ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIULIO MATTEI

Sulla influenza della forza di Coriolis in un problema magnetofluidodinamico

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 20, nº 4 (1966), p. 703-717

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_4_703_0>

SULLA INFLUENZA DELLA FORZA DI CORIOLIS IN UN PROBLEMA MAGNETOFLUIDODINAMICO (*)

GIULIO MATTEI (**)

Introduzione.

Il comportamento magnetofluidodinamico (m. f. d.) di un fluido dotato di una rotazione uniforme attorno ad un asse fisso è stato esaminato da vari Autori con riferimento ad una terna rotante col fluido studiando con particolare attenzione gli effetti della forza di Coriolis. B. LEHNERT in due lavori del 1954 [1] e [2] ha messo in evidenza l'importanza di tali effetti sulle onde m. f. d. piane nel suddetto fluido (1). Essi possono avere notevole rilievo anche in stelle lentamente rotanti come il sole (cfr. anche H. ALFVÉN [4] p. 90). Riferendosi precipuamente allo studio di fenomeni m. f. d. solari, in [1] l'Autore tratta l'interno del sole come un fluido incomprimibile omogeneo non viscoso e di conducibilità elettrica infinita, trascura la corrente di spostamento ed in tutto il lavoro usa equazioni linearizzate. Sempre riferendosi ad onde piane in [2] l'Autore lascia cadere l'ipotesi di assenza di viscosità e, allo scopo di esaminare onde di ampiezza arbitraria, usa equazioni non linearizzate. L'effetto della forza di Coriolis si è poi rivelato di particolare importanza sulle oscillazioni m. f. d. toroidali di un fluido rotante secondo quanto stabilito da T. G. COWLING in [5]. In [5] l'Autore esamina un fluido incomprimibile omogeneo non viscoso gravitante e rotante unifor-

Pervenuto in Redazione il 14 Marzo 1966.

(*) Lavoro effettuato nell'ambito del Gruppo di Ricerca N. 7 per la Matematica del C. N. R..

(**) Istituto di Matematiche Applicate Fac. Ingegneria Università, Pisa.

(1) Nell'ipotesi di assenza di viscosità e con l'uso di equazioni linearizzate cfr. anche S. CHANDRASEKHAR [3] N. 50.

memente attorno ad un asse fisso sotto l'ipotesi, di particolare interesse Astrofisico, di simmetria rispetto all'asse di rotazione degli elementi del moto relativo e del campo magnetico. In tutto il lavoro l'Autore usa equazioni linearizzate e adotta le ipotesi, consuete in questo genere di problemi, di conducibilità elettrica infinita e di corrente di spostamento trascurabile. Il problema oggetto di [5] è stato poi ripreso e largamente sviluppato, sempre nell'ambito delle equazioni linearizzate, da P. C. KENDALL in [6] (2).

Lo scopo principale della presente nota è lo studio nell'ambito delle equazioni non linearizzate dell'influenza della forza di Coriolis sul comportamento m. f. d. di un fluido incomprimibile omogeneo dotato, come quello di [5] e [6], di simmetria assiale. A differenza di [5] e [6], oltre all'uso di equazioni non linearizzate, si considera qui il fluido, come già in [2], viscoso, esaminando via via come caso particolare quello del fluido non viscoso. Al N. 1 di questa nota si danno le condizioni, indicando l'effetto su di esse della forza di Coriolis, affinché siano possibili i moti m. f. d. in esame; esse si traducono in quattro equazioni differenziali alle derivate parziali cui devono soddisfare le quattro funzioni incognite fondamentali del problema: ψ, funzione di Stokes del moto relativo meridiano, ψ_B funzione del campo magnetico, v_φ e B_φ componenti azimutali della velocità relativa e di $\mathbf{B}$. Al N. 2, supponendo preesistente un campo magnetico uniforme diretto come l'asse di rotazione, si esamina il problema nell'ambito della approssimazione lineare, ritrovando, fra l'altro, l'equazione differenziale, che sta alla base del lavoro [6], cui deve soddisfare v_φ. Uno degli effetti della forza di Coriolis si manifesta nel far permanere anche nelle equazioni linearizzate l'interazione fra il moto m. f. d. meridiano e quello attorno all'asse. Esaminando poi il problema nell'ipotesi di stazionarietà nel N. 3 si sviluppano le equazioni non linearizzate nel caso viscoso e nel N. 4 nel caso non viscoso indicando alcune soluzioni particolari apparse di interesse (3). Nel caso non viscoso si riduce il problema a una sola equazione in una sola funzione incognita e, dall'equazione di moto, si ricava un integrale, analogo a quello idrodinamico di Bernoulli, atto a determinare la pressione.

---

(2) La forza di Coriolis gioca un ruolo preponderante anche in altri fenomeni m.f.d. fra i quali segnaliamo: instabilità gravitazionale di un mezzo omogeneo infinito in presenza di un campo magnetico (S. CHANDRASEKHAR [7]; cfr. anche [3] N. 120 *c*); magnetoturbolenza (B. LEHNERT [8]) e onde m. f. d. dovute ad una sorgente puntiforme oscillante armonicamente in un liquido rotante di conducibilità elettrica infinita (S. D. NIGAM, P. D. NIGAM [9]).

(3) Si tratta di soluzioni delle equazioni indefinite. In esse compaiono anche termini singolari sull'asse z di rotazione i quali saranno accettabili se per es. si è interessati ad un fluido che occupa la regione esterna ad un cilindro di asse z e di dato raggio.

1. Equazioni caratterizzanti il problema e loro sviluppo.

Le equazioni fondamentali del problema sono:

$$(1.1)\qquad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \nu \Delta_2 \mathbf{v} + \mathbf{v} \wedge \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{grad}\left(U + U_c - \frac{p}{\varrho} - \frac{v^2}{2}\right) - 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v} + \\ + \frac{1}{4\pi\,\mu\varrho} \operatorname{rot} \mathbf{B} \wedge \mathbf{B},$$

$$(1.2)\qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}), \qquad (1.3)\quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \qquad (1.4)\quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0,$$

dove U_c è il potenziale centrifugo, $\boldsymbol{\Omega}$ la velocità di rotazione e gli altri simboli hanno il consueto significato. Nello scrivere queste equazioni, usate senza alcun commento da tutti gli Autori citati nell'Introduzione, entrerebbe in gioco il problema concernente le equazioni di Maxwell e le relazioni costitutive in una terna in rotazione. Il problema appare estremamente complesso (cfr. J. CARSTOIU [10] p. 2745) per cui si seguirà qui il punto di vista degli Autori suddetti adottando le equazioni (1.1)-(1.4).

Assumiamo come terna di riferimento rotante una terna sinistrorsa di coordinate cilindriche ortogonali z, r, φ, con z asse di rotazione, di corrispondenti versori $\mathbf{k}, \mathbf{u}, \mathbf{N}$. Nel problema in esame abbiamo:

$$\mathbf{v} = v_r(z, r, t)\,\mathbf{u} + v_z(z, r, t)\,\mathbf{k} + v_\varphi(z, r, t)\,\mathbf{N} = \mathbf{v}_m(z, r, t) + v_\varphi(z, r, t)\,\mathbf{N},$$

$$\mathbf{B} = B_r(z, r, t)\,\mathbf{u} + B_z(z, r, t)\,\mathbf{k} + B_\varphi(z, r, t)\,\mathbf{N} = \mathbf{B}_m(z, r, t) + B_\varphi(z, r, t)\,\mathbf{N}.$$

Avendosi $\operatorname{div} v_\varphi \mathbf{N} = 0$, da (1.3) discende:

$$(1.5)\qquad \mathbf{v}_m = \frac{1}{r} \operatorname{grad} \psi \wedge \mathbf{N},$$

dove $\psi(z, r, t)$ è la funzione di Stokes. Analogamente da (1.4):

$$(1.6)\qquad \mathbf{B}_m = \frac{1}{r} \operatorname{grad} \psi_B \wedge \mathbf{N}.$$

Stabiliamo innanzitutto le equazioni differenziali cui devono soddisfare, per il realizzarsi dei moti m. f. d. in esame, le quattro funzioni ψ, ψ_B, v_φ e B_φ. Queste infatti sono le incognite fondamentali del problema perchè dalla loro conoscenza discende quella del campo elettrico dalla relazione $\mathbf{E} = \mathbf{B} \wedge \mathbf{v}/c$

ed inoltre, assegnato U, quella della pressione mediante quadrature (cfr. (1.11)). Nel ricavare tali equazioni si segue una via analoga a quella usata per lo studio m. f. d. del fluido non rotante ($\boldsymbol{\Omega} = 0$) in [11] p. 640-43.

Risulta :

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_m = 2 W \mathbf{N},$$

dove

$$W = -\frac{1}{2r}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}\right). \tag{1.7}$$

Analogamente :

$$\operatorname{rot} \mathbf{B}_m = 2 W_B \mathbf{N},$$

dove

$$W_B = -\frac{1}{2r}\left(\frac{\partial^2 \psi_B}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi_B}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \psi_B}{\partial r}\right).$$

Inoltre :

$$\operatorname{rot}(\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}) = \Omega\left[-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r\, \partial z}\mathbf{k} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\mathbf{u} - \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}\mathbf{N}\right]. \tag{1.8}$$

Prendiamo allora il rotore di ambo i membri dell'equazione di moto (1.1), ai fini di eliminare da essa il termine contenente la pressione. Otteniamo un'equazione che potremmo ancora chiamare equazione di compatibilità in analogia con la corrispondente idrodinamica (cfr. R. BERKER [12] p. 3). Proiettando tale equazione su $\mathbf{N}$ con l'uso delle precedenti relazioni si trova :

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t} = \nu\left(\Delta_2 W - \frac{W}{r^2}\right) + \left(\frac{v_\varphi}{r} + \Omega\right)\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} - \\ - \frac{B_\varphi}{4\pi\mu\varrho\, r}\frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + \frac{D(\psi, W/r)}{D(z, r)} - \frac{1}{4\pi\mu\varrho}\frac{D(\psi_B\,,\, W_B/r)}{D(z, r)},\end{aligned} \tag{1.9}$$

dove D è simbolo di determinante funzionale. Proiettandola su $\mathbf{k}$ ed $\mathbf{u}$ si ottiene :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 (v_\varphi r)}{\partial r\, \partial t} - \nu\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(\Delta_2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{D(\psi, r v_\varphi)}{D(z, r)}\right] + \\ + \frac{1}{4\pi\mu\varrho}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{D(\psi_B\,,\, r B_\varphi)}{D(z, r)}\right] - 2\Omega\frac{\partial^2 \psi}{\partial r\, \partial z} = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z\, \partial t} + \nu\frac{\partial}{\partial z}\left(\Delta_2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{D(\psi, r v_\varphi)}{D(z, r)}\right] - \\ - \frac{1}{4\pi\mu\varrho\, r^2}\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{D(\psi_B\,,\, r B_\varphi)}{D(z, r)}\right] + 2\frac{\Omega}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0.\end{aligned}$$

Da queste si ricava l'integrale:

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \nu \left(\Delta_2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) + \tag{1.10}$$

$$+ \frac{1}{r^2} \left[\frac{D(\psi, r v_\varphi + \Omega r^2)}{D(z, r)} - \frac{1}{4\pi\mu\varrho} \frac{D(\psi_B, r B_\varphi)}{D(z, r)} \right] + \frac{c(t)}{r},$$

dove c è una arbitraria funzione del tempo. Per il calcolo della pressione, posto:

$$\Pi = U + \frac{\Omega^2 r^2}{2} - \frac{p}{\varrho} - \frac{v^2}{2}$$

da (1.1) si ha direttamente grad Π. Avendosi:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} - \nu \left(\Delta_2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) -$$

$$- \frac{1}{r^2} \left[\frac{D(\psi, r v_\varphi + \Omega r^2)}{D(z, r)} - \frac{1}{4\pi\mu\varrho} \frac{D(\psi_B, r B_\varphi)}{D(z, r)} \right] = \frac{c(t)}{r},$$

si giunge integrando all'espressione:

$$\Pi = \int_{z_0}^{z} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t\, \partial r} - \nu \Delta_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) - v_\varphi \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{2W}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \right. \tag{1.11}$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi\mu\varrho} \left(B_\varphi \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} - 2 \frac{W_B}{r} \frac{\partial \psi_B}{\partial z} \right) \right] dz +$$

$$+ \int_{r_0}^{r} \left[- \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t\, \partial z} + \nu \Delta_2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \frac{\nu}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial (r v_\varphi)}{\partial r} + 2 \frac{W}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4\pi\mu\varrho} \left(\frac{B_\varphi}{r} \frac{\partial (r B_\varphi)}{\partial r} - 2 \frac{W_B}{r} \frac{\partial \psi_B}{\partial r} \right) - 2\Omega v_\varphi \right]_{z=z_0} dr + c(t)\varphi + g(t),$$

dove z_0 e r_0 sono costanti arbitrariamente fissate e $g(t)$ una arbitraria funzione del tempo. Ancora qui, come già in [11], se, come si suppone, il fluido occupa un dominio dove φ può variare da 0 a 2π, il termine $c(t)/r$ comporta, sotto l'ipotesi tacita di uniformità di U, polidromia nella pressione rispetto a cammini circondanti l'asse di rotazione. Porremo perciò $c(t) = 0$

con che (1.10) diventa:

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \nu \left(\Delta_2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{D(\psi, r v_\varphi + \Omega r^2)}{D(z, r)} - \frac{1}{4\pi\mu\varrho}\frac{D(\psi_B, r B_\varphi)}{D(z, r)}\right]. \tag{1.12}$$

Da (1.11) abbiamo inoltre: $g(t) = \Pi(z_0, r_0, t)$ e quindi $g(t)$ è nota se si assegna in ogni istante il valore di Π in (z_0, r_0).

Da (1.2), procedendo come in [11] p. 643, proiettando su $\mathbf{N}$ si giunge a:

$$\frac{\partial B_\varphi}{\partial t} = \frac{D(\psi, B_\varphi/r)}{D(z, r)} - \frac{D(\psi_B, v_\varphi/r)}{D(z, r)}; \tag{1.13}$$

proiettando su $\mathbf{k}$ ed $\mathbf{u}$ le due equazioni scalari ottenute forniscono l'integrale:

$$\frac{\partial \psi_B}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{D(\psi, \psi_B)}{D(z, r)} + f(t),$$

con $f(t)$ arbitraria funzione del tempo.

Facciamo anche qui, come già in [11], l'ipotesi [4] $f(t) = 0$ con che:

$$\frac{\partial \psi_B}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{D(\psi, \psi_B)}{D(z, r)}. \tag{1.14}$$

Le (1.9), (1.12), (1.13) e (1.14) sono le quattro equazioni differenziali cercate; esse caratterizzano analiticamente il problema. Osserviamo che queste equazioni non sono influenzate dalla forza centrifuga la quale, come ovvio, interviene solo nell'equazione della pressione. La forza di Coriolis, oltreché nell'equazione della pressione, interviene in (1.9) e (1.12); si osservi che, pur in presenza di questa forza, si sono potute integrare, cfr. (1.10), le due equazioni scalari ottenute proiettando l'equazione di compatibilità nel piano meridiano e si è potuta esprimere la pressione per quadrature nella forma (1.11).

2. Approssimazione lineare.

Limitatamente a questo numero, supponiamo preesistente un campo magnetico di induzione $\mathbf{B}_0 = B_0\,\mathbf{k}$ uniforme e che si verifichino le condizioni

---

[4] Questa ipotesi che, se ci si trova in condizioni di stazionarietà, implica il parallelismo fra $\mathbf{v}_m$ e $\mathbf{B}_m$ e quindi l'annullarsi identicamente di E_φ, è comunemente usata da vari Autori in problemi a simmetria assiale riguardanti fluidi non rotanti: cfr. peres. C. AGOSTINELLI [13] p. 268, T. V. DAVIES [14] Eq. (1.12), T. ZEULI [15] Eq. $(8')_2$. (In [13] con riferimento ad una massa liquida omogenea sferoidale viscosa l'Autore tratta ampiamente le piccole oscillazioni m. f. d.).

di applicabilità della approssimazione lineare; siano cioè trascurabili i termini non lineari in $\mathbf{v}$, $\mathbf{b} = \mathbf{B} - B_0 \mathbf{k}$ (perturbazione del campo magnetico) e nelle loro derivate. In questa approssimazione le (1.9), (1.12), (1.13) diventano:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \nu \left(\Delta_2 W - \frac{W}{r^2} \right) + \frac{B_0}{4\pi \mu \varrho} \frac{\partial W_B}{\partial z} + \Omega \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} = \nu \left(\Delta_2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) + \frac{B_0}{4\pi \mu \varrho} \frac{\partial b_\varphi}{\partial z} + 2 \frac{\Omega}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial b_\varphi}{\partial t} = B_0 \frac{\partial v_\varphi}{\partial z}. \tag{2.3}$$

La (1.14) linearizzata diventa: $\dfrac{\partial \psi_B}{\partial t} = B_0 \dfrac{\partial \psi}{\partial z}$ da cui si deduce:

$$\frac{\partial W_B}{\partial t} = B_0 \frac{\partial W}{\partial z}. \tag{2.4}$$

Le (2.1) e (2.2) indicano che, a causa della forza di Coriolis, l'interazione fra il moto m. f. d. nei piani meridiani e quello attorno all'asse permane anche nelle equazioni linearizzate.

Nel caso del fluido non viscoso dalle precedenti si deducono facilmente:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = V_A^2 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \Omega \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial t \, \partial z}, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial^2 W_B}{\partial t^2} = V_A^2 \frac{\partial^2 W_B}{\partial z^2} + \Omega B_0 \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}, \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial t^2} = V_A^2 \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2} + 2 \frac{\Omega}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \, \partial z}, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^2 b_\varphi}{\partial t^2} = V_A^2 \frac{\partial^2 b_\varphi}{\partial z^2} + 2 \frac{\Omega B_0}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \tag{2.8}$$

dove V_A è la velocità di Alfvén. Quindi, in generale, W, W_B, v_φ, b_φ a causa della forza di Coriolis non soddisfano più, al contrario di quanto accadeva per il fluido non rotante, all'equazione delle corde vibranti. A tale equazione soddisfano ancora W e W_B nel caso particolare in cui v_φ non dipenda da z: in questo caso quindi abbiamo per il fluido rotante il risultato che il vortice del moto meridiano e la componente azimutale della densità di corrente si propagano, obbedendo all'equazione delle corde vibranti, lungo le linee di forza del campo magnetico primario con la velocità di Alfvén (5). Se si è interessati, come in [5] e [6], allo studio delle oscillazioni toroidali, basta eliminare ψ da (2.5) e (2.7) per avere un'equazione nella sola v_φ. Ciò si realizza applicando a (2.5) l'operatore $\frac{\partial^2}{\partial z\, \partial t}$ e a (2.7) l'operatore $\nabla_2 = r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; si ottiene:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - V_A^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)^2 \nabla_2 (v_\varphi r) + 4\Omega^2 r \frac{\partial^4 v_\varphi}{\partial z^2\, \partial t^2} = 0.$$

Questa coincide con la (18) di [6] e per la sua soluzione si rimanda ai N. 3 e segg. di detto lavoro.

3. Caso stazionario viscoso.

La (1.14) porge in questo caso l'integrale:

$$\psi_B = \psi_B(\psi). \tag{3.1}$$

Conseguentemente abbiamo da (1.5) e (1.6):

$$\mathbf{B}_m = \psi_B' \, \mathbf{v}_m , \tag{3.2}$$

con $\psi_B' = \frac{d\psi_B}{d\psi}$, arbitraria funzione di ψ, costante sulle linee di flusso di $\mathbf{v}_m$. La (1.13), usando (3.1), fornisce l'integrale:

$$B_\varphi - \psi_B' \, v_\varphi = rM(\psi) \tag{3.3}$$

con M arbitraria funzione di ψ (6). La (1.12) assume la forma:

$$\nu\left(\Delta_2 v_\varphi - \frac{v_\varphi}{r^2}\right) = \frac{1}{r^2}\, \frac{D\,(rv_\varphi + \Omega r^2 - \psi_B' \, r B_\varphi / 4\pi\,\mu\varrho, \psi)}{D\,(z, r)}. \tag{3.4}$$

---

(5) Per le onde m. f. d. di vorticità e di densità di corrente in un caso non a simmetria assiale riguardante un fluido comprimibile non rotante cfr. per es. J. CARSTOIU [16] e per il corrispondente caso del fluido rotante cfr. dello stesso Autore [10], p. 2746.

(6) Si osservi che nel caso in esame l'equazione di Maxwell $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ richiede che $\mathbf{E}$ sia conservativo. Ed infatti avendosi, per (3.2) e (3.3):

$$\mathbf{B} \wedge \mathbf{v} = \operatorname{grad} Q, \qquad Q = \int M(\psi)\, d\psi,$$

risulta: $\mathbf{E} = \operatorname{grad} Q/c$, che fornisce anche il significato fisico di M.

Sviluppando la (1.9) con l'uso di (3.1), tenendo conto che, sempre da (3.1), discende:

$$W_B = \psi'_B \, W - \frac{\psi''_B}{2r} (\operatorname{grad} \psi)^2,$$

si giunge a:

$$\nu\left(\Delta_2 W - \frac{W}{r^2}\right) = -\left(\frac{v_\varphi}{r} + \Omega\right) \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{B_\varphi}{r} \frac{1}{4\pi \mu \varrho} \frac{\partial B_\varphi}{\partial z} + \frac{D(\Phi, \psi)}{D(z, r)}, \tag{3.5}$$

dove:

$$\Phi = \frac{W}{r}\left(1 - \frac{\psi'^2_B}{4\pi \mu \varrho}\right) + \frac{\psi'_B \, \psi''_B}{8\pi \mu \varrho \, r^2} (\operatorname{grad} \psi)^2.$$

Giovandosi dell'integrale (3.3) si potrà eliminare da (3.4) e (3.5) B_φ riducendo così il problema alla soluzione di due sole equazioni differenziali nelle due funzioni incognite v_φ e ψ. Note queste B_φ si ha da (3.3) e $\mathbf{B}_m$ da (3.2). Ci si potrà poi giovare della arbitrarietà delle funzioni ψ'_B e M per la ricerca di soluzioni particolari di dette equazioni. Una soluzione particolare, che è apparsa di interesse, può ottenersi nel modo seguente. Cerchiamo, se esistono, soluzioni per cui sia ψ che v_φ dipendano solo da r. Da (3.3) discende che anche B_φ sarà funzione soltanto di r. Conseguentemente (3.5) diventa, tenendo conto di (1.7):

$$\frac{d^4\psi}{dr^4} - \frac{2}{r} \frac{d^3\psi}{dr^3} + \frac{3}{r^2} \frac{d^2\psi}{dr^2} - \frac{3}{r^3} \frac{d\psi}{dr} = 0,$$

il cui integrale generale è

$$\psi(r) = a_1 r^4 + a_2 r^2 \log r + a_3 r^2 + a_4 .$$

Perciò:

$$v_r = 0\,; \; v_z = A_1 r^2 + A_2 \log r + A_3 \; (A_1 = 4a_1\,, \; A_2 = 2a_2\,, \; A_3 = a_2 + 2a_3). \tag{3.6}$$

La (3.4) si riduce a:

$$\frac{d^2 v_\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dv_\varphi}{dr} = \frac{v_\varphi}{r^2},$$

il cui integrale generale è:

$$v_\varphi = c_1 r + c_2/r. \tag{3.7}$$

Corrispondentemente da (3.2) e (3.3) abbiamo:

$$B_r = 0\,; \; B_z = (A_1 r^2 + A_2 \log r + A_3)\psi'_B\,; \quad B_\varphi = (c_1 r + c_2/r)\,\psi'_B + rM. \tag{3.8}$$

Le (3.6) e (3.7) descrivono un moto per eliche circolari di Strakhovitch (cfr. [12] Sect. 30 α). Una soluzione del tipo (3.6)-(3.7)-(3.8) si è già presentata per il fluido non rotante (cfr. [17] p. 438). Il fatto che si presenti anche qui è naturale dato che l'indipendenza di ψ e v_φ da z implica per (1.8) l'irrotazionalità della forza di Coriolis che conseguentemente non appare nella equazione di compatibilità. Naturalmente anche in questo caso la forza di Coriolis porta contributo alla pressione la quale si calcola nel solito modo facendo uso di (1.11).

4. Caso stazionario non viscoso (7).

Le (3.1), (3.2) e (3.3) permangono inalterate mentre (3.4) fornisce l'integrale:

$$rv_\varphi + \Omega r^2 - \frac{\psi'_B}{4\pi\mu\varrho} rB_\varphi = N(\psi), \tag{4.1}$$

con N arbitraria funzione di ψ. Se è $\psi'^2_B \neq 4\pi\mu\varrho$ da (3.3) e (4.1) possiamo ricavare v_φ e B_φ:

$$v_\varphi = \frac{1}{r\left(1 - \dfrac{\psi'^2_B}{4\pi\mu\varrho}\right)} \left[N(\psi) + \frac{r^2\psi'_B}{4\pi\mu\varrho} M(\psi) - \Omega r^2\right], \tag{4.2}$$

$$B_\varphi = \frac{\psi'_B}{r(1 - \psi'^2_B/4\pi\mu\varrho)} \left[N(\psi) + \frac{r^2\psi'_B}{4\pi\mu\varrho} M(\psi) - \Omega r^2\right] + rM(\psi). \tag{4.3}$$

Con l'uso di queste il problema è così ricondotto a una sola equazione, la (3.5) con $\nu = 0$, nella sola funzione incognita ψ. In tale equazione (alle derivate parziali del II ordine non lineare) di notevole complessità intervengono le funzioni arbitrarie di ψ: ψ'_B, M ed N. Di questa arbitrarietà ci si può giovare per la ricerca di soluzioni particolari.

Osservando il coefficiente delle derivate di ordine massimo nell'equazione in ψ, si deduce che per:

$$\psi'^2_B = 4\pi\mu\varrho \tag{4.4}$$

---

(7) Questo caso per il fluido non rotante trovasi trattato nell'ipotesi di incomprimibilità in [18] da S. CHANDRASEKHAR, in [19] da R. R. LONG, in [20] da A. N. ERGUN e nell'ipotesi di comprimibilità in [15] da T. ZEULI e in [14] da T. V. DAVIES.

questa presenta singolarità. Tale singolarità si presenta anche per il fluido non rotante ed è stata in questo caso messa in luce da T. V. DAVIES in [14] p. 176 (cfr. anche [20] N. 7). Osserviamo che se si verifica la (4.4) dai due integrali (3.3) e (4.1) non si possono più ricavare le espressioni (4.2) e (4.3) di v_φ e B_φ.

Ricaviamo ora dall'equazione di moto un notevole integrale analogo a quello idrodinamico di Bernoulli. Da (1.11) tenendo presente (3.1) si deduce:

$$\frac{D(\Pi, \psi)}{D(z, r)} = -\frac{v_\varphi}{r}\frac{D(rv_\varphi + \Omega r^2, \psi)}{D(z, r)} + \frac{B_\varphi}{4\pi\mu\varrho r}\frac{D(rB_\varphi, \psi)}{D(z, r)};$$

il secondo membro di questa per (4.1) e (3.3) diventa:

$$\frac{M(\psi)}{4\pi\mu\varrho}\frac{D(rB_\varphi, \psi)}{D(z, r)},$$

per cui si ha l'integrale:

$$\frac{p}{\varrho} - U + \frac{v^2}{2} - \frac{\Omega^2 r^2}{2} + \frac{M(\psi)}{4\pi\mu\varrho} rB_\varphi = F(\psi), \tag{4.5}$$

con F arbitraria funzione di ψ (8).

È quindi da rimarcare il fatto che sussiste anche per il fluido rotante un integrale Bernoulliano, atto a determinare la pressione.

Passiamo ora ad indicare alcune soluzioni particolari.

Una classe di soluzioni si ha immediatamente prendendo per ψ una arbitraria funzione di r. Infatti in tal caso da (4.2) e (4.3) abbiamo che v_φ e B_φ sono funzioni soltanto di r e per conseguenza l'equazione in ψ resta soddisfatta. Altre soluzioni possono ottenersi, come si è detto, particolarizzando le funzioni arbitrarie che compaiono nell'equazione in ψ. Prendiamo per es.:

$$M(\psi) = M_0, \quad N(\psi) = N_0, \quad \psi_B'^2 = c^2 \neq 4\pi\mu\varrho,$$

con N_0, M_0, c costanti. Abbiamo in corrispondenza da (4.2) e (4.3):

$$v_\varphi = \frac{1}{r(1 - c^2/4\pi\mu\varrho)}\left[N_0 + \frac{r^2 cM_0}{4\pi\mu\varrho} - \Omega r^2\right],$$

$$B_\varphi = \frac{c}{r(1 - c^2/4\pi\mu\varrho)}\left[N_0 + \frac{cM_0 r^2}{4\pi\mu\varrho} - \Omega r^2\right] + rM_0.$$

(8) Questo integrale per $\Omega = 0$ si riduce a quello messo in luce in [14] Eq. (1.32) per il fluido non rotante.

L'equazione in ψ diventa:

$$\left(1 - \frac{c^2}{4\pi\,\mu\varrho}\right)\frac{W}{r} = G(\psi), \tag{4.6}$$

da cui si possono trarre svariate soluzioni particolarizzando la funzione arbitraria G:

a) se prendiamo $G(\psi) = G_0$ costante posto $k = -2G_0/(1 - c^2/4\pi\,\mu\varrho$ la (4.6) diventa:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial r} = kr^2$$

equazione di cui sono note varie soluzioni di interesse fisico per le quali si rimanda a R. BERKER [11] Sect. 21 β.

b) Se prendiamo $G(\psi) = a_0\,\psi$ (a_0 costante), posto $h = 2a_0/(1 - c^2/4\pi\mu\varrho)$ (4.6) diventa:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial\psi}{\partial r} + hr^2\,\psi = 0. \tag{4.7}$$

Di (4.7) cerchiamo soluzioni a variabili separate: $\psi(r, z) = Z(z)\,R(r)$. Supponendo $h < 0$, posto $h = -n$ e detta λ la costante di separazione (che sarà precisata caso per caso dalle condizioni al contorno) risulta:

$$\psi(r, z) = (c_1\,e^{\sqrt{\lambda}\,z} + c_2\,e^{-\sqrt{\lambda}\,z})\,R(r),$$

dove $R(r)$ deve soddisfare l'equazione:

$$r^2\,R'' - rR' + (\lambda\,r^2 - nr^4)\,R = 0. \tag{4.8}$$

La (4.8) si riconduce a un'equazione ipergeometrica confluente nel modo seguente. Poniamo:

$$R(r) = u(x), \quad x = r^2\sqrt{n},$$

con che (4.8) diventa:

$$4\,x\,u'' - \left(x - \frac{\lambda\sqrt{n}}{n}\right)u = 0;$$

quest'ultima ponendo:

$$u = xe^{-x/2}\,y(x)$$

si trasforma nella:

$$xy'' + (2 - x)\,y' - ay = 0 \quad \text{con} \quad a = 1 - \frac{\lambda\sqrt{n}}{4n}\ (^9). \tag{4.9}$$

La (4.9) è un'equazione ipergeometrica confluente in forma canonica, cfr. F. G. TRICOMI [21] p. 1, in cui la costante che compare nel coefficiente di y' è un intero; si ha perciò, cfr. E. KAMKE [22] p. 428:

$$y = c_3\,F(a, 2, x) + c_4\,[F(a, 2, x)\log x + F^*(a, 2, x)],$$

dove

$$F(a, 2, x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)}{2(2+1)\dots(2+k-1)}\,\frac{x^k}{k!}$$

è la funzione di Kummer-Pochhammer e

$$F^*(a, 2, x) = \frac{a}{2}\,\frac{x}{1!}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{2} - 1\right) +$$

$$+ \frac{a(a+1)}{2(2+1)}\,\frac{x^2}{2!}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2+1} - 1 - \frac{1}{2}\right)\dots$$

(Per uno studio approfondito del tipo di equazione cui appartiene la (4.9) (cfr. [21] Cap. II).

---

(9) Per $h > 0$ l'equazione in R si riduce ancora, con la posizione $x = -ir^2\sqrt{h}$, alla equazione ipergeometrica confluente:

$$xy'' + (2 - x)\,y' - \left(1 - \frac{i\lambda\sqrt{h}}{4h}\right) y = 0,$$

ma questa fornisce per $R(r)$ una soluzione complessa.

BIBLIOGRAFIA

[1] B. LEHNERT, *Magneto-hydrodynamic waves under the action of the Coriolis force,* « Astrophys. J. », 119, 1954, p. 647-654.

[2] B. LEHNERT, *Magneto-hydrodynamic waves under the action of the Coriolis force.* II, « Astrophys. J. », 121, 1955, p. 481-490.

[3] S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability,* Oxford 1961.

[4] H. ALFVÉN, *Cosmical electrodynamics,* Oxford 1963.

[5] T. G. COWLING, *Magneto-hydrodynamic oscillations of a rotating fluid globe,* « Proc. Roy. Soc. », A 233, 1956, p. 319-322.

[6] P. C. KENDALL, *Hydromagnetic oscillations of a rotating liquid sphere,* « Quart. J. Mech. Appl. Math. », 13, 1960, p. 285-299.

[7] S. CHANDRASEKHAR, *The gravitational instabilily of an infinite homogeneous medium when Coriolis force is acting and a magnetic field is present,* « Astrophy. J. », 119, 1954, p. 7-9.

[8] B. LEHNERT, *The decay of magneto-turbulence in the presence of a magnetic field and Coriolis force,* « Quart. Appl. Math. », 12, 1955, p. 321-341.

[9] S. D. NIGAM, P. D. NIGAM, *Magnetohydrodynamic waves in rotating liquids,* « Proc. Roy. Soc. », A 272, 1963, p. 529-541.

[10] J. CARSTOIU, *Sur les ondes magnétohydrodynamiques dans un fluide en rotation uniforme,* « C. R. Acad. Sc. Paris », 258, 1964, p. 2745-2747.

[11] G. MATTEI, *Sui moti simmetrici rispetto ad un asse di un fluido viscoso incomprimibile in Magnetofluidodinamica : caso in cui il moto avviene anche attorno all'asse,* « Atti Acc. Sc. Torino », 99, 1964-65, p. 637-53.

[12] R. BERKER, *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visquex incompressible,* «Handbuch der Physik », VIII/2, 1963, p. 1-523.

[13] C. AGOSTINELLI, *Moti magnetodinamici simmetrici rispetto ad un asse. Caso delle piccole oscillazioni in una massa fluida sferoidale,* « Atti Acc. Sc. Torino », 91, 1956-57, p. 263-298.

[14] T. V. DAVIES, *On steady axially symmetric solutions of the idealized hydromagnetic equation for a compressible gas in which there is no diffusion of vorticity, heat, or current,* « Quart. J. Mech. Appl. Math », 13, 1960, p. 169-83.

[15] T. ZEULI, *Sui moti stazionari in Magnetofluidodinamica,* « C. I. M. E. Varenna 1962 », Ed. Cremonese, Roma.