

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

G. DA PRATO

Semigrupperi di crescita n

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 20, n° 4 (1966), p. 753-782

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_4_753_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SEMIGRUPPI DI CRESCENZA n .

G. DA PRATO (*)

Introduzione

Un semigruppato di classe c_0 è un'applicazione fortemente continua $t \rightarrow G(t)$ della semiretta reale non negativa $\overline{\mathbb{R}}_+$ nell'algebra degli operatori lineari continui su uno spazio di Banach X tale che $G(0) = 1$, $G(t+s) = G(t)G(s) \forall t, s \in \mathbb{R}_+$; si definisce il generatore infinitesimale A di G ponendo:

$$(1) \quad Ax = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(h)x - x}{h}$$

per tutti gli x di X per cui tale limite esiste e si dimostra che A è chiuso [5]. Hille e Yosida [5], [6] hanno dimostrato che l'operatore lineare chiuso A con dominio denso in X è generatore infinitesimale di un semigruppato di classe c_0 se e solo se il risolvete $R(\lambda, A)$ di A , che coincide con la trasformata di Laplace di $G(t)$, è analitico in un semipiano $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ e verifica le relazioni:

$$(2) \quad \left\| \frac{d^k R(\lambda, A)}{d\lambda^k} \right\| \leq M \frac{k!}{(\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{k+1}} \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega \quad k = 0, 1, \dots$$

M e ω opportuni numeri reali.

Nella deduzione del risultato suddetto è essenziale che $G(t)$ sia fortemente continuo per $t = 0$; nel presente lavoro lasceremo cadere questa condizione richiedendo però alla norma di $G(t)$ di divergere per $t \rightarrow 0$ non più rapidamente dell'inverso di un polinomio di grado n (semigruppato di crescita n); osserviamo che in tal modo considereremo una classe di semigruppato molto più ampia di quelli di classe c_0 , contenente tra l'altro i semigruppato distribuzioni analitici, [6], [1], [2].

Pervenuto alla Redazione il 9 Maggio 1966

(*) Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca del C.N.R. n. 46 nell'anno 1965-66.

Un sommario dei risultati qui contenuti è apparso in C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262, p. 996-998 (1966).

Il primo ad abbandonare l'ipotesi di continuità nello 0 è stato Feller che ha dato però caratterizzazioni del generatore infinitesimale di difficile uso nella pratica [4]; le nostre ipotesi su $G(t)$, più restrittive di quelle di Feller, ci permettono di dare una diversa caratterizzazione del generatore infinitesimale A , che speriamo utile per le applicazioni.

Se G è un semigruppato di crescita n , il suo generatore infinitesimale A , definito ancora da (1), è prechiuso e ha in generale come spettro tutto il piano complesso $\mathbb{C}$ cosicché il risolvete di A non è mai definito; tuttavia la trasformata Laplace di $t^n G(t)$, $S(\lambda, A)$ è una funzione analitica su un semipiano $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ e verifica ancora le relazioni (2) e inoltre se x appartiene al dominio di A^{n+1} si ha:

$$(3) \quad S(\lambda, A)(\lambda - A)^{n+1}x = (\lambda - A)^{n+1}S(\lambda, A)x = x.$$

Questo fatto ci ha indotto a considerare operatori lineari prechiusi (operatori di tipo n) tali che esista una funzione $S(\lambda, A)$ (risolvete di ordine n di A) a valori in $\mathcal{L}(X, X)$ analitica in un insieme aperto non vuoto del piano complesso $\mathbb{C}$ e verificante (3); abbiamo definito insieme risolvete di ordine n il massimo insieme di analiticità di $S(\lambda, A)$ e spettro di ordine n il suo complementare in $\mathbb{C}$; per $n=0$ queste definizioni si riducono ai soliti concetti di risolvete, insieme risolvete e spettro di A .

Il risultato principale del lavoro è la generalizzazione del Teorema di Hille-Yosida e cioè se A è generatore infinitesimale di un semigruppato di crescita n allora A è di tipo n e il suo risolvete di ordine n $S(\lambda, A)$ verifica (2); viceversa se B è un operatore prechiuso di tipo n il cui risolvete di ordine n $S(\lambda, B)$ verifica (2) allora esiste un unico semigruppato di crescita n tale che, detto A il suo generatore infinitesimale si ha $S(\lambda, A) = S(\lambda, B)$; da notare che quest'ultima condizione assicura $A = B$ per $n=0$.

Abbiamo dimostrato il risultato suddetto seguendo l'idea della dimostrazione di Yosida [7].

I paragrafi 2, 3, 4, 5 sono dedicati allo studio dei semigrupperi di crescita n , degli operatori di tipo n e alla generalizzazione del Teorema di Hille-Yosida.

Nel paragrafo 5 abbiamo studiato il problema di Cauchy:

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{du}{dt} = Bu \\ u(0) = u_0 \end{cases} \quad u_0 \in X$$

con B operatore lineare chiuso di tipo n con risolvete di ordine n $S(\lambda, B)$ verificante (2); abbiamo dimostrato che se u appartiene al dominio di B

allora (4) ha una e una sola soluzione con $u(t)$ appartenente al dominio di B per ogni $t \in \mathbb{R}_+$.

Nel paragrafo 6 abbiamo generalizzato ai semigruppì di tipo n che ammettono un prolungamento analitico su un settore i Teoremi sui semigruppì analitici « ordinari » [5], [8].

Nel paragrafo 7, come applicazione, abbiamo dato condizioni di risolubilità per il problema di Cauchy relativo all'equazione differenziale

$$\sum_{k=0}^n a_k U^k \frac{d^{n-k}u}{dt} = 0 \quad a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$$

con $u(t)$ funzioni a valori in uno spazio di Banach Y e U generatore infinitesimale di un semigruppò analitico « ordinario ».

Abbiamo usato le seguenti notazioni:

$\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali, $\mathbb{C}$ l'insieme dei numeri complessi, $\mathbb{R}_+(\overline{\mathbb{R}_+})$ l'insieme dei numeri reali positivi (non negativi).

Se $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ S_θ è il settore

$$S_\theta = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0 \mid |\arg \lambda| < \theta\}$$

X è uno spazio di Banach complesso, $\|x\|$ è la norma del generico elemento x di X , $\mathcal{L}(X, X)$ è l'algebra degli operatori lineari continui su X con la norma usuale; per ogni operatore lineare A in X D_A è il dominio di A , e se m è un intero positivo D_{A^m} il dominio di A^m :

$$D_{A^m} = \{x \in X, A^i x \in D_A, i = 1, \dots, m\}$$

inoltre $D_\infty(A)$ è l'insieme $\bigcap_{m=1}^{\infty} D_{A^m}$.

Infine con continuità di funzioni e convergenza di successioni in X abbiamo sempre inteso, salvo contrario avviso, continuità e convergenza nella topologia forte di X .

Ringrazio il professor J. L. Lions per stimolanti discussioni e utili consigli.

1. Semigruppì di crescita n .

DEFINIZIONE [1.I] — Diremo che G è un semigruppò di crescita n su X , n intero non negativo, se:

a) G è un'applicazione fortemente continua di $\mathbb{R}_+$ in $\mathcal{L}(X, X)$ tale che :

$$(1.1) \quad G(t+s) = G(t)G(s) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}_+.$$

b) Per ogni $a > 0$ la funzione $\|t^n G(t)\|$ è limitata nell'intervallo $0 < t \leq a$.

c) Se $x \in X$ e si ha $G(t)x = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$ allora $x = 0$.

d) Posto :

$$(1.2) \quad Y = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \{y \in X; y = G(t)x, x \in X\}$$

allora il sottospazio vettoriale generato da Y è denso in X .

Osserviamo che la condizione c) non è restrittiva ; infatti se G verifica a), b) d) allora posto :

$$X_1 = \{x \in X; G(t)x = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+\}$$

e detta $\bar{X}_1$ la chiusura di X_1 in X , G induce in modo naturale su $X/\bar{X}_1$ un semigruppato di crescita n .

Nel seguito del paragrafo G rappresenta un semigruppato di crescita n .

Definiamo ora il generatore infinitesimale di G e riportiamo nel Lemma [1.I], senza dimostrazione, alcuni risultati noti ([5] p. 306).

DEFINIZIONE [1.II] — Sia A l'operatore lineare in X definito da :

$$(1.3) \quad Ax = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(h)x - x}{h} \quad x \in X$$

per tutti gli x per cui tale limite esiste ; A è detto il generatore infinitesimale di G .

LEMMA [1.I] — D_A è denso in X e se $x \in D_A$ la funzione $G(t)x$ è prolungabile a una funzione continua e derivabile in $\mathbb{R}_+$ e si ha :

$$(1.4) \quad \lim_{t \rightarrow 0} G(t)x = x$$

$$(1.5) \quad \frac{d}{dt} G(t)x = AG(t)x = G(t)Ax \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

LEMMA [1.II] — Si ha :

$$(1.6) \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^n (G(t)x - x) = 0 \quad \forall x \in X.$$

in particolare se $n = 0$ G è un semigruppato di classe c_0 .

DIM. — Dato $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $x \in X$ esiste (LEMMA [1.I]) un elemento $y \in D_A$ tale che $\|x - y\| < \varepsilon$ ne segue:

$$\begin{aligned} \|t^n G(t)x - t^n x\| &\leq \|t^n G(t)x - t^n G(t)y\| + \|t^n G(t)y - t^n y\| + t^n \|x - y\| \\ &\leq \varepsilon(t^n + \|t^n G(t)\|) + t^n \|G(t)y - y\| \end{aligned}$$

allora in virtù della DEFINIZIONE [1.I] b), del LEMMA [1.I] e dell'arbitrarietà di ε si ha la tesi.

TEOREMA [1.I] — A è prechiuso.

DIM. — Se $x \in D_A$ si ha (LEMMA [1.II])

$$(1.7) \quad t^{n+1} G(t)x = \int_0^t \frac{d}{ds} \left(s^{n+1} G(s)x \right) ds = (n+1) \int_0^t s^n G(s)x ds + \int_0^t s^{n+1} G(s) A x ds.$$

Sia ora $\{x_l\}$ una successione in D_A tale che:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} x_l = 0, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} A x_l = y \quad \text{con } y \in X$$

ponendo x_l al posto di x nella (1.7) e passando al limite per l tendente all'infinito si ottiene:

$$(1.8) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^t s^n G(s) x_l ds = 0$$

$$(1.9) \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \int_0^t s^{n+1} G(s) A x_l ds = \int_0^t s^{n+1} G(s) y ds.$$

Infatti (DEFINIZIONE) [1.I] b) esiste un $K \in \mathbb{R}_+$ tale che:

$$\|s^n G(s)\| \leq K \quad \text{se } 0 < s \leq t$$

ne segue:

$$\left\| \int_0^t s^n G(s) x_l ds \right\| \leq t K \|x_l\|$$

e inoltre :

$$\left\| \int_0^t s^{n+1} G(s) (Ax_l - y) ds \right\| \leq t^2 K \|Ax_l - y\|$$

quindi si ottiene

$$\int_0^t s^{n+1} G(s) y ds = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

cioè

$$s^{n+1} G(s) y = 0 \quad \forall s \in \mathbb{R}_+$$

ne segue (DEFINIZIONE) [1.I] c) $y = 0$ cosicchè A è prechiuso.

2. Trasformata di Laplace.

In questo paragrafo G rappresenta un semigruppò di crescita n in X , A il generatore infinitesimale di G , K un numero positivo tale che :

$$(2.1) \quad \|t^n G(t)\| \leq K \quad \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Il seguente LEMMA riguarda l'andamento all'infinito di $\|G(t)\|$.

LEMMA [2.1] — *Esiste un numero positivo M e un numero ω tali che :*

$$(2.2) \quad \|t^n G(t)\| \leq M e^{\omega t} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Inoltre se $x \in D_A$ per ogni intero non negativo k esiste un numero positivo M_k tale che :

$$(2.3) \quad \|t^n G(t) x\| \leq M_k e^{\omega t} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

DIM. — Poichè la funzione $\|G(t)\|$ è subadditiva nell'intervallo $1 \leq t < \infty$ esistono numeri M_1 , ω_1 tali che ([3] p. 618):

$$(2.4) \quad \|G(t)\| \leq M_1 e^{\omega_1 t} \quad \text{se} \quad t \geq 1.$$

In virtù di (2.1) e del LEMMA [1.I] segue ora facilmente la tesi.

DEFINIZIONE [2.1] — *L'estremo inferiore degli ω per i quali esiste un $M \in \mathbb{R}_+$ tale che valga (2.2) sarà detto il tipo di G ; se $\omega < 0$ G sarà detto di tipo negativo.*

Osserviamo che si può sempre supporre G di tipo negativo: infatti se G è di tipo ω e se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ $e^{-(\omega+\varepsilon)t} G(t)$ è un semigruppato di *crescenza* n di tipo negativo.

Vogliamo ora definire sul semipiano $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ una funzione analitica $S(\lambda)$ a valori in $\mathcal{L}(X, X)$ che avrà un ruolo analogo al risolvete nei semigruppato di classe c_0 ; i lemmi seguenti sono dedicati allo studio di alcune proprietà di $S(\lambda)$.

LEMMA [2.II] — *Posto:*

$$(2.5) \quad S(\lambda)x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n G(t)x dt \quad \forall x \in X$$

$S(\lambda)$ è una funzione analitica sul semipiano $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ a valori in $\mathcal{L}(X, X)$ e risulta:

$$(2.6) \quad \frac{d^k S(\lambda)x}{d\lambda^k} = \frac{(-1)^k}{n!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^{n+k} G(t)x dt \quad \forall x \in X$$

$$(2.7) \quad \left\| \frac{d^k S(\lambda)}{d\lambda^k} \right\| \leq \frac{k! M}{n! (\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{k+1}}$$

essendo k un intero non negativo e $\operatorname{Re} \lambda > \omega$.

DIM. — La (2.5) ha senso in virtù dei LEMMI [1.II] e [2.I], inoltre dagli stessi segue anche l'analiticità di $S(\lambda)$ e la (2.6); infine la (2.7) si prova facilmente tenendo conto di (2.2).

LEMMA [2.III] — *Se $x \in D_A$ allora $S(\lambda)x \in D_A$ e se $x \in D_{A^{n+1}}$ risulta:*

$$(2.8) \quad S(\lambda)(\lambda - A)^{n+1}x = (\lambda - A)^{n+1}S(\lambda)x = x.$$

DIM. — Se $x \in D_A$ e se $s \in \mathbb{R}_+$ si ha:

$$(2.9) \quad G(s)S(\lambda)x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n G(t+s)x dt =$$

$$\frac{1}{n!} e^{\lambda s} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} s^{n-k} \int_s^\infty e^{-\lambda t} t^k G(t)x dt$$

Gli integrali che figurano in (2.9) hanno senso in virtù di (2.3); da (2.3) segue anche che $G(s)S(\lambda)x$ è, come funzione di s , prolungabile a una funzione continua e derivabile in $\overline{\mathbb{R}}_+$ cosicchè $S(\lambda)x \in D_A$.

Si ha inoltre :

$$(2.10) \quad S(\lambda)Ax = \lim_{s \rightarrow 0} S(\lambda) \frac{G(s)x - x}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{G(s)S(\lambda)x - S(\lambda)x}{s} = A S(\lambda)x.$$

Infine se $x \in D_{A^{n+1}}$ si ha :

$$(2.11) \quad S(\lambda)(\lambda - A)^{n+1}x = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k \lambda^{n+1-k} I_k$$

essendo

$$(2.12) \quad I_k = \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n \frac{d^k G(t)x}{dt^k} dt \quad k = 0, 1, \dots, n+1.$$

Osserviamo che se $k < n+1$ in I_k è lecito integrare k volte per parti dato che le funzioni $\frac{d^k G(t)x}{dt^k}$, $k = 0, 1, \dots, n$ sono prolungabili a funzioni continue su $\overline{\mathbb{R}}_+$ (LEMMA [1.II]) e che vale la relazione (2.3).

Si ha inoltre se $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$

$$\int_\varepsilon^\infty e^{-\lambda t} t^n \frac{d^{n+1} G(t)x}{dt^{n+1}} dt = e^{-\lambda \varepsilon} \varepsilon^n \left(\frac{d^n G(t)x}{dt^n} \right)_{t=\varepsilon} - \int_\varepsilon^\infty \frac{d}{dt} \left(e^{-\lambda t} t^n \right) \frac{d^n G(t)x}{dt^n} dt.$$

e, passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ottiene

$$(2.13) \quad I_{n+1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n \frac{d^{n+1} G(t)x}{dt^{n+1}} dt = - \int_0^\infty \frac{d}{dt} \left(e^{-\lambda t} t^n \right) \frac{d^n G(t)x}{dt^n} dt$$

Integrando ora k volte per parti in I_k e n volte per parti in (2.13) si trova :

$$(2.14) \quad S(\lambda)(\lambda - A)^{n+1}x = x$$

e quindi, in virtù di (2.10), la tesi

LEMMA [2.IV] — *Posto* :

$$(2.15) \quad H_\lambda(t)x = G(t)S(\lambda)x \quad \forall x \in X, \operatorname{Re} \lambda > \omega$$

allora $H_\lambda(t)$ è prolungabile a una funzione continua su $\widetilde{\mathbb{R}}_+$ e si ha:

$$(2.16) \quad \lim_{t \rightarrow 0} H_\lambda(t) x = S(\lambda) x$$

e se è $\omega < 0$ si ha infine:

$$(2.17) \quad \frac{d^{n+1} H_0(t) x}{dt^{n+1}} = G(t) x \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

DIM. — Si procede come per la dimostrazione del LEMMA [2.III].

3. Spettro di ordine n .

In questo paragrafo B rappresenta un operatore lineare prechiuso con $D_\infty(B)$ denso in X .

DEFINIZIONE [3.I] — Diremo che B è di tipo n se esiste una funzione analitica $S(\lambda, B)$ a valori in $\mathcal{L}(X, X)$ definita su un insieme aperto non vuoto $\varrho_n(B)$ di $\mathbb{C}$ tale che:

a) Se $x \in D_B$ allora $S(\lambda, B)x \in D_B \quad \forall \lambda \in \varrho_n(B)$ e si ha:

$$(3.1) \quad BS(\lambda, B)x = S(\lambda, B)Bx.$$

b) Se $x \in D_{B^{n+1}}$ si ha, per ogni $\lambda \in \varrho_n(B)$

$$(3.2) \quad S(\lambda, B)(\lambda - B)^{n+1}x = (\lambda - B)^{n+1}S(\lambda, B)x = x.$$

c) Sia $\lambda \in \varrho_n(B)$, se $S(\lambda, B)x = 0$ si ha allora $x = 0$.

Supporremo sempre $S(\lambda, B)$ massimale cioè che non esista un'estensione propria di $S(\lambda, B)$ verificante a), b), c); diremo allora che $S(\lambda, B)$ è il risolvente di ordine n di B , che $\varrho_n(B)$ è l'insieme risolvente di ordine n di B e che $\sigma_n(B) = \mathbb{C} - \varrho_n(B)$ è lo spettro di ordine n di B .

Se B è chiuso e di tipo 0 $S(\lambda, B)$ si riduce al risolvente $R(\lambda, B)$ di B e $\varrho_0(B)$ e $\sigma_0(B)$ rispettivamente all'insieme risolvente e allo spettro di B .

Osserviamo che, mentre il risolvente di un operatore chiuso è automaticamente analitico laddove esiste, per $n > 0$ l'analiticità di $S(\lambda, B)$ deve essere esplicitamente richiesta.

È noto ([3] p. 602) che se l'insieme risolvente di un operatore chiuso B su X non è vuoto allora ogni polinomio in B è chiuso; se B è di tipo n

allora lo spettro di B può coincidere con $\mathbb{C}$, ma sussiste il seguente risultato più debole :

LEMMA [3.I] — Se B è di tipo n in X e se $\lambda \in \varrho_n(B)$ allora $(\lambda - B)^{n+1}$ è prechiuso e, detta $\overline{(\lambda - B)^{n+1}}$ la minima estensione chiusa di $(\lambda - B)^{n+1}$, si ha :

$$(3.3) \quad \overline{(\lambda - B)^{n+1}} S(\lambda, B) x = x \quad \forall x \in X.$$

DIM. — Sia $\lambda \in \varrho_n(B)$ e sia $\{x_i\}$ una successione in $D_{B^{n+1}}$ tale che :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0 \quad \lim_{i \rightarrow \infty} (\lambda - B)^{n+1} x_i = y \quad \text{con } y \in X$$

si ha allora :

$$S(\lambda, B) y = \lim_{i \rightarrow \infty} S(\lambda, B) (\lambda - B)^{n+1} x_i = 0$$

cosicchè (DEFINIZIONE [3.I] c) si ha $y = 0$ e $(\lambda - B)^{n+1}$ è prechiuso.

Sia ora $x \in X$ e $\{z_i\}$ una successione in $D_{B^{n+1}}$ convergente a x , si ha :

$$\lim_{i \rightarrow \infty} S(\lambda, B) z_i = S(\lambda, B) x, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} (\lambda - B)^{n+1} S(\lambda, B) z_i = x$$

quindi $S(\lambda, B) x$ appartiene al dominio di $\overline{(\lambda - B)^{n+1}}$ e vale la (3.3).

Osserviamo che per $n > 0$, se $x \in D_{\overline{(\lambda - B)^{n+1}}}$ non è detto che $x \in D_B$; infatti se $y \in X$ $S(\lambda, B) y$ non appartiene in generale a D_B , se ciò accadesse per tutti gli y di X allora $(\lambda - B) S(\lambda, B)$ sarebbe un operatore continuo e quindi B sarebbe di tipo $n - 1$.

Nel seguito di questo paragrafo B rappresenta un operatore prechiuso su X di tipo n con $D_\infty(B)$ denso in X ; porremo inoltre :

$$S^{(m)}(\lambda, B) = \frac{d^m S(\lambda, B)}{d\lambda^m} \quad \lambda \in \varrho_n(B)$$

per ogni intero non negativo m .

LEMMA [3.II] — Se l e m sono interi non negativi si ha :

$$(3.4) \quad S^{(l)}(\lambda, B) S^{(m)}(\lambda, B) = S^{(m)}(\lambda, B) S^{(l)}(\lambda, B) \quad \forall \lambda \in \varrho_n(B).$$

DIM. — Ovvio.

LEMMA [3.III] — Se $x \in D_\infty(B)$ allora $S^{(l)}(\lambda, B)x \in D_\infty(B)$ per ogni intero non negativo l e per ogni $\lambda \in \mathcal{Q}_n(B)$.

DIM. — Per $l = 0$ la tesi è evidente (DEFINIZIONE [3.I] a); basta allora provare il LEMMA per $l = 1$.

Si ha, se $x \in D_\infty(B)$ e $\lambda \in \mathcal{Q}_n(B)$, $S(\lambda, B)(\lambda - B)^{n+1}x = X$ da cui, derivando rispetto a λ :

$$(3.5) \quad S^{(1)}(\lambda, B)(\lambda - B)^{n+1}x = -(n+1)(\lambda - B)^n S(\lambda, B)x$$

applicando ad ambo i membri $S(\lambda, B)$ e usando il LEMMA [3.II] si ottiene:

$$(3.6) \quad S^{(1)}(\lambda, B)x = -(n+1)S^2(\lambda, B)(\lambda - B)^n x$$

e quindi la tesi.

LEMMA [3.IV] — Risulta, per ogni $\lambda \in \mathcal{Q}_n(B)$ e per ogni intero non negativo k

$$(3.7) \quad S^k(\lambda, B)x = \frac{n!}{(nk+k-1)!} (-1)^{(nk-n+k-1)} S^{(nk+k-n-1)}(\lambda, B)x, \quad \forall x \in X.$$

DIM. — Sia dapprima $x \in D_\infty(B)$, applicando ad ambo i membri di (3.5) $(\lambda - B)S(\lambda, B)$ si ottiene:

$$(3.8) \quad S^{(1)}(\lambda, B)(\lambda - B)x = -(n+1)S(\lambda, B)x.$$

Derivando ancora rispetto a λ si ottiene:

$$S^{(2)}(\lambda, B)(\lambda - B)x = -(n+2)S^{(1)}(\lambda, B)x$$

applicando $\lambda - B$ e sostituendo (3.8) si ottiene:

$$S^{(2)}(\lambda, B)(\lambda - B)^2x = (-1)^2(n+1)(n+2)S(\lambda, B)x.$$

Procedendo in modo analogo si perviene alla relazione:

$$S^{(nk+k-n-1)}(\lambda, B)(\lambda - B)^{nk+k-n-1}x = (-1)^{(nk+k-n-1)} \frac{(nk+k-1)!}{n!} S(\lambda, B)x.$$

Moltiplicando per $S^{k-1}(\lambda, B)$ e tenendo conto del LEMMA [3.III] si ha la (3.7) per $x \in D_\infty(B)$ ma dato che $D_\infty(B)$ è denso in X si ha la tesi.

Proviamo ora un'identità che generalizza l'identità del risolvante :

LEMMA [3.V] — Siano $\lambda, \mu \in \varrho_n(B)$, $\lambda \neq \mu$, posto :

$$(3.9) \quad B_{\lambda, \mu} = \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} (\mu^k - \lambda^k) (-1)^{n-k} B^{n-k} S(\lambda, B) S(\mu, B)$$

allora $B_{\lambda, \mu} \in \mathcal{L}(X, X)$ e risulta :

$$(3.10) \quad S(\lambda, B) - S(\mu, B) = (\mu^{n+1} - \lambda^{n+1}) S(\lambda, B) S(\mu, B) + B_{\lambda, \mu}.$$

DIM. — Sia $x \in D_\infty(B)$, si ha allora :

$$\begin{aligned} (\mu - B)^{n+1} x - (\lambda - B)^{n+1} x &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} (\mu^k - \lambda^k) (-1)^{n-k} B^{n-k} x = \\ &= \mu^{n+1} - \lambda^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} (\mu^k - \lambda^k) (-1)^{n-k} B^{n-k} x. \end{aligned}$$

Ne segue, applicando $S(\lambda, B) S(\mu, B)$:

$$S(\lambda, B) x - S(\mu, B) x = (\mu^{n+1} - \lambda^{n+1}) S(\lambda, B) S(\mu, B) x + B_{\lambda, \mu} x$$

cosicchè, dato che $D_\infty(B)$ è denso in X si ha la tesi.

Concludiamo questo paragrafo con il seguente TEOREMA che dà una condizione necessaria sul generatore infinitesimale di un semigrupp di crescita n .

TEOREMA [3.I] — Se G è un semigrupp di crescita n su X , il suo generatore infinitesimale A è di tipo n e lo spettro di ordine n di A è contenuto in un semipiano $\operatorname{Re} \lambda > \omega$, ω opportuno numero reale.

Inoltre il risolvante di ordine n di A $S(\lambda, A)$ è dato da :

$$(3.11) \quad S(\lambda, A) x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n G(t) x dt, \quad \forall x \in X, \quad \operatorname{Re} \lambda > \omega$$

e valgono le relazioni :

$$(3.12) \quad \|S^{(k)}(\lambda, A)\| \leq \frac{k! M}{n! (\operatorname{Re} \lambda - \omega)^{k+1}}, \quad \forall \operatorname{Re} \lambda > \omega, k = 0, 1, \dots$$

con M opportuno numero positivo.

DIM. Che $D_\infty(A)$ sia denso in X segue da ([5] p. 308), le altre affermazioni seguono dal LEMMA [2.II].

4. Generazione del semigrupp.

In questo paragrafo B rappresenta un operatore lineare prechiuso di tipo n con $D_\infty(B)$ denso in X . Supporremo che il risolvante di ordine n $S(\lambda, B)$ di B sia analitico in un aperto contenente il semipiano $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ e che verifichi le relazioni:

$$(4.1) \quad \|S^{(k)}(\lambda, B)\| \leq \frac{M k!}{n! \operatorname{Re} \lambda^{n+1}}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \operatorname{Re} \lambda \geq 0$$

dove M è un opportuno numero positivo e $S^{(k)}(\lambda, B)$ la derivata k^{ma} di $S(\lambda, B)$.

Seguendo l'idea della dimostrazione di Yosida ([7]) daremo un'inversione del TEOREMA [3.II] provando che esiste un semigrupp di *crescenza* n su X , $G(t)$ il cui generatore infinitesimale A è di tipo n e ha lo stesso risolvante di ordine n di B .

Osserviamo che se $S(\lambda, B)$ verifica, in luogo di (4.1) le condizioni (3.12) allora $S(\lambda, B - \omega - \varepsilon) = S(\lambda + \omega + \varepsilon, B)$, con $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, verifica le (4.1) cosicchè queste non sono più restrittive delle (3.12) dato che evidentemente $B - \omega - \varepsilon$ è ancora di tipo n .

LEMMA [4.I] — Sia i un intero positivo, posto:

$$(4.2) \quad B_i = \frac{1}{n+1} [i^{n+2} S(i, B) - i]$$

$$(4.3) \quad G(t) = e^{Bt}$$

risulta:

$$(4.4) \quad \|G_i(t)\| \leq 1 + \frac{N}{t^n}$$

essendo $N = 2M(n+1)$

DIM. — Si ha:

$$G_i(t) = e^{-\frac{it}{n+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{nk+2k} t^k}{k! (n+1)^k} S^k(i, B)$$

ne segue:

$$\|G_i(t)\| \leq e^{-\frac{it}{n+1}} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k i^{n+2k}}{k! (n+1)^k} \|S^k(i, B)\| \right]$$

e, in virtù del LEMMA [3.IV] e delle (4.1) si ottiene:

$$\|G_i(t)\| \leq e^{-\frac{it}{n+1}} \left\{ 1 + M \left(\frac{n+1}{t} \right)^n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k+n)!} \left(\frac{it}{n+1} \right)^{k+n} \right\}$$

avendo posto

$$a_k = \frac{(k+n)!}{k!} \frac{(nk+k-n-1)!}{(nk+k-1)!}.$$

Essendo $a_k \leq 2(1+n)$ si trova:

$$\|G_i(t)\| \leq e^{-\frac{it}{n+1}} \left\{ 1 + M \left(\frac{n+1}{t} \right)^n 2(1+n) e^{\frac{it}{n+1}} \right\} \leq 1 + \frac{2M(n+1)^{n+1}}{t^n}.$$

LEMMA [4.II] — Sia $x \in D_{\infty}(B)$ e k un intero positivo, si ha:

$$(4.5) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} B_i^k x = B^k x.$$

DIM. — Risulta, se $x \in D_{\infty}(B)$:

$$(i-B)^{n+1} B_i x = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} (-1)^{n-k} i^{k+1} B^{n-k-1} x$$

Poniamo $B_i - B = \Delta_i$, si ha:

$$(i-B)^{n+1} \Delta_i x = \sum_{k=0}^n d_k i^k B^{n-k+2} x$$

essendo

$$d_k \begin{cases} = (-1)^n & \text{se } k=0 \\ = \left[\frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k-1} - \binom{n+1}{k} \right] (-1)^{n-k+1} & \text{se } k > 0 \end{cases}$$

ne segue

$$\Delta_i x = \sum_{k=0}^n d_k i^k S(i, B) x_k, \quad \text{avendo posto } x_k = B^{n+2-k} x.$$

Vogliamo ora provare che risulta $\lim_{i \rightarrow \infty} \Delta_i x = 0$; dimostriamo ad esempio che si ha:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} i^n S(i, B) x_n = 0.$$

Osserviamo che l'andamento di $\|i^n S(i, B) x_n\|$ per $i \rightarrow \infty$ è il seguente:

$$\|i^n S(i, B) x_n\| \sim i^{n-1}$$

posto $x_n = S(\lambda, B) y$ con $\lambda \in \mathcal{Q}_n(B)$, $y \in D_\infty(B)$ si ha, usando la (3.10):

$$i^n S(i, B) S(\lambda, B) y = \frac{i^n}{(\lambda^{n+1} - i^{n+1})} (S(i, B) y - S(\lambda, B) y) +$$

$$\frac{i^n}{\lambda^{n+1} - i^{n+1}} \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} (\lambda^k - i^k) (-1)^{n-k+1} B^{n-k} S(i, B) x_n.$$

Osserviamo che l'andamento della norma del secondo membro di questa relazione per $i \rightarrow \infty$ è $n-2$; procedendo allora in modo analogo si ha la tesi per $k=1$, per $k > 1$ si procede per ricorrenza.

LEMMA [4.III] — *Posto:*

$$F(\alpha, \beta) = \frac{e^\alpha - e^\beta}{\alpha - \beta} \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

sussiste l'identità:

$$(4.6) \quad F(\alpha, \beta) = e^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \sum_{k=0}^n \frac{(1 + (-1)^{k-1}) (\alpha - \beta)^k}{k! 2^k} +$$

$$\frac{(\alpha - \beta)^n}{n!} \int_0^{1/2} s^n [(-1)^n e^{\alpha s} e^{\beta(1-s)} + e^{\beta s} e^{\alpha(1-s)}] ds.$$

DIM. — Si prova per verifica diretta.

LEMMA [4.IV] — *Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $x \in D_\infty(B)$ esiste un intero positivo $i_\varepsilon(x)$ tale che se i e j superano $i_\varepsilon(x)$ risulta:*

$$(4.7) \quad \|G_i(t)x - G_j(t)x\| \leq \varepsilon f(t)$$

con $f(t)$ funzione reale e continua su $\mathbb{R}_+$

In particolare esiste il $\lim_{i \rightarrow \infty} G_i(t)x$.

DIM. — Dalla (4.6) con $\alpha = B_i t$, $\beta = B_j t$ si ha :

$$G_i(t) - G_j(t) = G_i\left(\frac{t}{2}\right) G_j\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{k=0}^n \frac{(1 + (-1)^{k-1}) (B_i - B_j)^{k+1}}{k! 2^k} t^{k+1} +$$

$$\frac{(B_i - B_j)^{n+1}}{n!} t^{n+1} \cdot \int_0^{1/2} s^k [(-1)^n G_i(ts) G_j(t-ts) + G_j(ts) G_i(t-ts)] ds.$$

In virtù del LEMMA [4.II] dato x in $D_\infty(B)$ e $\varepsilon > 0$ esiste un intero $i_\varepsilon(x)$ tale che se i e j superano $i_\varepsilon(x)$ risulta :

$$\| (B_i - B_j)^k x \| < \varepsilon \quad k = 1, \dots, n+1$$

ne segue dalla (4.4)

$$\| G_i(t)x - G_j(t)x \| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{2^n N}{t^n} \right)^2 \sum_{k=0}^n \frac{t^{k+1}}{k! 2^k} +$$

$$\varepsilon \frac{t^{n+1}}{n!} 2 \int_0^{1/2} s^n \left(1 + \frac{N}{t^n s^n} \right) \left(1 + \frac{N}{t^n (1-s)^n} \right) ds$$

e quindi la (4.7) con :

$$f(t) = t \left(1 + \frac{N 2^n}{t^n} \right)^2 e^{\frac{t}{2}} + \frac{2t}{n!} \int_0^{1/2} (t^n s^n + N) \left(1 + \frac{N}{t^n (1-s)^n} \right) ds.$$

LEMMA [4.V] — Posto :

$$(4.8) \quad G(t)x = \lim_{i \rightarrow \infty} G_i(t)x \quad \forall x \in X, t \in \mathbb{R}_+$$

allora $G(t)$ è un operatore lineare continuo su X e risulta :

$$(4.9) \quad \| G(t) \| \leq 1 + \frac{N}{t^n}$$

$$(4.10) \quad S(\lambda, B)x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n G(t)x dt \quad \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

DIM. — Se $x \in D_\infty(B)$ il limite (4.8) esiste per il LEMMA [4.IV], quindi in virtù della (4.4) esiste per ogni x di X e vale (4.9).

Proviamo la (4.10); osserviamo intanto che se $x \in X$ e $\operatorname{Re} \lambda > 0$ vale l'identità :

$$(4.11) \quad (\lambda - B_i)^{-n-1} x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n G_i(t) x dt$$

come si verifica direttamente usando (4.9).

Sia $\operatorname{Re} \lambda > 0$, poniamo

$$(4.12) \quad \Gamma x = \lim_{i \rightarrow \infty} (\lambda - B_i)^{-n-1} x \quad \forall x \in X$$

dalla (4.11) segue che tale definizione ha senso e dalla (4.8) segue la relazione :

$$(4.13) \quad \Gamma x = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-\lambda t} t^n G(t) x dt.$$

Sia ora $x \in D_\infty(B)$, poniamo :

$$(4.14) \quad y = S(\lambda, B)x, \quad x_i = (\lambda - B_i)^{n+1} y$$

risulta allora successivamente :

$$(4.15) \quad x = (\lambda - B)^{n+1} y = \lim_{i \rightarrow \infty} x_i$$

$$(4.16) \quad y = \lim_{i \rightarrow \infty} (\lambda - B_i)^{-n-1} (\lambda - B_i)^{n+1} y = \lim_{i \rightarrow \infty} (\lambda - B_i)^{-n-1} x_i = \Gamma x$$

dato che nella topologia forte il limite del prodotto è uguale al prodotto dei limiti.

Da (4.15) segue allora $x = (\lambda - B)^{n+1} y = (\lambda - B)^{n+1} \Gamma x$ cioè $S(\lambda, B)x = \Gamma x$; poichè $D_\infty(B)$ è denso in X si ha $\Gamma = S(\lambda, B)$ e quindi la tesi.

TEOREMA [4.I] — Sia B un operatore lineare prechiuso con $D_\infty(B)$ denso in X e di tipo n verificante le relazioni (4.1), allora esiste un unico semi-gruppo G di *crescenza* n su X tale che, detto A il suo generatore infinitesimale si ha :

$$(4.17) \quad S(\lambda, A) = S(\lambda, B) \quad \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

DIM. — Proviamo che $G(t)x$ è continua in $\mathbb{R}_+$ per ogni fissato x in X ; sia dapprima $x \in D_\infty(B)$, si ha allora:

$$\begin{aligned} \|G(t)x - G(s)x\| &= \lim_{i \rightarrow \infty} \|G_i(t)x - G_i(s)x\| \leq \lim_{i \rightarrow \infty} \|G_i(t) - G_j(t)\| + \\ &\quad \|G_j(t)x - G_j(s)x\| + \lim_{i \rightarrow \infty} \|G_j(s)x - G_i(s)x\|. \end{aligned}$$

Dato $\varepsilon > 0$ sia $i_\varepsilon(x)$ come nel LEMMA [4.IV], si ha allora se i e j sono maggiori di $i_\varepsilon(x)$:

$$\|G(t)x - G(s)x\| \leq 2\varepsilon + \|G_j(t)x - G_j(s)x\|;$$

poichè $G_j(t)$ è continuo si ha la tesi. Sia ora x arbitrario $\varepsilon > 0$ e $y \in D_\infty(B)$ tale che $\|x - y\| < \varepsilon$, si ha allora:

$$\begin{aligned} \|G(t)x - G(s)x\| &\leq \|G(t)x - G(t)y\| + \|G(t)y - G(s)y\| + \\ &\quad \|G(s)y - G(s)x\| \leq \varepsilon \left(2 + \frac{N}{t^n} + \frac{N}{s^n}\right) + \|G(t)y - G(s)y\|, \end{aligned}$$

quindi la continuità di $G(t)x \forall x \in X$ è provata.

Osserviamo ora che si ha

$$G(t+s)x = \lim_{i \rightarrow \infty} G_i(t+s)x = \lim_{i \rightarrow \infty} G_i(t)G_i(s)x = G(t)G(s)x \quad \forall x \in X, t, s \in \mathbb{R}_+.$$

Inoltre dal LEMMA [4.V] segue che G è di crescita n e che vale (4.17); resta allora da verificare le condizioni c) e d) della DEFINIZIONE [1.I].

Sia $G(t)x = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$ con $x \in X$, si ha allora dalla (4.10) $S(\lambda, B)x = 0$ con $\operatorname{Re} \lambda > 0$; ne segue $(\lambda - B)^{n+1}S(\lambda, B)x = x = 0$.

Sia infine $Y = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \{y \in X, y = G(t)x, x \in X\}$ e supponiamo per assurdo

che il sottospazio vettoriale generato da Y non sia denso in X ; esiste allora un funzionale lineare continuo non nullo f su X tale che $f(G(t)x) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, x \in X$ cosicchè da (4.10) segue $f(S(\lambda, B)x) = 0$ con $\operatorname{Re} \lambda > 0$ e $x \in X$ e, in particolare, $f(x) = 0 \quad \forall x \in D_\infty(B)$ dato che se $x \in D_\infty(B)$ si ha $x = S(\lambda, B)(\lambda - B)^{n+1}x$; ma ciò è assurdo poichè $D_\infty(B)$ è denso in X .

Infine osserviamo che $S(\lambda, A) = S(\lambda, B)$ è la trasformata di Laplace di $t^n G(t)$ cosicchè dalla unicità della trasformata di Laplace segue l'unicità di G .

5. Problema di Cauchy.

In questo paragrafo B rappresenta un operatore lineare chiuso in X verificante le ipotesi del TEOREMA [4.I], G il semigruppato di crescita n associato a B secondo la (4.8), A il generatore infinitesimale di G .

Daremo condizioni di risolubilità per il seguente problema di Cauchy :

$$(5.1) \quad \begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Bu(t) & t \in \mathbb{R}_+ \\ \lim_{t \rightarrow 0} u(t) = u_0 & u_0 \in X \end{cases}$$

LEMMA [5.I] — Se $x \in D_B$ allora $G(t)x \in D_B$ e si ha :

$$(5.2) \quad BG(t)x = G(t)Bx \quad \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

DIM. — Se $x \in D_B$, $B_i^k x$ appartiene a D_B per ogni coppia di interi i e k , quindi posto $B_m = \sum_{k=0}^m \frac{B_i^k t^k}{k!}$, $t \in \mathbb{R}_+$, si ha : $\lim_{m \rightarrow \infty} BP_m x = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m Bx = G_i(t)x$.

Ne segue $G_i(t)x \in D_B$ e $BG_i(t)x = G_i(t)Bx$ dato che B è chiuso.

Si ha inoltre $\lim_{i \rightarrow \infty} BG_i(t)x = \lim_{i \rightarrow \infty} G_i(t)Bx = G(t)Bx$, ne segue $G(t)x \in D_B$ e $BG(t)x = G(t)Bx$.

LEMMA [5.II] — Se $x \in D_{B^{n+1}}$ allora per ogni $t \in \mathbb{R}_+$ $G(t)x$ appartiene a $D_{A^{n+1}} \cap D_{B^{n+1}}$ e si ha :

$$(5.3) \quad A^k G(t)x = B^k G(t)x \quad x \in X \quad k = 1, 2, \dots, n+1.$$

DIM. — Se $x \in D_{B^{n+1}}$ e $\operatorname{Re} \lambda > 0$ si ha $S(\lambda, B)(\lambda - B)^{n+1}x = x$; posto $y = (\lambda - B)^{n+1}x$ si ha, in virtù del TEOREMA [4.I], $x = S(\lambda, B)y = S(\lambda, A)y$.

Ne segue $G(t)x = S(\lambda, A)G(t)y$ cosicchè, in virtù del LEMMA [2.IV] si ha $G(t)x \in D_{A^{n+1}} \forall t \in \mathbb{R}_+$. Posto inoltre $z = G(t)x$ si ha $z \in D_{B^{n+1}}$ per il LEMMA [5.I] ne segue $S(\lambda, B)(\lambda - B)^{n+1}z = z$ cioè $S(\lambda, A)(\lambda - B)^{n+1}z = z$; applicando a sinistra $(\lambda - A)^{n+1}$ ne segue $(\lambda - B)^{n+1}z = (\lambda - A)^{n+1}z$ e, data l'arbitrarietà di λ si ha la tesi.

TEOREMA [5.I] — Sia B un operatore lineare chiuso su X verificante le condizioni del TEOREMA [4.I]. Allora se $u_0 \in D_{B^{n+1}}$ il problema di Cauchy (5.1) ammette una sola soluzione u $n+1$ volte derivabile con :

$$(5.4) \quad u(t) \in D_{B^{n+1}} \quad \forall t \in \overline{\mathbb{R}}_+, \quad \frac{d^k u(t)}{dt^k} = B^k u(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad k = 1, 2, \dots, n+1.$$

DIM. — Se $u_0 \in D_{B^{n+1}}$ poniamo $u(t) = G(t)u_0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$; u verifica (5.1) e (5.4) in virtù del LEMMA [5.II] e del LEMMA [2.IV].

Sia viceversa v una soluzione di (5.1) verificante (5.4) e sia $0 < s < t$; dato che $v(s)$ appartiene a $D_{B^{n+1}}$ la funzione $G(t-s)v(s)$ è derivabile in s in virtù del LEMMA [5.II] e si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (G(t-s)v(s)) &= A G(t-s)v(s) - G(t-s) \frac{dv(s)}{ds} = \\ &= A G(t-s)v(s) - B G(t-s)v(s) = 0. \end{aligned}$$

Poniamo allora $c(t) = G(t-s)v(s)$ $t \in \mathbb{R}^+$; se $t > 0$ si ha $\lim_{s \rightarrow 0} G(t-s)v(s) = G(t)u_0 = u(t)$. Ne segue $u(t) = c(t) = G(t-s)v(s)$ e passando al limite per $t \rightarrow s$ e tenendo conto che $v(s) \in D_{B^{n+1}}$ si ottiene $u(s) = v(s)$.

6. Semigrupperi analitici di crescita n .

In questo paragrafo G rappresenta un semigruppero di crescita n tale che:

$$(6.1) \quad \|t^n G(t)\| \leq M, \quad M \in \mathbb{R}_+.$$

Daremo le condizioni affinché $G(t)$ sia prolungabile a una funzione analitica $G(z)$ su un settore S_θ , $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$; seguiremo sostanzialmente la dimostrazione di Yosida ([8]).

DEFINIZIONE [6.I] — Diremo che un semigruppero di crescita n G è prolungabile in un settore S_θ se esiste una funzione analitica $G(z)$ su S_θ a valori in $\mathcal{L}(X, X)$ tale che:

$$a) \quad G(z_1 + z_2) = G(z_1) G(z_2) \quad \forall z_1, z_2 \in S_\theta.$$

b) Esiste un numero positivo K e un numero reale ω tali che,

$$(6.2) \quad \|z^n G(z)\| \leq K e^{\omega \operatorname{Re} z} \quad \forall z \in S_\theta.$$

TEOREMA [6.I] — Sia G un semigruppero di crescita n verificante (6.1); supponiamo inoltre che posto $L(t) = t^n G(t)$ risulti:

$$(6.3) \quad \|L^{(k)}(t)\| \leq \frac{N^k k^k}{t^k} \quad k = 0, 1, \dots, t \in \mathbb{R}_+, N \in \mathbb{R}_+$$

essendo $L^{(k)}(t)$ la derivata k^{ma} di $L(t)$.

Allora G è prolungabile analiticamente su S_θ con $\theta = \arcsen\left(\frac{1}{eN}\right)$ e risulta inoltre, detto $G(z)$ il prolungamento analitico di $G(t)$ e per ogni $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ con $\varepsilon < \theta$

$$(6.4) \quad \|G(z)\| \leq \frac{K_\varepsilon}{|z|^n} \quad \forall z \in S_{\theta-\varepsilon} \quad \text{con} \quad K_\varepsilon = \frac{\sen \theta}{\sen \theta - \sen(\theta - \varepsilon)}.$$

Dim. — Sia $t \in \mathbb{R}_+$ poniamo:

$$(6.5) \quad L(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-t)^k}{k!} L^{(k)}(t)$$

e cerchiamo il raggio di convergenza della serie (6.5), si ha

$$\left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-t)^k}{k!} L^{(k)}(t) \right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{eM|z-t|}{t} \right)^k$$

cosicchè la serie (6.5) converge se $|z-t| < t/eM$, quindi al variare di t in $\mathbb{R}_+$ si trova che $L(z)$ ha senso e è analitica nel settore S_θ con θ dato da $\theta = \arcsen(1/eN)$.

È chiaro che $L(z)$ è il prolungamento analitico di $L(t)$ e che $G(z) = \frac{1}{z^n} L(z)$ è il prolungamento analitico di $G(z)$.

Si ha inoltre $\|L(z)\| \leq \frac{1}{1 - eM \frac{|z-t|}{t}}$ cosicchè segue (6.4).

LEMMA [6. II] — Sia G un semigruppone analitico di *crescenza* n su S_θ tale

$$(6.6) \quad \|z^n G(z)\| \leq M \quad \forall z \in S_\theta$$

e sia ε un numero tale che $0 < \varepsilon < \theta$.

Allora, detto A il generatore infinitesimale di G e $S(\lambda, A)$ il risolvete di ordine n di A , $S(\lambda, A)$ è prolungabile analiticamente sul settore $S_{\frac{\pi}{2} + \theta - \varepsilon}$ e risulta:

$$(6.7) \quad \|S(\lambda, A)\| \leq M'/|\lambda| \quad \forall \lambda \in S_{\frac{\pi}{2} + \theta - \varepsilon} \quad \text{con } M' \in \mathbb{R}^+.$$

DIM. — Poniamo $L(z) = z^n G(z)$ e sia $0 < \psi < \theta$, si verifica allora facilmente che si ha :

$$(6.8) \quad S(\lambda, A) = \frac{1}{n!} \int_{\Gamma_+} e^{-\lambda z} L(z) dz = \frac{1}{n!} \int_{\Gamma_-} e^{-\lambda z} L(z) dz$$

essendo $\Gamma_{\pm} = \{z \in \mathbb{C}; z = e^{\pm i\psi} t, t \in \overline{\mathbb{R}}_{+}\}$.

La prima delle (6.8) ci permette di prolungare analiticamente $S(\lambda, A)$ nel semipiano $\operatorname{Re}(\lambda e^{i\psi}) > 0$ e la seconda nel semipiano $\operatorname{Re}(\lambda e^{-i\psi}) > 0$; sempre da (6.8) segue inoltre :

$$(6.9) \quad \|S(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{n! \operatorname{Re}(\lambda e^{\pm i\psi})} \quad \operatorname{Re}(\lambda e^{\pm i\psi}) > 0.$$

In particolare se $0 < \theta - \varepsilon < \psi$ si ha :

$$\|S(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{n! |\lambda|} F(\lambda) \quad \text{se} \quad -\frac{\pi}{2} - \theta + \varepsilon \leq \arg \lambda \leq 0$$

avendo posto $F(\lambda) = \frac{|\lambda|}{\operatorname{Re}(\lambda e^{\pm i\psi})}$; si trova

$$\sup \{F(\lambda); -\frac{\pi}{2} - \theta + \varepsilon \leq \arg \lambda \leq 0\} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\psi - \theta + \varepsilon)}$$

cosicchè si ha :

$$\|S(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{n! \operatorname{sen}(\psi - \theta + \varepsilon) |\lambda|} \quad \text{se} \quad -\frac{\pi}{2} - \theta + \varepsilon \leq \arg \lambda \leq 0$$

in modo analogo si prova :

$$\|S(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{n! \operatorname{sen}(\psi - \theta + \varepsilon) |\lambda|} \quad \text{se} \quad 0 \leq \arg \lambda \leq \frac{\pi}{2} + \theta - \varepsilon$$

cosicchè ponendo $M' = M/(n! \operatorname{sen}(\psi - \theta + \varepsilon))$, si ha la tesi.

LEMMA [6.III] — Sia $F(\lambda)$ una funzione a valori in $\mathcal{L}(X, X)$ analitica su un settore $S_{\theta} + \frac{\pi}{2}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ tale che :

$$(6.10) \quad \|F(\lambda)\| \leq M/|\lambda|.$$

Allora $F(\lambda)$ è la trasformata di Laplace di una funzione continua $\psi(t)$ su $\mathbb{R}_+$ verificante la relazione:

$$(6.11) \quad \|\psi(t)\| \leq N \text{ con } N \in \mathbb{R}_+.$$

DIM. Sia $\varepsilon > 0$ poniamo

$$\Gamma_{\pm} \{ \lambda \in \mathbb{C}; \quad \lambda = \varepsilon - \tau e^{\mp i\theta'}, \quad 0 \leq \tau < +\infty \} \quad \theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$$

$$\psi_{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\pm}} e^{\lambda t} F(\lambda) d\lambda$$

$$\psi(t) = \psi_+(t) + \psi_-(t)$$

gli integrali considerati hanno senso in virtù della (6.10).

Posto $\xi = \lambda t$ si ha:

$$\psi_{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\pm}(t)} e^{\xi} \cdot F\left(\frac{\xi}{t}\right) \frac{d\xi}{t}$$

essendo

$$\Gamma_{\pm}(t) = \{ \xi \in \mathbb{C}; \quad \xi = \varepsilon t - \tau e^{\mp i\theta'} \quad 0 \leq \tau < +\infty \}$$

ne segue

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} e^{\xi} F\left(\frac{\xi}{t}\right) \frac{d\xi}{t} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_-} e^{\xi} F\left(\frac{\xi}{t}\right) \frac{d\xi}{t} = x_+(t) + x_-(t)$$

avendo posto

$$x_{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\pm}} e^{\xi} F\left(\frac{\xi}{t}\right) \frac{d\xi}{t}.$$

Si ha

$$\|x_{\pm}(t)\| \leq \frac{M}{2\pi} e^{\varepsilon} \int_0^{\infty} e^{-\tau \cos \theta'} \frac{d\tau}{\sqrt{(\varepsilon - \tau \cos \theta')^2 + \tau^2 \sin^2 \theta'}}$$

cioè $\|\psi(t)\| \leq N$ avendo posto

$$N = \frac{M}{\pi} e^{\varepsilon} \int_0^{\infty} e^{-\tau \cos \theta'} \frac{d\tau}{\sqrt{(\varepsilon - \tau \cos \theta')^2 + \tau^2 \sin^2 \theta'}}.$$

È chiaro allora che risulta

$$F(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \psi(t) dt.$$

TEOREMA [6.II] — *Sia B un operatore lineare chiuso in X di tipo n e tale che $D_{\infty}(B)$ sia denso in X e che sia:*

$$(6.12) \quad \|S(\lambda, B)\| \leq M/|\lambda| \quad \forall \lambda \in S_{\theta} + \frac{\pi}{2}$$

essendo $S(\lambda, B)$ il risolvante di ordine n di B , M un opportuno numero positivo $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

Allora esiste un unico semigruppato di crescita n , $G(t)$ analitico su S_{θ} tale che, detto A il suo generatore infinitesimale, sia $S(\lambda, A) = S(\lambda, B)$

DIM. Poniamo:

$$\psi_{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\pm}} e^{\lambda t} S(\lambda, B) d\lambda$$

$$\psi(t) = \psi_+(t) + \psi_-(t)$$

essendo $\Gamma_{\pm}$ definiti come nella dimostrazione del **LEMMA [6.III]**; da questo segue allora $\|\psi(t)\| \leq N$ con $N \in \mathbb{R}_+$ e inoltre $S(\lambda, B) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \psi(t) dt$ da cui

$$S^{(k)}(\lambda, B) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} (-t)^k \psi(t) dt$$

$$\|S^{(k)}(\lambda, B)\| \leq N \frac{(k-1)!}{(\operatorname{Re} \lambda)^k} \operatorname{Re} \lambda > 0.$$

Quindi, per il **TEOREMA [4.I]** esiste un semigruppato di crescita n , $G(t)$ tale che, detto A il suo generatore infinitesimale, risulti $S(\lambda, A) = S(\lambda, B)$; ne segue allora $\psi(t) = t^n G(t)$ data l'unicità della Trasformata di Laplace.

Derivando $\psi_{\pm}(t)$ k volte si trova:

$$\begin{aligned} \psi_{\pm}^{(k)}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\pm}} e^{\lambda t} t^k S(\lambda, A) d\lambda \\ \|\psi_{\pm}^{(k)}(t)\| &\leq \frac{1}{2\pi} e^{\varepsilon t} N \int_0^{\infty} e^{-\tau t \cos \theta'} |\varepsilon - \tau e^{\mp i \theta'}|^{k-1} d\tau \quad \theta' = \frac{\pi}{2} - \theta \\ &\leq \frac{N}{2\pi} \frac{e^{\varepsilon(1+\cos \theta')t}}{\cos^k \theta' t^k} (k-1)! \end{aligned}$$

Si prova allora facilmente che $e^{-s(1+\cos\theta)t} G(t)$ verifica le ipotesi del **TEOREMA** [6.1] cosicchè segue la tesi.

7. Esempio.

In questo paragrafo Y rappresenta uno spazio di Banach complesso (con norma $\| \cdot \|$) U un operatore lineare chiuso con dominio denso in Y generatore infinitesimale di un semigruppato di classe $H(-\varphi, \varphi)$ ([5]) con $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$; inoltre $R(\lambda, U)$ è il risolvente di U e supporremo che $R(\lambda, U)$ verifichi la relazione:

$$(7.1) \quad \|R(\lambda, U)\| \leq M/|\lambda| \quad \forall \lambda \in S\varphi + \frac{\pi}{2}.$$

Consideriamo l'equazione differenziale :

$$(7.2) \quad \sum_{k=0}^n a_k U^k \frac{d^{n-k} u}{dt^{n-k}} = 0 \quad a_0 \neq 0 \quad a_n \neq 0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$$

e con $u(t)$ funzione su $\mathbb{K}_+$ a valori in Y .

La (7.2) è equivalente al sistema :

[illegible]

Indichiamo ora con X il prodotto di n copie di Y , X è uno spazio di Banach con la norma: $\|x\| = \sum_{k=1}^n \|x_k\|$ essendo $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$.

Il sistema (7.3) è equivalente alla seguente equazione:

$$(7.4) \quad \frac{dZ}{dt} = BZ$$

essendo $Z = (u, v_1, \dots, v_{n-1})$ e B l'operatore su X così definito:

$$(7.5) \quad B(x_1, \dots, x_n) = \left(x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, -\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{a_0} U^k x_{n-k+1} \right)$$

che si può rappresentare mediante la seguente matrice:

$$(7.6) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ -\frac{a_n}{a_0} U^n - \frac{a_{n-1}}{a_0} U^{n-1} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & -\frac{a_1}{a_0} U & . \end{pmatrix}.$$

Operando formalmente si trova:

$$(7.7) \quad R(\lambda, B) = (\lambda - B)^{-1} = \prod_{i=1}^n \varrho_i R(\lambda \varrho_i, U) \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & . & . & . & . & . & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & . & . & . & . & . & A_{2n} \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ A_{n1} & A_{n2} & . & . & . & . & . & A_{nn} \end{pmatrix}$$

essendo $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ le radici dell'equazione:

$$(7.8) \quad \sum_{i=0}^n a_i \varrho^i = 0$$

ed essendo A_{ik} il complemento algebrico del termine sulla riga k^{ma} e sulla colonna i^{ma} nella matrice rappresentativa di $\lambda - B$.

Poniamo ora:

$$(7.9) \quad \theta = \inf \{ \varphi - |\arg \varrho_i|, i = 1, \dots, n \}$$

allora se $\theta > 0$ per ogni $\lambda \in \varrho \frac{\pi}{2} + \theta$ si ha $\varrho_i \lambda \in S_{\frac{\pi}{2} + \varphi}$, $i = 1, \dots, n$ cosicchè ha senso (7.7) e rappresenta un operatore continuo su X dato che A_{ik}

contiene potenze di U con grado non superiore a n e che $UR(\lambda \varrho_i, U) = \lambda \varrho_i R(\lambda \varrho_i, U) - 1$ è, per ogni $1 \leq i \leq n$, un operatore continuo in Y .

Poniamo ora:

$$(7.10) \quad C_{ik} = A_{ik} \prod_{i=1}^n \varrho_i R(\lambda \varrho_i, U) \quad i, k = 1, \dots, n$$

e osserviamo che, in virtù di (7.1), esiste un numero positivo K tale che:

$$(7.11) \quad \|UR(\lambda, U)\| \leq K.$$

Si prova facilmente per ricorrenza che il comportamento di C_{ik} per $|\lambda| \rightarrow \infty$ nel settore $S_{\frac{\pi}{2} + \theta}$ è il seguente:

$$(7.12) \quad \|C_{ik}\| \underset{\sim}{\sim}^{|\lambda| \rightarrow \infty} |\lambda|^{i-k-1} \quad i, k = 1, \dots, n.$$

Poniamo allora

$$(7.13) \quad S(\lambda, B) = R^n(\lambda, B) = \begin{pmatrix} S_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & S_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_{n1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & S_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sempre per ricorrenza si prova che il comportamento di S_{ik} per $|\lambda| \rightarrow \infty$ nel settore $S_{\frac{\pi}{2} + \theta}$ è il seguente:

$$(7.14) \quad \|S_{ik}\| \underset{\sim}{\sim}^{|\lambda| \rightarrow \infty} |\lambda|^{i-k-n-1} \quad i, k = 1, \dots, n.$$

Allora è chiaro che l'andamento di $S(\lambda, B)$ in $S_{\frac{\pi}{2} + \theta}$ è il seguente:

$$(7.15) \quad \|S(\lambda, B)\| \underset{\sim}{\sim}^{|\lambda| \rightarrow \infty} 1/|\lambda|.$$

Quindi, applicando il TEOREMA [6.II] si trova che esiste su X un semigruppato G di *crescenza* $n-1$ e analitico su S_θ tale che, detto A il suo generatore infinitesimale, risulti $S(\lambda, A) = S(\lambda, B)$.

Il dominio di B è dato da:

$$(7.16) \quad D^B = \{(x_1, \dots, x_n) \in X; \quad x_i \in D_{U^{n-i+1}}, \quad i = 1, \dots, n\}$$

e, procedendo per ricorrenza, si trova :

$$(7.17) \quad D_{\mathcal{B}^n} = \{(x_1, \dots, x_n) \in X; \quad x_i \in D_{U^{2n-1}}, \quad i = 1, \dots, n\}.$$

Applicando il TEOREMA [5.I] si ottiene ora il seguente risultato :

TEOREMA [7.I] — *Consideriamo il seguente problema di Cauchy :*

$$(7.18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=0}^n a_k U^k \frac{d^{n-k} u}{dt^{n-k}} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d^k u(t)}{dt^k} = u_0^{(k)} \quad k = 0, 1, \dots, n-1 \\ u_0^{(k)} \in D_{U^{2n-k-1}} \end{array} \right.$$

dove U è un operatore lineare chiuso con dominio denso nello spazio di Banach Y , generatore infinitesimale di un semigruppato di classe $H(-\varphi, \varphi)$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Se risulta :

$$\inf \{ \varphi - |\arg \varrho_i|, i = 1, \dots, n \} > 0$$

essendo $\varrho_1, \dots, \varrho_n$ le radici di (7.18), allora il problema (7.18) ammette una unica soluzione n volte derivabile e tale che

$$u^{(k)}(t) \in D_{U^{2n-k-1}} \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Vogliamo ora mostrare che, in generale, l'operatore B in (7.6) non è generatore infinitesimale di un semigruppato di classe c_0 .

Considereremo per questo una particolarizzazione dell'equazione (7.2).

Sia $Y = L^2(\mathbb{R}^m)$, spazio di Hilbert delle funzioni di quadrato sommabile su $\mathbb{R}^m$, m intero positivo, U un operatore uniformemente ellittico a coefficienti $C^\infty(\mathbb{R}^m)$; U è generatore infinitesimale di un semigruppato analitico ([9], pag. 417) e si può supporre che $R(\lambda, U)$ verifichi (7.1).

Consideriamo l'equazione :

$$(7.19) \quad 2 \cdot \frac{d^3 u}{dt^3} - 5 U \frac{d^2 u}{dt^2} + 4 U^2 \frac{du}{dt} - U^3 u = 0$$

l'equazione (7.8) diviene :

$$(7.20) \quad 2 - 5\rho + 4\rho^2 - \rho^3 = 0$$

che ha per radici 1 (doppia) e 2, cosicchè le condizioni del TEOREMA [7.I] sono soddisfatte.

Inoltre l'operatore B in (7.6) è rappresentato della matrice :

$$(7.21) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{U^3}{2} - 2U^2 & \frac{5}{2}U & \end{pmatrix}$$

e si trova :

$$(7.22) \quad R(\lambda, B) = 2R^2(\lambda, U)R(2\lambda, U) \begin{pmatrix} \lambda \left(\lambda - \frac{5}{2}U \right) + 2U^2 & \lambda - \frac{5}{2}U & 1 \\ \frac{U^3}{2} & \lambda \left(\lambda - \frac{5}{2}U \right) & \lambda \\ \frac{\lambda U^3}{2} & -2\lambda U^2 + \frac{U^3}{2} & \lambda^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

In particolare si ha :

$$(7.23) \quad C_{31} = \lambda (UR(\lambda, U))^2 UR(2\lambda, U).$$

Poniamo :

$$(7.24) \quad C_{31} = \lambda T, \quad T = (UR(\lambda, U))^2 (UR(2\lambda, U))$$

allora si ha :

$$(7.25) \quad 1 + T = \frac{1}{2} \lambda (\lambda_1 - U) R(2\lambda, U) (\lambda_2 - U) R^2(\lambda, U)$$

con

$$\lambda_1 = \frac{1}{8}(5 - i\sqrt{7}) \quad \lambda_2 = \frac{1}{8}(5 + i\sqrt{7}).$$

Dimostriamo ora che $\|T\| \geq 1$; infatti se fosse per assurdo $\|T\| < 1$ si avrebbe che $1 + T$ è invertibile e risulterebbe:

$$(7.26) \quad (1 + T)^{-1} = 1 - \frac{2}{\lambda} U^3 R(\lambda, U) R(\lambda, U)$$

ma ciò è assurdo poichè implicherebbe che U è continuo il che è falso in generale.

Quindi si ha $\|C_{31}\| \geq |\lambda|$.

Sia allora $y \in Y$ e poniamo $u = (y, 0, 0)$, si ha $\|u\| = \|y\|$ e inoltre $R(\lambda, B)u = (C_{11}y, C_{21}y, C_{31}y)$, ne segue:

$$(7.27) \quad \|R(\lambda, B)\| \geq \frac{\|R(\lambda, B)u\|}{\|u\|} \geq \frac{\|C_{31}y\|}{\|y\|} \quad \forall y \in Y$$

da cui

$$\|R(\lambda, B)\| \geq \|C_{31}\| \geq |\lambda|$$

cosicchè B non è generatore infinitesimale di un semigrupp di classe c_0 .

Università di Pisa

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. DA PRATO - U. MOSCO, *Semigrupp*i Distribuzioni Analitici, Annali Scuola Normale Superiore di Pisa, XIX (1965), 367-396.
- [2] G. DA PRATO - U. MOSCO, *Regolarizzazione dei semigrupp*i Distribuzione Analitici, Annali Scuola Normale Superiore di Pisa, XIX (1965) 563-576.
- [3] N. DUNFORD - J. T. SCHWARTZ, *Linear Operators I* — Interscience-1958.
- [4] W. FELLER, *On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators*, Annals of Math. (2) 58 (1953) 166-174.
- [5] E. HILLE - R. S. PHILLIPS — *Functional Analysis and Semi-groups*, Amer. Math. Soc. Coll. Pub. Vol. XXXI.
- [6] J. L. LIONS - *Les semi-groupes distributions*, Portugaliae Math. 19 (1960), 141-164.
- [7] K. YOSIDA, *On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groups of linear operators*, J., Math. Soc. Japan I (1948) 15-21.
- [8] K. YOSIDA, *On the differentiability of semi-groups of linear operators* Proc. Japan Acad. 34 (1958), 337-340.
- [9] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer-Verlag (1965).