

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

G. DA PRATO

U. MOSCO

Regolarizzazione dei semigruppı distribuzioni analitici

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 19, n^o 4 (1965), p. 563-576

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_4_563_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

REGOLARIZZAZIONE DEI SEMIGRUPPI DISTRIBUZIONI ANALITICI

G. DA PRATO - U. MOSCO (*)

In questa nota studiamo alcune proprietà di un semigruppone distribuzione \mathfrak{G} esponenziale e prolungabile analiticamente su un settore (SGDEA) (cfr. [1] Def. 3 - 0 - 1); più precisamente se A è il generatore infinitesimale di \mathfrak{G} e $G(t)$ è il semigruppone di operatori associato a \mathfrak{G} tramite la relazione $G(t) = \overline{\mathfrak{G}(\delta_t)}$ (cfr. [1] Def. 1 - 1 - 2) proviamo che $G(t)$ è un operatore continuo per ogni $t \geq 0$ e che inoltre l'applicazione $t \rightarrow G(t)$ è una rappresentazione uniformemente continua e analitica di $\mathbb{R}_+ = \{t : t > 0\}$ nell'algebra di Banach $\mathcal{L}(X, X)$ degli operatori continui sullo spazio di Banach X dove \mathfrak{G} è definito.

Osserviamo che l'applicazione $t \rightarrow G(t)$ non è in generale fortemente continua su $\overline{\mathbb{R}_+} = \{t : t \geq 0\}$ cioè che la classe dei semigruppone di operatori associati ai SGDEA nel modo suddetto è più ampia di quella dei semigruppone di classe c_0 (cfr. [2] p. 321); nel § 3 diamo un esempio di SGDEA \mathfrak{G} tale che $G(t)$ non è un semigruppone di classe c_0 .

Lions [3] ha considerato i semigruppone distribuzioni regolari per lo studio di un problema misto nel senso di Cauchy - Hadamard; più precisamente se A è un operatore lineare chiuso con dominio $\mathcal{D}(A)$ denso nello spazio di Banach X generatore infinitesimale di un semigruppone distribuzione regolare allora l'equazione:

$$-Au + \frac{\partial u}{\partial t} = T \quad u \in \mathcal{D}'_+(\mathcal{D}(A))$$

dove T è dato in $\mathcal{D}'_+(X)$, ammette una soluzione unica.

Con questa nota studiamo il problema di Cauchy omogeneo associato ad un operatore lineare chiuso A con dominio denso in X generatore infi-

Pervenuto alla Redazione il 21 Maggio 1965 ed in forma definitiva il 20 Luglio 1965.

(*) Questo lavoro è stato eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 9 del C. N. R. nell'anno 1964-65.

nitesimale di un SGDEA, provando che se \mathfrak{G} è il SGDEA generato da A risulta :

$$-AG(t)x + \frac{dG(t)}{dt}x = 0$$

per ogni x del « range » $\mathcal{R}(\mathfrak{G})$ di \mathfrak{G} (cfr. [1], Def. 1-1-1).

Ringraziamo il Prof. J. L. Lions per le utili discussioni avute sull'argomento di questo lavoro.

§ 1. Notazioni.

Le notazioni usate sono le seguenti :

a) \mathbb{R} (risp. \mathbb{R}_+ , risp. $\overline{\mathbb{R}}_+$) è l'insieme dei numeri reali (risp. dei numeri reali positivi, risp. non negativi), \mathbb{C} l'insieme dei numeri complessi.

$\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ è lo spazio delle funzioni su \mathbb{R}_+ a valori complessi indefinitamente derivabili e a supporto compatto, con la topologia usuale (L. Schwartz [4] p. 64).

$\mathcal{C}'_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ è lo spazio delle distribuzioni su \mathbb{R} aventi supporto contenuto in $\overline{\mathbb{R}}_+$, con la topologia usuale (L. Schwartz [4] p. 88).

b) X è uno spazio di Banach, $\mathcal{L}(X, X)$ l'algebra di Banach degli operatori lineari limitati su X con la norma usuale.

c) \mathfrak{G} è un semigrupp distribuzione su X prolungabile analiticamente sul settore $S(\theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

$$S(\theta) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \neq 0, |\arg \lambda| < \theta\}$$

di tipo ξ_0 (cfr. [1] Def. 3-0-1).

Per ogni λ di $S(\theta)$ \mathfrak{G}_λ è il semigrupp distribuzione esponenziale ottenuto dal prolungamento analitico di \mathfrak{G} (cfr. [1], § 2). $\mathcal{R}(\mathfrak{G})$ è l'insieme

$$\mathcal{R}(\mathfrak{G}) = \{x : x = \sum_i \mathfrak{G}(\varphi_i) x_i, x_i \in X, \varphi_i \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}\}.$$

Se T è una distribuzione di $\mathcal{C}'_{\overline{\mathbb{R}}_+}$ $\mathfrak{G}(T)$ è l'operatore definito da

$$\mathfrak{G}(T)x = \sum_i \mathfrak{G}(T * \varphi_i) x_i, \quad x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G})$$

se risulta

$$x = \sum_i \mathfrak{G}(\varphi_i) x_i, \quad x_i \in X, \varphi_i \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+};$$

$\mathfrak{G}(T)$ è un operatore prechiuso (cfr. [1] p. 372) la cui minima estensione chiusa indichiamo con $\overline{\mathfrak{G}(T)}$. In particolare se $T = \delta_t$ è la misura di Dirac nel punto $t, t \geq 0$, porremo

$$G(t) = \overline{\mathfrak{G}(\delta_t)}$$

Inoltre poniamo:

$$S^0(\theta) = \left\{ \mu : \frac{\pi}{2} + \theta \leq |\arg u| \leq \pi \right\}$$

$$\Sigma(\xi_0, \theta) = \Sigma^\pm(\xi_0, \theta)$$

secondo che sia $\text{sign } \xi_0 = \pm 1$ con

$$\Sigma^-(\xi_0, \theta) = \xi_1 + S^0(\theta), \quad \xi_1 = \frac{\xi_0}{\cos \theta}$$

$$\Sigma^+(\xi_0, \theta) = \Sigma^-(\xi_0, \theta) \cap \{ \mu : \text{Re } \mu \leq \xi_0 \}$$

$$\Omega_\varepsilon(\xi_0, \theta) = \Omega_\varepsilon^\pm(\xi_0, \theta)$$

secondo che sia $\text{sign } \xi_0 = \pm 1$ con

$$\Omega_\varepsilon^\pm(\xi_0, \theta) = \mathbf{C} - \Sigma_\varepsilon^\pm(\xi_0, \theta)$$

dove

$$\Sigma_\varepsilon^+(\xi_0, \theta) = \Sigma_\varepsilon^-(\xi_0, \theta) \cap \{ \mu : \text{Re } \mu \leq \xi_0 + \varepsilon \}$$

$$\Sigma_\varepsilon^-(\xi_0, \theta) = \xi_1 + \varepsilon + S^0(\theta - \varepsilon).$$

Infine conviene ricordare esplicitamente il Teorema 3-2-1 in [1], che nel seguito sarà citato come Teorema 1-1.

TEOREMA 1-1: *Un operatore lineare chiuso A con dominio denso in X è il generatore infinitesimale di un SGDEA sul settore $S(\theta), 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, di tipo ξ_0 , se e soltanto se esiste un ξ_0 reale tale che*

(i) *lo spettro $\sigma(A)$ di A è contenuto nell'insieme $\Sigma(\xi_0, \theta)$;*

(ii) *il risolvente $R(\mu, A)$ di A , per ogni ε con $0 < \varepsilon < \theta$, verifica una maggiorazione del tipo*

$$\| R(\mu, A) \| \leq p_\varepsilon(|\mu|)$$

sull'insieme $\Omega_\varepsilon(\xi_0, \theta)$, con p_ε opportuno polinomio a coefficienti non negativi.

§ 2. Regolarizzazione di un SGDEA.

In questo paragrafo proviamo che se \mathfrak{G} è un SGDEA, posto

$$G(t) = \overline{\mathfrak{G}(\delta_t)} \text{ per } t > 0$$

risulta $G(t) \in \mathcal{L}(X, X)$ e che inoltre l'applicazione $t \rightarrow G(t)$ di \mathbb{R}_+ in $\mathcal{L}(X, X)$ è analitica e si ha

$$G^{(k)}(t)x - A^k G(t)x = 0 \quad \forall x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G}).$$

LEMMA 2-1 : *Sia A un operatore lineare chiuso con dominio denso in X verificante le condizioni (i) e (ii) del Teorema 1-1 e sia \mathfrak{G} il SGDEA (di tipo ξ_0) generato da A .*

Allora per ogni ε con $0 < \varepsilon < \theta$ risulta

$$(2-1-1) \quad \|\mathfrak{G}(\varphi)\| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} e^{\xi_\varepsilon t} q_\varepsilon\left(\frac{1}{t}\right) |\varphi(t)| dt$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, con

$$\xi_\varepsilon = (\xi_1 + \varepsilon) + |\xi_1 + \varepsilon| \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)$$

$$q_\varepsilon(t) = \frac{n_\varepsilon!}{\pi \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)} p_\varepsilon\left(\frac{t}{\operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)}\right)$$

dove n_ε è il grado di p_ε e $\xi_1 = \frac{\xi_0}{\cos \theta}$.

DIMOSTRAZIONE :

Si ha per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$:

$$\mathfrak{G}(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} R(\mu, A) \int_0^{+\infty} e^{\mu t} \varphi(t) dt d\mu \quad \text{con } a \geq \xi'_1 = \xi_1 + \varepsilon$$

l'integrale essendo inteso nella topologia uniforme di $\mathcal{L}(X, X)$.

Poniamo $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta + \varepsilon$ e consideriamo le semirette

$$r_\pm = \{\mu : \mu \in \mathbb{C}, \mu = -\tau e^{\mp i\theta'} + \xi'_1, \tau \geq 0\};$$

per ogni $b > 0$ le rette $\operatorname{Im} \mu = \pm b$ tagliano nella regione del piano μ compresa fra la retta $\operatorname{Re} \mu = a$ e le semirette r_\pm un dominio D contenuto nel campo di olomorfia di $R(\mu, A)$.

Posto

$$f(\mu) = R(\mu, A) \int_0^{+\infty} e^{\mu t} \varphi(t) dt$$

si ha

$$0 = \int_{FD} f(\mu) d\mu = \int_{a-ib}^{a+ib} f(\mu) d\mu + J_+(a, b) + J_-(a, b) + J'_+(a, b) + J'_-(a, b)$$

con

$$J_{\pm}(a, b) = \pm e^{\mp i\theta'} \int_0^{b/\sin\theta'} f(-\tau e^{\mp i\theta'} + \xi'_1) d\tau$$

$$J'_{\pm}(a, b) = \mp \int_{-b/tg\theta' + \xi'_1}^a f(\tau \pm ib) d\tau.$$

Dimostriamo ora che risulta

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} J'_{\pm}(a, b) = 0 \text{ in } \mathcal{L}(X, X).$$

Si ha, ponendo per brevità $n = n_{\varepsilon}$,

$$\begin{aligned} J'_{\pm}(a, b) &= \int_{-b/tg\theta' + \xi'_1}^a R(\tau \pm ib, A) \int_0^{+\infty} e^{(\tau \pm ib)t} \varphi(t) dt d\tau = \\ &= \mp (-1)^{n+2} \int_{-b/tg\theta' + \xi'_1}^a \frac{R(\tau \pm ib, A)}{(\tau \pm ib)^{n+2}} \int_0^{+\infty} e^{(\tau \pm ib)t} \varphi^{(n+2)}(t) dt d\tau. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\|J'_{\pm}(a, b)\| \leq \int_{-b/tg\theta' + \xi'_1}^a \frac{\|R(\tau \pm ib, A)\|}{|\tau \pm ib|^{n+2}} \int_0^{+\infty} e^{\tau t} |\varphi^{(n+2)}(t)| dt d\tau$$

e posto

$$M_{\pm} = \sup_{t \geq 0} \frac{p_{\varepsilon}(|\tau \pm ib|)}{|\tau \pm ib|^n}$$

risulta

$$\begin{aligned} \|J'_{\pm}(a, b)\| &\leq M_{\pm} \int_{-b/tg\theta' + \xi'_1}^a \int_0^{+\infty} \frac{e^{\tau t} |\varphi^{(n+2)}(t)|}{\tau^2 + b^2} dt d\tau = \\ &= M_{\pm} \int_0^{+\infty} |\varphi^{(n+2)}(t)| \int_{-b/tg\theta' + \xi'_1}^a \frac{e^{\tau t}}{\tau^2 + b^2} dt d\tau. \end{aligned}$$

Dunque

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \|J_{\pm}'(a, b)\| = 0.$$

Si ha allora

$$\mathfrak{G}(\varphi) = -\frac{1}{2\pi} [J_+(a, +\infty) + J_-(a, +\infty)]$$

dove

$$J_{\pm}(a, +\infty) = \pm e^{\mp i\theta'} \int_0^{+\infty} f(-\tau e^{\mp i\theta'} + \xi_1') d\tau.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \|J_{\pm}(a, +\infty)\| &\leq \int_0^{+\infty} \|R(-\tau e^{\mp i\theta'} + \xi_1', A)\| \int_0^{+\infty} e^{(\xi_1' - \tau \cos \theta')t} |\varphi(t)| dt d\tau \leq \\ &\leq \int_0^{+\infty} e^{\xi_1' t} |\varphi(t)| F(t) dt \end{aligned}$$

avendo posto

$$F(t) = \int_0^{+\infty} p_{\varepsilon}(\tau + |\xi_1'|) e^{-\tau \cos \theta'} d\tau.$$

Risulta ora

$$F(t) = \int_{|\xi_1'|}^{+\infty} p_{\varepsilon}(\tau) e^{-\tau \cos \theta'} e^{|\xi_1'| t \cos \theta'} d\tau \leq n! \frac{e^{|\xi_1'| t \cos \theta'}}{t \cos \theta'} p_{\varepsilon}\left(\frac{1}{t \cos \theta'}\right).$$

Si ha dunque

$$\|\mathfrak{G}(\varphi)\| \leq \frac{n!}{\pi \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{(\xi_1' + |\xi_1'| \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon))t}}{t} p_{\varepsilon}\left(\frac{1}{t \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)}\right) |\varphi(t)| dt$$

cosicchè la tesi del Lemma è provata.

Possiamo ora dimostrare il seguente Teorema.

TEOREMA 2-1: *Sia \mathfrak{G} un SGDEA sul settore $S(\theta)$. Posto per ogni $t \geq 0$ e per ogni ε con $0 < \varepsilon < \theta$ $G(t) = \mathfrak{G}(\delta_t)$ sussiste la maggiorazione:*

$$\|G(t)\| \leq \frac{e^{\xi_1 t}}{t} q_{\varepsilon}\left(\frac{1}{t}\right)$$

con

$$\xi_\varepsilon = \xi_1 + \varepsilon + |\xi_1 + \varepsilon| \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)$$

$$q_\varepsilon(\mu) = \frac{n_\varepsilon!}{\pi \operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)} p_\varepsilon\left(\frac{\mu}{\operatorname{sen}(\theta - \varepsilon)}\right),$$

dove p_ε è un polinomio di grado n_ε verificante la condizione (ii), A essendo il generatore infinitesimale di \mathfrak{G} .

Inoltre l'applicazione $t \rightarrow G(t)$ di \mathbb{R}_+ in $\mathcal{L}(X, X)$ è prolungabile a un'applicazione analitica $\lambda \rightarrow G(\lambda)$ di $S(\theta)$ in $\mathcal{L}(X, X)$ e risulta

$$\frac{d^k G(\lambda)}{d\lambda^k} x - A^k G(\lambda) x = 0, \quad x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G}).$$

DIMOSTRAZIONE:

In virtù del Lemma 2-1, fissato ε con $0 < \varepsilon < \theta$ risulta

$$\|\mathfrak{G}(\varphi)\| \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{\xi_\varepsilon t}}{t} q_\varepsilon\left(\frac{1}{t}\right) |\varphi(t)| dt$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$.

Sia $\{\varrho_\nu\}$ una successione regolarizzante, cioè tale che $\varrho_\nu \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ e $\varrho_\nu * \varphi \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, e sia $\eta > 0$; possiamo supporre che i supporti delle ϱ_ν siano contenuti nell'intervallo $]0, \eta]$. Si ha, per ogni $s > 0$

$$\|\mathfrak{G}(\delta_s * \varrho_\nu)\| \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{\xi_\varepsilon(s+t)}}{s+t} q_\varepsilon\left(\frac{1}{s+t}\right) |\varrho_\nu(t)| dt$$

e dunque

$$(2-1-2) \quad \|\mathfrak{G}(\delta_s * \varrho_\nu)\| \leq e^{\xi_\varepsilon(s+\eta)} \frac{1}{s} q_\varepsilon\left(\frac{1}{s}\right).$$

Se ora $x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G})$ risulta

$$G(s)x = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathfrak{G}(\delta_s * \varrho_\nu)x.$$

Ne segue, in virtù della (2-1-2)

$$\|G(s)x\| \leq e^{\xi_\varepsilon(s+\eta)} \frac{1}{s} q_\varepsilon\left(\frac{1}{s}\right) \|x\|$$

e quindi, per l'arbitrarietà di η e dato che $\mathcal{R}(\mathfrak{G})$ è denso in X , ne segue la continuità dell'operatore $G(s)$ e la maggiorazione

$$\|G(s)\| \leq \frac{e^{\xi_\varepsilon s}}{s} q_\varepsilon \left(\frac{1}{s} \right).$$

Per provare che $G(t)$ è prolungabile analiticamente su $S(\theta)$ introduciamo le seguenti funzioni

$$g_\nu(\lambda) = \mathfrak{G}_\lambda(\varrho_\nu * \delta_1);$$

$g_\nu(\lambda)$ è analitica su $S(\theta)$ per il Teorema 1-1.

Inoltre se $\lambda = s \in \mathbb{R}_+$ e $x \in \mathcal{R}(\mathfrak{G})$ si ha

$$(2-1-3) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} g_\nu(s)x = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathfrak{G}_s(\varrho_\nu * \delta_1) = G(s)x$$

e, procedendo come per la deduzione della (2-1-2), si trova

$$\|\mathfrak{G}_s(\varrho_\nu * \delta_1)\| \leq \frac{e^{\xi_\varepsilon s(1+\eta)}}{s} q_\varepsilon \left(\frac{1}{s} \right)$$

dato che i supporti delle ϱ_ν sono contenuti in $]0, s\eta]$; quindi la (2-1-3) sussiste per ogni $x \in X$.

Dimostriamo ora che quando λ varia in un compatto Q contenuto in $S(\theta)$ allora l'insieme $\{\|g_\nu(\lambda)\|\}$ è equilimitato al variare di ν e di λ .

Da ciò seguirà per il Teorema di Vitali che, posto

$$G(\lambda) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} g_\nu(x)$$

$G(\lambda)$ è un'applicazione analitica di $S(\theta)$ in $\mathcal{L}(X, X)$, la quale è evidentemente il prolungamento analitico di $G(t)$.

Sia $\lambda \in Q$. L'operatore lineare chiuso λA verifica le ipotesi del Teorema 1-1 con $\theta_\lambda = \theta - |\arg \lambda|$ al posto di θ , $\xi_{0,\lambda} = |\lambda| \xi_0$ al posto di ξ_0 e $p_{\varepsilon,\lambda}$ al posto di p_ε essendo

$$p_{\varepsilon,\lambda}(|\mu|) = \frac{1}{|\lambda|} p_\varepsilon \left(\left| \frac{\mu}{\lambda} \right| \right).$$

Ricordando che λA è il generatore infinitesimale di \mathfrak{G}_λ (cfr. [1] Prop. 2-3-2) e applicando a λA il Lemma 2-1 si ottiene per ogni $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$

$$\|\mathfrak{G}_\lambda(\varphi)\| \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda} e^{\xi_\varepsilon \lambda t} q_{\varepsilon,\lambda} \left(\frac{1}{t} \right) |\varphi(t)| dt$$

con

$$\xi_{\varepsilon, \lambda} = (\xi_{1, \lambda} + \varepsilon) + |\xi_{1, \lambda} + \varepsilon| \operatorname{sen}(\theta_\lambda - \varepsilon)$$

$$\xi_{1, \lambda} = \frac{\xi_{0, \lambda}}{\cos \theta_\lambda}$$

$$q_{\varepsilon, \lambda}(t) = \frac{n_\varepsilon!}{\pi \operatorname{sen}(\theta_\lambda - \varepsilon)} p_{\varepsilon, \lambda} \left(\frac{t}{\operatorname{sen}(\theta_\lambda - \varepsilon)} \right),$$

dove n_ε è il grado di p_ε .

Ne segue

$$\|g_\nu(\lambda)\| = \|\mathfrak{G}_\lambda(\varrho_\nu * \delta_1)\| \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{\xi_{\varepsilon, \lambda} t}}{t} q_{\varepsilon, \lambda} \left(\frac{1}{t} \right) |\varrho_\nu(t-1)| dt \leq e^{\xi_{\varepsilon, \lambda}(1+\eta)} q_{\varepsilon, \lambda}(1)$$

e dunque è provata la equilimitatezza di $\{\|g_\nu(\lambda)\|\}$ al variare di ν e di λ in Q .

Infine passando al limite per $\nu \rightarrow \infty$ nella relazione

$$\frac{d^k \mathfrak{G}_\lambda(\delta_1 * \varrho_\nu)}{d\lambda^k} x = A^k \mathfrak{G}_\lambda(\delta_1 * \varrho_\nu) x$$

(cfr. [1] (2-2-1) e Prop. 2-3-2), si trova

$$\frac{d^k G(\lambda) x}{d\lambda^k} = A^k G(\lambda) x.$$

§ 3. Un esempio di SGDEA.

Indichiamo con E_2 lo spazio di Hilbert complesso di dimensione 2; fissata una base ortonormale in E_2 , allora dato un operatore lineare T lo identificheremo con la sua espressione matriciale rispetto a tale base; posto

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$$

porremo anche $|T|^2 = |t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + |t_{21}|^2 + |t_{22}|^2$. Si mostra facilmente che risulta:

$$\frac{1}{2} |T|^2 \leq \|T\|^2 \leq |T|^2.$$

Con $E_2^{(k)}$ indicheremo una copia di E_2 , $k = 0, 1, \dots$ e con X la somma diretta degli $E_2^{(k)}$:

$$X = \bigoplus_{k=0}^{\infty} E_2^{(k)}.$$

Indicheremo inoltre con Y il sottospazio vettoriale di X costituito dalla totalità delle combinazioni lineari finite di elementi di $E_2^{(k)}$; evidentemente Y è denso in X .

Definiamo in $E_2^{(k)}$ l'operatore $\mathfrak{G}_k(\varphi)$:

$$\mathfrak{G}_k(\varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-kt} \begin{pmatrix} 1 & k^2 t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dt \quad k = 0, 1, \dots \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+};$$

è evidente che $\mathfrak{G}_k(\varphi)$ è un SGDE su $E_2^{(k)}$ di tipo $-k$.

Vogliamo ora provare che posto:

$$\mathfrak{G}(\varphi) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{G}_k(\varphi) \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$$

$\mathfrak{G}(\varphi)$ è un SGDE di tipo 0 su X .

Se $\varphi \in \mathcal{S}^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, $\varphi(t) = e^{-\varepsilon t} \psi(t)$, $\psi \in \mathcal{S}$ risulta

$$\begin{aligned} \|\mathfrak{G}_k(\varphi)\|^2 &= \left\{ 2 \left| \int_0^{+\infty} \psi(t) e^{-(k+\varepsilon)t} dt \right|^2 + \left| \int_0^{+\infty} \psi(t) e^{-(k+\varepsilon)t} k^2 t dt \right|^2 \right\} \\ &\leq \left(\frac{2}{(k+\varepsilon)^2} + \frac{k^4}{(k+\varepsilon)^4} \right) \left(\sup_{t \in \overline{\mathbb{R}_+}} |\psi(t)| \right)^2 \leq \left(\frac{2}{\varepsilon^2} + 1 \right) \left(\sup_{t \in \overline{\mathbb{R}_+}} |e^{\varepsilon t} \varphi(t)| \right)^2; \end{aligned}$$

ne segue:

$$\|\mathfrak{G}(\varphi)\| \leq (2/\varepsilon^2 + 1)^{1/2} \sup_{t \in \overline{\mathbb{R}_+}} |e^{\varepsilon t} \varphi(t)|$$

cosicchè $\mathfrak{G}(\varphi)$ è continuo in X e l'applicazione $\varphi \rightarrow \mathfrak{G}(\varphi)$ di \mathcal{S}^ε in $\mathcal{L}(X, X)$ è continua.

Inoltre la relazione

$$\mathfrak{G}(\varphi) \mathfrak{G}(\psi) x = \mathfrak{G}(\varphi * \psi) x \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}, \quad \psi \in \mathcal{S}^\varepsilon, \quad x \in X$$

vale per ogni x di Y e quindi per ogni x di X .

(*) Per la definizione dello spazio \mathcal{S}^ε vedi [1], pp. 370.

In modo analogo si prova la condizione di regolarità per \mathfrak{G} .

Dimostriamo infine che \mathfrak{G} verifica le condizioni ausiliarie (cfr. [1], 1-1). Innanzi tutto, poichè $Y \subset \mathcal{R}(\mathfrak{G})$, ne segue che $\mathcal{R}(\mathfrak{G})$ è denso in X ; inoltre se $x \in X$ è tale che $\mathfrak{G}(\varphi)x = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$, detta allora x_k la proiezione di x su $E_2^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$ si ha

$$\mathfrak{G}_k(\varphi)x_k = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_{\mathbb{R}_+}$$

e quindi $x_k = 0$, $k = 0, 1, \dots$ cosicchè risulta $x = 0$.

Abbiamo così provato che \mathfrak{G} è un SGDE di tipo ≤ 0 , ed è facile la verifica che \mathfrak{G} è esattamente di tipo 0.

Detto A il generatore infinitesimale di \mathfrak{G} e A_k quello di G_k , $k = 0, 1, \dots$ si ha

$$R(\mu, A) = \mathfrak{G}(e^{-\mu t}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{G}_k(e^{-\mu t}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} R(\mu, A_k) \quad \text{Re } \mu > 0,$$

con

$$R(\mu, A_k) = \int_0^{+\infty} e^{-(\mu+k)t} \begin{pmatrix} 1 & k^2 t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{(\mu+k)^2} \begin{pmatrix} \mu+k & k^2 \\ 0 & \mu+k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Si ha:

$$|R(\mu, A_k)|^2 = \frac{2|\mu+k|^2 + k^4}{|\mu+k|^4}.$$

Se $\mu = s \in \mathbb{R}_+$ si ha

$$\|R(s, A_k)\|^2 \geq \frac{1}{2} |R(s, A_k)|^2 \geq \frac{1}{2} \frac{k^4}{(s+k)^4}$$

da cui $\|R(s, A)\|^2 \geq \frac{1}{2}$, cosicchè A non è il generatore infinitesimale di un semigruppato di classe e_0 .

Sia ora ε un numero positivo minore di $\frac{\pi}{2}$; dimostriamo che A verifica le ipotesi del Teorema 1-1 con p_ε polinomio costante e con $\xi_0 = 0$. Si ha:

$$|R(\mu, A_k)|^2 \leq 2 \frac{(k^2 + k + |\mu|)^2}{|k + \mu|^4}$$

e quindi

$$\|R(\mu, A_k)\| \leq \sqrt{2} \frac{k^2 + k + |\mu|}{|k + \mu|^2} \leq \sqrt{2} \left(\sup_k \frac{k^2}{|k + \mu|^2} + \sup_k \frac{k}{|k + \mu|^2} + |\mu| \sup_k \frac{1}{|k + \mu|^2} \right).$$

Poniamo $\mu = \rho e^{i\theta}$ e osserviamo che sul settore $\Omega_\varepsilon \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ si ha

$$0 \leq |\theta| \leq \pi - \varepsilon \quad \text{e} \quad \rho \geq \varepsilon \sin \varepsilon.$$

Si trova

$$\sup_k \frac{k^2}{|k + \mu|^2} = \sup_k \frac{k^2}{k^2 + 2k\rho \cos \theta + \rho^2} \begin{cases} = 1 & \text{se } \cos \theta \geq 0 \\ = \frac{1}{1 - \cos^2 \theta} & \text{se } \cos \theta < 0, \end{cases}$$

cosicchè

$$\sup_k \frac{k^2}{|k + \mu|^2} \leq \frac{1}{1 - \cos^2 \varepsilon} \quad \forall \mu \in \Omega_\varepsilon \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Inoltre

$$\sup_k \frac{k}{|k + \mu|^2} = \frac{1}{2\rho(1 + \cos \theta)} \leq \frac{1}{2\varepsilon \sin \varepsilon (1 - \cos \varepsilon)} \quad \forall \mu \in \Omega_\varepsilon \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Infine

$$\sup_k \frac{|\mu|}{|k + \mu|^2} \begin{cases} = \frac{1}{\rho} & \text{se } \cos \theta \geq 0 \\ = \frac{1}{\rho(1 - \cos^2 \theta)} & \text{se } \cos \theta < 0, \end{cases}$$

cosicchè

$$\sup_k \frac{|\mu|}{|k + \mu|^2} \leq \frac{1}{\varepsilon \sin \varepsilon (1 - \cos^2 \varepsilon)} \quad \forall \mu \in \Omega_\varepsilon \left(0, \frac{\pi}{2}\right);$$

ne segue

$$\|R(\mu, A)\| \leq C_\varepsilon \quad \forall \mu \in \Omega_\varepsilon \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

essendo

$$C_\varepsilon = \sqrt{2} \left(\frac{1}{1 - \cos^2 \varepsilon} + \frac{1}{2\varepsilon \cos \varepsilon (1 - \cos \varepsilon)} + \frac{1}{\varepsilon \sin \varepsilon (1 - \cos^2 \varepsilon)} \right).$$

Dunque \mathfrak{G} è un SGDEA.

Vogliamo ora determinare $G(t) = \overline{\mathfrak{G}(\delta_t)}$; poniamo

$$G(t) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} G_k(t)$$

$$G_k(t) = e^{-kt} \begin{pmatrix} 1 & k^2 t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad k = 0, 1, \dots;$$

evidentemente $G(t)$ coincide con $\overline{\mathfrak{G}(\delta_t)}$ su Y ; per provare che $G(t) = \overline{\mathfrak{G}(\delta_t)}$ basta mostrare allora che $G(t)$ è continuo per ogni $t \in \mathbb{R}_+$. Si ha infatti:

$$|G_k(t)|^2 = e^{-2kt} (2 + k^4 t^2) \leq \sup_k (2e^{-2kt} + k^4 t^2 e^{-2kt}) = \left(2 + \left(\frac{2}{e}\right)^4 \frac{1}{t^2}\right)$$

da cui

$$\|G(t)\| \leq \left[2 + \left(\frac{2}{e}\right)^4 \frac{1}{t^2}\right]^{1/2};$$

in modo analogo si prova

$$\|G(t)\| \geq \left(\frac{2}{e}\right)^2 \frac{1}{t}$$

cosicchè $G(t)$ non è di classe c_0 .

Osserviamo infine che se la 3-1 si modifica al modo seguente

$$\mathfrak{G}_k(\varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(t) e^{-(k\sin\alpha + ik\cos\alpha)t} \begin{pmatrix} 1 & k^\beta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dt, \quad 0 \leq \alpha < \pi \quad \beta \geq 0 \quad k = 0, 1, \dots$$

e se si pone

$$\mathfrak{G}(\varphi) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathfrak{G}_k(\varphi)$$

si trovano, ragionando in modo analogo, i seguenti risultati: qualunque sia α , se $\beta > 2$, \mathfrak{G} è SGD, ma non è esponenziale nè regolare; se $1 < \beta \leq 2$, \mathfrak{G} è un SGDE e $\|R(\mu, A)\| = o\left(\frac{1}{(\operatorname{Re} \mu)^{2-\beta}}\right)$; se $\beta \leq 1$, $\mathfrak{G}(t)$ è di classe c_0 .

Inoltre se $0 < \alpha < \pi$ e $\beta \leq 2$ \mathfrak{G} è un SGDEA su $S\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, mentre se $\alpha = 0$ lo spettro di A non è contenuto in alcun settore essendo costituito dai numeri $0, -i, \dots -ki, \dots$, quindi \mathfrak{G} non è prolungabile analiticamente; da notare che in questo caso $\overline{\mathfrak{G}(\delta_t)}$ non è continuo se $\beta > 1$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] G. DA PRATO - U. MOSCO, « *Semigrupp distribuzioni analitici* », *Annali Scuola Normale Superiore di Pisa*, XIX (1965), 367-396.
- [2] E. HILLE - R. S. PHILLIPS, « *Functional Analysis and semi-groups* », *Colloq. Publ. Amer. Math. Soc.*, **31** (1957).
- [3] J. L. LIONS, « *Les semi-groupes distributions* », *Portugaliae Math.* **19** (1960), 141-164.
- [4] L. SCHWARTZ, « *Théorie des distributions* », Tome I, Hermann Paris (1957).