.

In una precedente ricerca [3], ho considerato una estensione della diseguaglianza (1), introducendo negli integrali una « densità » non necessaria-

---

Pervenuto alla Redazione il 18 Nov. 1966.

(\*) Questo lavoro fa parte dell'attività del gruppo di ricerca matematica n. 23 del C. N. R., a. a. 1966-67.

(1) Essendo  $y(x)$  assolutamente continua, gli integrali che compaiono in (1) non convergono necessariamente; si deve interpretare (1) nel senso seguente: se l'integrale a secondo membro converge, l'integrale a primo membro converge ed ha valore non maggiore dell'altro.

In questo lavoro conveniamo che  $a \leq b$  significhi:  $b = +\infty$ , oppure:  $b$  è un numero,  $a$  è un numero non maggiore di  $b$ .

mente costante; precisamente, ho dimostrato che:

$$(3) \quad \int_0^l \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^2 \frac{dx}{k(x)} \leq \lambda_0 \int_0^l f(x)^2 \frac{dx}{k(x)} \quad (f(x) \geq 0),$$

essendo  $k$  una funzione misurabile,

$$k(x) > 0,$$

$$(3)' \quad \lambda_0 = 4 \sup_{0 < x < l} \int_0^x k(t) dt \cdot \int_x^l \frac{dt}{t^2 k(t)}.$$

(3)-(3)' hanno applicazione in alcune ricerche sulle soluzioni a simmetria assiale di equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico (cfr. [4]).

Nel seguente lavoro, considero una estensione analoga della disuguaglianza di Hardy (2), e cioè la disuguaglianza:

$$(4) \quad \int_0^l \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p \frac{dx}{k(x)} \leq \lambda \int_0^l f(x)^p \frac{dx}{k(x)} \quad (p \geq 1, f(x) \geq 0),$$

proponendomi di trattare i seguenti problemi:

1) stabilire delle ipotesi sulla funzione  $k$  perchè esista una costante finita  $\lambda$ , dipendente solo da  $k, l, p$  tale che (4) sussista per ogni  $f$  misurabile non negativa;

2) maggiorare la costante  $\lambda$ ;

3) ottimizzare la costante  $\lambda$ .

Osserviamo che un caso particolare di (4) è la nota disuguaglianza (cfr. [2]; [5], cap. 1, § 9):

$$(5) \quad \int_0^l \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p x^m dx \leq \left( \frac{p}{p-m-1} \right)^p \int_0^l f(x)^p x^m dx$$

$$(p \geq 1, m < p-1, f(x) \geq 0);$$

Si dimostra che la costante  $(p/p-m-1)^p$  è la migliore possibile; se  $m \geq p-1$ ; la disuguaglianza è falsa, cioè il rapporto fra il primo membro di (5) e l'integrale a secondo membro non si mantiene limitato al variare di  $f$  (2).

(2) Infatti (considerando per es. il caso  $m = p-1, l < +\infty$ ) se si pone:

Ricordiamo che Beesack [6] ha considerato disuguaglianze della forma :

$$\int_a^b s(x) \left( \int_a^x f(t) dx \right)^p dx \leq \int_a^b r(x) f(x)^p dx,$$

essendo  $s(x)$  funzione continua nell'intervallo  $]a, b[$  ( $a, b$  non necessariamente finiti),  $r(x)$  di classe  $C^1(]a, b[)$  e positiva,  $p > 1$ . Con delle convenienti ipotesi sulla funzione  $r(x)$  (riguardanti il comportamento di  $r(x)$  per  $x \rightarrow a$ ), Beesack dimostra che la disuguaglianza sopra scritta sussiste per ogni  $f(x) \geq 0$  se l'equazione  $(r(x)y'^{p-1})' + s(x)y = 0$  ammette una soluzione positiva crescente.

I risultati del presente lavoro si possono riassumere così. Poniamo :

$$\kappa(p) = \sup_f \frac{\int_0^l \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p \frac{dx}{k(x)}}{\int_0^l f(x)^p \frac{dx}{k(x)}},$$

l'estremo superiore essendo calcolato per  $f$  variabile nella classe delle funzioni misurabili non negative : in altri termini,  $\kappa(p)$  è la più piccola costante  $\lambda$  tale che (4) sussista per ogni  $f(x) \geq 0$ ; poniamo anche :

$$\lambda^*(p) = \left( p \operatorname{ess. \, sup}_{0 < x < l} x^{p-1} k(x) \int_x^l \frac{dt}{t^p k(t)} \right)^p.$$

Allora :

- 1)  $\kappa(p)$  è finito se  $\lambda^*(p)$  è finito ;
- 2)  $\kappa(p) \leq \lambda^*(p)$  ;

---


$$f(x) = \frac{1}{x} \left( \ln \frac{2l}{x} \right)^{-1 - \frac{1}{p}},$$

si verifica facilmente che l'integrale a secondo membro di (5) converge, mentre

$$\left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p x^m = p^p \frac{1}{x \ln \frac{2l}{x}}$$

non è integrabile in  $[0, l]$ .

3)  $\kappa(p) = \lambda^*(p)$  se  $\lambda^*(p)$  è finito e se la funzione:

$$K(x) = \int_x^l \frac{dt}{t^p k(t)}$$

è tale che, per un opportuno  $\tau < l$ <sup>(3)</sup>:

$$\int_0^\tau K(x)^{p+1} x^{q-1} dx < +\infty \quad \text{per ogni } q > \frac{p(p+1)}{\lambda^*(p)^{1/p}}.$$

Il punto 3) è trattato nel teorema 3. Diamo due differenti dimostrazioni dei punti 1) e 2) (teoremi 1 e 2): la prima è una dimostrazione « diretta », basata sopra manipolazioni dell'integrale a primo membro di (4); la seconda è una dimostrazione variazionale.

Esponiamo brevemente l'idea della seconda dimostrazione, svolgendo alcune considerazioni euristiche. Supponiamo che esista una costante finita  $\lambda$  tale che (4) sussista per ogni  $f(x) \geq 0$ ; equivalentemente:

$$(6) \quad \int_0^l \left( \frac{1}{x} y(x) \right)^p \frac{dx}{k(x)} \leq \lambda \int_0^l y'(x)^p \frac{dx}{k(x)},$$

per ogni  $y(x)$  assolutamente continua tale che  $y(0) = 0, y'(x) \geq 0$ .

Supponiamo inoltre che esista una funzione  $y(x)$  massimante, cioè una funzione non identicamente nulla tale che in (6) valga il segno =. Sia  $z(x)$  una funzione tale che  $z(0) = 0, z'(x) \geq 0$ :

La funzione  $y(x) + \varepsilon z(x)$  è nulla per  $x = 0$  e, se  $\varepsilon \geq 0$ , ha derivata non negativa; ne segue che:

$$J(\varepsilon) = \frac{\int_0^l \frac{(y + \varepsilon z)^p dx}{x^p k(x)}}{\int_0^l \frac{(y' + \varepsilon z')^p dx}{k(x)}} \leq \lambda = J(0) \quad (\varepsilon \geq 0),$$

quindi:

$$(7) \quad J'(0) \leq 0.$$

---

<sup>(3)</sup> Ricordiamo che  $l$  non è necessariamente finito.

Si trova :

$$J'(0) = \frac{p}{\int_0^l y'^p \frac{dx}{k(x)}} \left[ \int_0^l z \left( \lambda \frac{d}{dx} \frac{y'^{p-1}}{k} + \frac{y'^{p-1}}{x^p k} \right) dx - z(l) \frac{y'(l)^{p-1}}{k(l)} \right];$$

per (7), stante l'arbitrarietà di  $z$  :

$$(8) \quad \lambda \frac{d}{dx} \frac{y'^{p-1}}{k} + \frac{y'^{p-1}}{x^p k} \leq 0.$$

Poichè  $k(x)$  non è derivabile, (8) si deve interpretare in senso generalizzato; ad es. nel senso seguente :

$$y(x) = \int_0^x k(t)^{\frac{1}{p-1}} v(t)^{\frac{1}{p-1}} dt \quad (y'^{p-1} = kv),$$

$$(9) \quad \lambda x^p k(x) v'(x) + \left( \int_0^x k(t)^{\frac{1}{p-1}} v(t)^{\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1} \leq 0,$$

$$(9') \quad v(x) \geq 0, \quad v(x) \not\equiv 0.$$

Abbiamo dunque trovato che la costante  $\lambda$  è un « autovalore » del problema (9)-(9'). Diciamo  $\lambda(p)$  l'estremo inferiore degli « autovalori »  $\lambda > 0$  tali che (9)-(9') ammetta una soluzione; vale a dire :

$$\lambda(p) = \inf_v \operatorname{ess. sup}_{0 < x < l} \frac{\left( \int_0^x k(t)^{\frac{1}{p-1}} v(t)^{\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1}}{-x^p k(x) v'(x)},$$

l'estremo inferiore essendo calcolato al variare di  $v$  nella classe delle funzioni assolutamente continue, decrescenti e positive.

Le considerazioni precedenti inducono a ritenere che  $\kappa(p) \leq \lambda(p)$ .

Nel teorema 2 si dimostra che :

$$(10) \quad \kappa(p) \leq \lambda(p) \leq \lambda^*(p)^{(4)}.$$

---

(4) Osserviamo che, se  $p = 2$ , la condizione  $y'(x) \geq 0$  sulle funzioni che verificano (6) può essere soppressa. Conseguentemente, in luogo di (7) vale:  $J'(0) = 0$ ; quindi, in luogo

(10) fornisce anche qualche informazione sull'andamento di  $\kappa(p)$  come funzione di  $p$ : si dimostra infatti che  $\lambda(p)$  è funzione decrescente di  $p$ .

**1. TEOREMA 1.** *Sia  $k$  una funzione misurabile positiva, definita nell'intervallo  $]0, l[$  ( $0 < l \leq +\infty$ ); sia  $p \geq 1$ .*

*Se  $f$  è misurabile non negativa:*

$$(1.1) \quad \int_0^l \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p \frac{dx}{k(x)} \leq \lambda^*(p) \int_0^l f(x)^p \frac{dx}{k(x)},$$

dove:

$$(1.2) \quad \lambda^*(p) = \left( p \operatorname{ess. sup}_{0 < x < l} x^{p-1} k(x) \int_x^l \frac{dt}{t^p k(t)} \right)^p.$$

Alla dimostrazione del teorema 1 premettiamo il:

**LEMMA 1.** *Supponiamo  $\lambda^*(p) < +\infty$ ; poniamo:*

$$(1.3) \quad K(x) = \int_x^l \frac{dt}{t^p k(t)},$$

$$(1.4) \quad \mu = \frac{1}{p} \lambda^*(p)^{\frac{1}{p}} = \operatorname{ess. sup}_{0 < x < l} x^{p-1} k(x) K(x).$$

di (8), (9):

$$\lambda \frac{d}{dx} \frac{y'}{k} + \frac{y}{x^2 k} = 0, \quad y(x) = \int_0^x k(t) v(t) dt,$$

$$(9)'' \quad \lambda x^2 k(x) v'(x) + \int_0^x k(t) v(t) dt = 0.$$

Indichiamo con  $\lambda_0$  l'estremo inferiore dei  $\lambda > 0$  tali che (9)'' abbia una soluzione positiva. Evidentemente  $\lambda_0 \geq \lambda(2)$ , dunque per (10):

$$\kappa(2) \leq \lambda_0.$$

Nella nota [3] si dimostra che  $\lambda_0$  ha l'espressione (3)'; nella osservazione 3 della presente nota si prova che:

$$\lambda_0 \leq \lambda^*(2).$$

Si ha :

$$(i) \quad K(t) \geq x^{\frac{1}{\mu}} K(x) t^{-\frac{1}{\mu}} \quad (0 < t \leq x),$$

$$(ii) \quad K(x) \left( \int_0^x k(t)^{\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1} \leq \mu^p (p-1)^{p-1} = \frac{\lambda^*(p)}{p-1} \left( 1 - \frac{1}{p} \right)^p.$$

In particolare :

$$\frac{1}{x^p k(x)} \in L_{loc}^1(]0, l])^{(5)}, \quad k \in L_{loc}^{\frac{1}{p-1}}(]0, l[).$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$-K'(x) = \frac{1}{x^p k(x)} > 0, \quad \mu = \text{ess. sup.}_{0 < x < l} \frac{K(x)}{-xK'(x)},$$

dunque :

$$-\frac{K'(x)}{K(x)} \geq \frac{1}{\mu x};$$

integrando fra  $t$  e  $x$  ( $t \leq x$ ) :

$$\ln \frac{K(t)}{K(x)} \geq \ln \left( \frac{x}{t} \right)^{\frac{1}{\mu}}, \quad K(t) \geq K(x) \left( \frac{x}{t} \right)^{\frac{1}{\mu}},$$

che prova (i).

Ma :

$$\mu \geq x^{p-1} k(x) K(x),$$

dunque, per quanto sopra dimostrato :

$$k(t) \leq \frac{\mu}{t^{p-1} K(t)} \leq \frac{\mu}{x^{\mu} K(x)} t^{\frac{1}{\mu} - p + 1} \quad (t \leq x),$$

$$\left( \int_0^x k(t)^{\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1} \leq \frac{\mu}{x^{\frac{1}{\mu}} K(x)} \left( \int_0^x t^{\mu(p-1)-1} dt \right)^{p-1} = \frac{\mu^p (p-1)^{p-1}}{K(x)}.$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1. Consideriamo dapprima il caso  $p > 1$ .

<sup>(5)</sup> Se  $l = +\infty$ , questa condizione significa :

$$\int_{\tau}^{+\infty} \frac{dx}{x^p k(x)} < +\infty \text{ per ogni } \tau > 0.$$



Se una delle quantità  $\lambda^*(p)$ ,  $\int_0^l f^p \frac{dx}{k}$  è  $+\infty$ , (1.1) sussiste; supponiamo

quindi:

$$(1.5) \quad \lambda^*(p) < +\infty, \quad \int_0^l f(x)^p \frac{dx}{k(x)} < +\infty.$$

Osserviamo che  $\int_0^x f(t) dt$  converge per ogni  $x < l$ . Infatti, per il lemma 1 e (1.5):

$$(1.6) \quad \left( \int_0^x f(t) dt \right)^p = \left( \int_0^x \frac{f(t)}{k(t)^{\frac{1}{p}}} k(t)^{\frac{1}{p}} dt \right)^p \leq \\ \leq \int_0^x \frac{f(t)^p}{k(t)} dt \left( \int_0^x k(t)^{\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1} \leq \frac{\mu^p (p-1)^{p-1}}{K(x)} \int_0^x \frac{f(t)^p}{k(t)} dt.$$

Sia  $0 < a < b < l$ . Integrando per parti:

$$\int_a^b \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p \frac{dx}{k(x)} = -K(x) \left( \int_0^x f(t) dt \right)^p \Big|_a^b + \\ + p \int_a^b K(x) \left( \int_0^x f(t) dt \right)^{p-1} f(x) dx \leq \\ \leq K(a) \left( \int_0^a f(t) dt \right)^p + p \int_a^b x^{p-1} k(x) K(x) \left( \frac{1}{xk(x)^{\frac{1}{p}}} \int_0^x f(t) dt \right)^{p-1} \frac{f(x)}{k(x)^{1/p}} dx \leq \\ \leq K(a) \left( \int_0^a f(t) dt \right)^p + p\mu \int_a^b \left( \frac{1}{xk(x)^{1/p}} \int_0^x f(t) dt \right)^{p-1} \frac{f(x)}{k(x)^{1/p}} dx \leq \\ \leq K(a) \left( \int_0^a f(t) dt \right)^p + p\mu \left[ \int_a^b \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p \frac{dx}{k(x)} \right]^{\frac{p-1}{p}} \left[ \int_a^b f(x)^p \frac{dx}{k(x)} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Allora <sup>(6)</sup>

$$\begin{aligned} \int_a^b \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p \frac{dx}{k(x)} &\leq pK(a) \left( \int_0^a f(t) dt \right)^p + (p\mu)^p \int_a^b f(x)^p \frac{dx}{k(x)} \leq \\ &\leq pK(a) \left( \int_0^a f(t) dt \right)^p + \lambda^*(p) \int_0^l f(x)^p \frac{dx}{k(x)}. \end{aligned}$$

Facendo  $a \rightarrow 0$ , si trova per (1.6):

$$K(a) \left( \int_0^a f(t) dt \right)^p \leq \mu^p (p-1)^{p-1} \int_0^a f(t)^p \frac{dt}{k(t)} \rightarrow 0,$$

dunque:

$$\int_0^b \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p \frac{dx}{k(x)} \leq \lambda^*(p) \int_0^l f(x)^p \frac{dx}{k(x)}.$$

Facendo  $b \rightarrow l$ , si trova (1.1).

Il caso  $p = 1$  è conseguenza immediata del seguente lemma, di cui omettiamo per brevità la dimostrazione:

LEMMA 2. Sia  $\frac{1}{xk(x)} \in L_{\text{loc}}^1(]0, l])$  <sup>(7)</sup>. Se  $f$  è misurabile non negativa:

$$(1.7) \quad \int_0^l \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right) \frac{dx}{k(x)} = \int_0^l f(x) \left( \int_0^l \frac{dt}{tk(t)} \right) dx \text{ <sup>(8)</sup> .}$$

<sup>(6)</sup> La disuguaglianza:  $u \leq A^{\frac{1}{p}} u^{\frac{p-1}{p}} + B$  ( $u \geq 0, A \geq 0, B \geq 0$ ) implica:

$$u \leq pB + A.$$

Infatti, per la disuguaglianza aritmetico-geometrica:

$$A^{\frac{1}{p}} u^{\frac{p-1}{p}} \leq \frac{1}{p} A + \frac{p-1}{p} u,$$

dunque:  $u \leq B + \frac{1}{p} A - \frac{1}{p} u + u, \frac{1}{p} u \leq B + \frac{1}{p} A.$

<sup>(7)</sup> Cfr. la nota <sup>(5)</sup>.

<sup>(8)</sup> (1.7) si deve interpretare in questo senso: se uno dei due integrali non converge, anche l'altro non converge; se uno dei due integrali converge, anche l'altro converge ed ha

OSSERVAZIONE 1. Se poniamo :

$$k^*(z) = e^{-(p-1)z} k(e^{-z}), \quad k(x) = x^{1-p} k^*\left(\ln \frac{1}{x}\right),$$

$\lambda^*(p)$  si rappresenta nella forma :

$$\lambda^*(p) = \left( p \operatorname{ess. sup.}_{\ln \frac{1}{l} < z < +\infty} k^*(z) \int_{\ln \frac{1}{l}}^z \frac{ds}{k^*(s)} \right)^p \quad (9).$$

OSSERVAZIONE 2. Se  $k(x)$  è una funzione crescente :

$$\lambda^*(p) \leq \left( p \operatorname{ess. sup.}_{0 < x < l} x^{p-1} \frac{k(x)}{k(x)} \int_x^l \frac{dt}{t^p} \right)^p = \left( \frac{p}{p-1} \right)^p.$$

Se  $k$  è funzione decrescente, si dimostra analogamente che :

$$\left( \frac{p}{p-1} \right)^p \leq \lambda^*(p) \leq \left( \frac{p}{p-1} \right)^p \operatorname{ess. sup.}_{0 < x < l} \frac{k(x)}{k(l-x)}.$$

OSSERVAZIONE 3. Nella nota [3] è dimostrata la diseguaglianza .

$$\int_0^l \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^2 \frac{dx}{k(x)} \leq \lambda_0 \int_0^l f(x)^2 \frac{dx}{k(x)} \quad (f(x) \geq 0)$$

$$\lambda_0 = 4 \sup_{0 < x < l} \int_0^x k(t) dt \cdot \int_x^l \frac{dt}{t^2 k(t)}$$

Per (ii) del Lemma 1 :

$$\lambda_0 \leq \lambda^*(2).$$

lo stesso valore del primo.

Se  $l < +\infty$ , un caso particolare di (1.7) è la nota formula

$$\int_0^l \frac{dx}{x} \int_0^x f(t) dt = \int_0^l f(x) \ln \frac{l}{x} dx.$$

(9) Se  $l = +\infty$ , conveniamo che  $\ln \frac{1}{l} = -\infty$ .

OSSERVAZIONE 4. Indichiamo un'ipotesi sulla funzione  $k(x)$  che consente di dare una semplice maggiorazione della costante (1.2): proviamo che se

$$k \in C^1 ]0, l[$$

e se:

$$(1.9) \quad k_0(x) \equiv x \frac{d}{dx} \ln k(x) \geq k_0^* = \text{costante} > 1 - p,$$

risulta:

$$(1.10) \quad \lambda^*(p) \leq \left( \frac{p}{p + k_0^* - 1} \right)^p.$$

Infatti, per essere:

$$\frac{d}{dx} x^{p-1} k(x) = x^{p-2} k(x) (p - 1 + k_0(x)) > 0,$$

risulta:

$$x^{p-1} k(x) < L = \lim_{x \uparrow l} x^{p-1} k(x);$$

dunque<sup>(10)</sup>:

$$\begin{aligned} x^{p-1} k(x) \int_x^l \frac{dt}{t^p k(t)} &= \frac{1}{x^{p-1} k(x)} \int_x^l \frac{dt}{t k(t)} \leq \frac{\int_x^l \frac{dt}{t^p k(t)}}{\frac{1}{x^{p-1} k(x)} - \frac{1}{L}} \leq \\ &\leq \sup_{0 < x < l} \frac{\frac{d}{dx}(\dots)}{\frac{d}{dx}(\dots)} = \sup_{0 < x < l} \frac{1}{p - 1 + k_0(x)} \leq \frac{1}{p - 1 + k_0^*} \end{aligned}$$

che, per l'espressione (1.2) di  $\lambda^*(p)$ , prova (1.10).

Abbiamo dunque provato la disegualianza:

$$\begin{aligned} \int_0^l \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p \exp \left( - \int \frac{k_0(x)}{x} dx \right) &\leq \\ &\leq \left( \frac{p}{p - 1 + k_0^*} \right)^p \int_0^l f(x)^p \exp \left( - \int \frac{k_0(x)}{x} dx \right) dx \\ &\quad (f(x) \geq 0, \quad k_0(x) \geq k_0^* > 1 - p). \end{aligned}$$

---

<sup>(10)</sup> Nei passaggi che seguono si deve porre  $\frac{1}{L} = 0$  se  $L = +\infty$ .

2. Sia, come precedentemente,  $k$  una funzione misurabile positiva definita nell'intervallo  $]0, l[$  ( $0 < l \leq +\infty$ ); sia  $p \geq 1$ .

Poniamo:

$$(2.1) \quad \kappa(p) = \sup_f \frac{\int_0^l \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p \frac{dx}{k(x)}}{\int_0^l f(x)^p \frac{dx}{k(x)}},$$

dove  $f$  è una funzione misurabile non negativa; poniamo inoltre:

$$(2.2) \quad \lambda(p) = \inf_v \operatorname{ess. sup}_{0 < x < l} \frac{\left( \frac{1}{x} \int_0^x k(t)^{\frac{1}{p-1}} v(t)^{\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1}}{x k(x) v'(x)} \quad (11),$$

dove  $v$  è una funzione assolutamente continua tale che:

$$(2.3) \quad v(x) > 0, \quad v'(x) < 0.$$

OSSERVAZIONE 5. Se  $\lambda(p) < +\infty$ , allora  $k \in L_{loc}^{\frac{p-1}{p}}$  ( $]0, l[$ ). Infatti, se

$\lambda(p) < +\infty$ , esiste una funzione  $v$  che verifica (2.3) ed è tale che:

$$+\infty > \int_0^x k(t)^{\frac{1}{p-1}} v(t)^{\frac{1}{p-1}} dt \geq v(x)^{\frac{1}{p-1}} \int_0^x k(t)^{\frac{1}{p-1}} dt.$$

TEOREMA 2. Valgono le proprietà seguenti:

- (i)  $\lambda(p)$  è una funzione non crescente di  $p$ ;
- (ii)  $\kappa(p) \leq \lambda(p)$ ;
- (iii)  $\lambda(p) \leq \lambda^*(p)$ .

Dimostrazione di (i). Segue immediatamente dalla disuguaglianza di Hölder che, se  $f$  è una funzione misurabile non negativa in un intervallo

---

<sup>(11)</sup> Se  $p = 1$ , il numeratore va sostituito con:

$$\operatorname{ess. sup}_{0 < t < x} k(t) v(t).$$

limitato ]  $a, b$  [, la media di ordine  $r$  :

$$\left( \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^r dx \right)^{1/r}$$

è una funzione crescente di  $r$ . Da questa proprietà e dalla espressione (2.2) di  $\lambda(p)$ , (i) discende immediatamente.

Dimostrazione di (ii). Se  $\lambda(p) = +\infty$ , (ii) sussiste. Supponiamo dunque  $\lambda(p) < +\infty$ ; per dimostrare (ii) basta allora provare che, se  $f$  è misurabile non negativa :

$$(2.4) \quad \int_0^l \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p \frac{dx}{k(x)} \leq \lambda \int_0^l f(x)^p \frac{dx}{k(x)} \text{ per ogni } \lambda > \lambda(p).$$

Se  $\int_0^l f^p \frac{dx}{k} = +\infty$ , (2.4) sussiste; supponiamo quindi :

$$(2.5) \quad \int_0^l f(x)^p \frac{dx}{k(x)} < +\infty.$$

Fissato  $\lambda > \lambda(p)$ , esiste una funzione  $v$  che verifica (2.3) ed è tale che :

$$(2.6) \quad \frac{\left( \int_0^x k(t)^{\frac{1}{p-1}} v(t)^{\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1}}{x^p k(x)} \leq -\lambda v'(x) \quad (42).$$

Si ha per la diseguaglianza di Hölder e per (2.6) :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p \frac{1}{k(x)} &= \frac{1}{x^p k(x)} \left[ \int_0^x (k(t) v(t))^{1/p} \frac{f(t) dt}{(k(t) v(t))^{1/p}} \right]^p \leq \\ &\leq \frac{\left( \int_0^x (k(t) v(t))^{\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1}}{x^p k(x)} \int_0^x \frac{f(t)^p}{k(t) v(t)} dt \leq -\lambda v'(x) \int_0^x \frac{f(t)^p}{k(t) v(t)} dt. \end{aligned}$$

(42) Cfr. la nota (41).

Allora, integrando per parti:

$$\begin{aligned}
 (2.7) \quad \int_0^l \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p \frac{dx}{k(x)} &\leq -\lambda \int_0^l dx v'(x) \int_0^x \frac{f(t)^p}{k(t)v(t)} dt = \\
 &= -\lambda v(x) \int_0^x \frac{f(t)^p}{k(t)v(t)} dt \Big|_0^l + \lambda \int_0^l \frac{f(x)^p}{k(x)} dx \leq \\
 &\leq \lambda \lim_{x \downarrow 0} v(x) \int_0^x \frac{f(t)^p}{k(t)v(t)} dt + \lambda \int_0^l \frac{f(x)^p}{k(x)} dx.
 \end{aligned}$$

Per la decrescenza di  $v$  e per (2.5):

$$(2.8) \quad v(x) \int_0^x \frac{f(t)^p}{k(t)v(t)} dt \leq \int_0^x \frac{f(t)^p}{k(t)} dt \rightarrow 0 \quad (x \downarrow 0).$$

Per la (2.7)-(2.8), (2.4) è provata.

Dimostrazione di (iii). Se  $\lambda^*(p) = +\infty$ , (iii) sussiste. Supponiamo dunque  $\lambda^*(p) < +\infty$ . Detto  $r$  un numero tale che  $0 < r < \frac{1}{\mu}$ , consideriamo la funzione:  $v(x) = x^r K(x)$ ; la costante  $\mu$  e la funzione  $K$  sono definiti da (1.3)-(1.4). Risulta:

$$v(x) > 0 \quad (0 < x < l),$$

$$-x^p k(x) v'(x) = x^r (1 - rx^{p-1} k(x) K(x)) \geq x^r (1 - r\mu) > 0,$$

$$\begin{aligned}
 \left( \int_0^x k(t)^{\frac{1}{p-1}} v(t)^{\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1} &= \left( \int_0^x [t^{p-1} k(t) K(t)]^{\frac{1}{p-1}} t^{\frac{r}{p-1}-1} dt \right)^{p-1} \leq \\
 &\leq \mu \left( \int_0^x t^{\frac{r}{p-1}-1} dt \right)^{p-1} = \mu (p-1)^{p-1} \frac{x^r}{r^{p-1}},
 \end{aligned}$$

dunque:

$$\lambda(p) \leq \frac{\left( \int_0^x k(t)^{\frac{1}{p-1}} v(t)^{\frac{1}{p-1}} dt \right)^{p-1}}{-x^p k(x) v'(x)} \leq \frac{\mu (p-1)^{p-1}}{r^{p-1} (1-r\mu)}.$$

Per  $r = (p-1)/p\mu$  il terzo membro assume il suo valore minimo  $\mu^p p^p$ ; ne segue:

$$\lambda(p) \leq \mu^p p^p = \lambda^*(p).$$

3. TEOREMA 3. *Supponiamo:*

$$(3.1) \quad \lambda^*(p) < +\infty;$$

*supponiamo inoltre che esista  $\tau$  ( $0 < \tau < l$ ) tale che<sup>(43)</sup>:*

$$(3.2) \quad \int_0^\tau x^{\frac{p}{\mu} + \frac{p}{r} - 1} K(x)^{p+1} dx < +\infty \quad \text{per ogni } r, \quad 0 < r < p\mu,$$

*la costante  $\mu$  e la funzione  $K$  essendo definiti da (1.3)-(1.4). Allora  $\lambda(p) = \lambda^*(p)$ .*

OSSERVAZIONE 6. Per il Lemma 1 e valendo (3.1),  $K(x) \geq \frac{1}{\tau^\mu} K(\tau) x^{-\frac{1}{\mu}}$  ( $0 < x \leq \tau$ ), dunque:

$$\int_0^\tau x^{\frac{p}{\mu} + \frac{p}{r} - 1} K(x)^{p+1} dx \geq \tau^{\frac{p+1}{\mu}} K(\tau)^{p+1} \int_0^\tau x^{\frac{p}{r} - \frac{1}{\mu} - 1} dx;$$

pertanto se  $\frac{p}{r} - \frac{1}{\mu} \leq 0$ , cioè  $r \geq p\mu$ , l'integrale in (3.2) non può convergere.

Osserviamo che una condizione sufficiente affinché (3.2) sussista è che:

$$K(x) = O\left(x^{-\frac{1}{\mu}} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^n\right) \quad (n \geq 0).$$

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3. Sia  $\psi(x)$  una funzione tale che:

$$(3.3) \quad 0 \leq x \psi'(x) \leq \frac{1}{r} \psi(x), \quad \psi(0) = 0;$$

$$(3.4) \quad \int_0^\tau x^{\frac{p}{\mu} - 1} \psi(x)^p K(x)^{p+1} dx < +\infty,$$

---

<sup>(43)</sup> Cfr. la nota (3).



essendo  $0 < r < p\mu$ . Una tale funzione  $\psi$  esiste, ad es. si può prendere  $\psi(x) = x^{1/r}$ .

Poniamo:

$$f(x) \begin{cases} = 0 & x > \tau \\ = x^{1/\mu} \psi'(x) K(x) & 0 < x \leq \tau. \end{cases}$$

Proviamo che:

$$(3.6) \quad \int_0^{\tau} f(x)^p \frac{dx}{k(x)} < +\infty.$$

Si ha infatti per (3.3):

$$(3.7) \quad \begin{aligned} \frac{f(x)^p}{k(x)} &= x^{\frac{p}{\mu}} \psi'(x)^p \frac{K(x)^p}{k(x)} = -x^{\frac{p}{\mu}+p} \psi'(x)^p K(x)^p K'(x) \leq \\ &\leq -r^{-p} x^{\frac{p}{\mu}} \psi(x)^p K(x)^p K'(x). \end{aligned}$$

Osserviamo che per (3.3):

$$\frac{d}{dx} x^{\frac{p}{\mu}} \psi(x)^p = p x^{\frac{p}{\mu}-1} \psi(x)^p \left( \frac{1}{\mu} + \frac{x \psi'(x)}{\psi(x)} \right) \leq p \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{r} \right) x^{\frac{p}{\mu}-1} \psi(x)^p;$$

per (3.4) esiste una successione  $x_n \rightarrow 0$  tale che:

$$x_n^{\frac{p}{\mu}} \psi(x_n)^p K(x_n)^{p+1} \rightarrow 0;$$

allora, integrando per parti l'ultimo membro di (3.7):

$$\begin{aligned} \int_{x_n}^{\tau} f(x)^p \frac{dx}{k(x)} &\leq -r^{-p} x^{\frac{p}{\mu}} \psi(x)^p \frac{K(x)^{p+1}}{p+1} \Big|_{x_n}^{\tau} + \\ &+ \frac{r^{-p}}{p+1} \int_{x_n}^{\tau} (x^{\frac{p}{\mu}} \psi(x)^p)' K(x)^{p+1} dx \leq \frac{r^{-p}}{p+1} x_n^{\frac{p}{\mu}} \psi(x_n)^p K(x_n)^{p+1} + \\ &+ \frac{pr^{-p}}{p+1} \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{r} \right) \int_{x_n}^{\tau} x^{\frac{p}{\mu}-1} \psi(x)^p K(x)^{p+1} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} f(x)^p \frac{dx}{k(x)} &= \lim_{x_n} \int_{x_n}^{\tau} f(x)^p \frac{dx}{k(x)} \leq \\ &\leq \frac{pr-p}{p+1} \left( \frac{1}{\mu} + \frac{1}{r} \right) \int_0^{\tau} x^{\mu-\frac{p}{r}-1} \psi(x)^p K(x)^{p+1} dx < +\infty \quad (14). \end{aligned}$$

Per il Lemma 1 e (3.3), qualunque sia  $x \leq \tau$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p &= x^{-p} \left( \int_0^x t^{\frac{1}{\mu}} \psi'(t) K(t) dt \right)^p \geq \\ &\geq x^{\frac{p}{\mu}-p} K(x)^p \left( \int_0^x \psi'(t) dt \right)^p = x^{\frac{p}{\mu}-p} K(x)^p \psi(x)^p \geq \\ &\geq r^p x^{\frac{p}{\mu}} K(x)^p \psi'(x)^p = r^p f(x)^p; \end{aligned}$$

pertanto:

$$\begin{aligned} (3.8) \quad \int_0^l \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p \frac{dx}{k(x)} &= \int_0^{\tau} (\dots) + \int_{\tau}^l \frac{dx}{x^p k(x)} \left( \int_0^{\tau} f(t) dt \right)^p \geq \\ &\geq \int_0^{\tau} (\dots) \geq r^p \int_0^{\tau} f(x)^p \frac{dx}{k(x)}. \end{aligned}$$

Per definizione:

$$\int_0^l \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p \frac{dx}{k(x)} \leq \kappa(p) \int_0^{\tau} f(x)^p \frac{dx}{k(x)};$$

---

(14) Abbiamo utilizzato questa proprietà. Una funzione  $g(x)$ , continua e positiva nell'intervallo  $]0, \tau]$ , è sommabile in  $]0, \tau]$  se esiste una successione  $x_n \rightarrow 0$  tale che:

$$\lim_{x_n} \int_{x_n}^{\tau} g(x) dx < +\infty.$$

allora, per (3.8):

$$r^p \int_0^{\bar{x}} f(x)^p \frac{dx}{k(x)} \leq \kappa(p) \int_0^{\bar{x}} f(x)^p \frac{dx}{k(x)};$$

ne segue, per (3.6):

$$r^p \leq \kappa(p).$$

Per l'arbitrarietà di  $r$ :

$$\lambda^*(p) = (p\mu)^p \leq \kappa(p),$$

quindi per i teoremi 1 e 2:

$$\lambda^*(p) = \kappa(p).$$

4. ESEMPLI. Dai teoremi dimostrati discendono in particolare le disequaglianze seguenti:

$$(4.1) \quad \int_0^{+\infty} \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p x^m e^{-nx} dx \leq \left( \frac{p}{p-m-1} \right)^p \int_0^{+\infty} f(x)^p x^m e^{-nx} dx,$$

$$(4.2) \quad \int_0^1 \left( \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right)^p x^m \left( \ln \frac{1}{x} \right)^n dx \leq \left( \frac{p}{p-m-1} \right)^p \int_0^1 f(x)^p x^m \left( \ln \frac{1}{x} \right)^n dx$$

$$(p \geq 1, m < p-1, n \geq 0, f(x) \geq 0);$$

la costante è la migliore possibile.

Si verifica facilmente che (4.1) contiene la disequaglianza (5), ricordata nell'introduzione, quindi anche la disequaglianza di Hardy (5).

Dimostriamo ad es. (4.2), la dimostrazione di (4.1) essendo basata sopra artifici simili; (4.2) corrisponde al caso:

$$k(x) = x^{-m} \left( \ln \frac{1}{x} \right)^{-n}, \quad l = 1.$$

Ricordando la notazione (1.3) e integrando per parti:

$$K(x) = \int_x^1 t^{-p+m} \left( \ln \frac{1}{t} \right)^n dt = \frac{x^{-p+m+1}}{p-m-1} \left( \ln \frac{1}{x} \right)^n + \\ - \frac{n}{p-m-1} \int_x^1 t^{-p+m} \left( \ln \frac{1}{t} \right)^{n-1} dt;$$

dunque (notazione (1.4)):

$$\begin{aligned} \mu &= \sup_{0 < x < 1} x^{p-m-1} \left( \ln \frac{1}{x} \right)^{-n} \int_x^1 t^{-p+m} \left( \ln \frac{1}{t} \right)^n dt = \\ &= \frac{1}{p-m-1} \sup_{0 < x < 1} \left[ 1 - n x^{p-m-1} \left( \ln \frac{1}{x} \right)^{-n} \int_x^1 t^{-p+m} \left( \ln \frac{1}{t} \right)^{n-1} dt \right]. \end{aligned}$$

Con la sostituzione  $t = x^\tau$  si trova :

$$x^{p-m-1} \left( \ln \frac{1}{x} \right)^{-n} \int_x^1 t^{-p+m} \left( \ln \frac{1}{t} \right)^{n-1} dt = \int_0^1 \tau^{n-1} x^{(1-\tau)(p-m-1)} d\tau \rightarrow 0 \quad (x \downarrow 0),$$

quindi :

$$\mu = \frac{1}{p-m-1}.$$

Ne segue :

$$\lambda^*(p) = (p\mu)^p = \left( \frac{p}{p-m-1} \right)^p$$

Si ha inoltre :

$$K(x) \leq \frac{x^{-p+m+1}}{p-m-1} \left( \ln \frac{1}{x} \right)^n = \mu x^{-\frac{1}{\mu}} \left( \ln \frac{1}{x} \right)^n,$$

dunque per il teorema 3 (cfr. la osservazione 6) la costante  $\left( \frac{p}{p-m-1} \right)^p$  è la migliore possibile.

5. OSSERVAZIONI SULLA DISEGUAGLIANZA DI CARLEMAN. I risultati sopra esposti si possono completare con delle osservazioni sopra la seguente diseguaglianza, concernente la media geometrica di una funzione :

$$(5.1) \quad \int_0^l \exp \left( \frac{1}{x} \int_0^x \ln f(t) dt \right) \frac{dx}{k(x)} < \lambda^*(\infty) \int_0^l f(x) \frac{dx}{k(x)} \quad (f(x) > 0)$$

$$(5.1)' \quad \lambda^*(\infty) = \sup_{0 < x < l} \frac{e}{k(x)} \exp \left( \frac{1}{x} \int_0^x \ln k(t) dt \right).$$

(5.1)-(5.1)' contengono la diseuguaglianza di Carleman

$$(5.2) \quad \int_0^l \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln g(t) dt\right) dx < e \int_0^l g(x) dx \quad (g(x) > 0).$$

(5.1)-(5.1)' si dimostrano immediatamente applicando (5.2) alla funzione  $g(x) = f(x)/k(x)$  e scrivendo:

$$\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln \frac{1}{k(x)} dt\right) \geq \frac{e}{\lambda^*(\infty)} \frac{1}{k(x)}.$$

Osserviamo che (5.1)-(5.1)' si possono considerare, da un punto di vista euristico, come un caso limite della diseuguaglianza (4)-(10). Infatti, scriviamo  $f(x)^{1/p}$  in luogo di  $f(x)$  in (4) e adoperiamo le diseuguaglianze:

$$\left(\frac{1}{x} \int_0^x f(t)^{1/p} dt\right)^p \geq \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln f(t) dt\right),$$

$$\kappa(p) \leq \lambda(p);$$

otteniamo:

$$\int_0^l \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln f(t) dt\right) \frac{dx}{k(x)} \leq \lambda(p) \int_0^l f(x) \frac{dx}{k(x)};$$

passando al limite per  $p \rightarrow +\infty$  (ricordiamo che  $\lambda(p)$  è funzione non crescente di  $p$ ):

$$(5.3) \quad \int_0^l \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln f(t) dt\right) \frac{dx}{k(x)} \leq \lambda(\infty) \int_0^l f(x) \frac{dx}{k(x)} \quad (\lambda(\infty) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \lambda(p)).$$

Ricordando che:

$$\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b g(x)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \leq \exp\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln g(x) dx\right); \quad (r > 0),$$

si trova, per (2.2)

$$\lambda(\infty) = \inf_v \sup_{0 < x < l} \frac{1}{k(x)} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln k(t) dt\right) \frac{\exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln v(t) dt\right)}{-x v'(x)}.$$

Se si prende  $v(x) = 1/x$ , per essere :

$$\frac{1}{-x(1/x)'} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln \frac{1}{t} dt\right) = e, \quad .$$

si trova :

$$\lambda(\infty) \leq e \cdot \sup_{0 < x < l} \frac{1}{k(x)} \exp\left(\frac{1}{x} \int_0^x \ln k(t) dt\right) = \lambda^*(\infty).$$

Questa disuguaglianza e (5.3) conducono a (5.1)-(5.1)' (in una forma più debole: « < » è sostituito da « ≤ »).

NOTA (aggiunta durante la correzione delle bozze, il 24 Maggio 1967). Dopo che il manoscritto del presente lavoro era stato inviato alla Redazione di questa Rivista, è stata pubblicata dalla Mathematical Reviews una recensione della memoria: F. A. Sysoeva, Generalizzazione di una disuguaglianza di Hardy (in russo) (Izv. Vyss. Učebn. Zaved Matematika, 1965). In questa memoria è dimostrata la seguente disuguaglianza :

$$(*) \quad \int_0^{+\infty} g_0(x) \left( \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt \right)^p dx < p^p \int_0^{+\infty} g_n(x) f(x)^p dx$$

( $f(x) > 0$ ;  $p > \mathbf{1}$ ;  $n = 1, 2, 3, \dots$ )

$$g_0(x) > 0, \quad g_n(x) = g_{n-1}(x)^{1-p} \left( \int_x^{+\infty} g_{n-1}(t) dt \right)^p.$$

Prendendo  $n = 1$ ,  $g_0(x) = 1/x^p k(x)$ , risulta :

$$g_1(x) = \left( x^{p-1} k(x) \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^p k(t)} \right)^p \frac{1}{k(x)},$$

pertanto (\*) contiene la disuguaglianza (1.1)(1.2) del presente lavoro (nel caso  $l = +\infty$ ).

## B I B L I O G R A F I A

- [1] E. F. BECKENBACH-R. BELLMAN : *Inequalities* (Springer-Verlag, 1965).
- [2] G. H. HARDY-J. E. LITTLEWOOD-G. PÖLYA : *Inequalities* (Cambridge, 1934).
- [3] G. TALENTI : *Una diseguaglianza integrale* (Bollettino U.M.I., vol. XXI, 1966).
- [4] G. TALENTI : *Soluzioni a simmetria assiale di equazioni ellittiche* (Annali di Mat., vol. LXXI, 1966).
- [5] A. ZYGMUND : *Trigonometric series* (Cambridge, 1959).
- [6] P. R. BEESACK : *Hardy's inequality and its extensions* (Pacific J. of Math., XI, 1961).