

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

IACOPO BARSOTTI

**Metodi analitici per varietà abeliane in caratteristica
positiva. Capitoli 3, 4**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 19,
n° 3 (1965), p. 277-330*

[<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_3_277_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_3_277_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

METODI ANALITICI PER VARIETÀ ABELIANE IN CARATTERISTICA POSITIVA. CAPITOLI 3, 4.

IACOPO BARSOTTI ⁽¹⁾

I primi due capitoli sono pubblicati in questi stessi Annali, vol. 18, 1964, pp. 1-25; la numerazione prosegue quella dei primi due capitoli. Nel capitolo 3 si fa largo uso di MC, anche se in alcuni punti un riesame delle questioni ab ovo avrebbe potuto condurre ai risultati cercati ed a quelli di MC in maniera più elegante, ma più lunga.

CAPITOLO 3.

Gli ipercampi.

16. Sia k un corpo algebricamente chiuso di caratteristica p (vedasi n° 1 per le convenzioni), e sia $K = \text{vect } k$, $K' = QK =$ corpo quoziente di K . Un K -modulo canonico è un K -modulo (sinistro, unitario) M finito, libero, e dotato di un π semiendomorfismo π , e un π^{-1} semiendomorfismo t , tali che $\pi t = p = p\iota_M$; qui, ι_M , od anche ι , indica, come sempre nel seguito, l'applicazione identica, in questo caso di M . In un tale M , i $p^n M$, presi come sistema di intorno dello 0, definiscono una topologia K -lineare rispetto alla quale M è completo, in quanto la loro intersezione si riduce all'elemento 0. Si noti che in $M^* = K'M$ è $p^{-1}\pi = t^{-1}$, onde $t(p^{-1}\pi) = \iota$, e $t\pi = p\iota$. Il numero di generatori liberi di M si dirà il suo *ordine*. Le definizioni di T -modulo canonico e II -modulo canonico sono come in MC (p. 317; usiamo solo il caso $\omega = p$); qui però tratteremo solo quelli equidimensionali, e quindi ometteremo in tutti i casi questo aggettivo. Sia $\varkappa$ un isomorfismo di K su K ; un $\varkappa$ *semiomomorfismo* del K -modulo canonico M su un K -modulo canonico è un $\varkappa$ semiomomorfismo di K -moduli, necessariamente continuo, che commuti con π e t .

Pervenuto alla Redazione il 9 ottobre 1964.

(1) Ricerca svolta parzialmente sotto gli auspici dell'Office of Aerospace Research, grant AFEOAR 6329.

3.1 TEOREMA. *Sia M un K -modulo canonico, e si definisca:*

$$M_t = \bigcap_{n=1}^{\infty} \pi^n M; \quad M_{\pi} = \bigcap_{n=1}^{\infty} t^n M;$$

$$M_r = \text{insieme degli } x \in M \text{ tali che } \lim_{n \rightarrow \infty} t^n x = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n x = 0.$$

Allora M_t , M_{π} , M_r sono rispettivamente un T -modulo canonico logaritmico, un Π -modulo canonico logaritmico, e un T -modulo (e Π -modulo) canonico radicale, e si ha $M = M_t \oplus M_{\pi} \oplus M_r$. Questa è l'unica decomposizione di M come somma diretta di un T -modulo canonico logaritmico, un Π -modulo canonico logaritmico, e un T -modulo canonico radicale.

DIM. M_t è certamente libero e finito, perchè K è a ideali principali; inoltre $\pi M_t = M_t$, $tM_t \subseteq M_t$, onde M_t è K -modulo canonico. Esso è anche T -modulo, ossia ogni successione $i \rightarrow x_i$ di suoi elementi, con $x_i \in t^i M_t$, è una zero successione, in quanto $t^n M_t = p^n M_t \subseteq p^n M$. Così M_t è T -modulo, certamente finito, e chiaramente soddisfa la condizione $tx = 0 \Rightarrow x = 0$, in quanto da $tx = 0$ segue $px = 0$. Quindi M_t è T -modulo canonico, ed è logaritmico perchè $\pi M_t = M_t$ (questa è la definizione di logaritmico; cfr. p. 325 di MC). Analogamente si opera su M_{π} .

Si consideri ora M_r ; intanto $tM_r \subseteq M_r$ e $\pi M_r \subseteq M_r$; poi, se $i \rightarrow x_i$ è una successione di elementi di M_r tale che $x_i \in t^i M_r$, essa è una zero successione, in quanto $t^i M_r \subseteq p^m M$, per un dato m , quando i è elevato. Perciò M_r è un T -modulo finito, e di nuovo soddisfa la condizione $tx = 0 \Rightarrow x = 0$, ossia è T -modulo canonico; analogamente esso è Π -modulo canonico.

Un elemento x di M_t , ma non di tM_t , è tale che $\pi x \notin tM_t$, chè altrimenti πx sarebbe in pM_t , ed x in tM_t . Se allora $x \in M_t \cap M_{\pi}$, ma per esempio $x \notin t^n M_t$, si ha $\pi^i x \notin t^n M_t$ per ogni $i > 0$; d'altra parte, da $x \in M_{\pi}$ segue $\lim_{i \rightarrow \infty} \pi^i x = 0$, che è una contraddizione. Si conclude che $M_t \cap M_{\pi} = 0$, ossia che la somma $M_t + M_{\pi}$ è diretta. Sia poi $x \in M_t$, $y \in M_{\pi}$, ed $x + y \in M_r$; allora $\lim_{i \rightarrow \infty} t^i (x + y) = 0$; poichè anche $\lim_{i \rightarrow \infty} t^i x = 0$, se ne deduce $\lim_{i \rightarrow \infty} t^i y = 0$; di qui, per l'argomento precedente, segue $y = 0$; analogamente $x = 0$. Quindi anche la somma $M_t + M_{\pi} + M_r$ è diretta; resta da controllare che essa coincida con M . Ciò verrà fatto per induzione sull'ordine di M , in quanto è certamente vero se tale ordine è 1.

Sia allora n l'ordine di M ; se $M_t = M_{\pi} = 0$, per la definizione di questi due moduli si ha necessariamente $M = M_r$, e non vi è nulla da dimostrare. Suppongasì quindi che, per esempio, $M_t \neq 0$, e si ponga $N = M_t M_t$. Dico

intanto che N è K -modulo canonico, necessariamente di ordine $< n$; per dimostrarlo, basta dimostrare che è libero (il suo t ed il suo π sono definiti in modo ovvio). Ora, se $x \in M$ e $px \in M_t$, ossia $\pi tx \in M_t$, sarà intanto anche $tx \in M_t$, onde $\pi^{-m}tx$ esisterà in M_t per ogni m ; allora gli elementi $\pi^{-m}x$ di $M^* = K'M$ apparterranno tutti a $t^{-1}M_t \subseteq M_t^*$; essendo questo un K -modulo finito, tali elementi saranno linearmente dipendenti su K : $\pi^{-m}x = c_1\pi^{-m+1}x + \dots + c_r\pi^{-m+r}x$. L'applicazione di π^m ad ambo i membri dà $x = \pi y$, per un $y \in M$, ovviamente tale che $ty = \pi^{-1}tx \in M_t$; lo stesso ragionamento può essere applicato ad y , ecc.; si ottiene così che $\pi^{-m}x \in M$ per ogni m , onde $x \in M_t$, come voluto.

Stabilito che N è un K -modulo canonico, dimostriamo che non esiste nessun $y \in N$, non nullo, tale che $\pi y = y$. Se tale y esiste, ed è per esempio immagine di $x \in M$, si deve avere $x \notin M$, ma $\pi x - x \in M_t$, onde $x = \pi x_1$ per qualche $x_1 \in M$. Ma allora $\pi x_1 - x_1 \in M_t$, $x_1 = \pi x_2$, ecc., ossia $x \in M_t$, contro l'ipotesi. L'impossibilità per N di contenere un tale y dimostra, per il 2.11 di MC, che $N_t = 0$; ed allora, per la ricorrenza, sarà $N = N_r \oplus N_\pi$. Ciò comporta che se $x \in M$, per ogni intero positivo m esiste un i_m tale che $\pi^i x \in p^m M + M_t$ per $i > i_m$, ossia $\pi^i x - \pi^i y_m \in p^m M$ per un opportuno $y_m \in M_t$ e per $i > i_m$. Per i elevato si ha $\pi^i x - \pi^i y_{m+1} - (\pi^i x - \pi^i y_m) \in p^m M$, ossia $\pi^i (y_{m+1} - y_m) \in p^m M$, $y_{m+1} - y_m \in p^m M$ (dato che $y_{m+1} - y_m \in M_t$). Ciò significa che $y = \lim_{m \rightarrow \infty} y_m$ esiste in M_t , onde $\pi^i (x - y) \in p^m M$ per i elevato, od anche $\lim_{i \rightarrow \infty} \pi^i (x - y) = 0$.

Sia M' l'insieme degli $z \in M$ per cui $\lim_{i \rightarrow \infty} \pi^i z = 0$; M' è K -modulo canonico, e contiene $M_r \oplus M_\pi$; M' ha ordine $< n$, perchè ha intersezione 0 con M_t ; quindi, per la ricorrenza, $M' = M'_r \oplus M'_\pi = M_r \oplus M_\pi$. Si è così dimostrato che $x \in M_t + M' = M_t \oplus M_r \oplus M_\pi$, come voluto. L'unicità di M_t , M_r , M_π è ora ovvia, C. V. D..

17. Nella dimostrazione del 3.1 è contenuta anche la dimostrazione del

3.2 COROLLARIO. Notazioni come nel 3.1; sia $x \in M$; allora:

$x \in M_t \oplus M_r$ se e solo se $\lim_{n \rightarrow \infty} t^n x = 0$;

$x \in M_r \oplus M_\pi$ se e solo se $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi^n x = 0$.

Saranno usate le seguenti locuzioni:

M_t = componente separabile di M ;

M_π = componente logaritmica di M ;

M_r = componente radicale di M ;

$M_r + M_\pi$ = componente inseparabile di M .

Dai 2.11 e 3.1 di MC si ha poi che:

M_t è un T -modulo canonico logaritmico, che avrà, come tale, una certa dimensione c_t , uguale al suo ordine come K -modulo canonico;

M_π è un Π -modulo canonico logaritmico, che avrà, come tale, una certa dimensione d_π , uguale al suo ordine come K -modulo canonico;

M_r è un Π -modulo canonico radicale equidimensionale, che avrà, come tale, una certa dimensione d_r e una certa codimensione c_r , tali che il suo ordine come K -modulo canonico sia $d_r + c_r$.

Useremo allora (ma non troppo) le seguenti locuzioni:

$d_r + d_\pi =$ *dimensione* di M ;

$c_t + c_r =$ *codimensione* di M ;

$d_\pi =$ *dimensione logaritmica* di M ;

$c_t =$ *codimensione separabile* di M ;

$d_r =$ *dimensione radicale* di M ;

$c_r =$ *codimensione inseparabile, o radicale, di* M ;

$c_r + d_r =$ *ordine radicale* di M ;

si intende, quando M si consideri come K -modulo canonico; la nomenclatura di MC per i Π -moduli e i T -moduli canonici resta invariata.

Sia σ un semiomomorfismo del K -modulo canonico M sul K -modulo canonico N ; daremo le seguenti definizioni (che non coincidono con quelle di MC, in quanto qui si tratta di K -moduli):

nullità di σ è la differenza $\text{ord } M - \text{ord } \sigma M$;

conullità di σ è la differenza $\text{ord } N - \text{ord } \sigma M$.

Naturalmente, σM è un K -modulo canonico, e tale è il nucleo di σ ; la nullità di σ è anche l'ordine del suo nucleo. Pongasi poi $Q = N \cap K' \sigma M$; Q è l'insieme degli $x \in N$ tali che $p^r x \in \sigma M$ per qualche intero non negativo r . Se l è la lunghezza di una catena massimale di K -moduli canonici fra Q e σM , p^l è il *grado* di σ ; così, $\text{grado } \sigma = 1$ se e solo se $Q = \sigma M$. Con evidenti significati dei simboli, σ può essere decomposto in $\sigma_t, \sigma_r, \sigma_\pi$, ed il grado di σ è il prodotto dei gradi di questi tre; in particolare, si porrà:

separabilità di $\sigma =$ grado di σ_t ;

coseparabilità di $\sigma =$ grado di σ_π ;

inseparabilità di $\sigma =$ grado di $\sigma_r \cap \sigma_\pi$.

Dal 2.7 di MC, e previa decomposizione di M in $M_t \oplus M_r \oplus M_\pi$, si ha che la lunghezza l è anche la lunghezza di una catena massimale di K -moduli (non necessariamente canonici) fra Q e σM . Per la teoria dei divisori elementari, si può trovare una base $\{x_1, \dots, x_n\}$ di Q , ed una $y_1, \dots, y_n$ di σM , tali che, indicate con x, y le matrici ad una colonna delle x_i e delle y_i , si abbia $y = Cx$, ove C è matrice diagonale della forma

$$\begin{pmatrix} p^{s_1} & & & \\ & p^{s_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & p^{s_n} \end{pmatrix},$$

con $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n$; allora $l = s_1 + \dots + s_n$, e grado $\sigma = \det C$.

Una *isogenia* (di K moduli canonici) è un omomorfismo la cui nullità e conullità siano 0; M ed N diconsi *isogeni* se vi è una isogenia dell'uno sull'altro; i risultati di MC mostrano che tale relazione è riflessiva, simmetrica e transitiva, e che M, N sono isogeni se e solo se ciascuno è isomorfo ad un sotto- K -modulo canonico dell'altro. Poichè per i K -moduli liberi vale la teoria dei divisori elementari, si ha:

3.3 TEOREMA. *Sia M un K -modulo canonico, N un suo sotto- K -modulo canonico; allora N è nucleo di un omomorfismo fra K -moduli canonici se e solo se $N \cap pM = pN$.*

18. La definizione di $N_{r,s}$, per r, s interi primi fra loro, è data a p. 336 di MC; esso è il K -modulo canonico un cui insieme libero di generatori è dato da $\{x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s\}$, colle regole seguenti (cfr. la matrice a p. 323 di MC, e l'asserzione 2 del 3.1 di MC):

$$tx_i = x_{i-1} \ (i > 1); tx_1 = py_s; ty_i = py_{i-1} \ (i > 1); ty_1 = x_r;$$

e conseguentemente:

$$\pi x_i = px_{i+1} \ (i < r); \pi x_r = py_1; \pi y_i = y_{i+1} \ (i < s); \pi y_s = x_1.$$

Se si indica con X la matrice ad una colonna trasposta della $(x_1 \dots x_r, y_1 \dots y_s)$, si può scrivere brevemente

$$tX = C_t X, \quad \pi X = C_\pi X,$$

ove :

$$C_t = \begin{bmatrix} 0 & & & & p \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & 0 & \\ & & & 1 & 0 \\ & & & & p & 0 \\ & & & & p & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & p & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (r \text{ elementi uguali ad } 1 \\ \text{ed } s \text{ elementi uguali a } p) \end{array}$$

$$C_\pi = \begin{bmatrix} 0 & p & & & \\ & 0 & p & & \\ & & \cdot & \cdot & \\ & & & 0 & p \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & \cdot \\ & & & & & 1 \\ 1 & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} (r \text{ elementi uguali a } p \\ \text{ed } s \text{ elementi uguali ad } 1). \end{array}$$

Per $r = s = 1$ queste divengono $C_t = C_\pi = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Definiamo poi $N_{m,0}$ per mezzo delle $C_t = 1$, $C_\pi = p$ (matrici scalari di ordine m); e definiamo $N_{0,n}$ per mezzo delle $C_t = p$, $C_\pi = 1$ (matrici scalari di ordine n).

Naturalmente, la $t\pi = \pi t = p$ dà in tutti i casi :

$$3.4 \quad C_\pi C_t^\pi = C_t^\pi C_\pi = p.$$

Dal 2.11 di MC si ricava :

3.5 TEOREMA. *Se M è K -modulo canonico di ordine n , tale che $M = M_t$, allora $M \cong N_{0,n} \cong N_{0,1} \oplus \dots \oplus N_{0,1}$; inoltre $N_{0,1} \cong K$ come K -modulo canonico.*

Se M è K -modulo canonico di ordine m , tale che $M = M_\pi$, allora $M \cong N_{m,0} \cong N_{1,0} \oplus \dots \oplus N_{1,0}$.

$N_{r,s}$ (r, s non nulli) è indecomponibile radicale, ed ha ordine $r + s$.

Se M è K -modulo canonico tale che $M = M_r$, allora M è isogeno ad una somma diretta di K -moduli canonici N_{r_i, s_i} , con r_i, s_i primi fra loro per ogni i , ed univocamente determinati.

Siano M, N K -moduli canonici; una dualità fra M ed N è un'applicazione K -bilineare $(x, y) \rightarrow x \circ y$ di $M \times N$ su K , con le seguenti proprietà:

1. $\pi(x \circ ty) = \pi x \circ y$, e $\pi(tx \circ y) = x \circ \pi y$;

2. se $x \circ y = 0$ per ogni y (risp. per ogni x), allora $x = 0$ (risp. $y = 0$).

Una dualità è necessariamente un'applicazione continua di $M \times N$ su K , quest'ultimo dotato della topologia di schiera valutante completa. Diremo poi che M è duale di N , secondo la dualità data, se per ogni applicazione K -lineare σ di N su K (necessariamente continua), esiste un $x \in K$, certo unico, tale che $\sigma y = x \circ y$ per ogni $y \in N$. Dai 3.2, 3.3 di MC segue:

3.6 TEOREMA. Sia N un K -modulo canonico, e sia M il K -modulo delle applicazioni K -lineari di N su K ; se $x \in M$, l'applicazione sia denotata con $y \rightarrow x \circ y$. Allora M , con le ovvie definizioni di t e π , è un K -modulo canonico duale di N , ed è l'unico a meno di isomorfismi. Inoltre N è il duale di M secondo la dualità $(x, y) \rightarrow x \circ y$ ($y \in N, x \in M$). In particolare, $N_{1,0}, N_{0,1}, N_{r,s}$ sono duali di, rispettivamente, $N_{0,1}, N_{1,0}, N_{s,r}$.

Per comodità, indicheremo talvolta con $N_{0,0}$ il K -modulo canonico ridotto al solo elemento 0.

Un K' -modulo canonico è un K' -modulo (spazio vettoriale) finito $\mathcal{M}$, dotato di endomorfismi π e t tali che $\pi t = p_t$ (ed allora $t\pi = p_t$), e tale che esista un suo sotto- K -modulo M , stabile per π e t (ossia $\pi M \subseteq M, tM \subseteq M$), contenente una base di $\mathcal{M}$. In tale caso M sarà un K -modulo canonico, e si avrà $\mathcal{M} = K' M = K' \otimes_K M$; questa può essere presa come definizione. La topologia di M dà una topologia K -lineare di $\mathcal{M}$, indipendente dalla scelta di M , rispetto alla quale $\mathcal{M}$ è completo; un sistema di intorni dello 0 è dato dai $p^n M$. I semiomorfismi dei K' -moduli canonici sono definiti in modo analogo a quelli dei K -moduli canonici; i semiomorfismi dei K -moduli canonici sui K' -moduli canonici sono le applicazioni K -semilineari che commutano con π e t ; essi sono necessariamente continui; la dimensione (come spazio vettoriale) di un K' -modulo canonico sarà chiamata il suo ordine; le altre definizioni (codimensione separabile, dimensione logaritmica, ecc.) sono trasferite direttamente dalle analoghe dei K -moduli canonici. Si ha ovviamente:

3.7 TEOREMA. Siano M, N K -moduli canonici, e siano $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ K' -moduli

canonici; si abbiano isomorfismi di M su $\mathcal{M}$ ed N su $\mathcal{N}$, di conullità 0 (ossia tali che le immagini di M, N contengano basi di $\mathcal{M}, \mathcal{N}$). Allora un omomorfismo σ di M su N è una isogenia se e solo se è un isomorfismo su tutto $\mathcal{N}$ il σ' che rende commutativo il seguente diagramma:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\sigma} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\sigma'} & \mathcal{N} \end{array}$$

Si ha poi $\mathcal{M} = \mathcal{M}_t \oplus \mathcal{M}_r \oplus \mathcal{M}_\pi$ (con evidente significato dei simboli); inoltre $\mathcal{M}_t \cong \mathcal{N}_{0,n}$, e $\mathcal{M}_\pi \cong \mathcal{N}_{m,0}$, per n, m opportuni. Gli $\mathcal{M}_t, \mathcal{M}_r, \mathcal{M}_\pi$ sono unicamente determinati; inoltre, $\mathcal{M}_r$ è isomorfo alla somma diretta di K' -moduli canonici del tipo $\mathcal{N}_{r_i, s_i}$, con r_i, s_i primi fra loro e unicamente determinati. Infine, gli $\mathcal{N}_{r,s}, \mathcal{N}_{0,1}, \mathcal{N}_{1,0}$ sono irriducibili, ossia privi di sotto- K' -moduli canonici propri.

Le definizioni di dualità e duale, per i K' -moduli canonici, sono analoghe a quelle dei K -moduli canonici. Ovviamente, e da 3.6:

3.8 TEOREMA. Per i K' -moduli canonici vale l'analogo di 3.6; siano poi $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ K' -moduli canonici duali l'uno dell'altro secondo la dualità $\circ$; sia M un sotto- K -modulo canonico di $\mathcal{M}$, contenente una base di $\mathcal{M}$, e sia N l'insieme degli $y \in \mathcal{N}$ tali che $x \circ y \in K$ per ogni $x \in M$. Allora N è un sotto- K -modulo canonico di $\mathcal{N}$ e contiene una base di $\mathcal{N}$; $\circ$ è una dualità fra M ed N che rende questi duali l'uno dell'altro. La $\circ$ è un'applicazione continua di $\mathcal{M} \times \mathcal{N}$ su K' , quest'ultimo dotato della topologia di corpo valutato completo.

19. Sia k un corpo di caratteristica p , e siano A, B k -moduli, certo liberi, completi rispetto a topologie k -lineari. Si consideri, nel k -modulo $A \otimes B = A \otimes_k B$, l'insieme dei sottomoduli del tipo $U \otimes B + A \otimes V$, ove U, V percorrono sistemi di intorno dello 0, del tipo descritto, in A, B rispettivamente. Questi insiemi hanno intersezione 0 (vedasi l'appendice a questo capitolo), cosicchè essi formano un sistema di intorno dello 0 per una topologia k -lineare di $A \otimes B$; il completamento di $A \otimes B$ in tale topologia sarà indicato con $A \overline{\otimes}_k B$ o $A \overline{\otimes} B$, e chiamato il *prodotto tensoriale completo* di A per B (su k); la topologia di $A \overline{\otimes} B$ è ora data dagli $U \overline{\otimes} B + A \overline{\otimes} V$.

Suppongasì che A, B siano anche k algebre (commutative, unitarie, dotate di identità); si indichi con μ_A l'applicazione k -bilineare $(a, a') \rightarrow aa'$ di $A \times A$ su A , e analogamente per B (nel seguito si scriverà μ in luogo di μ_A quando

l' A possa essere sottinteso); se A, B sono algebre topologiche, ossia se μ_A e μ_B sono applicazioni continue, anche $A \otimes B$ è k algebra topologica, se si identifica k con $k(1 \otimes 1)$, mediante il $\mu_{A \otimes B} = \mu_A \otimes \mu_B$; questo μ può essere esteso in modo unico, bilinearmente e continuamente, ad $A \overline{\otimes} B$, e rende questa un'algebra topologica. Se le topologie di A, B erano A -lineare e B -lineare rispettivamente, quelle di $A \otimes B$ ed $A \overline{\otimes} B$ risultano $A \otimes B$ -lineare ed $A \overline{\otimes} B$ lineare rispettivamente. Se A, B erano i completamenti di k -moduli (o k -algebre) A', B' , allora $A \overline{\otimes} B$ è il completamento di $A' \otimes B'$. Tutte le precedenti asserzioni sono di facile dimostrazione, e vertono sul fatto che i k -moduli sono liberi, e che le applicazioni $A' \otimes B' \rightarrow A \otimes B$ sono isomorfismi.

Sia A come descritto all'inizio (ossia non necessariamente un'algebra). Diremo *coprodotto* in A un omomorfismo continuo $\mathbf{P}$, o $\mathbf{P}_A$, di k moduli, di A su $A \overline{\otimes} A$, che soddisfi la seguente condizione di *coassociatività*: $(\iota \otimes \mathbf{P})\mathbf{P} = (\mathbf{P} \otimes \iota)\mathbf{P}$; più chiaramente, deve essere commutativo il diagramma:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\quad \iota \quad} & A \\
 \downarrow \mathbf{P} & & \downarrow \mathbf{P} \\
 A \overline{\otimes} A & & A \overline{\otimes} A \\
 \downarrow \iota \quad \downarrow \mathbf{P} & & \downarrow \mathbf{P} \quad \downarrow \iota \\
 (A \overline{\otimes} A \overline{\otimes} A) & \xrightarrow{\quad \iota \quad} & (A \overline{\otimes} A \overline{\otimes} A)
 \end{array}$$

Il coprodotto $\mathbf{P}$ è *commutativo* se è simmetrico rispetto allo scambio dei fattori in $A \overline{\otimes} A$. Una *coidentità* per $\mathbf{P}$ è un'applicazione k -lineare continua $\varepsilon = \varepsilon_A$ di A su k (k dotato della topologia discreta) tale che $(\varepsilon \otimes \iota)\mathbf{P} = (\iota \otimes \varepsilon)\mathbf{P} = \iota$; se un tale ε esiste, $\mathbf{P}$ è un isomorfismo di k moduli. Se A è anche k -algebra topologica, si identificherà k con $k1_A \subseteq A$, ed ε verrà considerato come un'applicazione k -lineare continua di A su A , tale che $\varepsilon^2 = \varepsilon$, soddisfacente la

$$3.9 \quad \mu_A (\iota \otimes \varepsilon) \mathbf{P} = \mu_A (\varepsilon \otimes \iota) \mathbf{P} = \iota.$$

(Tali ε vengono chiamati « aumentazioni » dai raffinati). Sempre se A è k -algebra topologica, diremo che un endomorfismo continuo ϱ di A , come k -algebra, è un'*inversione* rispetto a $\mathbf{P}$ ed ε se soddisfa la:

$$3.10 \quad \mu_A (\iota \otimes \varrho) \mathbf{P} = \mu_A (\varrho \otimes \iota) \mathbf{P} = \varepsilon.$$

Sia R una k -algebra topologica e completa rispetto ad una topologia k -lineare numerabile; sia $\mathbf{P}$ un coprodotto in R , commutativo e dotato di una coidentità ε ; diremo che R è una *iperalgebra* su k se tanto $\mathbf{P}$ quanto

ε sono omomorfismi di k -algebre, e se inoltre $\mathbf{P}1 = 1 \overline{\times} 1$; l'esistenza di ε comporta, come si è visto, che $\mathbf{P}$ è un isomorfismo. Si noti che il richiedere che $\mathbf{P}$ sia omomorfismo di algebre è come richiedere che esso commuti con $\mu = \mu_R$, ossia che il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{array}{ccc}
 (R \overline{\times} R) & \xrightarrow{\iota} & (R \overline{\times} R) \\
 \mu \downarrow & & \swarrow \quad \searrow \mathbf{P} \\
 R & & R \overline{\times} R \overline{\times} R \overline{\times} R \\
 \mathbf{P} \downarrow & & \swarrow \quad \searrow \mu \\
 (R \overline{\times} R) & \xrightarrow{\iota} & (R \overline{\times} R)
 \end{array}$$

Analogamente, il richiedere che ε sia omomorfismo di algebre significa richiedere che ε commuti con $\mu: \mu(\varepsilon \otimes \varepsilon) = \varepsilon\mu$. È poi facile vedere che ε , oltre a commutare con μ , commuta anche con $\mathbf{P}$, ossia $(\varepsilon \otimes \varepsilon)\mathbf{P} = \mathbf{P}\varepsilon$; lo stesso dicasi per l'inversione ϱ , quando esiste. Il nucleo di ε in R sarà costantemente indicato con R^+ , cosicchè $R = k \oplus R^+$. Il 3.9 comporta subito il

3.11 LEMMA. *Se $x \in R^+$, si ha $\mathbf{P}x = 1 \overline{\times} x + x \overline{\times} 1 +$ (elemento di $R^+ \overline{\times} R^+$).*

Ci interesseranno in particolare, in questo capitolo, le iperalgebre *finite*, ossia a base finita su k , e necessariamente a topologia discreta; quelle *discrete*, ossia a topologia discreta e base numerabile; e quelle *linearmente compatte*; queste ultime sono le somme dirette complete, come k -moduli, di una infinità numerabile di k -moduli discreti isomorfi a k ; esiste cioè una *pseudobase* numerabile $\{x_1, x_2, \dots\}$ di R tale che ogni elemento di R possa porsi, in un sol modo, sotto la forma $\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$, con $c_i \in k$; e tale che ogni serie di questo tipo sia elemento di R . Una R linearmente compatta può anche essere considerata come il limite inverso, con la sua topologia naturale di limite inverso, dei k -moduli finiti e discreti R_n di base $\{x_1, \dots, x_n\}$, con gli omomorfismi $\sigma_{n,m}: R_n \rightarrow R_m$ ($n > m$) dati da $\sigma_{n,m} x_i = x_i$ se $i \leq m$; $= 0$ se $i > m$.

20. Sia $\varkappa$ un isomorfismo di k su k ; un $\varkappa$ -*semiomorfismo* σ dell'iperalgebra R sull'iperalgebra S è un $\varkappa$ -semiomorfismo continuo di algebre che applichi 1 su 1 e che commuti con $\mathbf{P}$ ed ε : $\mathbf{P}_S \sigma x = (\sigma \otimes \sigma) \mathbf{P}_R x$; $\varkappa \varepsilon_R x = \sigma \varepsilon_R x = \varepsilon_S \sigma x$, per $x \in R$. Ciò vale, in particolare, per gli omomorfi-

smi; l'applicazione $\pi: x \rightarrow \pi x = x^p$ è sempre un π -semiendomorfismo di un'iperalgebra.

Se σ, τ sono κ -semiomomorfismi di R su S , la loro *somma* è il $\sigma + \tau$ definito da:

$$3.12 \quad \sigma + \tau = \mu_S(\sigma \otimes \tau) \mathbf{P}_R;$$

quando ha senso, è vera la relazione distributiva:

$$\nu(\sigma + \tau) = \nu\sigma + \nu\tau; \quad (\sigma + \tau)\nu = \sigma\nu + \tau\nu.$$

L'omomorfismo ε_R di R su $k \subseteq S$ è lo zero della somma 3.12; infatti

$$\varepsilon_R + \tau = \mu_S(\tau \otimes \varepsilon)(\varepsilon \otimes \iota) \mathbf{P}_R = \tau \mu_S(\varepsilon \otimes \iota) \mathbf{P}_R = \tau \iota_R = \tau,$$

per 3.9. Invece il $-\sigma$ è dato da $\varrho_S \sigma = \sigma \varrho_R$ (se esiste ϱ_S o ϱ_R):

$$\sigma + \varrho_S \sigma = \mu_S(\iota \otimes \varrho_S)(\sigma \otimes \sigma) \mathbf{P}_R = \mu_S(\iota \otimes \varrho_S) \mathbf{P}_S \sigma = \varepsilon_S \sigma = 0$$

per 3.10, e

$$\sigma + \sigma \varrho_R = \mu_S(\sigma \otimes \sigma)(\iota \otimes \varrho_R) \mathbf{P}_R = \sigma \mu_R(\iota \otimes \varrho_R) \mathbf{P}_R = \sigma \varepsilon_R = 0.$$

Quindi gli omomorfismi di R su S formano un gruppo additivo. Se ne deduce anche:

3.13 TEOREMA. *Se un'iperalgebra ha un'inversione ϱ , ne ha una sola; inoltre $\varrho^2 = \iota$.*

DIM. Intanto, la $\iota = -(-\iota)$ si scrive $\iota = (\iota\varrho)\varrho$, donde $\varrho^2 = \iota$. Se ϱ' è un'altra inversione, la relazione $-\iota = -\iota$ si scrive $\iota\varrho = \iota\varrho'$; quindi $\varrho' = \varrho$, C. V. D..

È ben noto che la teoria della dualità fra k -moduli finiti, o discreti, o linearmente compatti (gli ultimi due casi non necessariamente ristretti al caso numerabile) è perfettamente simmetrica, nel senso seguente: se M è k -modulo finito (discreto, linearmente compatto), e se N è l'insieme delle applicazioni k -lineari continue di M su k , e se per $y \in N$ si indica con $x \rightarrow y \circ x$ la corrispondente applicazione di M , allora: se M è finito, N è finito; se M è linearmente compatto, la topologia discreta di N è l'unica topologia k -lineare che rende tutte le $y \rightarrow y \circ x$ continue; se M è discreto, la topologia linearmente compatta di N è la meno fina fra le k -lineari (contando la discreta come la più fina) che rende continue tutte le $y \rightarrow y \circ x$. Ed in tutti i casi M è legato ad N come N ad M ; inoltre, in questi casi, un diagramma commutativo può essere dualizzato, dando luogo ad un diagramma commutativo; la duale (o trasposta) di una successione esatta è esatta, ecc.. Infine,

ed è importante, dato che uno dei moduli è discreto in ogni caso, la $(y, x) \rightarrow y \circ x$ è un'applicazione continua di $N \times M$ su k . Nel Cap. 4 vedremo tipi di dualità più complicati. Si ha allora:

3.14 TEOREMA. *Sia R un'iperalgebra finita (risp. discreta, linearmente compatta); sia D il k -modulo duale di R ; si definiscano $\mathbf{P}_D$ e μ_D come duali di μ_R , $\mathbf{P}_R$, ossia: $\mu_D(d \overline{\times} \delta) \circ x = (d \overline{\times} \delta) \circ \mathbf{P}_R x$, $\mathbf{P}_D d \circ (x \overline{\times} y) = d \circ \mu_R(x \overline{\times} y)$, per $x, y \in R$ arbitrari; si definisca poi ε_D mediante la $\varepsilon_D d = d \circ 1$. Allora D è un'iperalgebra, detta duale di R ; ed R è duale di D . Se R ha l'inversione ϱ_R , D ha la ϱ_D duale di ϱ_R : $\varrho_D d \circ x = d \circ \varrho_R x$.*

DIM. Si controlla subito che $\mathbf{P}_D$ è un coprodotto commutativo e coassociativo, e μ_D un prodotto commutativo e associativo. Il diagramma del n° 19, che esprime la commutatività di μ_R con $\mathbf{P}_R$, dà subito, per dualità, quella di $\mathbf{P}_D$ con μ_D .

Mostriamo che D possiede identità, e precisamente l' 1_D tale che $1_D \circ x = \varepsilon_R x$; è infatti $1_D d \circ x = (1 \overline{\times} d) \circ \mathbf{P} x = d \circ \mu_R(\varepsilon \otimes \iota) \mathbf{P} x$ per 3.9; quindi $1_D d = d$, come richiesto.

Mostriamo che $\mathbf{P}_D 1 = 1 \overline{\times} 1$; e infatti, $\mathbf{P}_D 1 \circ (x \overline{\times} y) = 1 \circ xy = \varepsilon_R(xy) = (1 \circ x)(1 \circ y) = (1 \overline{\times} 1) \circ (x \overline{\times} y)$. Passiamo a verificare le proprietà della ε_D definita all'enunciato: intanto $\varepsilon_D 1_D = 1_D \circ 1_R = \varepsilon_R 1_R = 1$, onde ε_D è su tutto k , ed è automodulo. Poi, $\varepsilon_D(dd') = dd' \circ 1 = (d \overline{\times} d') \circ \mathbf{P} 1 = (d \overline{\times} d') \circ (1 \overline{\times} 1) = (\varepsilon_D d)(\varepsilon_D d')$, ed ε_D è omomorfismo di algebre. Infine, la proprietà 3.9 per ε_D si verifica così: $\mu_D(\iota \otimes \varepsilon) \mathbf{P} d \circ x = \mathbf{P} d \circ (x \overline{\times} 1) = d \circ x$, donde la 3.9. Per il ϱ_D , basta dualizzare il 3.10, C. V. D..

Benchè il 3.14 si riferisca solo ad iperalgebre che siano finite, o discrete, o linearmente compatte, esso ovviamente dà informazioni anche per quelle iperalgebre che siano prodotti tensoriali completi di finite, discrete, e linearmente compatte (in numero finito). Da notare che finita $\overline{\times}$ finita = finita, finita $\overline{\times}$ discreta = discreta, finita $\overline{\times}$ linearmente compatta = linearmente compatta, discreta $\overline{\times}$ discreta = discreta, linearmente compatta $\overline{\times}$ linearmente compatta = linearmente compatta, cosicchè l'unico caso nuovo è il discreta $\overline{\times}$ linearmente compatta. La struttura del prodotto tensoriale completo di due iperalgebre, $K = S \overline{\times} V$ è: $\mu_R = \mu_S \overline{\times} \mu_V$, $\mathbf{P}_R = \mathbf{P}_S \overline{\times} \mathbf{P}_V$, ecc..

21. Sia R un'iperalgebra che sia prodotto tensoriale completo di iperalgebre finite, discrete, linearmente compatte, e sia D la sua duale; definiamo l'applicazione k -bilineare $(d, x) \rightarrow dx$ di $D \times R$ su R per mezzo delle

$$3.15 \quad \delta \circ dx = \delta d \circ x \quad \text{per ogni } \delta \in D.$$

Naturalmente vi è anche un'applicazione analoga $(x, d) \rightarrow xd$ di $R \times D$ su D .

3.16 TEOREMA. *Nelle ipotesi precedenti, si ha: $d'(dx) = (d'd)x$; $1_D x = x$; $d \in D^+$ se e solo se $d 1_R = 0$; $d \circ x = \varepsilon_R(dx)$; $\mathbf{P}(dx) = (1 \overline{\times} d) \mathbf{P}x = (d \overline{\times} 1) \mathbf{P}x$.*

DIM. Per la prima relazione: $\delta \circ d'(dx) = \delta d' \circ dx = \delta d' d \circ x = \delta \circ (d'd)x$. La seconda è conseguenza immediata di 3.15. Per la terza: se $d 1_R = 0$, è $d \circ 1 = 1 \circ d 1_R = 0$, onde $d \in D^+$; se poi $d \in D^+$, si ha $\delta d \in D^+$ per ogni $\delta \in D$, onde $\delta d \circ 1 = 0$, $\delta \circ d 1_R = 0$. Per la quarta: $d \circ x = 1 d \circ x = 1 \circ dx = \varepsilon_R(dx)$. Per la quinta, occorre intanto osservare bene il significato del secondo o terzo membro: nel secondo, $1 \overline{\times} d$ è un elemento dell'iperalgebra $D \overline{\times} D$, che è duale di $R \overline{\times} R$; quindi $(1 \overline{\times} d) \mathbf{P}x$ esiste in base alla 3.15; ciò non significa che se $\mathbf{P}x = \sum_i x_i \overline{\times} y_i$ si debba avere $(1 \overline{\times} d) \mathbf{P}x = \sum_i x_i \overline{\times} dy_i$; per poter asserire questo occorrerebbe sapere che la $z \rightarrow (1 \overline{\times} d)z$ è continua, cosa che non sappiamo ancora. Passiamo alla dimostrazione dell'ultima relazione: $(\delta \overline{\times} \delta') \circ \mathbf{P}(dx) = \delta \delta' \circ dx = \delta \delta' d \circ x = (\delta \overline{\times} \delta' d) \circ \mathbf{P}x = (\delta \overline{\times} \delta')(1 \overline{\times} d) \circ \mathbf{P}x = (\delta \overline{\times} \delta') \circ (1 \overline{\times} d) \mathbf{P}x$, C. V. D..

L'ultima delle 3.16 si esprime col dire che d , come applicazione k -lineare di R in sè, è *invariante*. La continuità della $(d, x) \rightarrow dx$ non solo in x , ma in (d, x) , ha luogo in un importante caso particolare che ora descriviamo, e quindi anche in tutti i casi ottenuti da esso mediante prodotti tensoriali completi:

3.17 LEMMA. *Suppongasi che quella, fra le D, R , che è discreta sia limite diretto di iperalgebre finite, mediante isomorfismi di iperalgebre; e che quindi quella che è linearmente compatta sia limite inverso di iperalgebre finite mediante omomorfismi di iperalgebre. Allora l'applicazione $(d, x) \rightarrow dx$ di $D \times R$ su R è continua.*

DIM. Suppongasi dapprima che D sia linearmente compatta ed R discreta. L'applicazione è allora continua in x per ogni d , ed uniformemente rispetto a d , onde basta dimostrare che, per ogni x , essa è continua in d . Sia D limite inverso di $D_i \leftarrow D_j$ ($j > i$), cogli omomorfismi τ_{ji} di D_j su tutto D_i , e cogli omomorfismi τ_i di D su tutto D_i ; sia R limite diretto di $R_i \rightarrow R_j$ ($i < j$), colle immersioni di R_i in R_j ; e sia R_i duale di D_i . Sia x in un dato R_i ; dimostreremo che $dx = 0$ non appena $\tau_i d = 0$; e infatti, $\delta \circ dx = \delta d \circ x = (\delta \overline{\times} d) \circ \mathbf{P}x$; ora, $\mathbf{P}x \in R_i \otimes R_i$ per ipotesi, onde $(\delta \overline{\times} d) \circ \mathbf{P}x = 0$.

Suppongasi ora invece che D sia discreta ed R linearmente compatta; si definiscano analogamente le $D_i \rightarrow D_j$ ($i < j$) ed $R_i \leftarrow R_j$ ($i < j$), e gli omomorfismi τ_{ji} di R_j su tutto R_i , e τ_i di R su tutto R_i . In questo caso basta dimostrare che l'applicazione è continua in x , per ogni d . Sia $d \in D_i$, e si scelga x nel nucleo J di τ_i ; dico che anche $dx \in J$. Occorre quindi di-

mostrare che $\delta \circ dx = 0$ quando $\delta \in D_i$; ora, di nuovo si ha $\delta \circ dx = (\delta \overline{\times} d) \circ \mathbf{P}x$, e questa volta $\mathbf{P}x \in R \overline{\times} J + J \overline{\times} R$, onde ancora $\delta \circ dx = 0$,
C. V. D..

3.18 TEOREMA. *Si ha $d(xy) = \mu_R(\mathbf{P}d)(x \overline{\times} y)$; se poi σ è applicazione k -lineare continua di R su se stesso, che è invariante, ossia tale che $\mathbf{P}\sigma x = (\sigma \otimes \iota)Px = (\iota \otimes \sigma)Px$, esiste una $d \in D$ tale che $\sigma x = dx$ per ogni $x \in R$.*

DIM. Si ha $\delta \circ d(xy) = \delta d \circ xy = \mathbf{P}(\delta d) \circ (x \overline{\times} y) = (\mathbf{P}\delta)(\mathbf{P}d) \circ (x \overline{\times} y) = \mathbf{P}\delta \circ (\mathbf{P}d)(x \overline{\times} y) = \delta \circ \mu_R(\mathbf{P}d)(x \overline{\times} y)$; ciò dimostra la prima asserzione. Per la seconda, dato σ , si trovi la $d \in D$ tale che $d \circ x = \varepsilon_R \sigma x$ per ogni $x \in R$; allora $\delta \circ dx = \delta d \circ x = (\delta \overline{\times} d) \circ \mathbf{P}x = (\varepsilon \otimes \varepsilon)(\delta \overline{\times} d) \mathbf{P}x = (\varepsilon \delta \otimes \iota)(\iota \otimes \varepsilon d) \mathbf{P}x = (\varepsilon \delta \otimes \iota)(\iota \otimes \varepsilon \sigma) \mathbf{P}x = (\varepsilon \delta \otimes \varepsilon)(\iota \otimes \sigma) \mathbf{P}x = (\varepsilon \delta \otimes \varepsilon) \mathbf{P}\sigma x = (\delta \overline{\times} 1) \circ \mathbf{P}\sigma x = \delta \circ \sigma x$, onde $dx = \sigma x$, C. V. D..

L'utilità dell'applicazione $(d, x) \rightarrow dx$ sta nel seguente risultato, che è l'analogo degli sviluppi in serie di Taylor e di Mac Laurin:

3.19 TEOREMA. *Sia D un'iperalgebra discreta (o finita) con base $\{d_0, d_1, d_2, \dots\}$; sia R la duale di D , con la pseudobase (o base) duale $\{x_0, x_1, x_2, \dots\}$ (ossia $d_i \circ x_j = \delta_{ij}$). Per $y \in R$ si ha allora*

$$\mathbf{P}y = \sum_i d_i y \overline{\times} x_i, \quad y = \sum_i (\varepsilon_R d_i y) x_i.$$

DIM. Infatti $(d_r \overline{\times} d_s) \circ \sum_i d_i y \overline{\times} x_i = (\sum_i d_r \circ d_i y) \delta_{si} = d_r \circ d_s y = d_r d_s \circ y = (d_r \overline{\times} d_s) \circ \mathbf{P}y$, che è la prima relazione. La seconda è conseguenza della prima e di 3.9, C. V. D..

22.

3.20 LEMMA. *Sia R un'iperalgebra finita, o discreta, o linearmente compatta; sia D l'iperalgebra duale di R , e suppongasi che la $(d, y) \rightarrow dy$ sia continua in y per ogni $d \in D$. Sia S una sottoiperalgebra di R , e sia J l'ideale chiuso di R generato da S^+ . Per un $d \in D$, si ha allora $d \circ J = 0$ se e solo se l'applicazione $y \rightarrow dy$ è S -lineare.*

DIM. Sia $d \circ J = 0$; si ha, per $\delta \in D$: $\delta \circ d(xy) = d\delta \circ xy = d \circ \delta(xy) = d \circ \mu_R(\mathbf{P}\delta)(x \overline{\times} y)$ per 3.18. Se per esempio $\mathbf{P}\delta = \sum_i \alpha_i \overline{\times} \beta_i$, sarà $\delta \circ d(xy) = d \circ \sum_i (\alpha_i x)(\beta_i y)$; supposto $x \in S$, sarà $\alpha_i x \equiv \alpha_i \circ x \pmod{S^+}$, onde $(\alpha_i x)(\beta_i y) \equiv (\alpha_i \circ x)(\beta_i y) \pmod{J}$, e pertanto $\delta \circ d(xy) = d \circ \sum_i (\alpha_i \circ x)(\beta_i y) = \sum_i (\alpha_i \circ x)(\beta_i \circ dy) = \mathbf{P}\delta \circ (x \overline{\times} dy) = \delta \circ x dy$, donde appunto $d(xy) = x dy$.

Reciprocamente, se questa è verificata, per $x \in S^+$ ed $y \in R$ si ha $d \circ xy = 1 \circ d(xy) = 1 \circ x dy = 0$, in quanto $x dy \in J \subseteq R^+$; perciò $d \circ J = 0$,
C. V. D..

In un'iperalgebra R vi sono certe applicazioni per le sottoiperalgebre e per certi ideali. Anzitutto notiamo che un ideale chiuso J di R è nucleo di un omomorfismo di iperalgebre se e solo se

$$3.21 \quad \varepsilon J = 0 \text{ (ossia } J \subseteq R^+) \text{ e } PJ \subseteq R \overline{\times} J + J \overline{\times} R;$$

invece una sottoalgebra chiusa S di R è sottoiperalgebra se e solo se $1 \in S$ e $PS \subseteq S \overline{\times} S$. Sia S una sottoiperalgebra chiusa di R ; l'ideale chiuso J generato da S^+ soddisfa alle 3.21; la chiusura dell'unione delle sottoiperalgebre U di R tali che $U^+ \subseteq J$ è una iperalgebra chiusa S^* contenente S , e univocamente determinata da S ; S^* è la massima U con la proprietà descritta, ed S^{**} genera ancora J ; abbiamo così introdotto l'applicazione $S \rightarrow S^*$.

Sia invece J dato a priori, chiuso, e con le proprietà 3.21; fra le sottoiperalgebre chiuse S di R tali che $S^+ \subseteq J$ ve ne è una massima, sia essa S ; e l'ideale chiuso generato da S^+ è un $J^* \subseteq J$; questa è l'applicazione $J \rightarrow J^*$. L'iperalgebra S , che coincide con S^* , sarà detta il *nocciolo* di J (e di J^*); è chiaro che $J = J^*$ se e solo se J è l'ideale chiuso generato da una S^+ ; la condizione accchè $S = S^*$ (a parte quella ovvia di essere il nocciolo di qualche J) è data nel prossimo 3.22. Si vede subito che $S^{**} = S^*$, $J^{**} = J^*$, e che la corrispondenza $S \rightarrow J$ è biunivoca fra le S per le quali $S = S^*$ ed i J per i quali $J = J^*$.

Nell'enunciato seguente, occorre tenere presente che se D è l'iperalgebra duale di R , l'ortogonale di un J che soddisfi le 3.21 è una sottoiperalgebra chiusa E di D ; mentre l'ortogonale di una sottoiperalgebra S di R è un ideale chiuso C di D che soddisfa le analoghe di 3.21. Ed allora, nell'enunciato seguente l'espressione $S \rightarrow J$ sta ad indicare che J è l'ideale chiuso generato da S^+ ; invece la $A \dashrightarrow B$ sta ad indicare che B è l'ortogonale di A .

3.22 LEMMA. *Siano R, D iperalgebre duali l'una dell'altra, ciascuna di esse essendo finita, o discreta, o linearmente compatta; allora, nelle notazioni ora introdotte:*

1. *Se S è sottoiperalgebra chiusa di R , vale la*

$$S \rightarrow J \dashrightarrow E \rightarrow C \dashrightarrow S^*;$$

2. *Se J è ideale chiuso di R , che soddisfi le 3.21, vale la*

$$J \dashrightarrow E \rightarrow C \dashrightarrow S \rightarrow J^*;$$

3. Se $J \dashrightarrow E$, si ha $J = J^*$ se e solo se $E = E^*$;

4. Nelle notazioni di 1, E è l'insieme delle $d \in D$ che, come applicazioni k -lineari di R in s , sono S -lineari; S^* è l'insieme degli $x \in R$ tali che $dx = 0$ per ogni $d \in E^+$.

DIM. La 4 è conseguenza di 1 e del 3.20. Dimostriamo la 3, supponendo vere le 1 e 2: se $J = J^*$, la 2 può essere così completata: $J \dashrightarrow E \rightarrow C \dashrightarrow S \rightarrow J \dashrightarrow E$; ma la 1, partendo da E anzichè S , dà $E \rightarrow C \dashrightarrow S \rightarrow J \dashrightarrow E^*$; quindi $E = E^*$. Se invece $E = E^*$, la 2 può essere così completata, tenendo presente la 1 scritta per E : $E \rightarrow C \dashrightarrow S \rightarrow J \dashrightarrow E \rightarrow C \dashrightarrow S \rightarrow J^*$, donde $J = J^*$.

Per dimostrare la 1: sia $S \rightarrow J \dashrightarrow E \rightarrow C \dashrightarrow S'$; allora S' è ortogonale ad E^+ , onde $S'^+ \subseteq J$; se poi $S'^+ \subseteq S''^+ \subseteq J$, con S'' iperalgebra, vale la $S'' \rightarrow J \dashrightarrow E \rightarrow C \dashrightarrow S'$; qui, S'' è ortogonale ad E^+ , ed è iperalgebra; quindi S'' è ortogonale a C , ossia $S'' \subseteq S'$; ciò mostra che $S' = S^*$.

Per dimostrare la 2: sia $J \dashrightarrow E \rightarrow C \dashrightarrow S \rightarrow J'$; allora J' è generato da S^+ , cosicchè per dimostrare che $J' = J^*$ basta dimostrare che S è la massima iperalgebra tale che $S^+ \subseteq J$; intanto S^+ è contenuta in J perchè è ortogonale ad E ; poi, se $S'^+ \subseteq J$, S'^+ è ortogonale ad E e quindi a C , onde $S' \subseteq S$, C. V. D..

Il 3.22 mostra che se $J = J^*$, vale la

$$J \dashrightarrow E \rightarrow C \dashrightarrow S \rightarrow J \dashrightarrow E \rightarrow C \dashrightarrow \dots,$$

e la $E^* = E$, $C^* = C$, $S^* = S$; mentre se $S = S^*$ vale la

$$S \rightarrow J \dashrightarrow E \rightarrow C \dashrightarrow S \rightarrow J \dashrightarrow E \rightarrow \dots,$$

e la $J^* = J$, $E^* = E$, $C^* = C$.

OSSERVAZIONE. Vedremo in seguito (cfr. 3.38) che è $J^* = J$ per le iperalgebre che a noi interessano; è stato però dimostrato da G. Gemignani che tale relazione vale per tutte le iperalgebre finite, o discrete, o linearmente compatte.

23. Si è osservato nel n° 20 che ogni iperalgebra R possiede il π -semiendomorfismo π ; pertanto, se R è discreta, o finita, o linearmente compatta, la sua duale D possiede il π^{-1} -semiendomorfismo $t = t_D$ definito da:

$$3.23 \quad \pi(td \circ x) = d \circ \pi x;$$

naturalmente, scambiando i ruoli di D ed R si ottiene il $t = t_R$: $\pi(d \circ tx) = \pi d \circ x$. Si ha intanto:

$$3.24 \quad \pi[(td)x] = d\pi x, \quad t[(\pi d)x] = dtx;$$

infatti, per 3.15, $\delta \circ d\pi x = \delta d \circ \pi x = \pi [t(\delta d) \circ x] = \pi [t\delta \circ (td)x] = \delta \circ \pi [(td)x]$,
e $\delta \circ dtx = \delta d \circ tx = \pi^{-1} [\pi(\delta d) \circ x] = \pi^{-1} [\pi\delta \circ (\pi d)x] = \delta \circ t[(\pi d)x]$. Poi :

3.25 TEOREMA. Se R è iperalgebra finita, o discreta, o linearmente compatta, si ha $t_R \pi_R = \pi_R t_R = p t_R$.

DIM. Pongasi $\mu^h = \mu (\iota \otimes \mu) (\iota \otimes \iota \otimes \mu) \dots (\underbrace{\iota \otimes \iota \otimes \dots \otimes \iota}_{h-1} \otimes \mu)$, e
 $\mathbf{P}^h = (\underbrace{\iota \otimes \iota \otimes \dots \otimes \iota}_{h-1} \otimes \mathbf{P}) \dots (\iota \otimes \iota \otimes \mathbf{P}) (\iota \otimes \mathbf{P}) \mathbf{P}$; allora $p\iota = \mu^p \mathbf{P}^p$ per 3.12.

Sia $\{y_i\}$ una base o pseudobase di R , e suppongasi scritto $\mathbf{P}^p x$ come combinazione lineare, finita o no, degli $y_{n_1} \overline{\times} \dots \overline{\times} y_{n_p}$; è chiaro allora che i coefficienti di prodotti che differiscono solo per l'ordine dei fattori sono uguali; per un dato insieme $\{n_1, \dots, n_p\}$, il numero di tali prodotti è o 1, quando $n_1 = \dots = n_p$, ovvero è divisibile per p . Pertanto esistono dei $c_i \in k$ tali che $\mu^p \mathbf{P}^p x = \sum_i c_i x_i^p$, e che $(d \overline{\times} \dots \overline{\times} d) \circ \mathbf{P}^p x = \sum_i c_i (d \circ x_i)^p$.

Ciò premesso, si ha : $d \circ t\pi x = \pi^{-1} (\pi d \circ \pi x) =$
 $\pi^{-1} [(d \overline{\times} \dots \overline{\times} d) \circ \pi \mathbf{P}^p x] = \pi^{-1} \sum_i c_i^p (d \circ \pi x_i)^p = \sum_i c_i d \circ x_i^p = d \circ \mu^p \mathbf{P}^p x =$
 $d \circ p\iota x$, onde $t\pi = p\iota$. Analogamente, $d \circ \pi t x = (\mathbf{P}^p d) \circ (tx \overline{\times} \dots \overline{\times} tx) =$
 $\pi^{-1} [\pi \mathbf{P}^p d \circ (x \overline{\times} \dots \overline{\times} x)] = \dots = p\iota d \circ x = d \circ p\iota x$, C.V.D..

24. Studieremo in questo numero due iperalgebre, duali l'una dell'altra, sul corpo C_p . Sia $H = \text{cov } C_p =$ insieme di tutti i covettori a componenti in C_p ; si può fare l'identificazione $H = Q/I_p$ (cfr. n° 1 per le notazioni), onde H è un I_p -modulo; esso è anche un $(\text{vect } C_p)$ -modulo; e ricordiamo che $\text{vect } C_p$ è il completamento p -adico di I_p .

La prima iperalgebra, D , è discreta, ed ha come base degli elementi $f_h, h \in H$, con le operazioni così definite;

$$3.26 \quad \left\{ \begin{array}{l} f_h f_i = f_{h+i}, \text{ onde } f_0 = 1 \\ \mathbf{P} f_h = f_h \overline{\times} f_h \\ \varepsilon f_h = 1 \\ \varrho f_h = f_{-h} \text{ (è l'inversione)}. \end{array} \right.$$

La seconda, R , è linearmente compatta, ed ha come pseudobase degli elementi $e_h, h \in H$, con le operazioni così definite:

$$3.27 \quad \left\{ \begin{array}{l} e_h e_i = \delta_{hi} e_h \text{ (}\delta_{hi} \text{ simbolo di Kronecker), onde } 1 = \sum_h e_h \\ \mathbf{P} e_h = \sum_{j+l=h} e_j \overline{\times} e_l \\ \varepsilon e_h = \delta_{0h} \\ \varrho e_h = e_{-h} \text{ (}\varrho \text{ è l'inversione)}. \end{array} \right.$$

La verifica dell'essere queste iperalgebre, duali l'una dell'altra nella dualità

$$3.28 \quad f_h \circ e_l = \delta_{hl},$$

è banale; le e_h sono automoduli primitivi a due a due nullifici. Dalle 3.27, 3.26, 3.15 segue anche:

$$3.29 \quad f_h e_l = e_{l-h}.$$

Si noti che R, D sono nella condizione voluta per l'applicabilità del 3.17. Dalle 3.23:

$$3.30 \quad \begin{cases} \pi e_h = e_h, \pi f_h = f_{ph} \\ tf_h = f_h, te_h = \sum_{pl=h} e_l \\ pf_h = f_{ph}, pe_h = \sum_{pl=h} e_l. \end{cases}$$

3.31 TEOREMA. Pongasi $y_{-i} = \sum_h h_{-i} e_h$, ove h percorre H ; allora $C_p[y_{-i}]$ ha per base, come C_p -modulo, l'insieme $\{1, y_{-i}, y_{-i}^2, \dots, y_{-i}^{p-1}\}$, e si ha $y_{-i}^p = y_{-i}$; inoltre $C_p[y_{-1}, \dots, y_{-n}]$, per n intero positivo qualsiasi, è isomorfo, come C_p -algebra, al prodotto tensoriale dei $C_p[y_{-i}]$ per $i = 1, \dots, n$; poi, $C_p[y_{-1}, y_{-2}, \dots]$ è denso in R . La topologia di R è quella definita, a norma dell'1.2, dalle seguenti pseudovalutazioni discrete w_h di R : $w_h(\sum_l c_l e_l) = 0$ se $c_h \neq 0$, e $= \infty$ se $c_h = 0$. La topologia di R è R -lineare ammessa numerabile, e si ha

$$Py_{-i} = \Phi(y_{-i} \overline{\times} 1, y_{-i-1} \overline{\times} 1, \dots; 1 \overline{\times} y_{-i}, 1 \overline{\times} y_{-i-1}, \dots) \text{ (cfr. 1.11),}$$

$$\varepsilon_R y_{-i} = 0, ty_{-i} = y_{-i-1}, f_h \circ y_{-i} = h_{-i}.$$

DIM. L'asserzione sulla natura della topologia è ovvia; l'essere poi ammessa è conseguenza dell'1.4. Si consideri $C_p[y_{-i}]$; è $y_{-i}^r = \sum_h h_{-i}^r e_h$, onde in particolare $y_{-i}^p = y_{-i}$. La combinazione lineare $\sum_j^{p-1} c_j y_{-i}^j$, con $c_j \in C_p$, è eguale a $\sum_h (\sum_j^{p-1} c_j h_{-i}^j) e_h$, ed è nulla se e solo se $\sum_j^{p-1} c_j h_{-i}^j = 0$ per ogni h ; ciò comporta subito $c_j = 0$ per ogni j ; e cioè, le $1, y_{-i}, \dots, y_{-i}^{p-1}$ sono linearmente indipendenti, come asserito. Nello stesso modo si dimostra che sono linearmente indipendenti su C_p i monomi monici nelle $y_{-1}, \dots, y_{-n}$, che abbiano in ciascun y_{-i} grado $< p$; e ciò prova l'asserzione dell'enunciato riguardante $C_p[y_{-1}, \dots, y_{-n}]$.

Le ultime tre formule discendono dalla definizione di y_{-i} e dalle 3.28, 3.30. La $\Phi(y_{-i} \overline{\times} 1, \dots; 1 \overline{\times} y_{-i}, \dots)$ esiste perchè le $-i \rightarrow y_{-i} \overline{\times} 1$ e

$-i \rightarrow 1 \overline{\times} y_{-i}$ sono simultaneamente ammesse in $R \overline{\times} R$ per 1.4; ed allora

$$\mathbf{P}y_{-i} = \sum_{h, l} (h + l)_i e_h \overline{\times} e_l = \sum_{h, l} \Phi(h_{-i}, h_{-i-1}, \dots; l_{-i}, l_{-i-1}, \dots) e_h \overline{\times} e_l =$$

$$\sum_{h, l} \Phi(h_{-i} e_h \overline{\times} 1, \dots; l_{-i} 1 \overline{\times} e_l, \dots) = \Phi(y_{-i} \overline{\times} 1, \dots; 1 \overline{\times} y_{-i}, \dots),$$

come all'enunciato.

Resta solo da dimostrare che $C_p[y_{-1}, y_{-2}, \dots]$ è denso in R , e per questo basta esprimere le e_h come limiti di successioni di elementi di $C_p[y_{-1}, y_{-2}, \dots]$. Mostriamo precisamente che:

$$e_h = \overline{\prod}_1^\infty [(y_{-i} - h_{-i} - 1)^2 (y_{-i} - h_{-i} - 2) (y_{-i} - h_{-i} - 3) \dots (y_{-i} - h_{-i} - p + 1)];$$

intanto si noti che per i elevato è $h_{-i} = 0$, onde l' i -esimo fattore di questo prodotto è $(y_{-i} - 1)^2 (y_{-i} - 2) (y_{-i} - 3) \dots (y_{-i} - p + 1) = 1 +$ (polinomio in y_{-i} , privo di termine noto); pertanto il prodotto infinito converge in R . Si noti poi che se φ è simbolo di funzione razionale intera a coefficienti in C_p , e se $z_1, \dots, z_n \in R$, si ha, per 3.30, 3.16, $f_l \circ \varphi(z_1, \dots, z_n) = \varphi(f_l \circ z_1, \dots, f_l \circ z_n)$. Ed allora,

$$\begin{aligned} f_l \circ \overline{\prod}_1^\infty [\dots] &= \overline{\prod}_1^\infty [(l_{-i} - h_{-i} - 1)^2 (l_{-i} - h_{-i} - 2) \dots (l_{-i} - h_{-i} - p + 1)] = \\ &= \overline{\prod}_1^\infty \delta_{l_{-i}, h_{-i}} = \delta_{l, h} = f_l \circ e_h, \text{ C.V.D. } \end{aligned}$$

25. Sia R un'iperalgebra su k , ed x un covettore a componenti in R ; sia σ un semiomomorfismo dell'iperalgebra R su un'iperalgebra S ; allora $(\dots, \sigma x_{-2}, \sigma x_{-1})$ è un covettore a componenti in S , che verrà indicato con σx ; se in particolare σ è l'isomorfismo $y \rightarrow 1 \overline{\times} y$ di R su $R \overline{\times} R$, si scriverà $1 \overline{\times} x$ in luogo di σx .

Un covettore x a componenti in R è canonico se $1 \overline{\times} x$ ed $x \overline{\times} 1$ sono simultaneamente ammessi, e se inoltre

$$\mathbf{P}x = 1 \overline{\times} x + x \overline{\times} 1.$$

3.32 TEOREMA. Se x è un covettore canonico a componenti nell'iperalgebra R (finita, o discreta, o linearmente compatta), si ha $t_R x_i = x_{i-1}$. In altre parole, vale la $t_R x = tx$.

DIM. Nelle notazioni della dimostrazione del 3.25, l'essere x canonico implica che $\mathbf{P}^p x = x \overline{\times} 1 \overline{\times} 1 \overline{\times} \dots \overline{\times} 1 + 1 \overline{\times} x \overline{\times} 1 \overline{\times} \dots \overline{\times} 1 + \dots + 1 \overline{\times} 1 \overline{\times} 1 \overline{\times} \dots \overline{\times} 1 \overline{\times} x$; quindi $p_{t_R} x = \mu^p \mathbf{P}^p x = px$. Questa dà anche $\mathbf{P}^p x_{-i} = x_{-i-1} \overline{\times}$

$\dots \overline{\times} x_{-i-1} + \varphi$, ove φ è un polinomio nelle $y_{-i-j,1} = x_{-i-j} \overline{\times} 1 \overline{\times} \dots \overline{\times} 1, \dots$, $\dots, y_{-i-j,p} = 1 \overline{\times} \dots \overline{\times} 1 \overline{\times} x_{-i-j}$ ($j = 0, 1, \dots$), tale che se in esso compare un certo monomio, compaiono anche tutti i monomi ottenuti permutando fra loro le $y_{-i-j,h}$ (rispetto al secondo indice); e tale inoltre che nessun monomio che vi compare è invariante per tutte queste permutazioni.

Se d è elemento del duale di R , ciò dà $\pi d \circ x_{-i} = (d \overline{\times} \dots \overline{\times} d) \circ \mathbf{P}^p x_{-i} = (d \overline{\times} \dots \overline{\times} d) \circ (x_{-i-1} \overline{\times} \dots \overline{\times} x_{-i-1}) = (d \circ x_{-i-1})^p$; ma $\pi d \circ x_{-i} = (d \circ t_R x_{-i})^p$, donde $t_R x_{-i} = x_{-i-1}$, C.V.D..

Se R è un'iperalgebra su k , con topologia R -lineare ammessa, indicheremo con $\text{cov } R$ l'insieme di tutti i covettori a componenti in R ; se anche la topologia di $R \overline{\times} R$ è ammessa, indicheremo con $\mathcal{C}R$ l'insieme degli elementi canonici di $\text{cov } R$; poichè, per 1.13, $\text{cov } R$ è completo, anche $\mathcal{C}R$ è completo; se k è perfetto e $K = \text{vect } k$, $\mathcal{C}R$ è un K modulo per 1.14 (che ovviamente è valido a maggior ragione quando la topologia di R è ammessa).

Ciò premesso, suppongasi che k sia algebricamente chiuso (ipotesi sempre mantenuta nel seguito); un *ipercampo* su k è un'iperalgebra R su k tale che:

1. la sua topologia sia R -lineare ammessa, e la topologia di $R \overline{\times} R$ sia ammessa;
2. $\mathcal{C}R$ sia un K -modulo libero finito, cosicchè esso sarà canonico rispetto a $\pi = \pi_R$ e $t = t_R$;
3. l'algebra su k generata dalle componenti degli elementi di $\mathcal{C}R$ sia densa in R .

Chiameremo anche *ipercampo banale* l'iperalgebra k , con il coprodotto necessariamente dato da $\mathbf{P}1 = 1 \overline{\times} 1$; le componenti degli elementi di $\mathcal{C}R$ saranno chiamate gli *elementi canonici* di R .

3.33 LEMMA. *Siano R, S iperalgebre tali che $\mathcal{C}R, \mathcal{C}S$ esistano, e siano σ, τ dei κ -semiomorfismi di R su S , κ essendo un automorfismo di k . Per ogni $x \in \mathcal{C}R$ si ha allora $(\sigma + \tau)x = \sigma x + \tau x$; in particolare, $p_{\iota_R} x = px$.*

DIM. Infatti, per 3.12, $(\sigma + \tau)x = \mu_S(\sigma \otimes \tau) \mathbf{P}_R x = \mu_S(\sigma \otimes \tau)(x \overline{\times} 1 + 1 \overline{\times} x) = \mu_S(\sigma x \overline{\times} 1 + 1 \overline{\times} \tau x) = \sigma x + \tau x$, C. V. D..

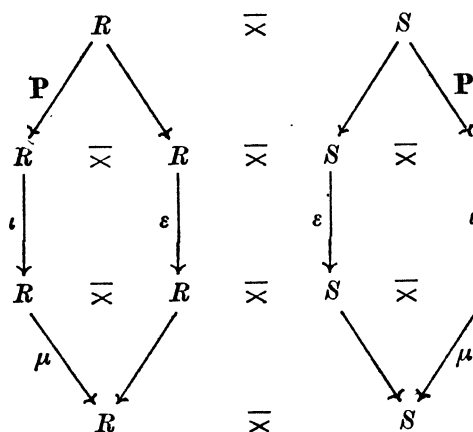
3.34 TEOREMA. *Siano R, S iperalgebre tali che $\mathcal{C}R, \mathcal{C}S, \mathcal{C}(R \overline{\times} S)$ esistano. Allora $\mathcal{C}(R \overline{\times} S) = \mathcal{C}R \overline{\times} 1 \oplus 1 \overline{\times} \mathcal{C}S \cong \mathcal{C}R \oplus \mathcal{C}S$.*

DIM. Dato $z \in \mathcal{C}(R \overline{\times} S)$, si definiscano i covettori x, y , a componenti in R, S rispettivamente, mediante le: $x \overline{\times} 1 = (\iota \otimes \varepsilon)z, 1 \overline{\times} y = (\varepsilon \otimes \iota)z$,

ove ε è la coidentità. Dimostriamo intanto che $x \in \mathcal{C}R$, onde analogamente $y \in \mathcal{C}S$. Si ha infatti

$(\mathbf{P}_R \otimes \mathbf{P}_S)(x \overline{\times} 1) = (\mathbf{P}_R \iota_R \otimes \mathbf{P}_S \varepsilon_S)z = (\iota_R \otimes \iota_R \otimes \varepsilon_S \otimes \varepsilon_S)(\mathbf{P}_R \otimes \mathbf{P}_S)z = (\iota_R \otimes \iota_R \otimes \varepsilon_S \otimes \varepsilon_S)\alpha(z \overline{\times} 1 \overline{\times} 1 + 1 \overline{\times} 1 \overline{\times} z)$, ove α indica scambio del secondo col terzo fattore; questa espressione a sua volta eguaglia la $\alpha[(\iota_R \otimes \varepsilon_S \otimes \iota_R \otimes \varepsilon_S)(z \overline{\times} 1 \overline{\times} 1 + 1 \overline{\times} 1 \overline{\times} z)] = \alpha(x \overline{\times} 1 \overline{\times} 1 \overline{\times} 1 + 1 \overline{\times} 1 \overline{\times} x \overline{\times} 1) = x \overline{\times} 1 \overline{\times} 1 \overline{\times} 1 + 1 \overline{\times} x \overline{\times} 1 \overline{\times} 1$, donde appunto $\mathbf{P}x = x \overline{\times} 1 + 1 \overline{\times} x$, e $x \in \mathcal{C}R$.

Dimostriamo poi che $z = x \overline{\times} 1 + 1 \overline{\times} y$, ossia, per 3.33, che $z = (\iota \otimes \varepsilon + \varepsilon \otimes \iota)z$; tenendo presente la 3.12, ciò è conseguenza immediata del fatto che il diagramma



definisce, per 3.9, l'omomorfismo ι , C. V. D..

26. Nel n° 4 di MC abbiamo introdotto degli enti che là venivano chiamati « ipercampi »; quelli, fra essi, che sono equidimensionali, verranno qui chiamati provvisoriamente « ipercampi nel senso di MC »; essi sono intanto anelli locali regolari completi, sono linearmente compatti, e soddisfano quindi la condizione 1 del n° 25; soddisfano poi le 2, 3 come conseguenza dei 7.2, 7.4, e 3.1 di MC. Ricordiamo in particolare le seguenti definizioni:

$R_{m,0} = R_{1,0} \overline{\times} \dots \overline{\times} R_{1,0}$ (m fattori); è l'ipercampo $k\{x_1, \dots, x_n\}$, con il coprodotto $\mathbf{P}x_i = \Phi(x_i \overline{\times} 1, x_i \overline{\times} 1, \dots; 1 \overline{\times} x_i, 1 \overline{\times} x_i, \dots)$; si ha $\mathcal{C}R_{m,0} \cong N_{m,0}$.

Poi, per r, s interi primi fra loro: $R_{r,s} = k\{x_1, \dots, x_r\}$, con il coprodotto così definito:

$\mathbf{P}x_i = \Phi(x_i \overline{\times} 1, x_{i+1} \overline{\times} 1, \dots, x_r \overline{\times} 1, x_1^{p^s} \overline{\times} 1, \dots, x_1^{p^{2s}} \overline{\times} 1, \dots, x_r^{p^{2s}} \overline{\times} 1, \dots; 1 \overline{\times} x_i, \dots, 1 \overline{\times} x_r, 1 \overline{\times} x_1^{p^s}, \dots, 1 \overline{\times} x_r^{p^s}, \dots)$; si ha $\mathcal{C}R_{r,s} \cong N_{r,s}$. Ogni ipercampo nel senso di MC è isomorfo (cfr. p. 359 di MC) ad un $S = R_{m,0} \overline{\times} R'$, ove R' è isogeno ad un prodotto tensoriale completo R di vari R_{r_i, s_i} ; ciò

significa, ricordiamo, che vi sono isomorfismi di iperalgebre $R \rightarrow R' \rightarrow R$. Inoltre, per 7.4 di MC, se M è un qualsiasi K -modulo canonico di codimensione separabile nulla, ossia con $M_t = 0$, esiste un ipercampo R nel senso di MC tale che $\mathcal{C}R \cong M$.

Indicheremo con $R_{0,0}$ l'ipercampo banale k , e daremo la seguente definizione: se R è l'iperalgebra su C_p indicata con tale simbolo al n° 24, $R_{0,1}$ indicherà l'estensione di R su k , ed $R_{0,n}$ il prodotto tensoriale completo di n fattori isomorfi ad $R_{0,1}$; l'asserzione del 3.31 sulla topologia di R è subito estensibile ad $R_{0,n}$, cosicchè $R_{0,n}$ soddisfa la condizione 1 del n° 25. Indicheremo con $D_{n,m}$ il duale di $R_{m,n}$; quindi $D_{n,0}$ è il prodotto tensoriale di n fattori isomorfi a $D_{1,0}$, e $D_{1,0}$ è l'estensione su k della D , definita su C_p , del n° 24.

Si indichi con $\mathcal{P}_0 D_{n,0}$ l'insieme delle successioni $\bar{d} = (\bar{d}_0, \bar{d}_1, \dots)$, $\bar{d}_i \in D_{n,0}$, tali che $\pi \bar{d}_i = \bar{d}_{i-1}$ ($i > 0$), $\pi \bar{d}_0 = 1$, e che $\mathbf{P}\bar{d} = \bar{d} \overline{\times} d$, ossia $(\mathbf{P}\bar{d}_0, \mathbf{P}\bar{d}_1, \dots) = (\bar{d}_0 \overline{\times} d_0, \bar{d}_1 \overline{\times} d_1, \dots)$. La seconda condizione comporta subito che ogni $\bar{d}_i$ deve essere, nelle notazioni del n° 24, un $f_{h_{i1}} \overline{\times} \dots \overline{\times} f_{h_{in}}$ ($h_{ii} \in H = \text{cov } C_p$), mentre la prima dà $p(h_{ii})_j = (h_{ii})_{j-1}$ ($j > 0$), e $p(h_{ii})_0 = 0$; definiremo anche $\pi \bar{d} = (\pi \bar{d}_0, \pi \bar{d}_1, \dots)$, e $t\bar{d} = (t\bar{d}_0, t\bar{d}_1, \dots)$.

Due elementi di $\mathcal{P}_0 D_{n,0}$ possono essere moltiplicati mediante moltiplicazione termine a termine; se poi $a \in \text{vect } C_p$, e per esempio $a = a_0 + p a_1 + p^2 a_2 + \dots$, con a_i intero e $0 \leq a_i < p$, si può definire $\bar{d}^a = (\bar{d}_0^{a_0}, \bar{d}_1^{a_0 + p a_1}, \bar{d}_2^{a_0 + p a_1 + p^2 a_2}, \dots)$, ossia $(\bar{d}^a)_i = f_{a_{hi1}} \overline{\times} \dots \overline{\times} f_{a_{hin}}$. Con ciò $\mathcal{P}_0 D_{n,0}$ diviene un $(\text{vect } C_p)$ -modulo, con l'operazione di prodotto anzichè somma, e di elevazione a potenza anzichè prodotto scalare; esso è prodotto diretto di n moduli isomorfi a $\mathcal{P}_0 D_{1,0}$; indicheremo con $\mathcal{P} D_{n,0}$ l'estensione di $\mathcal{P}_0 D_{n,0}$ su K .

3.35 LEMMA. $\mathcal{P} D_{n,0}$ è un K -modulo canonico isomorfo ad $N_{n,0}$, qualora vi si definiscano π e t nel modo seguente: se $\delta_1, \dots, \delta_m \in \mathcal{P}_0 D_{n,0}$, ed $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in K$, allora:

$$\pi \prod_i \delta_i^{\alpha_i} = \prod_i (\pi \delta_i)^{\alpha_i}, \text{ e } t \prod_i \delta_i^{\alpha_i} = \prod_i (t \delta_i)^{\alpha_i};$$

(se gli α_i appartengono a $\text{vect } C_p$, tale definizione è in accordo con le definizioni di π e t operanti su $\mathcal{P}_0 D_{n,0}$).

DIM. Basta dimostrarlo per $n=1$; pongasi allora $M = \mathcal{P} D_{1,0}$, $M' = \mathcal{P}_0 D_{1,0}$. Allora M' è l'insieme dei $\bar{d} = (f_{h_0}, f_{h_1}, \dots)$, con $h_i \in \text{cov } C_p$ e $p h_i = h_{i-1}$ ($i > 0$), $p h_0 = 0$; queste condizioni dicono che esistono elementi $c_0, c_1, \dots \in C_p$ tali

che

$$h_0 = (\dots, 0, 0, c_0)$$

$$h_1 = (\dots, 0, 0, c_0, c_1)$$

$$h_2 = (\dots, 0, 0, c_0, c_1, c_2)$$

$$\dots;$$

posto $c = (c_0, c_1, c_2, \dots) \in \text{vect } C_p$, e indicato con δ l'elemento di M' per il quale $c = (1, 0, 0, \dots)$, si vede subito che, per ogni $d \in M'$ e per il corrispondente c , si ha $d = \delta^c$. L'applicazione $c \rightarrow \delta^c$ è quindi un isomorfismo del $(\text{vect } C_p)$ -modulo $\text{vect } C_p$ su tutto il $(\text{vect } C_p)$ -modulo M' , ed è ovviamente estensibile all'isomorfismo $c \rightarrow \delta^c$ di K su tutto M , come K -moduli. Ciò mostra intanto che M è un K -modulo libero con 1 generatore.

Si definisca poi un'applicazione K -bilineare $(\delta^c, c') \rightarrow \langle \delta^c, c' \rangle = cc'$ di $M \times K$ su K ; per mezzo di essa si vede subito che M diviene il duale del K -modulo K ; valgono per le relazioni:

$$\langle \pi \delta^c, c' \rangle = \langle (\pi \delta)^{\pi c}, c' \rangle = \langle \delta^{\pi c}, c' \rangle = c^{\pi} p c' = \pi (c t c') = \pi \langle \delta^c, t c' \rangle,$$

e

$$\langle t \delta^c, c' \rangle = \langle \delta^{\pi^{-1} c}, c' \rangle = (\pi^{-1} c) c' = \pi^{-1} (c \pi c') = \pi^{-1} \langle \delta^c, \pi c' \rangle,$$

che mostrano, per 3.6, che M è il K -modulo canonico duale di K ; per 3.5 e 3.6 esso è quindi isomorfo a $N_{1,0}$, C.V.D..

27.

3.36 TEOREMA. $R_{0,n}$ è un ipercampo, e $\mathcal{C}R_{0,n} \cong N_{0,n}$. In particolare, $\mathcal{C}R_{0,1}$ è generato dall' $y = (\dots, y_{-2}, y_{-1})$ del 3.31.

DIM. Si è già visto al n° 26 che $R_{0,n}$ soddisfa alla condizione 1 del n° 25; se si dimostra che $R = R_{0,1}$ soddisfa anche le 2, 3, e che $\mathcal{C}R$ ha ordine 1 e dimensione 0, ne seguirà l'asserto per 3.34.

Se $x \in \mathcal{C}R$ e $d \in \mathcal{P}_0 D$, ove $D = D_{1,0}$, pongasi

$$d \circ x = (\pi(d_0 \circ x_{-1}), \pi^2(d_1 \circ x_{-1}), \pi^3(d_2 \circ x_{-1}), \dots) \in K.$$

Dico che questa applicazione è $(\text{vect } C_p)$ -lineare in d e K -lineare in x ; essa è chiaramente continua in (d, x) , quando in $\mathcal{P}D$ si ponga la topologia di K -modulo canonico, ed in $\mathcal{C}R$ quella di insieme di covettori.

Sia anche $y \in \mathcal{CR}$, e sia per esempio, nelle notazioni del n° 24, $d = (f_{h_0}, f_{h_1}, \dots)$, $h_1 \in H = \text{cov } C_p$; allora

$$\begin{aligned} \pi^{i+1}(f_{h_i} \circ (x + y)_{-1}) &= \pi^{i+1}(f_{h_i} \circ \Phi(x_{-1}, x_{-2}, \dots; y_{-1}, y_{-2}, \dots)) = \\ &= \pi^{i+1} \Phi(f_{h_i} \circ x_{-1}, f_{h_i} \circ x_{-2}, \dots; f_{h_i} \circ y_{-1}, f_{h_i} \circ y_{-2}, \dots); \text{ ma} \\ \pi^{i+1}(f_{h_i} \circ x_{-j}) &= \pi^{i+1}(f_{h_i} \circ t^{j-1} x_{-1}) = \pi^{i-j+2}(\pi^{j-1} f_{h_i} \circ x_{-1}) = \\ &= \pi^{i-j+2}(f_{h_{i-j+1}} \circ x_{-1}), \end{aligned}$$

ove $f_{h_{i-j+1}}$ è da interpretare come 1 se $i - j + 1 < 0$. Quindi

$$\begin{aligned} \pi^{i+1}(f_{h_i} \circ (x + y)_{-1}) &= \Phi(\pi^{i+1}(f_{h_i} \circ x_{-1}), \pi^i(f_{h_{i-1}} \circ x_{-1}), \dots, \pi(f_{h_0} \circ x_{-1}), 0, 0, \dots; \\ &\pi^{i+1}(f_{h_i} \circ y_{-1}), \dots, \pi(f_{h_0} \circ y_{-1}), 0, 0, \dots), \text{ dato che ovviamente } x_{-1} \in R^+, \text{ ch\`e} \\ &\text{altrimenti la } j \rightarrow t^j x_{-1} \text{ non potrebbe essere ammessa. Ci\`o mostra appunto} \\ &\text{che } d \circ (x + y) = d \circ x + d \circ y. \end{aligned}$$

Sia ora $c \in \mathcal{K}$, e sia $\{c\}$, al solito (n° 9), il vettore $(c, 0, 0, \dots) \in K$; allora $(\{c\} x)_{-1} = (\pi^{-1} c) x_{-1}$ (n° 7), onde

$$(d \circ \{c\} x)_i = \pi^{i+1}(d_i \circ (\pi^{-1} c) x_{-1}) = (\pi^i c) \pi^{i+1}(d_i \circ x_{-1}) = (\pi^i c)(d \circ x)_i,$$

il che mostra che $d \circ \{c\} x = \{c\}(d \circ x)$. Questa, unita alla precedente ed alla continuit , d  la K -linearit  di $x \rightarrow d \circ x$.

La linearit  della $d \rightarrow d \circ x$ si dimostra mediante la:

$$\begin{aligned} \pi^{i+1}(f_{h_i} f_{l_i} \circ x_{-1}) &= \pi^{i+1}(f_{h_i} \overline{\times} f_{l_i} \circ \mathbf{P} x_{-1}) = \\ &= \pi^{i+1} \Phi(f_{h_i} \circ x_{-1}, f_{h_i} \circ x_{-2}, \dots; f_{l_i} \circ x_{-1}, f_{l_i} \circ x_{-2}, \dots), \end{aligned}$$

e continuando poi come prima.

  ora lecito, e possibile in modo unico, estendere la $(d, x) \rightarrow d \circ x$ ad un'applicazione K -bilineare continua di $\mathcal{PD} \times \mathcal{CR}$ su K ; questa   una dualit  fra K -moduli:

se $d \circ x = 0$ per ogni d ,   $f_h \circ x_{-1} = 0$ per ogni h , onde $x_{-1} = 0$;

se $d \circ y = 0$ per ogni y , si scelga per y l'elemento del 3.31, che il 3.31 stesso mostra essere canonico; sia poi $d = \delta^c$, ove δ   il generatore di $\mathcal{PD}$ usato nella dimostrazione del 3.35. Si ha $\delta_i \circ y_{-1} = f_{p-i-1} \circ \sum_h h_{-1} e_h$ per il 3.31; questo   sempre nullo, eccetto che per $i = 0$, nel qual caso   $= 1$. Quindi $\delta \circ y = 1$, e $c = 0$; la $\delta \circ y = 1$ mostra anche che $\mathcal{CR}$  , come K -modulo, duale di $\mathcal{PD}$.

Si è così stabilito che $\mathcal{C}R$, in quanto duale di un K -modulo libero con un generatore, è un K -modulo libero con un generatore. Esso possiede, per 3.33 e 3.32, i π e t necessari per renderlo un K -modulo canonico di ordine 1; la sua dimensione è 0 perchè $\pi\mathcal{C}R = \mathcal{C}R$; si noti anche che la dualità definita sopra è una dualità di K -moduli canonici, C.V.D..

28.

3.37 LEMMA. Sia $R = R_{0,n}$, e sia S un ipercampo nel senso di MC; allora $R \overline{\times} S$ è un ipercampo, è linearmente compatto, e la sua topologia è generata da pseudovalutazioni discrete come descritto nell' 1.2.

DIM. $R \overline{\times} S$ è linearmente compatto perchè tali sono R ed S ; inoltre, la topologia di S è data da una valutazione normalizzata discreta w di rango 1; si definiscano in $R \overline{\times} S$ le seguenti pseudovalutazioni $w_{h_1, \dots, h_n}$, con $h_i \in H$: se $x \in S$, $w_{h_1, \dots, h_n}(e_{l_1} \overline{\times} \dots \overline{\times} e_{l_n}) = w(x)$ se $h_i = l_i$ per ogni i , ed $= \infty$ altrimenti; allora la topologia di $R \overline{\times} S$ soddisfa alla 1 del n° 25 per l'1.4. Le condizioni 2 e 3 sono verificate separatamente per R (cfr. 3.36) e per S (cfr. n° 26), onde sono verificate per $R \overline{\times} S$ come conseguenza del 3.34, C.V.D..

3.38 LEMMA. Sia $R \overline{\times} S$ un ipercampo del tipo descritto al 3.37; allora, nelle notazioni del 3.22, è $J^* = J$ per ogni ideale chiuso J di $R \overline{\times} S$ che soddisfi l'analoga della 3.21; e $U^* = U$ per ogni sottoiper algebra chiusa U di $R \overline{\times} S$.

DIM. Se il fattore R manca, il risultato è vero per il 4 del 5.8 di MC. Si consideri il caso generale; dato J , pongasi $J = \sum_h e_h \overline{\times} J_h$, ove $e_h = e_{h_1} \overline{\times} \dots \overline{\times} e_{h_n}$, e gli e_{h_i} hanno il significato del 3.27, mentre J_h è ideale di S . Intanto $J' = J \cap (R \overline{\times} 1) = \sum_h e_h \overline{\times} (J_h \cap k)$, e questa è la somma diretta completa dei k -moduli generati dagli e_h tali che $J_h = S$. Sia F l'insieme degli $h \in H \oplus \dots \oplus H$ per i quali $J_h \neq S$; dalla 3.21 per J si ricava la 3.21 per J' , e da questa segue agevolmente che $F + F \subseteq F$; poi, $0 \in F$, poichè altrimenti $e_0 \overline{\times} S \subseteq J$, ed $\varepsilon J \neq 0$ per 3.27, assurdo; infine, da $\mathbf{P}(e_0 \overline{\times} 1) \notin \mathbf{P}J'$ segue anche che $-F \subseteq F$, ossia che F è un gruppo additivo. Ma allora esso è un I_p -sottomodulo dell' I_p modulo $H \oplus \dots \oplus H$; previo cambiamento degli addendi diretti di questo, ossia dei fattori diretti $R_{0,1}$ di $R_{0,n}$, ogni sottomodulo F può essere così descritto: esistono degli $r_1, \dots, r_n$, ciascuno un intero non negativo ovvero il simbolo ∞ , tali che F consiste degli $h = (h_1, \dots, h_n)$ colla proprietà $p^{r_i} h_i = 0$ per ogni i , ove $p^\infty h_i = 0$ per ogni h_i . È quanto dire che J' è la somma diretta completa di quei ke_h tali che $p^{r_i} h_i \neq 0$; ed allora sia $U' = p^{r_1} R_{0,1} \overline{\times} \dots \overline{\times} p^{r_n} R_{0,1}$, ove $p^\infty R_{0,1} = k$: si constata facilmente che J' è generato da U'^+ , che U' è un sottoipercampo

di R , e che è l'unica sottoiperalgebra chiusa di R con la proprietà descritta rispetto a J' ; quindi $U'^* = U'$.

Passiamo a considerare $J'' = J \cap (1 \overline{\times} S)$; esso è certamente, come si è visto, generato da un U''^+ , con U'' sottoipercampo di S . Dico allora che $J = J' \overline{\times} S + R \overline{\times} J''$, dal che seguirà che J è generato da $(U' \overline{\times} U'')^+$; e infatti, se $J_h \subset S$ e $J_l \subset S$, ossia se $h, l \in F$, si ha intanto $h + l \in F$; poi, se α indica scambio del secondo col terzo fattore, $(e_h \overline{\times} e_l \overline{\times} 1 \overline{\times} 1) \alpha \mathbf{P} J = (e_h \overline{\times} e_l) \overline{\times} \mathbf{P} J_{h+l}$, e questo deve essere contenuto in $(e_h \overline{\times} e_l \overline{\times} 1 \overline{\times} 1) \alpha (J \overline{\times} R \overline{\times} S + R \overline{\times} S \overline{\times} J)$; questa espressione coincide con $e_h \overline{\times} e_l \overline{\times} (J_h \overline{\times} S + S \overline{\times} J_l)$, il che dice che $\mathbf{P} J_{h+l} \subseteq J_h \overline{\times} S + S \overline{\times} J_l$. L'applicazione ad ambo i membri di $\mu_S(\iota \otimes \varepsilon)$ dà, tenendo presente la 3.9, $J_{h+l} \subseteq J_h$; essendo questa valida ogniqualvolta $h, l \in F$, si conclude che i J_h , per $h \in F$, sono tutti uguali fra loro, e per esempio a $\bar{J}$; ma allora $J = \sum_{h \in F} e_h \overline{\times} S + \sum_{h \in F} e_h \overline{\times} \bar{J} = J' \overline{\times} S + \sum_h e_h \overline{\times} \bar{J} = J' \overline{\times} S + R \overline{\times} \bar{J} = J' \overline{\times} S + R \overline{\times} J''$, come richiesto.

Occorre ora dimostrare che $U = U^*$ per ogni U ; pongasi $U' \overline{\times} 1 = (\iota_R \otimes \varepsilon_S) U$, $1 \overline{\times} U'' = (\varepsilon_R \otimes \iota_S) U$, cosicchè U' , U'' sono sottoiperalgebre chiuse di R , S rispettivamente. Come si è visto nella dimostrazione del 3.34, l'omomorfismo $\mu_{R \overline{\times} S}(\iota_R \otimes \varepsilon_S \otimes \varepsilon_R \otimes \iota_S) \mathbf{P}_{R \overline{\times} S}$ di $R \overline{\times} S$ è l'identità, cosicchè $U = U' \overline{\times} U''$. Ma $(U' \overline{\times} 1)^+$ genera $(\iota_R \otimes \varepsilon_S) J = J' \overline{\times} 1$, e analogamente per U'' e J'' ; si è anche visto per U' , e si sa da MC per U'' , che esse sono le uniche sottoiperalgebre chiuse di R , S rispettivamente con tali proprietà rispetto a J' , J'' . Se allora J fosse anche generato da un $U^{*+} \supset U^+$, J' sarebbe generato da U^{*+} , e J'' da U^{*+} , ed uno di questi conterrebbe propriamente il rispettivo U'^+ o U''^+ ; ciò essendo impossibile, si conclude che $U^* = U$, C. V. D..

3.39 LEMMA. Sia R un ipercampo del tipo indicato con $R \overline{\times} S$ nel 3.37; sia σ un omomorfismo (di iperalgebre) di R ; sia N il nucleo di σ come omomorfismo di $\mathcal{C} R$, e sia U la sottoalgebra chiusa, su k , di R generata da 1 e dalle componenti degli elementi di N (o, il che è lo stesso, di un suo insieme di generatori). Allora U è un sottoipercampo di R , il nucleo di σ (come omomorfismo di R) è l'ideale chiuso J generato da U^+ , ed $N = \mathcal{C} U$.

DIM. Che U sia sottoiperalgebra chiusa di R , ossia che $\mathbf{P} U \subseteq U \overline{\times} U$, è chiaro, per il modo in cui U è ottenuto da N ; è anche chiaro che U è generato da 1 e dagli elementi canonici di R che appartengono al nucleo J di σ ; di qui segue anche che $N = \mathcal{C} U$. Resta da provare che J è anche l'ideale chiuso generato da U^+ ; tenendo presente il 3.38 e la sua dimostrazione, basterà provare questo fatto nei due casi in cui R è ipercampo

nel senso di MC, oppure $R = R_{0,n}$; si tengano anche presenti i 3.1, 3.34, 3.36.

Ora, nel primo caso ciò è conseguenza di MC: più precisamente, se U' è iperalgebra chiusa e U'^+ genera J , per il n° 7 di MC U' è ipercampo nel senso di MC, ed è generato da 1 e dalle componenti degli elementi di $\mathcal{C}U' \subseteq \mathcal{C}R$, e coincide perciò con U .

Nel secondo caso, quando $R = R_{0,n}$, si può ripetere lo stesso ragionamento se si riesce a dimostrare che U' è generato da 1 e dalle componenti degli elementi di $\mathcal{C}U'$; ora, nella dimostrazione del 3.38 si è visto che U' è necessariamente della forma $p^{r_1} \iota R_{0,1} \times \dots \times p^{r_n} \iota R_{0,1}$, e ciò è sufficiente,

C. V. D..

29.

3.40 TEOREMA *Ogni ipercampo è bicontinualmente isomorfo ad un $R_{0,n} \times S$, ove S è ipercampo nel senso di MC, e quindi anello locale regolare completo con corpo residuo k . Pertanto ogni ipercampo è un'iperalgebra linearmente compatta. Per ogni K -modulo canonico M , esiste un ipercampo R tale che $\mathcal{C}R \cong M$, in un isomorfismo in cui i π, t di M sono trasformati nei π_R, t_R . Sia poi R un ipercampo, sia S un'iperalgebra con topologia S lineare, e sia σ' un omomorfismo di $\mathcal{C}R$ su un K -modulo M di covettori canonici a componenti in S ; suppongasì che σ' commuti con π , ossia che $\pi_S \sigma' x = \sigma' \pi_R x$; esiste allora un unico omomorfismo σ di R su S (come iperalgebre) tale che $\sigma x = \sigma' x$ per ogni $x \in \mathcal{C}R$. Se poi M è libero, σR è un ipercampo, e $\mathcal{C}\sigma R = \sigma' \mathcal{C}R$.*

Dim. La seconda e terza asserzione sono già note dai 3.37 e dal n° 26. La prima asserzione discende dall'ultima: si prenda infatti per R un ipercampo del tipo descritto nella prima asserzione, per S un ipercampo tale che $\mathcal{C}S \cong \mathcal{C}R$, e per σ' l'isomorfismo di $\mathcal{C}R$ su tutto $\mathcal{C}S$; allora l'ultima asserzione (e la penultima) dà un omomorfismo σ di R su tutto S ; il 3.39 dice poi che σ è un isomorfismo, e resta perciò solo da vedere che sia bicontinuo, e non solo continuo. Ora, R è linearmente compatto, ed è quindi noto che anche $\sigma R = S$ è linearmente compatto [cfr. G. Kothe, *Topologische lineare raume*, 1960; pp. 99-102, e in particolare (2), p. 99]; ed allora, per mezzo di una pseudobase di R e della sua immagine in S si controlla che σ , essendo continuo, è necessariamente bicontinuo, il che prova la prima asserzione.

Dimostriamo quindi l'ultima asserzione; la dimostreremo sotto l'ipotesi che R sia del tipo descritto all'inizio dell'enunciato; ciò è sufficiente poichè comporta, come si è visto, che ogni R è di questo tipo, e quindi che l'asserzione stessa che stiamo dimostrando è vera per ogni R . Sia dunque

$R = R_1 \overline{\times} R_2$, con $R_1 = R_t \cong R_{0,n}$, e $R_2 = R_r \overline{\times} R_\pi$ anello locale regolare completo. Scegliamo un insieme libero $\{x_1, \dots, x_n\}$ di generatori di $\mathcal{C}R_1$ come K -modulo, tali che $\pi x_i = x_i$, e un insieme minimo $\{y_1, \dots, y_m\}$ di generatori di $\mathcal{C}R_2$ come H -modulo; allora, per il 7.1 di MC, una pseudobase $B = \{b_0 = 1, b_1, b_2, \dots\}$ di R è data dai monomi monici nelle $x_{i,-j}, y_{i,-1}$ ($j = 1, 2, \dots$), di grado $< p$ in ogni $x_{i,-j}$. Posto $x'_i = \sigma' x_i$, $y'_i = \sigma' y_i$, e dato un $X \in R$, espresso come combinazione lineare infinita, a coefficienti in k , degli elementi b_r della pseudobase, vogliamo dimostrare che esiste in S , ossia converge, l'analoga combinazione lineare X' degli analoghi monomi b'_r nelle $x'_{i,-j}, y'_{i,-1}$; dato infatti in S un intorno U dello 0 che sia un ideale, dovendo gli x'_i, y'_j essere simultaneamente ammessi esiste un intero q tale che siano in U i monomi nelle $x'_{i,-j}, y'_{i,-j}$ di grado $\geq p^q$ in almeno una $x'_{i,-q}$, o $y'_{i,-q}$; e d'altra parte, esiste un intero q' tale che ogni b_r , con $r > q'$, sia combinazione lineare infinita a coefficienti in k di monomi del tipo descritto, col dato q ; e ciò in quanto per r abbastanza elevato i b_r appartengono all'ideale chiuso di R generato da $\pi p^{q'-1} R^+$. Pertanto per $r > q'$ si ha $b'_r \in U$, il che mostra appunto che X' esiste.

L'applicazione $\sigma: X \rightarrow X'$ è un omomorfismo continuo di k -algebre, e applica $x_{i,-j}, y_{i,-j}$ su $x'_{i,-j}, y'_{i,-j}$; esso è quindi un omomorfismo di iperalgebre, e dà $\sigma x = \sigma' x$ per $x \in \mathcal{C}R$.

Suppongasi ora che M sia libero; in tal caso si può anche supporre che il nucleo di σ' sia generato dagli x_i con $i > n'$ e dagli y_i con $i > m'$; pertanto, per il 3.39, il nucleo di σ è l'ideale chiuso J generato dagli $x_{i,-j}$ con $i > n'$ e dagli $y_{i,-1}$ con $i > m'$; quindi R/J è un ipercampo, in quanto $R_1 \overline{\times} 1/J \cap (R_1 \overline{\times} 1) \cong R_{0,n'}$, e $1 \overline{\times} R_2/J \cap (1 \overline{\times} R_2)$ è anello locale regolare completo. Ma allora σR , che è immagine, in un isomorfismo continuo, di R/J , è anche bicontinualmente isomorfo a R'/J , perchè questo è linearmente compatto. Ne segue che σR è un ipercampo, e che quindi $\mathcal{C}\sigma R = \sigma' \mathcal{C}R$, C. V. D..

In base al 3.40, la definizione di ipercampo data al n° 25 può essere così modificata (ossia è equivalente alla seguente):

3.41 COROLLARIO. *L'iperalgebra R su k è un ipercampo se e solo se;*

1. *La topologia di R è R -lineare;*
2. *Esiste un insieme N di covettori canonici a componenti in R che è un K -modulo canonico, con $\pi = \pi_R$;*

3. *R è generato, come k -algebra completa, dalle componenti degli elementi di N , o, il che è lo stesso, degli elementi di un insieme di generatori di N come K -modulo.*

In tal caso $N = \mathcal{C}R$.

30. I 3.40, 3.39 danno una corrispondenza biunivoca (« isomorfismo di categorie ») fra da una parte i K -moduli canonici coi loro omomorfismi, e dall'altra gli ipercampi coi loro omomorfismi; ed anzi, il 3.39 è più generale, e potrebbe permettere di estendere la corrispondenza da una parte ai K -moduli finiti, ma non necessariamente liberi, dotati di un π ed un t tali che $t\pi = \pi t = p$, e dall'altra alle iperalgebre R linearmente compatte, o finite, o prodotti di queste, con topologie R lineari ammesse, che sono generate, come k -algebre complete, dai propri elementi canonici, e per le quali $\mathcal{C}R$ è un K -modulo finito. L'estensione qui non verrà fatta, dato che non ha applicazione diretta alle varietà abeliane. Comunque, i nuovi « ipercampi » verrebbero ad essere le immagini omomorfe di quelli « liberi » (ossia quelli che abbiamo descritto in questo capitolo); ed ognuno di essi sarebbe il prodotto tensoriale di uno « libero » per uno finito.

La corrispondenza permette di estendere agli ipercampi ed ai loro omomorfismi tutta la nomenclatura dei K -moduli canonici e dei loro omomorfismi: isogenia, grado, dimensione, separabilità, ecc.; gli ipercampi nel senso di MC divengono così gli ipercampi inseparabili. Qui interessa in particolare il risultato seguente:

3.42 TEOREMA. *Sia σ un isomorfismo di immersione dell'ipercampo S nell'ipercampo R , e suppongasì che $\text{conull } \sigma = 0$, cosicchè R, S sono isogeni; allora il grado di σ è la dimensione dello spazio vettoriale R/J su k , J essendo l'ideale chiuso di R generato da S^+ ; inoltre R è un S -modulo libero, il cui numero di generatori liberi coincide di nuovo col grado di σ .*

DIM. Basta dimostrare il risultato separatamente nel caso in cui $R_t = 0$, e nel caso in cui $R = R_t$ (onde lo stesso varrà per S). Nel primo caso, per il 5 del 5.7 di MC, esiste un sistema regolare di parametri $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ di R , ed esistono degli interi $s_1, \dots, s_n$, tali che $\{\pi^{s_1} \xi_1, \dots, \pi^{s_n} \xi_n\}$ sia un sistema regolare di parametri di S ; il grado di σ è in questo caso p^l , ove $l = \sum s_i$; e dall'altra parte, i monomi monici nelle $\xi_1, \dots, \xi_n$, di grado $< p^{s_i}$ nelle ξ_i , formano un insieme libero di generatori di R come S modulo; le immagini di questi in R/J formano un insieme libero di generatori di R/J come k -modulo.

Sia invece $R = R_t$; allora si è visto nella dimostrazione del 3.38 che esistono elementi $y_1, \dots, y_n$ di $\mathcal{C}R$ (ciascuno essendo la y del proprio $R_{0,1}$ nelle notazioni del 3.31), e degli interi $s_1, \dots, s_n$, tali che S sia generato dalle $y_{i,-j}$ con $j > s_i$; il 3.31 dice allora che R ha, come S -modulo, l'insieme libero di generatori formato dai monomi monici nelle $y_{i,-j}$ con $j \leq s_i$, di grado $< p$ in ciascun $y_{i,-j}$; questi sono appunto in numero di p^l , se di nuovo $l = \sum s_i$. Le immagini di questi monomi in R/J formano un insieme libero di generatori di R/J come k -modulo, C. V. D..

3.43 TEOREMA. *Sia R un ipercampo; allora la topologia di $\mathcal{C}R$ come sottospazio di $\text{cov } R$ coincide con la sua topologia come K -modulo canonico.*

DIM. Sia α la topologia di $\text{cov } R$ (cfr. n° 7), e β la topologia di $\mathcal{C}R$ come K -modulo canonico. La β è determinata dagli intornoi $p^n \mathcal{C}R = p^n \iota \mathcal{C}R = \mathcal{C}(p^n \iota R)$ dello 0, per 3.33, 3.39; la α è determinata, nelle notazioni del n° 7, dagli U' , ove gli U sono intornoi dello 0 in R ; ora, per intornoi dello 0 in R possono anche prendersi gli ideali chiusi generati dai $(p^n \iota R)^+$, che indicheremo con J_n . Ma $J_n \cap \mathcal{C}R = \mathcal{C}(p^n \iota R) = p^n \mathcal{C}R$ per 3.39; C. V. D..

Dato che un ipercampo R è limite inverso delle iperalgebre finite R/J_n , ove i J_n hanno il significato della precedente dimostrazione, si ha:

3.44 TEOREMA. *Gli ipercampi soddisfano alla condizione per l'applicabilità del 3.17.*

31. Chiudiamo questo capitolo con alcune osservazioni. Intanto, da MC (n° 4) appare chiaro che non appena un'iperalgebra linearmente compatta è un anello locale regolare completo con corpo residuo k , essa è anche un ipercampo, con componente separabile banale; non occorre cioè investigare la natura di $\mathbf{P}$. Invece, per stabilire che una iperalgebra linearmente compatta è un ipercampo separabile, ossia isomorfo ad un $R_{0,n}$, occorre proprio trovare le $e_{h_1} \overline{\times} \dots \overline{\times} e_{h_n}$, con le proprietà descritte da 3.27, ivi compreso il $\mathbf{P}$; ed infatti, se nelle 3.27 si permette ad h di percorrere un qualsiasi gruppo abeliano infinito non isomorfo a $\text{cov } C_p$, si ottiene un'iperalgebra che, come algebra, è isomorfa ad $R_{0,1}$, ma che non è un ipercampo.

Le iperalgebre discrete che sono duali degli ipercampi sono per ora passate in sottordine; esse sono i prodotti di una $D_{n,0}$ per una « iperalgebra equidimensionale » nel senso di MC. Saranno chiamate *cocampi*, ed avranno un ruolo importante nel prossimo capitolo.

Un altro ente che non ha neppure fatto la sua comparsa, e che non avrà nessun ruolo nel resto di questa trattazione, è quello dei *gruppi analitici*. Sia R un'iperalgebra, o in particolare un ipercampo; per ogni k algebra topologica completa Ω si possono considerare gli omomorfismi continui $P: x \rightarrow x(P)$ di R su Ω che applicano 1 su 1; se P, Q sono due di essi, si può definire $P + Q$ mediante la $x(P + Q) = \mu_\Omega(Px)(P \otimes Q)$; se R possiede un'inversione, l'insieme di tali P diviene un gruppo, detto *gruppo analitico*, ed indicato con $G(R, \Omega)$; i suoi elementi ne sono i *punti*. Se Ω è « abbastanza grande », e se R è ristretto ad essere un ipercampo, gli omomorfismi fra gli R hanno dei duali fra i rispettivi $G(R, \Omega)$, e tale dualità si comporta nel modo migliore possibile, ossia: il $\sigma: R \rightarrow S$ è su tutto S se e solo se il $\sigma': G(S, \Omega) \rightarrow G(R, \Omega)$ dato da $x(\sigma' P) = (\sigma x)(P)$ è un isomorfismo; σ è isomorfismo se e solo se σ' è su tutto $G(R, \Omega)$, ecc.. Si ha per esem-

pio $G(R_{0,1}, k) = \text{cov } C_p$; $G(R_{r,s}, k) = 0$ (r, s primi fra loro); $G(R_{1,0}, k\{\xi\})$, con ξ indeterminata, è isomorfo al gruppo delle unità di $k\{\xi\}$ che sono $\equiv 1 \pmod{\xi k\{\xi\}}$.

APPENDICE AL CAPITOLO 3.

Notazioni come al principio del n° 19; si è asserito nel n° 19 che gli insiemi $U \otimes B + A \otimes V$ hanno intersezione ridotta al solo elemento 0. Quando le topologie non siano numerabili, la dimostrazione di questo fatto non è ovvia; espongo quindi una dimostrazione, dovuta ad F. Mantovani. Gli $U \otimes B + A \otimes V$ definiscono in $A \otimes B$ una topologia k -lineare eventualmente non di Hausdorff, ossia eventualmente senza la proprietà descritta; si tratta di dimostrare che essa è di Hausdorff, e per questo basta trovare, per ogni $x \in A \otimes B$ non nullo, un omomorfismo continuo σ_x di $A \otimes B$ su k tale che $\sigma_x x \neq 0$: infatti in tal caso $\sigma_x^{-1} 0$ è un intorno dello 0 in $A \otimes B$ che non contiene x .

Per dimostrare l'esistenza di tale σ_x , si scelgano delle basi $\{a_r\}$, $\{b_s\}$ di A, B rispettivamente, e sia $x \neq 0$ un elemento di $A \otimes B$, per esempio $x = \sum c_{rs} a_r \otimes b_s$, con i c_{rs} elementi non tutti nulli di k , e con la Σ estesa ad insiemi finiti R (per r), S (per s). Se per esempio $c_{r_0 s_0} \neq 0$, si scelgano degli omomorfismi continui α, β di A, B su k , tali che $\alpha a_r = \delta_{r_0 r}$, $\beta b_s = \delta_{s_0 s}$ ($r \in R, s \in S$); l'elemento σ_x cercato è allora quello che applica $\sum d_{ij} \alpha_i \otimes \beta_j$ su $\sum d_{ij} (\alpha a_i) (\beta b_j)$: infatti $\sigma_x x = c_{r_0 s_0} \neq 0$.

CAPITOLO 4.

I b i c a m p i .

32. In questo capitolo dovremo fare largo uso di limiti diretti ed inversi, ed è bene intendersi sulle topologie da assegnare loro. Sia $\mathcal{R}$ limite inverso di k -moduli R_i , ove k è un corpo, mediante gli omomorfismi σ_{ij} di R_i su tutto R_j ($i > j$); gli indici si suppone percorrano l'insieme degli interi, o un suo sottoinsieme; gli R_i siano dotati di topologie k -lineari, ed i σ_{ij} siano continui. Assegneremo ad $\mathcal{R}$ la topologia meno fina fra le k -lineari che rendono continui gli omomorfismi naturali σ_i di $\mathcal{R}$ su tutto R_i (al solito, la discreta è considerata la topologia più fina). Un sistema di intorni dello 0 in $\mathcal{R}$ per tale topologia è l'insieme dei V ciascuno dei quali è, per qualche i , immagine inversa in $\mathcal{R}$, secondo σ_i , di un intorno dello 0 in R_i . Se ogni R_i è una k -algebra topologica, tale è $\mathcal{R}$; e se la topologia di ogni R_i è R_i -lineare, quella di $\mathcal{R}$ risulta $\mathcal{R}$ -lineare. Se ogni R_i è completo, anche $\mathcal{R}$ risulta completo.

Per quanto riguarda i limiti diretti, vi è una differenza sostanziale secondo che le topologie siano k -lineari o R_i -lineari; a noi interessa solo il secondo caso. Sia dunque $\mathcal{R}$ limite diretto delle k -algebre R_i mediante gli isomorfismi (di algebre) σ_{ij} di R_i su R_j ($i < j$); ogni R_i sia dotata di una topologia R_i -lineare, ed i σ_{ij} siano continui. Assegneremo ad $\mathcal{R}$ la topologia più fina fra le $\mathcal{R}$ -lineari che rendono continui tutti gli isomorfismi naturali σ_i di R_i su $\mathcal{R}$. Un sistema di intorno dello 0 in $\mathcal{R}$ è dato dagli ideali U di $\mathcal{R}$ tali che $U \cap \sigma_i R_i$ contenga, per ogni i , l'immagine secondo σ_i di un intorno dello 0 in R_i ; un sistema cofinale con questo è l' $\mathcal{U}$ così definito: $U \in \mathcal{U}$ se e solo se esiste un'applicazione $i \rightarrow U_i$, con U_i intorno dello 0 in R_i (e ideale di R_i), tale che $U = \sum_i (\sigma_i U_i) \mathcal{R}$. Il caso che ci interessa di più è quello in cui gli U_i possono essere scelti in modo che per ogni U_i di R_i , ed ogni $j > i$, $(\sigma_{ij} U_i) R_j$ sia aperto in R_j , e si abbia $(\sigma_{ij} U_i) R_j \cap \sigma_{ij} R_i = \sigma_{ij} U_i$; in tal caso i σ_{ij} sono bicontinui, i σ_i risultano anch'essi bicontinui, ed un sistema di intorno dello 0 in $\mathcal{R}$ è dato dai $(\sigma_i U_i) \mathcal{R}$ al variare di i , e quando U_i percorre, per ogni i , un sistema di intorno dello 0 in R_i che siano ideali.

Da notare che $\mathcal{R}$ può benissimo essere non completa anche quando tutte le R_i sono complete.

33. Sia R un ipercampo sul corpo k (algebricamente chiuso, di caratteristica p), sia D il cocampo duale di R , e sia n un intero ≥ 0 ; nelle notazioni del 3.22, si definiscano gli enti seguenti (cfr. 3.38 e 3.40):

$$p^n \iota R \rightarrow J_n \dashrightarrow D^n \rightarrow C_n \dashrightarrow p^n \iota R;$$

pongasi $R^n = R/J_n$; sia σ_n l'omomorfismo naturale di R su tutto R^n , e sia τ_n l'isomorfismo di immersione di D^n in D . Allora R^n , D^n sono iperalgebre, duali l'una dell'altra; per 3.42 la loro dimensione, come k -moduli, coincide col grado di $p^n \iota$; questo a sua volta è dato da $p^n \nu$, se $\nu = \text{ord } R = \text{ord } \mathcal{C}R$. Definiamo gli omomorfismi p_+ , p_- di iperalgebre finite richiedendo che siano commutativi i seguenti diagrammi, duali l'uno dell'altro:

$$\begin{array}{ccc}
 & p^\iota & \\
 R & \xrightarrow{\quad} & R \\
 \sigma_n \downarrow & & \downarrow \sigma_{n+1} \\
 R^n & \xrightarrow{\quad} & R^{n+1} \\
 & p_+ &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & p^\iota & \\
 D & \xleftarrow{\quad} & D \\
 \tau_n \uparrow & & \uparrow \tau_{n+1} \\
 D^n & \xleftarrow{\quad} & D^{n+1} \\
 & p_- &
 \end{array}
 ;$$

quindi p_- è duale di p_+ ; il p_+ è un isomorfismo, e il p_- è su tutto D^n . Vi sono poi gli omomorfismi naturali $\sigma_{n+1,n}$ di R^{n+1} su tutto R^n , e $\tau_{n,n+1}$ di

immersione di D^n in D^{n+1} ; si vede facilmente che

$$p_{R^n}^+ = \sigma_{n+1,n} p_+ = p_+ \sigma_{n+1,n}$$

4.2

$$p_{D^n}^- = p_- \tau_{n,n+1} = \tau_{n,n+1} p_-.$$

Infine, R è il limite inverso degli R^n secondo i $\sigma_{n,m}$, e D è il limite diretto dei D^n secondo i $\tau_{n,m}$; ciò vale non solo come k -moduli topologici, ma anche come iperalgebre.

4.3 TEOREMA. *Nelle notazioni precedenti, siano $\tilde{R}, \tilde{D}$ rispettivamente il limite inverso $D^0 \xleftarrow{p_-} D^1 \xleftarrow{p_-} D^2 \xleftarrow{p_-} \dots$, e il limite diretto $R^0 \xrightarrow{p_+} R^1 \xrightarrow{p_+} R^2 \xrightarrow{p_+} \dots$; allora $\tilde{R}, \tilde{D}$ sono rispettivamente un ipercampo e un cocampo, duali l'uno dell'altro secondo la dualità indotta da quella fra gli R^n e i D^n ; si ha inoltre $\tilde{R}^n \cong D^n$, $\tilde{D}^n \cong R^n$. Infine, $\mathcal{C}\tilde{R}$ è isomorfo al duale di $\mathcal{C}R$.*

DIM. Se il risultato è vero per ciascun fattore di un prodotto tensoriale completo, è vero per il prodotto; basta quindi dimostrarlo in alcuni casi speciali.

Caso 1. Suppongasi $D = D_{1,0}$; in tal caso, nelle notazioni del 3.27, J_n è l'insieme delle combinazioni lineari infinite, a coefficienti in k , degli e_h tali che $p^n h \neq 0$ (cfr. 3.30); quindi D^n ha per base l'insieme degli f_h tali che $p^n h = 0$. Il μ , l' ε , e il $\mathbf{P}$ di D^n sono dati da 3.26; il p_- , per 4.1 e 3.30, è dato da $p_- f_h = f_{ph}$. Se $S = R_{1,0}$, occorre far vedere che vi è un isomorfismo α di D^n su tutto S^n (tralasciando di apporre un indice n ad α) che rende commutativo il diagramma

4.4

$$\begin{array}{ccc} D^{n+1} & \xrightarrow{p_-} & D^n \\ \alpha \downarrow & & \downarrow \alpha \\ S^{n+1} & \xrightarrow{\sigma_{n+1,n}} & S^n \end{array}.$$

Ora, S è l'anello locale $k[x]$, con $\mathbf{P}x = \Phi(x \overline{\times} 1, x \overline{\times} 1, \dots; 1 \overline{\times} x, 1 \overline{\times} x, \dots)$; ma per quanto esposto a p. 359 di MC, vi è un $y \in S$ tale che $S = k\{y-1\}$, $\mathbf{P}y = y \overline{\times} y$, $\varepsilon y = 1$ (la relazione fra x ed y è $y = F(x)$, con F data dal 2.9). Pertanto una base di S^n è data dai $\sigma_n y^i$, ove $i = 0, 1, \dots, p^n - 1$, e ove

$(\sigma_n y)^{p^n} = 1$. Se si definisce $\alpha f_{p^{-n}i} = \sigma_n y^i$, si constata appunto che α è un isomorfismo di iperalgebre di D^n su tutto S^n , che rende il 4.4 commutativo. Ciò dimostra che $\tilde{R}$ esiste ed è isomorfo a $R_{1,0}$.

Caso 2. Suppongasi $D = D_{0,1}$; dal 5.3 di MC sappiamo che esiste un vettore di Witt $\bar{d} = (d_0, d_1, \dots)$, $d_i \in D$, tale che $\mathbf{P}\bar{d} = \bar{d} \overline{\times} 1 + 1 \overline{\times} \bar{d}$, e tale che i monomi monici nelle $\bar{d}_i$, di grado $< p$ in ciascun $\bar{d}_i$, formino una base di D come spazio vettoriale su k ; inoltre $\pi \bar{d}_i = \bar{d}_i^p = d_i$. Il D^n è il B del 5.7 di MC quando il σ di tale enunciato sia $p^n i$; quindi una base di D^n è formata dai monomi monici, di grado $< p$ in ciascun $\bar{d}_i$, nelle $\bar{d}_0, \bar{d}_1, \dots, \bar{d}_{n-1}$. È $\varepsilon \bar{d}_i = 0$, $\mathbf{P}\bar{d}_i = \Phi(\bar{d}_i \overline{\times} 1; \dots, \bar{d}_0 \overline{\times} 1, 0, 0, \dots; 1 \overline{\times} \bar{d}_i, \dots, 1 \overline{\times} \bar{d}_0, 0, 0, \dots)$, $p_- \bar{d}_{i+1} = \bar{d}_i$, $p_- \bar{d}_0 = 0$.

Se $S = R_{0,1}$, vogliamo trovare un α di D^n su tutto S^n che soddisfi il 4.4. Nelle notazioni del 3.31, $p^n i S$ è generato dalle $y_{-n-1}, y_{-n-2}, \dots$ (come k -algebra chiusa); quindi S^n ha per base, come k -modulo libero, i monomi monici nelle $\sigma_n y_{-1}, \dots, \sigma_n y_{-n}$, di grado $< p$ in ogni $\sigma_n y_i$; e inoltre $\pi(\sigma_n y_{-i}) = \sigma_n y_{-i}$. Il $\mathbf{P}$ e l' ε sono dati dal 3.31, e pertanto l' α cercato è: $\alpha d_{n-i} = \sigma_n y_{-i}$. Ciò dimostra che $\tilde{R}$ esiste ed è isomorfo ad $R_{0,1}$.

Caso 3. Suppongasi che $D = D_r$, ossia che in D manchino i fattori tensoriali che sono duali di ipercampi separabili o logaritmici; in tal caso vi è ciò che in MC è indicato con $\mathcal{C}(D)$ (p. 351 di MC), e che qui sarà indicato con $\mathcal{V}D$: il K -modulo canonico dei vettori canonici di Witt a componenti in D , che è anche un T -modulo canonico. Nella nomenclatura di MC, $\mathcal{V}D$ è il « trasposto di $\mathcal{C}(R)$ » (cfr. 7.2 di MC). Occorre notare però che se si considerano un covettore $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1})$, ed un vettore $\{c\} = (c, 0, 0, \dots)$, $c \in k$, il prodotto $\{c\}x$ usato in MC è $\{c\}x = (\dots, c^{p^{-1}}x_{-2}, cx_{-1})$ (p. 366 di MC), mentre quello usato nel presente lavoro (n° 7) è $\{c\}x = (\dots, c^{p^{-2}}x_{-2}, c^{p^{-1}}x_{-1})$. Se perciò x denota un covettore, ed x' è lo stesso covettore nel senso di MC, l'applicazione $x \rightarrow x'$ è un π^{-1} semiisomorfismo di K -moduli. Ne segue che il $\mathcal{C}(R)$ del n° 7 di MC è isomorfo a $t\mathcal{C}R$, e che quindi $t\mathcal{C}R$ è il « trasposto » di $\mathcal{V}D$ (7.2 di MC). Ma allora, per il 3.10 di MC, $\mathcal{C}R$ è il duale di $\mathcal{V}D$, sia nel senso del n° 3 di MC, che nel senso del n° 18.

Sia $d_1, \dots, d_m$ un insieme minimo di generatori di $\mathcal{V}D$ come T modulo canonico, e sia d la matrice ad una colonna delle d_i . Per il 2.8 di MC vi è una matrice C , ad elementi in T , tale che $\pi d = Cd$. Sia $S = S_r$ l'ipercampo tale che $\mathcal{C}S$, considerato come T -modulo canonico, sia isomorfo a $\mathcal{V}D$ (3.40), e siano $x_1, \dots, x_m$ i corrispondenti di $d_1, \dots, d_m$ in $\mathcal{C}S$; definiamo, in questo caso, dei D_0^r, S_0^r non per mezzo dei $p^r i$, ma per mezzo dei t^r ; nelle nota-

zioni del 3.22 :

$$\pi^r R \rightarrow J_r^0 \rightarrow D_0^r, \quad t^r S \rightarrow H_r^0, \quad S_0^r = S/H_r^0.$$

In luogo del secondo diagramma del 4.1 occorre usare il

$$4.5 \quad \begin{array}{ccc} & \xleftarrow{t} & D \\ \tau_r^0 \uparrow & & \uparrow \tau_{r+1}^0 \\ D_0^r & \xleftarrow{t_-} & D_0^{r+1} \end{array},$$

ove ora t_- è un π^{-1} -semiomorfismo di D_0^{r+1} su tutto D_0^r .

Troveremo un π^{-r} -semiisomorfismo α_0 di D_0^r su tutto S_0^r che rende commutativo il diagramma

$$4.6 \quad \begin{array}{ccc} & \xrightarrow{t_-} & D_0^r \\ \alpha_0 \downarrow & & \downarrow \alpha_0 \\ S_0^{r+1} & \xrightarrow{\sigma_{n+1,n}^0} & S_0^r \end{array},$$

che sostituisce il 4.4. In tal modo avremo dimostrato che S è isomorfo al limite inverso dei D_0^r mediante i t_- . A tale scopo, osserviamo anzitutto che per il 5.6 di MC D_0^r è generato, come k -algebra, dai d_{ij} con $j < r$; la dimensione di D_0^r come spazio vettoriale su k è la stessa della dimensione di $R_0^r = R/J_r^0$, e questa è, per 3.42, il grado del semiomorfismo π^r di R , ossia p^{mr} ; poichè tutti i d_{ij} formano una p -base di D , quelli con $j < r$ formano una p -base di D_0^r . La descrizione completa di D_0^r consiste, oltre che di questo fatto, delle proprietà seguenti :

1. $\varepsilon d_{ij} = 0$;

2. posto $d'_i = (d_{i,0}, \dots, d_{i,r-1})$ (vettore finito di Witt), detta d' la matrice ad una colonna i cui elementi sono i d'_i , chiamata C' la matrice ottenuta da C troncando ogni elemento di K dopo la componente di indice $r-1$, e fatta la convenzione che l'operatore t , applicato al vettore finito $(z_0, \dots, z_{r-1})$, produca $(0, z_0, \dots, z_{r-2})$, si ha : $\pi d' = C' d'$;

3. $\mathbf{P}d'_i = d'_i \varpi + 1 + 1 \varpi d'_i$.

Inoltre, il t_- (fornito da 4.5) di D_0^{r+1} su D_0^r è dato da : $t_- d_{i,j+1} = d_{i,j}$ ($j = 0, \dots, r-2$), $t_- d_{i,0} = 0$.

D'altra parte, una p -base di S_0^r è data dai $\sigma_r^0 x_{i,-j}$ per $j = 1, \dots, r$, ove σ_r^0 ha il nucleo H_r^0 ; le analoghe di 1, 2, 3 per S_0^r sono:

$$1'. \varepsilon \sigma_r^0 x_{i,-j} = 0;$$

2'. posto $x'_i = (\sigma_r^0 x_{i,-r}, \dots, \sigma_r^0 x_{i,-1})$ (vettore finito di Witt), e detta x' la matrice ad una colonna i cui elementi sono gli x'_i , si ha $\pi x' = C'^{r-n} x'$;

$$3'. P x'_i = x'_i \overline{\times} 1 + 1 \overline{\times} x'_i.$$

Il π^{-r} -semiisomorfismo α_0 di D_0^r su tutto S_0^r che soddisfa la 4.6 è allora dato da: $\alpha_0 d'_i = x'_i$, ossia $\alpha_0 d_{i,j} = \sigma_r^0 x_{i,j-r}$ ($j = 0, \dots, r-1$).

Visto così che S è isomorfo al limite inverso dei D_0^r mediante i t_- , occorre intanto controllare che $\mathcal{C}S$ sia isomorfo al duale di $\mathcal{C}R$, ossia, come si è visto, a $\mathcal{V}D$; ma ciò è conseguenza immediata del fatto che $\pi d = C d$ e $\pi x = C x$. Occorre poi controllare che $S \cong \tilde{K}$, ossia che S sia anche isomorfo al limite inverso dei D^n mediante i p_- ; ciò si otterrà dimostrando l'esistenza di un isomorfismo α di D^n su tutto S^n , per ogni n , che renda commutativo il diagramma 4.4. Iniziamo con l'osservare che, dato n , per r elevato l'omomorfismo naturale σ_n di S su tutto S^n si spezza in $\sigma_n = \eta_n^r \sigma_r^0$, ove gli η_n^r sono omomorfismi di S_0^r su tutto S^n che soddisfano la relazione:

$$4.7 \quad \eta_n^r = \sigma_{n+1,n} \eta_{n+1}^r, \quad \eta_n^{r+1} = \eta_n^r \sigma_{r+1,r}^0.$$

Sia poi $d \in D$; poichè p è omomorfismo di D su tutto D , esiste un $d' \in D$ tale che $p^n d' = d$; inoltre, poichè per r elevato il nucleo di t_D^r contiene quello di $p^n \iota_D$, l'elemento $t^r d'$ di D è univocamente determinato da d ; si ha cioè un π^{-r} -semiomomorfismo $d \rightarrow t^r d'$ di D su tutto D , che indicheremo con $(t^r p^{-n} \iota)$. Se d appartiene anche a D_0^r , ricordando che questa è la massima sottoalgebra di D che soddisfa la $t^r D_0^r = 0$ si conclude che $(t^r p^{-n} \iota) d \in D^n$: esiste cioè un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccc} D & \xleftarrow{(t^r p^{-n} \iota)} & D \\ \tau^n \uparrow & & \uparrow \tau_r^0 \\ D^n & \xleftarrow{(t_-^r p_-^{-n})} & D_0^r \end{array},$$

ove $(t_-^r p_-^{-n})$ è un π^{-r} -semiomomorfismo di D_0^r su tutto D^n ; come conseguenza delle 4.5 e 4.1 si ha:

$$4.8 \quad (t_-^{r+1} p_-^{-n}) = (t_-^r p_-^{-n}) t_-, \quad (t_-^r p_-^{-n}) = p_- (t_-^r p_-^{-n-1}).$$

Osserviamo ora che il nucleo di $(t_-^r p_-^{-n})$ ha $p^n \iota D_0^r$ come nocciolo, mentre il nucleo di η_n^r ha come nocciolo $p^n \iota S_0^r$; pertanto esiste un isomorfismo $\beta_n^{(r)}$ di

D^n su tutto S^n che rende commutativo il

$$\begin{array}{ccc} D_0^r & \xrightarrow{(t_-^r p_-^r)} & D^n \\ \alpha_0 \downarrow & & \downarrow \beta_n^{(r)} \\ S_0^r & \xrightarrow{\eta_n^r} & S^n \end{array} .$$

In virtù delle 4.6, 4.8, 4.7, $\beta_n^{(r)}$ è indipendente da r , quando r è elevato, e può quindi essere indicato con β_n ; e in virtù delle 4.8, 4.7 è commutativo il diagramma

$$\begin{array}{ccc} D^{n+1} & \xrightarrow{p_-} & D^n \\ \beta_{n+1} \downarrow & & \downarrow \beta_n \\ S^{n+1} & \xrightarrow{\sigma_{n+1,n}} & S^n \end{array} ,$$

che è appunto il 4.4.

Caso 4. In tutti i casi precedenti si è costruito $\tilde{K}$ partendo da D ; si dovrebbe ora costruire, in ogni caso, $\tilde{D}$ partendo da R . Ma il metodo è lo stesso, ed anzi ciascuna delle dimostrazioni precedenti può essere letta in ordine inverso, dando appunto la costruzione di $\tilde{D}$ a partire da R . Il resto dell'enunciato è palese, C. V. D..

Torniamo ora sulle 4.2, alla luce del 4.3; si constata che il $\sigma_{n+1,n}$ di R^{n+1} su tutto R^n non è altro che il p_- di $\tilde{D}^{n+1}$ su tutto $\tilde{D}^n$; e che il $\tau_{n,n+1}$ di D^n su D^{n+1} è il p_+ di $\tilde{K}^n$ su $\tilde{K}^{n+1}$; essi saranno perciò così indicati, e le 4.2 diverranno:

$$4.9 \quad p_{\iota R^n} = p_- p_+ = p_+ p_- .$$

34. Premettiamo che per i cocampi verrà usata la stessa nomenclatura che si usa per gli ipercampi loro duali (ordine, dimensioni, ecc.). Un *bicampo* su k è un'iperalgebra $\mathcal{D}$ su k tale che:

1. p_{ι} è un isomorfismo (bicontinuo) di $\mathcal{D}$ su tutto $\mathcal{D}$;
2. esiste un omomorfismo σ di $\mathcal{D}$ su tutto un cocampo D (su k);
3. $\mathcal{D}$ è universale rispetto alle proprietà 1 e 2, con lo stesso D , ossia: se $\mathcal{D}', \sigma', D$ godono delle 1 e 2, esiste un omomorfismo τ di $\mathcal{D}'$ su tutto $\mathcal{D}$ tale che $\sigma' = \sigma\tau$.

Dato D , si costruisca il limite inverso $\mathcal{D}$ della $D \xleftarrow{p_{\iota}} D \xleftarrow{p_{\iota}} D \xleftarrow{p_{\iota}} \dots$; esso soddisfa ovviamente alla 2; soddisfa poi alla 1 in quanto $p_{\iota\mathcal{D}}$ è su

tutto $\mathcal{D}$ perchè p_{ι_D} è su tutto D ; e inoltre p_{ι_D} è un isomorfismo bicon-
tinuo per motivi ovvii. Se poi $\mathcal{D}', \sigma'$ sono come in 3, il τ è ottenuto facendo
corrispondere ad un $d' \in \mathcal{D}'$ l'elemento $d = \{\sigma' d', \sigma' (p\iota)^{-1} d', \sigma' (p\iota)^{-2} d', \dots\} \in \mathcal{D}$.
Reciprocamente, dato un bicampo $\mathcal{D}$, esso è isomorfo a quello ora costruito
come limite inverso, per mezzo dell'isomorfismo che a $d \in \mathcal{D}$ fa corrispondere
il $\{\sigma d, \sigma (p\iota)^{-1} d, \sigma (p\iota)^{-2} d, \dots\}$.

4.10 LEMMA. *Siano $\mathcal{D}, D, \sigma$ un bicampo, un cocampo, e un omomorfismo
che soddisfino le condizioni 1, 2, 3 sopraelencate. Sia τ un omomorfismo di $\mathcal{D}$
su tutto un cocampo D' ; allora esistono un intero $n \geq 0$ e un omomorfismo
 τ' di D su tutto D' che rendono commutativo il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\tau} & D' \\ \sigma \downarrow & & \downarrow p^n \iota \\ D & \xrightarrow{\tau'} & D' \end{array}$$

DIM. Basta dimostrare che il nucleo J di σ è contenuto nel nucleo di
 $p^n \tau$, per n elevato. E infatti, essendo D' discreto, deve esistere un intorno
 U dello 0 in $\mathcal{D}$ tale che $\tau U = 0$; essendo $\mathcal{D}$ limite inverso di $D \xleftarrow{p\iota} D \xleftarrow{p\iota} \dots$,
si può supporre che tale U consista dei $d \in \mathcal{D}$ colla proprietà $\sigma (p^n \iota)^{-1} d = 0$;
è cioè $U = p^n \iota J$. Quindi la $\tau U = 0$ significa $p^n \tau J = 0$, C. V. D..

4.11 LEMMA. *Siano $\mathcal{D}, D, \sigma$ e $\mathcal{D}', D', \sigma'$ due terne che soddisfano le con-
dizioni 1, 2, 3; sia τ un omomorfismo di $\mathcal{D}$ su D' ; esiste allora un unico
omomorfismo τ_0 di $\mathcal{D}$ su $\mathcal{D}'$ che rende commutativo il diagramma*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow{\tau_0} & \mathcal{D}' \\ & \searrow \tau & \downarrow \sigma' \\ & & D' \end{array}$$

*Poi, τ è su tutto D' se e solo se τ_0 è su tutto $\mathcal{D}'$. Infine, $\mathcal{D}, \mathcal{D}'$ sono isomorfi
se e solo se D, D' sono isogeni.*

DIM. Un τ_0 si ottiene ponendo, per $d \in \mathcal{D}$, $\tau_0 d = \{\tau d, \tau (p\iota)^{-1} d, \tau (p\iota)^{-2} d, \dots\} \in \mathcal{D}'$. L'unicità discende dall'osservare che per un τ_0 qualsiasi si
deve avere $\sigma' \tau_0 d = \tau d$, ecc. La seconda asserzione è conseguenza immediata
della costruzione di τ_0 . Infine, il diagramma del 4.11 e quello del 4.10, uniti,

danno il seguente diagramma commutativo⁽¹⁾

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\tau_0} & D' \\
 \sigma \downarrow & \searrow \tau & \downarrow \sigma' \\
 & & D' \\
 & & \downarrow p^{n_i} \\
 D & \xrightarrow{\tau'} & D'
 \end{array} ,$$

donde l'asserzione sulle isogenie, C. V. D..

Si vede da quanto precede che un cocampo definisce un bicampo a meno di isomorfismi, e che un bicampo definisce un cocampo a meno di isogenie; il bicampo e il cocampo si diranno allora *legati* l'un l'altro da σ .

35. Sia $\mathcal{D}$ un bicampo, legato da σ al cocampo D ; sia R l'ipercampo duale di D ; sia D^n il nocciolo del nucleo di $p^n \iota_D$, che è lo stesso significato attribuito a D^n nel n° 33. Indicheremo con $\tilde{R}_n$ l'insieme dei $d \in \mathcal{D}$ tali che $\sigma(p\iota)^{-i} d \in D^{n+i}$ per ogni intero $i \geq 0$. Se gli elementi di $\mathcal{D}$ vengono scritti sotto la forma $d = \{d_0, d_1, \dots\}$, con $d_i \in D$ e $p d_{i+1} = d_i$, si avrà $d \in \tilde{R}_n$ se e solo se $d_i \in D^{n+i}$ per ogni i ; pertanto $\tilde{R}_n$ è il limite inverso della $D^n \xleftarrow{p_-} D^{n+1} \xleftarrow{p_-} D^{n+2} \xleftarrow{p_-} \dots$, ed è quindi bicontinualmente isomorfo ad $\tilde{R}$ per il 4.3. Si ha ovviamente $\tilde{R}_0 \subseteq \tilde{R}_1 \subseteq \dots$, e l'unione degli $\tilde{R}_i$ è una sottoalgebra di $\mathcal{D}$, che verrà sempre denotata con $\mathcal{D}^0$; essa è isomorfa al limite diretto di $\tilde{R} \xrightarrow{p^+} \tilde{R} \xrightarrow{p^+} \tilde{R} \xrightarrow{p^+} \dots$, per 4.1 e 4.9. La topologia di ogni $\tilde{R}_i$, ossia quella indotta dalla topologia di $\mathcal{D}$, è anche quella di ipercampo, e la topologia di $\mathcal{D}^0$, indotta da quella di $\mathcal{D}$, è anche quella di limite diretto (n° 32).

4.12 TEOREMA. Nelle notazioni precedenti, $\mathcal{D}^0$ è univocamente determinata da $\mathcal{D}$ (ossia è indipendente dalla scelta di D e σ), ed è densa in $\mathcal{D}$.

DIM. Per la prima asserzione, suppongasi che $\mathcal{D}$ sia legata a D da σ e a D' da σ' ; allora, per 4.10 esiste un intero m tale che $p^m \sigma' = \tau' \sigma$, ove τ' è una isogenia di D su tutto D' . Sia $\tilde{R}_n$ costruito con D , σ , ed $\tilde{R}'_n$ con D' , σ' . Se $d \in \tilde{R}_n$ si ha $\sigma(p\iota)^{-i} d \in D^{n+i}$ per ogni i ; quindi $p^m \sigma' (p\iota)^{-i} d \in \tau' D^{n+i} \subseteq D'^{n+i}$, ossia $\sigma' (p\iota)^{m-i} d \in D'^{(n+m)+(i-m)}$, e infine $d \in \tilde{R}'_{n+m}$. Quindi $\tilde{R}_n \subseteq \tilde{R}'_{n+m}$, e pertanto il $\mathcal{D}^0$ costruito con σ e D è contenuto in quello costruito con σ' e D' ; ciò prova, per la simmetria delle relazioni di isogenia, che essi coincidono.

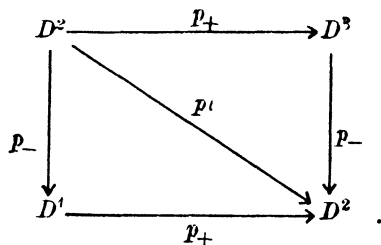
(1) Errata: in questo diagramma leggasi $p^n \iota$ in luogo di p^{n_i} .

Sia poi $d \in \mathcal{D}$, e sia U l'intorno dello 0 in $\mathcal{D}$ formato dai $\delta \in \mathcal{D}$ per i quali $\sigma(p_i)^{-n} \delta = 0$. Per un m opportuno si avrà $\sigma(p_i)^{-n} d \in D^{m+n}$, onde $\sigma(p_i)^{-i} d \in D^{m+i}$ quando $i \leq n$; se allora si sceglie d' in $\tilde{R}_m$ in modo che $\sigma(p_i)^{-i} d' = \sigma(p_i)^{-i} d$ per $i \leq n$, si constata subito che $d - d' \in U$, C. V. D..

Il 4.3, unito a quanto precede, permette di costruire il seguente diagramma commutativo, nel quale si riassumono i legami fra D , $\mathcal{D}$, R , $\mathcal{D}^0$, D^n ; in esso alcune successioni che definiscono limiti diretti o inversi vengono prese aperte anche a sinistra (o in basso), il che evidentemente non cambia nulla; κ è l'isomorfismo di immersione di $\mathcal{D}^0$ in $\mathcal{D}$; le successioni verticali definiscono limiti inversi; quelle orizzontali, diretti:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \xrightarrow{p_i} & \tilde{R} & \xrightarrow{p_i} & \tilde{R} & \xrightarrow{p_i} & \dots & \mathcal{D}^0 & \xrightarrow{\kappa} & \mathcal{D} \\
 & & \vdots & & \vdots & & & & & \vdots \\
 & & p_- \downarrow & & p_- \downarrow & & & & & p_i \downarrow \\
 \dots & \xrightarrow{p_+} & D^3 & \xrightarrow{p_+} & D^4 & \xrightarrow{p_+} & \dots & & & D \\
 & & p_- \downarrow & & p_- \downarrow & & & & & p_i \downarrow \\
 \dots & \xrightarrow{p_+} & D^2 & \xrightarrow{p_+} & D^3 & \xrightarrow{p_+} & \dots & & & D \\
 & & p_- \downarrow & & p_- \downarrow & & & & & p_i \downarrow \\
 \dots & \xrightarrow{p_+} & D^1 & \xrightarrow{p_+} & D^2 & \xrightarrow{p_+} & D^3 & \xrightarrow{p_+} & \dots & D \\
 & & p_- \downarrow & & p_- \downarrow & & p_- \downarrow & & & p_i \downarrow \\
 & & D^0 & \xrightarrow{p_+} & D^1 & \xrightarrow{p_+} & D^2 & \xrightarrow{p_+} & \dots & D \\
 & & & & p_- \downarrow & & p_- \downarrow & & & p_i \downarrow \\
 & & & & D^0 & \xrightarrow{p_+} & D^1 & \xrightarrow{p_+} & \dots & D \\
 & & & & & & p_- \downarrow & & & p_i \downarrow \\
 & & & & & & D^0 & \xrightarrow{p_+} & \dots & D \\
 & & & & & & & & & p_i \downarrow \\
 & & & & & & & & & \vdots
 \end{array}$$

Si noti che per il 4.9 si potrebbero aggiungere delle frecce oblique, così :



36.

4.13 TEOREMA. Sia $\mathcal{D}$ un'iperalgebra su k ; essa è un bicampo se e solo se :

1. p_i è un isomorfismo bicontinuo di $\mathcal{D}$ su tutto $\mathcal{D}$;
2. esiste un isomorfismo τ di un ipercampo $\tilde{K}$ su $\mathcal{D}$;
3. $\mathcal{D}$ è universale rispetto alle proprietà 1 e 2, con lo stesso $\tilde{K}$, ossia: se $\mathcal{D}'$, τ' , $\tilde{K}$ godono di 1 e 2, esiste un isomorfismo ν di $\mathcal{D}$ su $\mathcal{D}'$ tale che $\tau' = \nu\tau$.

In tal caso τ risulta bicontinuo.

DIM. Se $\mathcal{D}$ è un bicampo, esso soddisfa le 1, 2 (con τ bicontinuo) per quanto esposto ai nnⁱ 34 e 35; quanto alla 3, si ha subito che $\mathcal{D}'$ deve contenere $\tau'\tilde{K}$, e quindi tutti i $(p_i)^{-n}\tau'\tilde{K}$, e quindi la loro unione $\mathcal{D}'^0$. Ora, si verifica immediatamente che $\tau'\tilde{K} \cong \tau\tilde{K} = \tilde{K}_0$, che $(p_i)^{-n}\tau'\tilde{K} \cong \tilde{K}_n$ ($\tilde{K}_n$ ha lo stesso significato che ha nel n° 35), e che nell'isomorfismo l'immersione di $\tilde{K}_n$ in $\tilde{K}_{n+1}$ corrisponde al p_i di $(p_i)^{-n}\tau'\tilde{K}$. Quindi $\mathcal{D}'^0 \cong \mathcal{D}^0$, e pertanto $\mathcal{D}'$, essendo completo perchè iperalgebra, conterrà una sottoiperalgebra isomorfa a $\mathcal{D}$.

Viceversa, suppongasì che $\mathcal{D}$ soddisfi le 1, 2, 3; ciò significa che $\mathcal{D}$ è isomorfo al completamento del limite diretto $\mathcal{D}^0$ di $\tilde{K} \xrightarrow{p_i} \tilde{K} \xrightarrow{p_i} \tilde{K} \xrightarrow{p_i} \dots$, con la topologia che gli compete secondo il n° 32; si noti che i p_i devono essere bicontinui per 1, onde la topologia è univocamente determinata; il τ è un isomorfismo, continuo, di un ipercampo su tutta un'iperalgebra, ed è necessariamente bicontinuo. Ma allora, per il n° 35, $\mathcal{D}$ è anche isomorfo al limite inverso di $D \xleftarrow{p_i} D \xleftarrow{p_i} D \xleftarrow{p_i} \dots$, C. V. D..

Quando un bicampo $\mathcal{D}$ è dato mediante un ipercampo $\tilde{K}$ e un isomorfismo τ , indicheremo il bicampo anche con $\tilde{K}$, e indicheremo con $\tilde{K}^0$ il $\mathcal{D}^0$,

ossia il limite diretto di $\tilde{R} \xrightarrow{p_i} \tilde{R} \xrightarrow{p_i} \dots$; naturalmente, se si dà R anzichè $\tilde{R}$, si scriverà $\mathcal{R}$ e non $\tilde{\mathcal{R}}$. Si dirà ancora che $R, \mathcal{R}$ sono *legati* l'un l'altro da τ . È utile saper trovare un D e σ quando siano dati $\tilde{R}$ e τ , così come nel n° 35 si sono trovati $\tilde{R}$ e τ quando erano dati D e σ ; il diagramma del n° 35 mostra che il nucleo dell'omomorfismo σ di $\tilde{\mathcal{R}}$ su tutto D è l'ideale chiuso J di $\tilde{\mathcal{R}}$ tale che $J \cap \tilde{R}_n$ sia l'ideale J_n di $\tilde{R}_n$, ossia quello il cui nocciolo è $p^{\iota}_n \tilde{R}_n = \tilde{R}_0$; in altre parole, J è l'ideale chiuso di $\tilde{\mathcal{R}}$ generato da $\tilde{R}_0^+ = \tau \tilde{R}^+$.

4.14 LEMMA. *Sia $\mathcal{R}$ un bicampo, R un ipercampo legato ad $\mathcal{R}$ da τ ; sia ν un isomorfismo (necessariamente bicontinuo) di un ipercampo R' su $\mathcal{R}$; allora esistono un intero $n \geq 0$, e un isomorfismo bicontinuo ν' di R' su R che rendono commutativo il diagramma:*

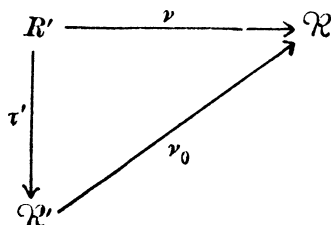
$$\begin{array}{ccc} R' & \xrightarrow{\nu'} & R \\ p^n \iota \downarrow & & \downarrow \tau \\ R' & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{R} \end{array}$$

DIM. La bicontinuità di ν discende dalla continuità come nella dimostrazione del 3.40. Se τ e ν vengono considerati come immersioni, basta dimostrare che $p^n \iota R' \subseteq R$ per n elevato. Ora, R' è generato, come k algebra completa, da un numero finito di suoi elementi canonici $x_1, \dots, x_n$ (le componenti di posto -1 in un insieme libero di generatori di $\mathcal{C} R'$), e dai $t^i x_j$ ($i = 1, 2, \dots$); se si dimostra che $x_i \in \mathcal{R}^0$ per ogni i , ne segue $p^n \iota x_i \in R$ per ogni i e per n grande, e perciò anche $p^n \iota R' \subseteq R$. Notiamo che se $\mathcal{R}$ è legato al cocampo $\tilde{D}$ da σ , σ induce un omomorfismo continuo di R' su $\tilde{D}$; poichè $\tilde{D}$ è discreto e $\sigma R'$ è linearmente compatto, ne segue che $\sigma R'$ è finito, ossia è una sottoiperalgebra finita di $\tilde{D}$. Ma allora, per un opportuno m , è $\sigma R' \subseteq \tilde{D}^m$, e in particolare $\sigma x \in \tilde{D}^m$ se $x \in R'$; quindi $\sigma(p\iota)^{-i} x$ appartiene all'immagine inversa in $\tilde{D}$, secondo $p^i \iota$, di $\tilde{D}^m$. Se x è anche elemento canonico di R' , questa condizione comporta che $\sigma(p\iota)^{-i} x \in \tilde{D}^{m+i}$, ossia che $x \in R_m$; ciò prova appunto che $R' \subseteq \mathcal{R}^0$, C. V. D..

Il 4.14 dà anche il

4.15 COROLLARIO. *Sia $\mathcal{R}$ un bicampo; allora $\mathcal{R}^0$ è l'unione di tutti i sottoipercampi di $\mathcal{R}$; se quindi ν è un omomorfismo su $\mathcal{R}$ di un bicampo $\mathcal{S}$, è $\nu \mathcal{S}^0 \subseteq \mathcal{R}^0$.*

4.16. LEMMA. Siano $\mathcal{R}$, R un bicampo e un ipercampo legati da τ , e siano analogamente $\mathcal{R}'$, R' legati da τ' ; sia ν un omomorfismo di R' su $\mathcal{R}$; esiste allora un unico omomorfismo ν_0 di $\mathcal{R}'$ su $\mathcal{R}$ che rende commutativo il diagramma



Poi, ν è un isomorfismo se e solo se tale è ν_0 . Infine, $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}'$ sono isomorfi se e solo se R , R' sono isogeni.

DIM. Per 4.14, $\nu R'$ è contenuto in $\mathcal{R}^0$; perciò ν_0 si ottiene così (su $\mathcal{R}^0$): se $x \in \mathcal{R}^0$, si cerchi un n tale che $p^n x \in R'$ (ove τ' si considera come un'immersione); si costruisca $\nu p^n x$, e si ponga $\nu_0 x = (p!)^{-n} \nu p^n x$. Il resto è immediato, C. V. D..

Sia $\mathcal{R}$ un bicampo, legato all'ipercampo R da τ ; poichè $R = R_t \overline{\times} R_r \overline{\times} R_\pi$ si ha, con evidente significato dei simboli, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_t \overline{\times} \mathcal{R}_r \overline{\times} \mathcal{R}_\pi$; si indichi con $\mathcal{R}_{r,s}$ il bicampo legato a $R_{r,s}$; allora, per 4.16, si ha sempre: $\mathcal{R}_t \cong \mathcal{R}_{0,n} = \mathcal{R}_{0,1} \overline{\times} \dots \overline{\times} \mathcal{R}_{0,1}$ per qualche n ; $\mathcal{R}_\pi \cong \mathcal{R}_{m,0} = \mathcal{R}_{1,0} \overline{\times} \dots \overline{\times} \mathcal{R}_{1,0}$ per qualche m ; mentre $\mathcal{R}_r$ è sempre isomorfo al prodotto tensoriale completo di vari $\mathcal{R}_{r_i, s_i}$, con r_i, s_i primi fra loro e univocamente determinati. Si noti anche che se $\mathcal{R}$ è legato all'ipercampo R , esso è anche legato al cocampo $\tilde{D}$, se D è il duale di R ; quindi, per esempio, $\mathcal{R}_{0,1}$ è legato al $\tilde{D}$ con $D = D_{1,0}$, ossia è legato a $D_{0,1}$; analogamente, per 4.3, $\mathcal{R}_{1,0}$ è legato a $D_{1,0}$, ed $\mathcal{R}_{r,s}$ a $D_{r,s}$; quindi la regola mnemonica per apporre gli indici r, s ad $R_{r,s}$ è la stessa, sia che si parta da un ipercampo che da un cocampo.

37. Riprendiamo le notazioni del n° 35, ove si sono definiti gli $\tilde{K}_n$, e teniamo presente il diagramma del n° 35; è importante notare che

$$4.17 \quad \sigma \mathcal{D}^0 = D,$$

in quanto $\sigma \mathcal{D}^0$ deve essere denso in D , e quindi $= D$ perchè D è discreto (questo è in realtà il significato del 4.12). È quindi commutativo il seguente

diagramma :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{K} & \xrightarrow{p^+} & \tilde{K} \xrightarrow{p^+} \dots \\
 & & \mathcal{D}^0 \\
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow p_- & & \downarrow p_- \\
 D^2 & \xrightarrow{p_+} & D^3 \xrightarrow{p_+} \dots \\
 \downarrow p_- & & \downarrow p_- \\
 D^1 & \xrightarrow{p_+} & D^2 \xrightarrow{p_+} \dots \\
 \downarrow p_- & & \downarrow p_- \\
 & & \vdots \\
 & & \downarrow p^+ \\
 & & D \\
 & & \downarrow p^+ \\
 & & D \\
 & & \downarrow p^+ \\
 & & \vdots ;
 \end{array}$$

ne riscriviamo un pezzo, cambiando le notazioni :

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{K} \cong \tilde{K}_0 & \xrightarrow{p^+} & \tilde{K}_1 \longrightarrow \dots \\
 & & \mathcal{D}^0 \\
 \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 D^{10} & \xrightarrow{p_+} & D^{11} \longrightarrow \dots \\
 \downarrow p_- & & \downarrow p_- \\
 k = D^{00} & \xrightarrow{p_+} & D^{01} \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow p^+ \\
 & & D_1 \\
 & & \downarrow p^+ \\
 & & D_0 \cong D.
 \end{array}$$

Qui, $D^j = D^{i+j}$ per definizione ; l'immersione di $\tilde{K}$ in $\mathcal{D}^0$ è $\tilde{\tau}^0$ (restrizione di $\tilde{\tau}$ a $\mathcal{D}^0$), e l'omomorfismo di $\mathcal{D}^0$ su tutto D è σ^0 (restrizione di σ a $\mathcal{D}^0$).

Il duale di questo diagramma è ottenuto sostituendo $\tilde{K}_i$ con $\tilde{D}_i$ (= insieme delle applicazioni k -lineari continue di $\tilde{K}_i$ su k), D_i con R_i , D^j con

R^j , p_+ con p_- , p_i con p_i , $\mathcal{D}^0$ con l'unione (limite diretto) $\mathcal{K}^0$ degli R_i , e invertendo le frecce; con ciò si ottiene un diagramma commutativo; richiamiamo l'attenzione sul fatto che il duale di $\mathcal{D}^0$, ossia l'insieme delle sue applicazioni k lineari continue su k , è proprio $\mathcal{K}^0$ e non $\mathcal{K}$. Il diagramma commutativo duale così ottenuto è il seguente:

$$\begin{array}{ccccc}
 \tilde{D} \cong \tilde{D}_0 & \xleftarrow{p_i} & \tilde{D}_1 & \xleftarrow{\quad} & \cdots & \mathcal{K}^0 \\
 & \uparrow & \uparrow & & & \\
 & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
 & \uparrow & \uparrow & & & \uparrow \\
 R^{10} & \xleftarrow{p_-} & R^{11} & \xleftarrow{\quad} & \cdots & R_1 \\
 \uparrow & & \uparrow & & & \uparrow \\
 p_+ & & p_+ & & & p_i \\
 k = R^{00} & \xleftarrow{p_-} & R^{01} & \xleftarrow{\quad} & \cdots & R_0 \cong R
 \end{array}$$

L'isomorfismo di R su $\mathcal{K}^0$ è τ^0 , e l'omomorfismo di $\mathcal{K}^0$ su tutto $\tilde{D}$ è $\tilde{\sigma}^0$. I precedenti diagrammi in dualità mostrano che vi è un'applicazione k -bilineare $(d, x) \rightarrow d \circ x$ di $\mathcal{D}^0 \times \mathcal{K}^0$ su k ; essa è una dualità nel senso seguente:

1. $d \circ x = 0$ per ogni x (risp. per ogni d) se e solo se $d = 0$ (risp. $x = 0$);
2. la $(d, x) \rightarrow d \circ x$ è continua in x per ogni d , e continua in d per ogni x .

Essa non è però continua in (d, x) : dato n , si scelga infatti un $d' \in D^n$ contenuto nel nucleo di p_i ma non nel suo nocciolo; allora l'ortogonale di d' in R^n non contiene il nucleo di p_i ma ne contiene il nocciolo, onde esiste un $x' \in R^n$ tale che $d' \circ x' \neq 0$, e che x' sia contenuto nel nucleo di p_i , ma non nel suo nocciolo. Presi $d \in \tilde{R}_n \subset \mathcal{D}^0$, $x \in R_n \subset \mathcal{K}^0$ tali che le loro immagini in D^n , R^n siano rispettivamente d' , x' , è $d \circ x \neq 0$, e d'altra parte d, x stanno in intorni « piccoli » dello 0, in quanto $\sigma^0(p_i)^{-n+1}d = \tilde{\sigma}^0(p_i)^{-n+1}x = 0$.

L'applicazione $(d, x) \rightarrow d \circ x$ di $\mathcal{D}^0 \times \mathcal{K}^0$ su k può essere estesa per continuità in due modi: dato d , la $x \rightarrow d \circ x$ può essere estesa per continuità ad $x \in \mathcal{K}$; e dato x , la $d \rightarrow d \circ x$ può essere estesa per continuità a $d \in \mathcal{D}$; si noti che, per esempio nel primo caso, la $d \rightarrow d \circ x$ è continua se e solo se $x \in \mathcal{K}^0$.

Il fatto che $\mathcal{D}^0$ sia l'insieme delle applicazioni k -lineari continue di $\mathcal{K}^0$ (e ora di $\mathcal{R}$) su k mostra che la « $\circ$ » è indipendente dalla scelta di D, R, σ, τ . Le formule

$$4.18 \quad \mathbf{P} d \circ (x \overline{\times} y) = d \circ \mu (x \overline{\times} y),$$

$$4.19 \quad \mu (d \overline{\times} \delta) \circ x = (d \overline{\times} \delta) \circ \mathbf{P} x$$

sono valide nel senso seguente: la prima vale per $d \in \mathcal{D}^0$, ed $x, y \in \mathcal{K}^0$, nel qual caso $x \overline{\times} y \in (\mathcal{K} \overline{\times} \mathcal{K})^0$ e $\mathbf{P} d \in (\mathcal{D} \overline{\times} \mathcal{D})^0$; è estensibile per continuità ad $x, y \in \mathcal{R}$, oppure a $d \in \mathcal{D}$. Considerazioni analoghe valgono per la seconda formula.

Diremo che $\mathcal{D}$ è il *duale* di $\mathcal{R}$ secondo $\circ$; e si è visto che $\mathcal{R}$ è il duale di $\mathcal{D}$. Altre formule ovvie sono le:

$$4.20 \quad \varepsilon d = d \circ 1, \quad \varepsilon x = 1 \circ x,$$

$$4.21 \quad \pi(td \circ x) = d \circ \pi x, \quad \pi d \circ x = \pi(d \circ tx),$$

che valgono per $d \in \mathcal{D}$ ed $x \in \mathcal{K}^0$, e per $d \in \mathcal{D}^0$ ed $x \in \mathcal{R}$. Poi:

4.22 TEOREMA. *Siano $\mathcal{R}, \mathcal{D}$ bicampi, e siano R, D un ipercampo e un cocampo legati ad $\mathcal{R}, \mathcal{D}$ da τ e σ rispettivamente; sia $\mathcal{D}$ (risp. D) duale di $\mathcal{R}$ (risp. R) mediante $\circ$, e suppongasì che valga la relazione $od \circ x = d \circ \tau x$ per $d \in \mathcal{D}$, $x \in R$. Allora, se $d \in \mathcal{D}$ ed $x \in \mathcal{K}^0$ si ha $d \circ x = \sigma(pt)^{-n} d \circ \tau^{-1} p^n tx$ per n elevato.*

È bene notare che:

il nucleo V_n dell'omomorfismo di $\mathcal{D}$ su tutto D_n è l'ortogonale di R_n : $d \in V_n \iff d \circ R_n = 0$;

R_n è l'ortogonale di V_n : $x \in R_n \iff V_n \circ x = 0$.

Quanto esposto in questo numero mostra che $\mathcal{K}^0$, e non $\mathcal{R}$, è ciò che conta; $\mathcal{K}^0$, benchè non completo, si comporta come un'iperalgebra, nel senso che $\mathbf{P}\mathcal{K}^0 \subseteq (\mathcal{K} \overline{\times} \mathcal{K})^0$; la $\mathcal{R}$ serve solo a mantenere la convenzione che un'iperalgebra deve essere completa.

38. Notazioni come nel n° 37; per $d \in \mathcal{D}$ ed $x \in \mathcal{K}^0$, definiamo l'elemento $dx \in \mathcal{K}^0$ per mezzo della:

$$4.23 \quad \delta \circ dx = d\delta \circ x$$

per ogni $\delta \in \mathcal{D}$; questa è l'analoga della 3.15. La $(d, x) \rightarrow dx$ è un'applicazione k -bilinare di $\mathcal{D} \times \mathcal{K}^0$ su $\mathcal{K}^0$; valgono i risultati seguenti:

$$4.24 \quad \text{Se } \mathcal{R} \text{ è legato all'ipercampo } R \text{ da } \tau, \text{ è } d(pt)^{-n} \tau R \subseteq (pt)^{-n} \tau R.$$

Infatti se $x \in (pt)^{-n} \tau R = R_n$ (nelle notazioni del n° 37), e se $\delta \circ R_n = 0$, è anche

$d\delta \circ R_n = 0$ (cfr. le osservazioni alla fine del n° 37), onde $\delta \circ dx = d\delta \circ x = 0$; ciò essendo vero per tutti i δ descritti, si conclude che $dx \in R_n$.

4.25 Nelle notazioni del n° 37, se $d \in \mathcal{D}^0$ la $x \rightarrow dx$ è continua; più precisamente: se $d \in \tilde{R}_n$, e se U_i è l'intorno dello 0 in $\mathcal{R}^0$ formato dagli x tali che $\tilde{R}_i \circ x = 0$, si ha, per ogni i , $dU_{\max(n,i)} \subseteq U_i$.

Infatti se $\delta \in \tilde{R}_i$ e $x \in U_h$ con $h = \max(n, i)$, è $\delta \circ dx = d\delta \circ x = 0$ perchè $d\delta \in \tilde{R}_h$.

Il 4.25 mostra che la $x \rightarrow dx$ può essere estesa ad una applicazione continua di $\mathcal{R}$ su $\mathcal{R}$ quando $d \in \mathcal{D}^0$; la 4.23 vale allora per $\delta, d \in \mathcal{D}^0$ ed $x \in \mathcal{R}$.

4.26 La $d \rightarrow dx$ è continua se $x \in \mathcal{R}^0$; più precisamente, se V_i è l'intorno dello 0 in $\mathcal{D}$ formato dai d tali che $d \circ R_i = 0$, e se $x \in R_n$, allora $V_n x = 0$.

Infatti se $d \in V_n$ si ha $\delta \circ dx = d\delta \circ x = 0$ per ogni $\delta \in \mathcal{D}$.

Altre proprietà dell'applicazione $(d, x) \rightarrow dx$ sono le seguenti:

1. $d(d'x) = (dd')x$;
 2. $\pi[(td)x] = d\pi x$;
 3. $t[(\pi d)x] = dtx$; valide per $d, d' \in \mathcal{D}$ ed $x \in \mathcal{R}^0$, e per $d, d' \in \mathcal{D}^0$ ed $x \in \mathcal{R}$;
 4. $d \in \tilde{R}_n$ se e solo se d , come applicazione di $\mathcal{R}^0$ su $\mathcal{R}^0$, è R_n -lineare;
 5. $1_{\mathcal{D}}x = x$; $d \in \mathcal{D}^+$ se e solo se $d^1_{\mathcal{R}} = 0$;
 6. $\varepsilon_{\mathcal{R}} dx = d \circ x$.
1. $\mathbf{P}(dx) = (1 \overline{\times} d) \mathbf{P}x = (d \overline{\times} 1) \mathbf{P}x$;
 2. $d(xy) = \mu_{\mathcal{R}}(\mathbf{P}d)(x \overline{\times} y)$; valide per $d \in \mathcal{D}$ ed $x, y \in \mathcal{R}^0$, e per $d \in \mathcal{D}^0$ ed $x, y \in \mathcal{R}$;
 3. le $x \rightarrow dx$, per $d \in \mathcal{D}^0$, sono tutte e sole le applicazioni k -lineari continue di $\mathcal{R}^0$ su se stesso che sono invarianti (cfr. 3.18), e ciascuna delle quali è R_n -lineare per qualche n .

DIM. Le dimostrazioni sono le stesse delle dimostrazioni delle analoghe asserzioni nei 3.16, 3.18, tenendo presente il 3.20, C.V.D..

Come conseguenza del 4.28, gli elementi di $\mathcal{D}^0$, considerati come applicazioni k -lineari di $\mathcal{R}$ su se stesso, si chiamano le *iperderivazioni invarianti* di $\mathcal{R}$. Al solito, la 2 del 4.28 ha una interpretazione più diretta quando si sappia che la $\delta \rightarrow \delta(x \overline{\times} y)$ sia continua, ossia, per 4.26, quando $x, y \in \mathcal{R}^0$.

Si noti che il duale di $\mathcal{R}_{r,s}$ (r, s primi fra loro, ovvero $r=1, s=0$, ovvero $r=0, s=1$) è $\mathcal{R}_{s,r}$; ed anche che il duale di $\mathcal{R}$, che fin'ora è stato indicato con $\mathcal{D}$, è $\tilde{\mathcal{R}}$. Il risultato seguente è ovvio, ma molto importante:

4.29 TEOREMA. Un bicampo $\mathcal{R}$ è autoduale, ossia $\mathcal{R} \cong \tilde{\mathcal{R}}$, se e solo se

$$\mathcal{R} \cong \mathcal{R}_{0,n} \overline{\times} \mathcal{R}_{n,0} \overline{\times} (\mathcal{R}_{1,1} \overline{\times} \dots \overline{\times} \mathcal{R}_{1,1}) \overline{\times} (\mathcal{R}_{r_1,s_1} \overline{\times} \mathcal{R}_{s_1,r_1}) \overline{\times} \dots \overline{\times} (\mathcal{R}_{r_m,s_m} \overline{\times} \mathcal{R}_{s_m,r_m})$$

per opportune coppie $(r_i, s_i) \neq (1, 1)$ di interi primi fra loro.

OSSERVAZIONE. Nella 4.23 si è usata la stessa lettera d per indicare un elemento di $\mathcal{D}$ o un endomorfismo di $\mathcal{R}$; se quest'ultimo viene indicato con σ_d , la 4.23 si scrive $\delta \circ \sigma_d x = \delta d \circ x$; naturalmente, esiste anche un τ_x (applicazione di $\mathcal{D}$ su $\mathcal{D}$) definito da $\tau_x d \circ y = d \circ xy$; se ora $\mathcal{D} = \mathcal{R}$, come nel caso del 4.29 dopo una opportuna identificazione, e se $x, y \in \mathcal{R}$, vi sono i quattro elementi $\sigma_{xy}, \tau_y x, \sigma_y x, \tau_x y$, che sono in generale tutti distinti. Il σ_{xy} non può più essere indicato con xy , come si fa quando $\mathcal{D} \neq \mathcal{R}$, perchè ciò darebbe luogo a confusione con $xy = \mu_{\mathcal{R}}(x \overline{\times} y)$; quindi il σ_{xy} verrà indicato, quando $\mathcal{D} = \mathcal{R}$, con $x \cdot y$.

39. Sia $\mathcal{R}$ un bicampo, legato all'ipercampo R da τ ; la topologia di $\mathcal{R}$ è quella in cui un sistema di intorno dello 0 è dato dagli ideali chiusi J_n generati dai $[(p_i)^{-n} R]^+ = R_n^+$ ($n = \dots, 1, 0, -1, \dots$). Vogliamo far vedere come questa topologia sia legata a certe valutazioni in modo simile (ma non identico) a quello descritto nell'1.2; supporremo che τ sia un'immersione. Siano w_{ih} , con h percorrente $H = \text{cov } C_p \oplus \dots \oplus \text{cov } C_p$ (tanti addendi quanta è la codimensione separabile di R), le pseudovalutazioni che danno la topologia di R a norma del 3.37; si normalizzino le w_{0h} in modo arbitrario, e le w_{ih} in modo che $w_{i+1,h}$ induca w_{i,p_h} in R_i . Sia C' il limite inverso $\dots \xleftarrow{p_i} H \xleftarrow{p_i} H \xleftarrow{p_i} \dots$, e per ogni $c = \{\dots, c_{-1}, c_0, c_1, \dots\} \in C'$ si definisca la pseudovalutazione w_c di $\mathcal{R}^0$ col porre $w_c(x) = w_{i,c_i}(x)$ se $x \in R_i$. Per mezzo delle w_c si definisca il seguente insieme: $W_c(\alpha)$, con α reale ≥ 0 , ovvero $\alpha = \infty$, è l'insieme degli $x \in \mathcal{R}^0$ tali che $w_c(x) \geq \alpha$.

Se allora $R_i = k$, ossia se vi è una sola w_c , che indicheremo con w , gli insiemi $W(\alpha)$, per $\alpha \rightarrow \infty$, sono cofinali con gli $R_n^+ \setminus \mathcal{R}^0$ per $n \rightarrow -\infty$; se

invece $R_r = R_\pi = k$, ossia se $R = R_t$, si ha addirittura che $R_n^+ \mathcal{K}^0$ è l'intersezione dei $W_c(\infty)$ per i quali $c_n = 0$. Nel caso generale, si indichi con $U^n(\alpha)$ l'intersezione dei $W_c(\alpha)$ per i quali $c_{-n} = 0$; quanto precede dimostra che gli $U^n(\alpha)$ formano un sistema di intorno dello 0 per la topologia di $\mathcal{K}^0$; le loro chiusure in $\mathcal{R}$, ancora indicate con $U^n(\alpha)$, formano un sistema di intorno dello 0 per la topologia di $\mathcal{R}$. In quest'ultimo caso si ha anche $U^n(\alpha) = U_t^n(\infty) \overline{\times} \mathcal{R}_r \overline{\times} \mathcal{R}_\pi + \mathcal{R}_t \overline{\times} W(\alpha)$, ove, nel secondo membro, $U_t^n(\infty)$ è l' $U^n(\infty)$ costruito in $\mathcal{R}_t$, mentre $W(\alpha)$ è costituito in $\mathcal{R}_r \overline{\times} \mathcal{R}_\pi$.

In base a questa descrizione si vede che la topologia di $\mathcal{R}$ è, nel caso $\mathcal{R}_t = k$, del tipo voluto nel n° 9 e nel resto del capitolo 2; invece nel caso generale è più fina di una tale topologia; però tutto quanto esposto nel capitolo 2, ed in particolare le condizioni (A), (B) del n° 9, resta valido per questa topologia qualora si adotti la definizione seguente: $\text{biv } \mathcal{R}$ è l'insieme dei bivettori x , a componenti in $\mathcal{R}$, tali che per ogni intero n esista un $\beta_n > 0$ colla proprietà $x_{-j} \in U^n(\beta_n)$ per j elevato; questa condizione assicura in particolare, come si vede dalla dimostrazione dell'1.5, che elementi qualsiasi di $\text{biv } \mathcal{R}$, in numero finito, sono simultaneamente ammessi. Questa definizione di $\text{biv } \mathcal{R}$ sarà quella adottata d'ora in poi. È bene osservare che le altre condizioni su $\mathcal{R}$, richieste al n° 9, sono soddisfatte: $\mathcal{R}$ è perfetto per definizione; è poi privo di elementi pseudonulli; se infatti ve ne fossero, vi sarebbero anche degli $x \neq 0$ tali che $x^p = \pi x = 0$, e quindi $p\pi x = 0$; ma ciò si sa essere impossibile perchè $p\pi$ è un isomorfismo bicontinuo di $\mathcal{R}$ (n° 34).

40. Sia $\mathcal{R}$ un bicampo; per quanto precede esistono $\text{biv } \mathcal{R}$ e $\text{Biv } \mathcal{R}$; un elemento $x \in \text{biv } \mathcal{R}$ dicesi *canonico* se

$$Px = x \overline{\times} 1 + 1 \overline{\times} x;$$

qui facciamo valere per gli elementi di $\text{biv } \mathcal{R}$ le convenzioni adottate al principio del n° 25 per gli elementi di $\text{cov } R$. L'insieme degli elementi canonici di $\text{biv } \mathcal{R}$ sarà denotato con $\mathcal{C}'\mathcal{R}$, mentre $\mathcal{C}'\mathcal{K}^0$ denoterà l'insieme degli elementi canonici di $\text{biv } \mathcal{R}$ che hanno tutte le componenti in $\mathcal{K}^0$; come conseguenza del successivo 4.31, basta a tale scopo che una componente sia in $\mathcal{K}^0$; per il 2.3 (ponendovi $x \in K'$), $\mathcal{C}'\mathcal{R}$ è un K' -modulo. Le componenti degli elementi di $\mathcal{C}'\mathcal{R}$ (risp. di $\mathcal{C}'\mathcal{K}^0$) saranno chiamate gli *elementi canonici* di $\mathcal{R}$ (risp. di $\mathcal{K}^0$).

4.30 LEMMA. Siano $\mathcal{R}, \mathcal{S}$ bicampi, e sia z elemento canonico di $\text{biv}(\mathcal{R} \overline{\times} \mathcal{S})$; allora $z = x \overline{\times} 1 + 1 \overline{\times} y$, con x, y elementi canonici di $\text{biv } \mathcal{R}$, $\text{biv } \mathcal{S}$ rispettivamente, dati da $x \overline{\times} 1 = (\iota \otimes \varepsilon)z$, $1 \overline{\times} y = (\varepsilon \otimes \iota)z$.

DIM. Come quella del 3.34, C.V.D..

4.31 TEOREMA. Sia $\mathcal{R}$ un bicampo, legato all'ipercampo R da τ ; vi è allora un unico isomorfismo K -lineare τ di $\mathcal{C}R$ su $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ tale che $(\tau x)_{-1} = \tau x_{-1}$ per $x \in \mathcal{C}R$. Per $x \in \mathcal{C}'\mathcal{R}$ si ha $tx = t_{\mathcal{R}}x$, ossia $t_{\mathcal{R}}x_i = x_{i-1}$; di conseguenza, $px = p_{\mathcal{R}}x$. Poi, $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ è un K' -modulo canonico mediante $\pi_{\mathcal{R}}$ e $t_{\mathcal{R}}$, e il τ sopra definito è un isomorfismo di K' -moduli canonici; inoltre $\tau \mathcal{C}R$ contiene un insieme di generatori di $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ come K' -modulo. La topologia di $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ come K' -modulo canonico coincide con la sua topologia come sottospazio di $\text{biv } \mathcal{R}$. Infine $\mathcal{C}'\mathcal{R}_{r,s}^0 \cong \mathcal{N}_{r,s}(r, s \text{ interi primi fra loro, ovvero } r=0, \text{ ovvero } s=0)$.

DIM. Come nella dimostrazione del 3.32, se $x \in \mathcal{C}'\mathcal{R}$ si ha $p_{\mathcal{R}}x = \mu^p \mathbf{P}^p x = px$; questa si scrive anche $\pi_{\mathcal{R}} t_{\mathcal{R}} x = \tau tx$; essendo $\mathcal{R}$ privo di elementi pseudonulli, ne segue $t_{\mathcal{R}}x = tx$, come richiesto. Essendo $t_{\mathcal{R}}$ un isomorfismo su tutto, perchè tale è il π di $\tilde{\mathcal{R}}$, questa dice anche che il τ di $\mathcal{C}R$ definito all'enunciato esiste, è K -lineare, è un isomorfismo, ed è unico. Se poi $x \in \mathcal{C}'\mathcal{R}^0$, per n elevato si avrà $p^n x_{-1} \in \tau R$, e quindi $p^n x = \tau y$ per un $y \in \mathcal{C}R$; ciò dimostra che $\tau \mathcal{C}R$ contiene una base di $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ come spazio vettoriale su K' . Ma allora $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ è un K' -modulo canonico, e τ è un isomorfismo di K -moduli canonici.

Dotiamo ora $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ della topologia di insieme di bivettori ($n^0 9$), e $\mathcal{C}R$ di quella di insieme di covettori ($n^0 7$), e dimostriamo che il τ di $\mathcal{C}R$ è bicontinuo; τ è certamente bicontinuo come omomorfismo di ipercampi. Sia dunque U un intorno dello 0 in R , e sia precisamente U l'ideale chiuso generato da $[(pi)^h R]^+$ per qualche h ; sia invece V un intorno dello 0 in $\mathcal{R}$, del tipo $V = U^l(\alpha)$ descritto al $n^0 39$. Dato $x \in \mathcal{C}R$, si ha $x \in U'$ ($n^0 7$) se e solo se $x_{-1} \in U$; e si ha $tx \in V_n$ ($n^0 9$) se e solo se $\pi^{-i} t^{-i-1} tx_{-1} \in V$ per $i \leq n$, ossia se e solo se $tx_{-1} \in t(pi)^i V$ per $i \leq n$; dato che $p_i V \subset V$, quest'ultima significa anche $tx_{-1} \in t(pi)^n V$. Dati V ed n si può scegliere U in modo che $\tau U \subseteq t(pi)^n V$; e dato U , si può scegliere V ed n in modo che $t(pi)^n V \cap \tau R \subset \tau U$; quindi l'applicazione τ di $\mathcal{C}R$ su $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ è bicontinua secondo le topologie descritte. Ma la topologia di $\mathcal{C}R$ è anche quella di K -modulo canonico, per 3.43; pertanto quella di $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ coincide con la sua topologia di K' -modulo canonico.

Che poi sia $\mathcal{C}'\mathcal{R}_{r,s}^0 \cong \mathcal{N}_{r,s}$ discende da quanto precede, dal $n^0 18$, e dal fatto che $\mathcal{C}R_{r,s} \cong N_{r,s}$, C.V.D..

4.32 TEOREMA. Siano R un ipercampo, $\mathcal{R}$ un bicampo, e τ un isomorfismo di $\mathcal{C}R$ su $\mathcal{C}'\mathcal{R}^0$ (come K -moduli) che commuti con π , e quindi con t .

Allora esiste un solo omomorfismo η di R su $\mathcal{R}$, come iperalgebre, tale che $\eta x = \nu x$ (ossia $\eta x_{-1} = (\nu x)_{-1}$) per $x \in \mathcal{C}R$; tale η è un isomorfismo.

DIM. Sia S la sottoiperalgebra chiusa di $\mathcal{R}$ generata dai $(\nu x)_{-i}$ ($i > 0$) quando x percorre un insieme libero di generatori di $\mathcal{C}R$; vi è un isomorfismo ν' di $\mathcal{C}R$ su un K -modulo di covettori a componenti in S , dato da: $\nu' x = (\dots, (\nu x)_{-2}, (\nu x)_{-1})$; il 3.40 assicura allora l'esistenza di η , e la sua unicità, mentre il 3.39 assicura che η è un isomorfismo, C. V. D..

INDICE ALFABETICO DELLE DEFINIZIONI E DEI SIMBOLI

autoduale	324
bicampo	313
biv $\mathcal{R}$	325
C	324
$\mathcal{C}$	296
$\mathcal{C}'$	325
canonico (bivettore)	325
canonico (covettore)	295
canonico (elemento)	296, 325
canonico (K -modulo)	277
canonico (K' -modulo)	283
coassociatività	285
cocampo	306
codimensione	280, 283, 305, 313
codimensione inseparabile	280, 283, 305, 313
codimensione radicale	280, 283, 305, 313
codimensione separabile	280, 283, 305, 313
coidentità	285
conullità	280, 283, 305, 313
coprodotto	285
coseparabilità	280, 283, 305, 313
$\widetilde{D}$	309
$\mathcal{D}^0$	315
$D_{n,m}$	298
dimensione	280, 283, 305, 313
dimensione logaritmica	280, 283, 305, 313
dimensione radicale	280, 283, 305, 313
discreta (iperalgebra)	286
duale	283, 284, 287, 322
dualità	283, 284, 287, 321
e^h	293
finita (iperalgebra)	286
f_h	293
grado	280, 305
gruppo analitico	306
H	293
inseparabile	279, 283, 305, 313
inseparabilità	280, 283, 305, 313
invariante	289
inversione	285
iperalgebra	285
ipercampo	296

ipercampo banale	296
ipercampo nel senso di MC	297
iperderivazione	324
isogeni	281, 283, 305, 313
isogenia	281, 283, 305, 313
J^*	291
k	277
K	277
legato	315, 318
limite diretto (topologia di un)	308
limite inverso (topologia di un)	307
linearmente compatta (iperalgebra)	286
logaritmico	279, 283, 305, 313
Mac Laurin	290
M_r	278
$\mathcal{M}_r$	284
M_t	278
$\mathcal{M}_t$	284
M_π	278
$\mathcal{M}_\pi$	284
$N_{m,0}$	282
$\mathcal{N}_{m,0}$	284
$N_{r,s}$	281
$\mathcal{N}_{r,s}$	284
$N_{0,n}$	282
$\mathcal{N}_{0,n}$	284
nocciolo	291
nullità	280, 283, 305, 313
ordine	277, 283, 303, 311
ordine radicale	280, 283, 305, 313
p_+	308
p_-	308
$\mathbf{P}$	285
$\mathbf{P}^h$	293
$\mathcal{P}$	298
$\mathcal{P}_0$	298
prodotto tensoriale completo	284
pseudobase	286
punto	306
$\tilde{R}$	309
$\tilde{\mathcal{R}}$	324
R^+	286
$R_{m,0}$	297
$\mathcal{R}_{m,0}$	319
R_r	305
$\mathcal{R}_r$	319
$R_{r,s}$	297
$\mathcal{R}_{r,s}$	319

