

ANNALI DELLA  
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA  
*Classe di Scienze*

R. GÉRARD

**Le théorème de Floquet pour les systèmes de la forme**

$$dX = \left( \sum_{k=1}^n P_k(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_k \right) X$$

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 20, n° 3 (1966), p. 537-541*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1966\\_3\\_20\\_3\\_537\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1966_3_20_3_537_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## LE THÉORÈME DE FLOQUET POUR LES SYSTÈMES DE LA FORME

$$dX = \left( \sum_{k=1}^n P_k(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_k \right) X$$

par R. GÉRARD

0. — **Introduction.** Rappelons l'énoncé du théorème de Floquet pour les systèmes de la forme :

$$(E) \quad \frac{dX}{dt} = A(t)$$

où  $A(t)$  est une matrice carrée périodique de période  $\omega$ .

Ce théorème nous dit qu'il existe une matrice inversible  $P(t)$  de période  $\omega$  telle que le changement de variable  $Y = P(t)X$  transforme (E) en un système à coefficients constants

$$\frac{dY}{dt} = BY$$

À la suite des articles de M. Francesco Maisano (1) donnant une forme remarquable à la matrice fondamentale d'un système complètement intégrable de la forme :

$$dX = \left( \sum_{k=1}^n B_k dt_k \right) X$$

où les  $B_k$  sont des matrices carrées constantes, il nous a paru utile de signaler le résultat suivant :

Soit (S) un système complètement intégrable de la forme :

$$dX = \left( \sum_{k=1}^n A_k(t_1, t_2, \dots, t_n) dt_k \right) X$$

---

Pervenuto alla Redazione il 4 Gennaio 1966.

où les  $A_k(t_1, t_2, \dots, t_n)$  sont des matrices carrées  $n$ -fois périodiques de périodes partielles  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Alors :

**THÉOREME :** *Il existe une matrice inversible  $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$   $n$ -fois périodique de périodes partielles  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  telle que le changement de variable  $Y = P(t_1, t_2, \dots, t_n) X$  transforme le système (S) en un système à coefficients constants de la forme :*

$$dY = \left( \sum_{k=1}^n B_k dt_k \right) Y.$$

**REMARQUE :** L'étude que nous allons faire est un cas particuliers d'une étude plus générale qui pourrait être faite concernant le système complètement intégrable.

$$dY = \Omega Y$$

où  $\Omega$  est une forme différentielle matricielle sur une variété compacte  $V_n$ ; l'analogie est évidente dans le cas où le groupe de Poincaré de  $V_n$  est abélien.

### 1. — Démonstration du théorème.

A) Quelques rappels sur la notion de logarithme d'une matrice. Si  $A$  est une matrice complexe triangulaire ayant une seule valeur propre  $a \neq 0$ , on appelle détermination principale du logarithme de  $A$  et on note  $\log \cdot A$  la matrice définie par :

$$\log \cdot A = 2\pi i \varrho I + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{j} \left( \frac{A}{a} - I \right)^j$$

$\varrho$  étant le nombre complexe défini par

$$\exp \cdot (2\pi i \varrho) = a \quad 0 \leq \operatorname{Re} \cdot \varrho < 1.$$

**REMARQUES :**

1<sup>o</sup>) La matrice  $\left( \frac{A}{a} - I \right)$  étant nilpotente  $\log \cdot A$  est un polynôme en  $A$ .

2<sup>o</sup>)  $\exp \cdot (\log \cdot A) = A$ .

Soit  $A$  une matrice complexe régulière, il existe une matrice  $S$  inversible telle que :

$$A = S^{-1} \begin{pmatrix} A^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A^2 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & A^r \end{pmatrix} S.$$

Les matrices  $A^i$  étant triangulaires à valeur propre unique non nulle. Par définition on pose :

$$\log \cdot A = S^{-1} \begin{pmatrix} \log \cdot A^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \log \cdot A^2 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \log \cdot A^r \end{pmatrix} S.$$

On vérifie encore que  $\exp \cdot (\log \cdot A) = A$  et que cette définition est indépendante de  $S$ . Pour plus de détails sur ces notions voir (2). Nous utiliserons dans la suite le résultat suivant :

Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , sont  $n$  matrices complexes régulières deux à deux permutables, il existe une matrice régulière  $S$  telle que pour tout  $i = 1, 2 \dots n$

$$A_i = S^{-1} \begin{pmatrix} A_i^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_i^2 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & A_i^r \end{pmatrix} S$$

les matrices  $A_i^j$  étant triangulaires à valeur propre unique et non nulle.

De ceci résulte que les matrices  $\log \cdot A_1, \log \cdot A_2, \dots, \log \cdot A_n$  sont deux à deux permutables.

B) Démonstration du théorème.

Si  $H(t_1, t_2 \dots t_n)$  est une matrice quelconque nous noterons  $H_{\omega_i}$  la matrice  $H(t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_i + \omega_i, t_{i+1}, \dots, t_n)$ ;  $H_{\omega_i, \omega_j}$  a une signification analogue.

Soit  $\Phi(t_1, t_2, \dots, t_n)$  une matrice fondamentale de solutions de (S), pour tout  $i$ ,  $\Phi_{\omega_i}$  est également une matrice fondamentale de solutions de (S) donc :

$$\Phi_{\omega_i} = \Phi C_i$$

où  $C_i$  est une matrice complexe régulière.

Pour tout couple  $(i, j)$  les matrices  $C_i$  et  $C_j$  sont permutables, en effet :

$$\Phi_{\omega_i, \omega_j} = \Phi_{\omega_j} C_j = \Phi C_i C_j$$

et

$$\Phi_{\omega_i, \omega_j} = \Phi_{\omega_j} C_i = \Phi C_j C_i.$$

Il en résulte que les matrices  $B_i = \frac{1}{\omega_i} \log \cdot C_i$  sont également deux à deux permutables.

Considérons la matrice

$$P(t_1, t_2, \dots, t_n) = \exp \left( \sum_{k=1}^n t_k B_k \right) \times (\Phi^{-1}).$$

Cette matrice est inversible,  $n$ -fois périodique, de périodes partielles  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , en effet :

$$P_{\omega_i} = \exp \left( \sum_{k=1}^n t_k B_k \right) \times \exp \cdot \omega_i B_i \times (\Phi^{-1}) \omega_i$$

car les matrices  $B_k$  sont deux à deux permutables et comme

$$(\Phi^{-1})_{\omega_i} = (\Phi_{\omega_i})^{-1} = C_i^{-1} \Phi^{-1}$$

on a bien  $P_{\omega_i} = P$ .

Faisons maintenant dans le système (S) le changement de variable défini par :

$$Y = P(t_1, t_2, \dots, t_n) X$$

alors, en tenant compte du fait que les matrices  $B_i$  sont deux à deux permutables et en conduisant les calculs comme pour le théorème de Floquet ordinaire (voir (3)), on obtient :

$$dY = \left( \sum_{k=1}^n B_k dt_k \right) Y.$$

Ce qui prouve le théorème.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Rendiconti del Seminario Matematico di Padova Vol. 34, 1964 page 390-410.
- [2] GANTMACHER F. R. — *Matrizenrechnung I* — VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften Berlin 1959. Spécialement chap. V et VIII.
- [3] LEFSCHETZ SALOMON — *Differential Equations* — 2<sup>o</sup> édition John Wiley 1963.