Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Francesco Gherardelli

Deformazioni rigide all'infinito di varietà di Stein

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 20, nº 3 (1966), p. 583-588

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_3_583_0>

DEFORMAZIONI RIGIDE ALL'INFINITO DI VARIETÀ DI STEIN

di FRANCESCO GHERARDELLI [1]

1. Sia V_0 uno spazio complesso. Una deformazione di V_0 è l'insieme dei seguenti dati:

a) uno spazio complesso puntato (M, m_0); *b*) uno spazio complesso $\mathcal{V}$; *c*) due applicazioni olomorfe

$$\omega : \mathcal{V} \longrightarrow M, \ i : V_0 \longrightarrow \mathcal{V}$$

tali che

1) l'applicazione i sia un isomorfismo di V_0 su $\omega^{-1}(m_0)$,

2) per ogni $x \in \mathcal{V}$ esistano: un intorno W di x in $\mathcal{V}$, un intorno U di $\omega(x)$ in M, un insieme analitico S contenuto in un aperto di uno spazio numerico $\mathbb{C}^N$, un isomorfismo $\varphi : U \times S \longrightarrow W$, tale che $\omega \circ \varphi$ sia la proiezione naturale di $U \times S$ su U.

Per la condizione 2) l'applicazione ω è aperta. Se $\mathcal{V}$ ed M sono varietà complesse ed ω è di rango massimo in ogni punto di $\mathcal{V}$, la condizione 2) è certo soddisfatta. Per la 1) si può identificare V_0 con $i(V_0) = \omega^{-1}(m_0)$.

Due deformazioni $(\mathcal{V}, \omega, M)$, $(\mathcal{V}', \omega', M)$ dello stesso spazio V_0 sulla stessa base (M, m_0) si dicono *equivalenti* se esiste un isomorfismo $\psi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ tale che $\psi \circ i = i'$. Si dice che una deformazione $(\mathcal{V}, \omega, M)$ è (localmente) banale o rigida se essa è (localmente) equivalente alla deformazione $(M \times V_0, pr_M, M)$.

DEFINIZIONE 1 (cfr. [2] pag. 266) *Si dice che* $(\mathcal{V}, \omega, M)$ *è rigida all'infinito se esiste un compatto* $K_0 \subset V_0$ *ed un isomorfismo*

$$g : (V_0 - K_0) \times M \longrightarrow \mathcal{V}$$

Pervenuto alla Redazione il 20 Gennaio 1966.

[1] Durante la preparazione di questa nota l'A. ha usufruito del grant N. S. F-GP 4022 della National Science Foundation.

su un aperto di $\mathcal{V}$, tale che

1) *il diagramma*

$$\begin{tikzcd} (V_0 - K_0) \times M \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "pr_M"'] & \mathcal{V} \arrow[d, "\omega"] \\ & M \end{tikzcd}$$

sia commutativo e

2) $\omega \mid \mathcal{V} - \operatorname{Im} g$ *sia un'applicazione compatta.*

Lo scopo di questa nota è la dimostrazione del seguente

TEOREMA. *Una deformazione rigida all'infinito di una varietà di Stein V_0, di dimensione complessa $n > 1$, è localmente banale.*

OSSERVAZIONE. Il risultato è banalmente falso se $\dim V_0 = 1$. È noto infatti che per ogni superficie di Riemann V_0 ogni deformazione V_t della struttura complessa di V_0 si ottiene per deformazione della struttura all'interno di un intorno coordinato (cfr. [4]). Se la deformazione è rigida fuori di un dominio di coordinate il teorema è noto e vero qualunque sia la fibra (di $\dim_{\mathbb{C}} > 1$) (cfr. [3] pag. 461); questo risultato è d'altra parte deducibile dal teorema precedente, almeno se il dominio di coordinate è di Stein.

2. Supponiamo ora che, $(\mathcal{V}, \omega, M)$ essendo una deformazione rigida all'infinito, $\mathcal{V}$ ed M siano varietà complesse e che ω sia ovunque di rango massimo.

Sia Ψ la famiglia di tutti i chiusi, F, di $\mathcal{V}$ tali che la restrizione, $\omega \mid F$, di ω ad F sia un'applicazione compatta.

Poichè ci interessano qui soltanto deformazioni locali di V_0 si può supporre che M sia un polidisco $M_{r_0} \subset \mathbb{C}^m$ con centro $m_0 = \{0\}$ e di raggio r_0:

$$M_{r_0} := \{t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{C}^m \mid |t_\alpha| < r_0, \ \alpha = 1, \dots, m\};$$

Per la definizione di deformazione, si può trovare un ricoprimento localmente finito di $\mathcal{V}$, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, con aperti U_i dotati di coordinate e tali che la restrizione, $\omega \mid U_i$, di ω ad U_i sia data dalla:

$$\omega \mid U_i : (z^1_{(i)}, \dots, z^{n+m}_{(i)}) \longrightarrow (t_1 = z^{n+1}_{(i)}, \dots, t_m = z^{m+n}_{(i)})$$

e per ogni $x \in U_i$ $(z^1_{(i)}, \dots, z^n_{(i)})$ siano coordinate locali in x sulla varietà $\omega^{-1}(\omega(x))$. Poniamo $(\underset{\smile}{z}_{i}, t) = (z^1_{(i)}, \dots, z^n_{(i)}, t_1, \dots, t_m)$ per le coordinate in U_i.

Se le

$$\begin{cases} z^{\alpha}_{(j)} = h^{\alpha}_{ij}(z_{(i)}\, t), & \alpha = 1, \dots, n \\ t = t \end{cases}$$

dànno il cambiamento di coordinate in $U_i \cap U_j\ (\neq \Phi)$ e se $\vec{v} = \sum_{\mu=1}^{m} v_\mu(t) \frac{\partial}{\partial t}$ è un campo olomorfo di vettori su M_{r_0}, allora

$$\Theta^{\alpha}_{ij}(z_{(i)}, t) := \sum_{\mu=1}^{m} v_\mu(t) \frac{\partial h^{\alpha}_{ij}(z_{(i)}, t)}{\partial t_\mu}$$

sono le componenti di un campo olomorfo di vettori lungo le fibre in $U_i \cap U_j$. Sia Θ il fascio dei germi dei campi di vettori olomorfi lungo le fibre di $\mathcal{V}$. Si verifica che $\varrho(\vec{v}) := \{\Theta^{\alpha}_{ij}\}$ è un cociclo sul ricoprimento $\mathcal{U}$ a valori in Θ: $\varrho(\vec{v}) \in Z^1(\mathcal{U}, \Theta)$.

Poichè $(\mathcal{V}, \omega, M)$ è rigida all'infinito si vede subito che il supporto di $\varrho(\vec{v})$ appartiene alla famiglia Ψ, sopra definita. Se si cambiano le coordinate sul ricoprimento $\mathcal{U}$, il cociclo $\varrho(\vec{v})$ si altera per un cobordo a supporto in Ψ. Quindi se $\mathcal{T}$ è il fascio dei germi dei campi di vettori tangenti ad M, si ottiene un'applicazione $\sigma_{r_0}: H^0(M_{r_0}, \mathcal{T}) \longrightarrow H^1_\Psi(\mathcal{V}, \Theta)$, che è lineare su $H^0(M_{r_0}, \mathcal{O})$ ($\mathcal{O}$ fascio dei germi delle funzioni olomorfe su M_{r_0}). Se $o < r \leq r_0$ ed $M_r := \{t \in M_{r_0} \,|\, |t_\alpha| < r\}$, $\mathcal{V}_r := \omega^{-1}(M_r)$ l'argomentazione precedente può essere ripetuta con M_r e $\mathcal{V}_r$ al posto di M_{r_0} e $\mathcal{V}$. Per $0 < r' \leq r \leq r_0$ si ha il diagramma, evidentemente commutativo,

$$\begin{array}{ccc} H^0(M_r, \mathcal{T}) & \xrightarrow{\sigma_r} & H^1_\Psi(\mathcal{V}_r, \Theta) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(M_{r'} \mathcal{T}) & \xrightarrow{\sigma_{r'}} & H^1_\Psi(\mathcal{V}_{r'}, \Theta) \end{array}$$

in cui le frecce verticali sono delle restrizioni e si sono indicate colla stessa lettera Ψ le famiglie dei supporti definite per $\mathcal{V}_r$ e $\mathcal{V}_{r'}$ come si è fatto per $\mathcal{V}$. Se si passa al limite per $r \longrightarrow 0$ si ottiene un'applicazione σ: $\mathcal{T}_{\{0\}} \longrightarrow R^1_\Psi\, \omega\, (\Theta)_{\{0\}}$ ($R^q\, \omega\, (\Theta) :=$ q-esimo fascio immagine diretta di Θ mediante ω).

PROPOSIZIONE 1. *Sia* $(\mathcal{V}, \omega, M)$ *una deformazione rigida all'infinito della varietà complessa* V_0. *Se* $\sigma = 0$, $(\mathcal{V}, \omega, M)$ *è localmente rigida* (e viceversa).

La dimostrazione è del tutto analoga a quella della Prop. 1 di [1].

Se si considera una famiglia differenziabile di varietà differenziabili allora il fascio Θ è fine e dalla proposizione precedente si ottiene il

COROLLARIO 1. *Se* $(\mathcal{V}, \omega, M)$ *è una deformazione di* $V_0 = \omega^{-1}(0)$ *rigida all'infinito allora essa è differenziabilmente localmente banale.*

OSSERVAZIONE Se $\pi : \mathrm{Im}\,(g) \longrightarrow (V_0 - K_0) \times M$ è l'isomorfismo dato dalla rigidità all'infinito, il diffeomeomorfismo che dà la banalità di $(\mathcal{V}_r, \omega, M_r)$ si può scegliere coincidente con π fuori di $(U - K_0) \times M_r$, dove U è un intorno arbitrario di K_0 in V_0 ed M_r un intorno di $\{0\} \in M$, abbastanza piccolo. Ciò risulta subito dal fatto che scrivendo che il cociclo di deformazione è un cobordo, dove esso è zero si può esprimere come « cobordo dello zero » (si usa, per es., una partizione dell'unità).

3. Sia ora $(\mathcal{V}, \omega, M)$ una deformazione rigida all'infinito della varietà di Stein V_0 di dimensione complessa $n > 1$. Si ha la

PROPOSIZIONE 2. *Se* U *è un polidisco abbastanza piccolo di* M, $\{o\} \in U$, $\omega^{-1}(U)$ *è una varietà di Stein.*

DIM. Siano p e q due funzioni fortemente plurisottoarmoniche (f. p. s. a.) *positive* su V_0 ed U rispettivamente, le quali mettano in evidenza la convessità di V_0 ed U.

Sia $g : \omega^{-1}(V) \longrightarrow V_0$ un'applicazione differenziabile, che dia la rigidità differenziabile di $\omega^{-1}(U)$; $p \circ g$ è allora una funzione f. p. s. a. su $\omega^{-1}(U)$. Si può scegliere una costante $k > 0$ così grande che $\varphi = p \circ g + kq \circ \omega$ sia f. p. s. a. e gli insiemi

$$B_c := \{x \in \omega^{-1}(U) \mid \varphi(x) < c,\ c \in R\}$$

siano relativamente compatti in $\omega^{-1}(U)$: ne segue che $\omega^{-1}(U)$ è di Stein.

COROLLARIO 2. *Per ogni* $t \in U$, $\omega^{-1}(t) = V_t$ *è una varietà di Stein.*

Per la proposizione 2 si può supporre che $\mathcal{V}$ sia una varietà di Stein. Siano $F_1(a), \dots, F_N(v) \in H^0(\mathcal{V}, \mathcal{O})$ delle funzioni olomorfe su $\mathcal{V}$ tali che

$$F := (F_1, \dots, F_N) : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{C}^N$$

sia isomorfismo di $\mathcal{V}$ su una sottovarietà chiusa di $\mathbb{C}^N$; $F_i \circ g\ (i = 1, \dots, N)$ sono allora funzioni olomorfe su $(V_0 - K_0) \times M$ (essendo $g : (V_0 - K_0) \times$ $\times M \longrightarrow \mathcal{V}$ l'applicazione olomorfa che dà la rigidità all'infinito). Poichè

V_0 è di Stein si può trovare un aperto di Stein A_0, relativamente compatto, a frontiera fortemente convessa e C^∞, tale che $A_0 \supset K_0$.

Poniamo $\varphi_{i,t} = F_i \circ g \mid (V_0 - A_0) \times t$. Le funzioni $\varphi_{i,t}$ si estendono univocamente a funzioni olomorfe su $V_0 \times t$. Infatti, nella successione esatta di coomologia relativa:

$$0 \longrightarrow H_k^0(A_0 \times t, \mathcal{O}) \longrightarrow H^0(V_0 \times t, \mathcal{O}) \xrightarrow{\beta_t} H^0((V_0 - A_0) \times t, \mathcal{O}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_k^1(A_0 \times t, \mathcal{O})$$

($H_k^* =$ coomologia a supporti compatti), $H_k^0(A_0 \times t, \mathcal{O}) = 0$ perchè A_0 è relativamente compatto e anche $H_k^1(A_0 \times t, \mathcal{O}) = 0$ perchè $\dim A_0 \geq 2$; quindi β_t è isomorfismo.

Siano $\psi_{i,t}\,(i = 1, \dots, N)$ le estensioni a $V_0 \times t$ delle $\varphi_{i,t}$. Proviamo che l'applicazione olomorfa

$$\psi_t := (\psi_{i,t}, \dots, \psi_{N,t}) : V_0 \times t \longrightarrow \mathbb{C}^N$$

è biolomorfa sopra $F(V_t)$.

Osserviamo dapprima che ψ_t è propria; infatti se K è compatto di $\mathbb{C}^N$, $\psi_t^{-1}(K \cap \psi_t(V_0 - A_0) \times t)$ è compatto per l'ipotesi di rigidità all'infinito e $\psi_t^{-1}(K \cap \psi_t(A_0 \times t)) \subset A_0 \times t \subset\subset V_0 \times t$.

ψ_t è anche biunivoca come segue dalle seguenti considerazioni. Poniamo $A_t := V_t - g((V_0 - A_0) \times t)$; A_t è aperto di Stein perchè è a frontiera fortemente convessa e V_t è di Stein. Come sopra, dalla successione esatta di coomologia relativa all'inclusione $A_t \subset V_t$ segue che

$$\alpha_t := H^0(V_t, \mathcal{O}) \longrightarrow H^0(V_t - A_t, \mathcal{O})$$

è isomorfismo e, come β_t, isomorfismo topologico di algebre (per la topologia della convergenza uniforme sui compatti). Siano poi

$$g_t^* : H^0(V_t - A_t, \mathcal{O}) \longrightarrow H^0((V_0 - A_0) \times t, \mathcal{O}), \; t \in M,$$

gli isomorfismi topologici dedotti dalla rigidità all'infinito. Per assurdo supponiamo $\psi_t(x_0) = \psi_t(x_1)$, $x_0 \neq x_1 \in V_0 \times t$. Sia $B \subset V_0 \times t$ un aperto di Stein, relativamente compatto, contenente x_0 e x_1, a frontiera C^∞, fortemente convessa e contenuta in $(V_0 - A_0) \times t$. Essendo V_0 di Stein, esiste una funzione $h \in H^0(V_0 \times t, \mathcal{O})$ tale che $h(x_0) \neq h(x_1)$. La funzione $h_t := \alpha_t^{-1} = g_t^{*-1} \beta_t h$ è olomorfa in V_t e $B_t := V_t((V_0 - B_0) \times t)$ è aperto di Stein in V_t. Poichè evidentemente, $\alpha_t^{-1} g_t^{*-1} \beta_t \psi_{i,t} = F_{i \mid V_t} =: f_{i,t}$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un polinomio $P_\varepsilon(f_{1,t}, \dots, f_{N,t})$ tale che $\sup\limits_{\partial\beta_t} |P_\varepsilon(f_{1,t}, \dots$ $\dots, f_{N,t}) - h_t| < \varepsilon$ e quindi anche $\sup\limits_{\partial\beta_t} |P_\varepsilon(\psi_{1,t}, \dots, \psi_{N,t}) - h| < \varepsilon$. Ma allora per il principio del massimo $|P_\varepsilon(\psi_{1,t}, \dots, \psi_{N,t}) - h| < \varepsilon$ in B e l'assurdo $|h(x_0) - h(x_1)| < 2\varepsilon$.

Essendo ψ_t propria, $\psi_t(V_0 \times t)$ è sottoinsieme analitico di $\mathbb{C}^N$ e poichè $\dim \psi_t(V_0 \times t) = \dim(V_0 \times t)$ e $\psi_t((V_0 - A_0) \times t) = F(V_t - A_t)$, risulta $\psi_t(V_0 \times t) = F(V_t)$. Quindi $\psi_t(V_0 \times t)$ è varietà e ψ_t è isomorfismo sopra $F(V_t)$.

Si è così provato che le $\psi_i(x, t) := \psi_{i,t}(x)$ $(x \in V_0, t \in M)$ definiscono un'applicazione biunivoca di $V_0 \times M$ sopra $F(\mathcal{V})$, che è biolomorfa sulle fibre. Verifichiamo che le $\psi_i(x, t)$ sono continue rispetto a t. Poichè $\psi_i|_{(V_0 - K_0) x M} = F_i \circ g$, ciò è ovvio in $(V_0 - K_0) \times M$. Ma di più, per l'uniforme continuità delle funzioni continue, qualunque siano $\varepsilon > 0, K \subset V_0 - K_0$ compatto e $t_0 \in M$, esiste un intorno U di t_0 in M tale che per $t \in U$ $|\psi_i(x, t) - \psi_i(x, t_0)| < \varepsilon$ qualunque sia $x \in K$. Scegliendo $K = F - A_0$, con F compatto di V_0 contenente A_0, dal principio del massimo segue subito che anche per $x \in K_0$ le $\psi_i(x, t)$ sono continue rispetto a t.

Per concludere la dimostrazione del teorema 1 basta provare che le $\psi_i(x, t)$, olomorfe in x, sono ovunque olomorfe anche in t; per ogni m-ciclo γ_t di M le funzioni $h_i(x) =: \int\limits_{\gamma_t} \psi_i(x, t)\, dt$ sono funzioni olomorfe su V_0, nulle in $V_0 - A_0$, dunque nulle su V_0: dal teorema di Morera segue che le $\psi_i(x, t)$ sono olomorfe in t.

Università di Firenze

BIBLIOGRAFIA

[1] ANDREOTTI A. e E. VESENTINI *On the pseudo-rigidity of Stein manifolds.* Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa, s. III, v. 16, (1962) p.p. 213-223.

[2] ANDREOTTI A. e E. VESENTINI *On deformations of discontinuous groups,* Acta Math. v. 112, (1964), p.p. 249-298.

[3] KODAIRA K. and D. C. SPENCER : *On deformation of complex analytic structures* I-II, Ann. of Math., 67, (1958) p.p. 328-466.

[4] SHIFFER M. and D. C. SPENCER : *Functionals of finite Riemann surfaces,* Princeton, University Press, 1954.