Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Mario Miranda

Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell'area minima in n variabili

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 19, nº 2 (1965), p. 233-249

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_2_233_0>

UN TEOREMA DI ESISTENZA E UNICITÀ PER IL PROBLEMA DELL'AREA MINIMA IN n VARIABILI

di Mario Miranda (Pisa)

In questo lavoro [1] studiamo il problema delle superfici di area minima nella classe delle superfici cartesiane continue aventi area di Lebesgue finita. Precisamente proviamo che se Ω è un aperto limitato e uniformemente convesso di R^n $(n \geq 2)$ e φ una funzione continua su $\partial\Omega$, allora nella classe delle superfici $\{ z = f(x) : x \in \bar{\Omega} \}$ con f continua su $\bar{\Omega}$, e $f = \varphi$ su $\partial\Omega$, ed aventi area di Lebesgue finita [2], vi è una ed una sola superficie di area minima.

Il risultato è ben noto nel caso $n = 2$ (v. ad es. Rado, [1]), ove è anche stata provata l'analiticità della soluzione.

Il lavoro si articola in tre parti. Nella prima si estende un risultato di Stampacchia (Teor. 5.1 di [2]), ponendoci in una classe di convessi un pò più ampia di quella considerata da questo Autore. Di tale estensione ci si serve poi per provare il teorema nella ipotesi che φ sia di classe C^2. Nella seconda parte si prova l'esistenza della soluzione con un procedimento di approssimazione fondato sulla approssimazione di φ mediante funzioni di classe C^2. Nella terza parte si prova l'unicità della soluzione dopo aver stabilito un metodo di calcolo diretto dell'area di Lebesgue.

Di questo lavoro ho discusso con i Proff. De Giorgi e Stampacchia che qui ringrazio.

Pervenuto alla Redazione l' 8 Febbraio 1965.

(1) Eseguito in seno al gruppo di ricerca n. 9 del C.N.R.

(2) Per area di Lebesgue di $\{y = f(x),\ x \in \bar{\Omega}\}$ intendiamo:

$$\inf \left\{ \min_{h \to \infty} \lim \int_{\Omega} \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} (D_i f_h)^2}\, dx;\ f_h \text{ lineare a tratti e continua, } f_h \to f \text{ uniform.} \right\}.$$

I. — Estensione di un risultato di Stampacchia.

1. Vogliamo estendere la prima parte del Teorema 5.1 di [2]. Per questo ricordiamo la seguente definizione

DEFINIZIONE 1.1. *Se φ è una funzione reale definita sulla frontiera di un aperto Ω di R^n $(n \geq 2)$, diremo che φ verifica la* B.S.C. (*Bounded Slope Condition*) *con costante k se per ogni $x \in \partial\Omega$ esistono $a, b \in R^n$ con $|a| \leq k$ e $|b| \leq k$, tali che*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i (y_i - x_i) + \varphi(x) \leq \varphi(y) \leq \sum_{i=1}^{n} b_i (y_i - x_i) + \varphi(x), \quad \forall\, y \in \partial\Omega. \tag{1.1}$$

L'estensione del teorema di Stampacchia, che proveremo nel n. 4, consiste nel seguente teorema:

TEOREMA 1.2. « *Sia $F \in C^2(R^n)$ e strettamente convessa, sia Ω un aperto limitato di R^n $(n \geq 2)$, e φ una funzione reale definita su $\partial\Omega$ la quale verifichi la* B.S.C..

Allora esiste una funzione ed una sola, lipschitziana su Ω e soluzione del problema

$$\int_{\Omega} F(Dz)\, dx = \text{minimum}, \tag{1.2}$$

nella classe di tutte le funzioni lipschitziane su Ω che hanno per traccia φ su $\partial\Omega$ ».

2. Se k è una costante non negativa e Ω un aperto di R^n indicheremo con $\mathrm{Lip}_k(\Omega)$ l'insieme delle funzioni lipschitziane su Ω con costante di Lipschitz non superiore a k.

TEOREMA 2.1. « *Sia $F \in C^2(R^n)$ e strettamente convessa, sia Ω un aperto limitato di R^n e k una costante non negativa. Se $u, v \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$ risolvono il problema* (1.2) *nelle classi* $\{z\,;\, z \in \mathrm{Lip}_k(\Omega),\ z = u$ su $\partial\Omega\}$ *e* $\{z\,;\, z \in \mathrm{Lip}_k(\Omega),\ z = v$ su $\partial\Omega\}$ *rispettivamente, allora vale:*

$$\max_{\bar\Omega} |u - v| = \max_{\partial\Omega} |u - v| \text{ ».} \tag{2.1}$$

La dimostrazione di tale teorema è conseguenza immediata del seguente lemma, (cfr. Lemma 4.2 di [2]).

LEMMA 2.2. *Se* u, v *verificano le ipotesi del* Teorema 2.1 *ed in più vale*

$$u \leq v, \qquad \text{su} \quad \partial\Omega, \tag{2.2}$$

allora si ha

$$u \leq v, \qquad \text{su} \quad \Omega. \tag{2.3}$$

DIM.

Supponiamo per assurdo che l'insieme $A = \{x\,;\, x \in \Omega,\ u(x) > v(x)\}$ non sia vuoto.

Indichiamo con w^+ e w^- le funzioni $\max(u, v)$ e $\min(u, v)$. Avremo allora w^+, $w^- \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$ e $w^+ = v$ su $\partial\Omega$ e $w^- = u$ su $\partial\Omega$. Valgono perciò le diseguaglianze

$$\int_\Omega F(Dw^+)\,dx \geq \int_\Omega F(Dv)\,dx\,, \tag{2.4}$$

$$\int_\Omega F(Dw^-)\,dx \geq \int_\Omega F(Du)\,dx\,. \tag{2.5}$$

D'altra parte poichè valgono

$$\int_\Omega F(Dw^+)\,dx = \int_A F(Du)\,dx + \int_{\Omega - A} F(Dv)\,dx, \tag{2.6}$$

$$\int_\Omega F(Dw^-)\,dx = \int_A F(Dv)\,dx + \int_{\Omega - A} F(Du)\,dx, \tag{2.7}$$

avremo, dalle (2.4) e (2.5), la

$$\int_A F(\mathrm{D}u)\,dx = \int_A F(Dv)\,dx. \tag{2.8}$$

Poichè d'altra parte vale ovviamente $u = v$ su ∂A, si ha che u, v risolvono il problema.

$$\int_A F(Dz)\,dx = \text{minimum}, \tag{2.9}$$

nella classe $\{z\,;\, z \in \mathrm{Lip}_k(A),\ z = u = v \quad \text{su} \quad \partial A\}$.

Ma allora vale

$$u = v, \quad \text{su} \quad A. \tag{2.10}$$

Infatti in caso contrario avremmo $Du \neq Dv$ in un sottoinsieme di A di misura positiva e quindi, per la stretta convessità di F, avremmo $\frac{u+v}{2} = u = v$ su ∂A, $\frac{u+v}{2} \in \mathrm{Lip}_k(A)$ e $\int_A F\left(D\frac{u+v}{2}\right) dx <$ minimum, ciò che è assurdo.

Infine (2.10) è in contrasto colla definizione di A. Deve quindi essere $A = \emptyset$.

c.v.d.

3. Molto importante per provare il Teorema 1.2 è la seguente

Proposizione 3.1. *Sia $F \in C^2(R^n)$ e strettamente convessa, sia Ω un aperto limitato di R^n $(n \geq 2)$. Sia u una funzione lipschitziana su Ω, tale che la sua traccia su $\partial\Omega$ verifichi la* B.S.C. *con una costante k, ed u risolva il problema* (1.2) *in una classe $\{z\,;\, z \in \mathrm{Lip}_{k+\varepsilon}(\Omega),\ z = u$ su $\partial\Omega\}$ con $\varepsilon > 0$.*

Allora $u \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$.

Dim.

Cominciamo col valutare $|u(x) - u(x')|$ quando $x \in \partial\Omega$ e $x' \in \overline{\Omega}$. In tale caso siano $a, b \in R^n$ con $|a| \leq k$ e $|b| \leq k$, tali che valga (cfr. (1.1))

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(y_i - x_i) + u(x) \leq u(y) \leq \sum_{i=1}^{n} b_i(y_i - x_i) + u(x), \quad \forall\ y \in \partial\Omega. \tag{3.1}$$

D'altra parte le funzioni lineari $\pi^+(y) = \sum_{i=0}^{n} b_i(y_i - x_i) + u(x)$, $\pi^-(y) = \sum_{i=1}^{n} a_i(y_i - x_i) + u(x)$ risolvono il problema (1.2) nelle classi $\{z\,;\, z \in \mathrm{Lip}_{k+\varepsilon}(\Omega),\ z = \pi^+$ su $\partial\Omega\}$ e $\{z\,;\, z \in \mathrm{Lip}_{k+\varepsilon}(\Omega),\ z = \pi^-$ su $\partial\Omega\}$ rispettivamente. Avremo allora il Lemma 2.2

$$\pi^-(x') \leq u(x') \leq \pi^+(x'), \tag{3.2}$$

e cioè anche

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x'_i - x_i) \leq u(x') - u(x) \leq \sum_{i=1}^{n} b_i(x'_i - x_i), \tag{3.3}$$

da cui segue

$$|u(x') - u(x)| \leq |\max(|a|, |b|)|\, |x' - x| \leq k\, |x' - x|. \tag{3.4}$$

Siano ora x, $x' \in \Omega$. Indichiamo con $\tau = x' - x$, con $\Omega_\tau = \{x + \tau ; x \in \Omega\}$ e con u_τ la funzione definita su Ω_τ da $u(x + \tau) = u(x)$. Avremo allora che u, u_τ risolvono il problema

$$\int_{\Omega \cap \Omega_\tau} F(Dz)\, dx = \text{minimum}, \tag{3.5}$$

nelle classi $\{z ; z \in \mathrm{Lip}_{k+\varepsilon}(\Omega \cap \Omega_\tau), z = u \text{ su } \partial(\Omega \cap \Omega_\tau)\}$ e $\{z ; z \in \mathrm{Lip}_{k+\varepsilon}(\Omega \cap \Omega_\tau), z = u_\tau \text{ su } \partial(\Omega \cap \Omega_\tau)\}$ rispettivamente. Allora, poichè $x' \in \Omega \cap \Omega_\tau$, si ha, per il Teorema 2.1, che esiste $y \in \partial(\Omega \cap \Omega_\tau)$ tale che

$$| u(x') - u_\tau(x') | \leq | u(y) - u_\tau(y) | = | u(y) - u(y - \tau) | . \tag{3.6}$$

Ora poichè $y \in \partial(\Omega \cap \Omega_\tau)$ si avrà che uno almeno dei due punti y, $y - \tau$ appartiene a $\partial\Omega$, e perciò si ha, grazie alla (3.4)

$$| u(y) - u(y - \tau) | \leq k | \tau | = k | x' - x | . \tag{3.7}$$

Dalle (3.6) e (3.7) si ha allora

$$| u(x') - u(x) | \leq k | x' - x | . \tag{3.8}$$

c. v. d.

4. Per la dimostrazione del Teorema 1.2 abbiamo ancora bisogno di un teorema di semicontinuità per il funzionale $\int_\Omega F(Dz)\, dx$.

TEOREMA 4.1. *Sia $F \in C^2(R^n)$ e convessa, sia Ω un aperto limitato di R^n. Se $\{u_h\} \subset \mathrm{Lip}_k(\Omega)$ converge uniformemente ad u, si ha*

$$\int_\Omega F(Du)\, dx \leq \min_{h \to \infty} \lim \int_\Omega F(Du_h)\, dx. \tag{4.1}$$

DIM.

Per la convessità di F si ha innanzitutto

$$F(Du_h) - F(Du) \geq \sum_{i=1}^n D_i F(Du)\, D_i(u_h - u). \tag{4.2}$$

Basterà allora far vedere che vale

$$\min_{h \to \infty} \lim \int_\Omega \sum_{i=1}^n D_i F(Du)\, D_i(u_h - u)\, dx \geq 0. \tag{4.3}$$

Per provare la (4.3), fissato $\varepsilon > 0$, indichiamo con $\varphi_i (i = 1, .., n)$ delle funzioni reali e continue colle derivate prime su Ω, a supporto compatto contenuto in Ω, e tali che valga

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n | \varphi_i - D_i F(Du) | \, dx < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Avremo allora

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n D_i F(Du) D_i (u_h - u) \, dx \geq - 2k \varepsilon + \int_\Omega \sum_{i=1}^n \varphi_i D_i (u_h - u) \, dx. \tag{4.5}$$

D'altra parte vale ovviamente, per le formule di Green,

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n \varphi_i D_i (u_h - u) \, dx = - \int_\Omega (u_h - u) \sum_{i=1}^n D_i \varphi_i \, dx, \tag{4.6}$$

e da questa, per la convergenza uniforme di $\{u_h\}$ verso u, si ha, per h sufficientemente grande,

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n D_i (u_h - u) \cdot \varphi_i \, dx > - \varepsilon. \tag{4.7}$$

Dalle (4.5) e (4.7) si ricava, per h sufficientemente grande,

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^n D_i F(Du) D_i (u_h - u) \, dx > - (2k + 1) \varepsilon, \tag{4.8}$$

e quindi la (4.3).

c. v. d.

DIM. DEL TEOREMA 1.2.

Indichiamo con V la classe di funzioni $\{v ; v \in \mathrm{Lip}_{2k}(\Omega), v = \varphi$ su $\partial\Omega\}$ dove k è la costante con cui φ verifica la B. S. C.

La classe V non è vuota, infatti la funzione $\bar{v}$ definita su Ω da $\bar{v}(x) = \inf \{\pi(x) ; \pi$ funzione lineare, $\pi \geq \varphi$ su $\partial\Omega\}$, per la B. S. C. ha costante di Lipschitz non superiore a k su Ω e traccia φ su $\partial\Omega$, quindi essa appartiene a V. Per il Teorema di compattezza di Ascoli Arzelà e per il Teorema di semicontinuità 4.1 esiste $u \in V$ soluzione del problema (1.2) in V. Per la Proposizione 3.1 si ha però che $u \in \mathrm{Lip}_k(\Omega)$. Se allora z è una qualunque funzione lipschitziana su Ω con $z = \varphi$ su $\partial\Omega$, avremo, per t sufficientemente piccolo, che $u + t(z - u) \in V$. Allora varrà

$$\int_\Omega F(Du + tD(z - u))\, dx \geq \int F(Du)\, dx. \tag{4.9}$$

Ma poichè $\int_\Omega F(Du + tD(z-u))\, dx$ è funzione convessa di t, il fatto che la (4.9) valga per i t « piccoli » implica che essa vale per t qualunque e quindi anche per $t = 1$, per cui si avrà

$$\int_\Omega F(Dz)\, dx \geq \int_\Omega F(Du)\, dx, \tag{4.10}$$

e cioè la u risolve il problema (1.2) nella classe di tutte le funzioni lipschitziane su Ω che hanno traccia φ su $\partial\Omega$.

L'unicità di u è conseguenza immediata del Teorema 2.1.

c. v. d.

II. — Il teorema di esistenza.

5. Nel procedimento di approssimazione con cui proveremo il teorema di esistenza sarà molto utile la diseguaglianza che viene stabilita nel lemma seguente.

LEMMA 5.1. *Per ogni aperto limitato e convesso $\Omega \subset R^n$ $(n \geq 2)$ esiste una costante $c(\Omega)$ tale che: se u è una funzione lipschitziana su Ω e soluzione del problema*

$$\int_\Omega \{1 + |Dz|^2\}^{1/2}\, dx = \text{minimum}, \tag{5.1}$$

nella classe delle funzioni lipschitziane su Ω e aventi traccia eguale alla traccia di u su $\partial\Omega$ ed f è una qualunque funzione continua su $\overline{\Omega}$, allora vale

$$\int_\Omega \{1 + |Du|^2\}^{1/2}\, dx \leq \text{area}\,\{y = f(x)\,;\ x \in \overline{\Omega}\} + c(\Omega) \max_{\partial\Omega} |u - f|. \tag{5.2}$$

DIM.

Indichiamo con x_0 un punto di Ω. Per $x \neq x_0$ indichiamo con $\tilde{x}$ l'intersezione di $\partial\Omega$ con la semiretta uscente da x_0 e passante per x. Indichiamo con g la funzione definita su R^n da

$$g(x_0) = 0, \quad g(x) = \frac{|x - x_0|}{|\tilde{x} - x_0|}, \quad \text{per} \quad x \neq x_0 . \tag{5.3}$$

Avremo allora, grazie alla convessità di Ω, che g è una funzione lipschitziana su tutto R^n, inoltre valgono le relazioni

$$\Omega = \{x\,;\, g(x) < 1\}, \ \partial\Omega = \{x\,;\, g(x) = 1\}. \tag{5.4}$$

Indicata con $c(\Omega)$ la quantità

$$c(\Omega) = K_g \cdot \int\limits_{|\theta|=1} |\tilde{\theta} - x_0|^n \, d\theta, \tag{5.5}$$

dove K_g è la costante di Lipschitz di g e $d\theta$ è l'elemento di area sulla sfera unitaria $\{\theta\,;\, \theta \in R^n, |\theta| = 1\}$, verificheremo che per tale $c(\Omega)$ vale la (5.2).

Per la definizione di area di Lebesgue basterà verificare la (5.2) nella ipotesi che f sia lipschitziana. Si tratta allora di far vedere che

$$\int\limits_\Omega \{1 + |Du|^2\}^{1/2} dx \leq \int\limits_\Omega \{1 + |Df|^2\}^{1/2} dx + c(\Omega) \max_{\partial\Omega} |u - f|, \tag{5.6}$$

dove $c(\Omega)$ è dato dalla (5.5).

Per provare la (5.6) indichiamo con θ_ε $(\varepsilon > 0)$ la funzione reale di variabile reale definita da

$$\theta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 1 - \varepsilon \\ 1 + \dfrac{t-1}{\varepsilon}, & t > 1 - \varepsilon. \end{cases} \tag{5.7}$$

Indichiamo con f_ε la funzione reale su $\bar{\Omega}$ definita da

$$f_\varepsilon(x) = u(x) \cdot \theta_\varepsilon(g(x)) + f(x)\,(1 - \theta_\varepsilon(g(x))). \tag{5.8}$$

Ovviamente f_ε è lipschitziana su Ω e verifica $f_\varepsilon = u$ su $\partial\Omega$. Avremo allora, per la proprietà di minimo di u:

$$\int\limits_\Omega \{1 + |Du|^2\}^{1/2} dx \leq \int\limits_\Omega \{1 + |Df_\varepsilon|^2\}^{1/2} dx, \ \forall\, \varepsilon > 0. \tag{5.9}$$

Valutiamo ora la differenza $\int_\Omega \{1 + |Df_\varepsilon|^2\}^{1/2}\,dx - \int_\Omega \{1 + |Df|^2\}^{1/2}\,dx$.

Osserviamo innanzitutto che vale:

$$\int_\Omega \{1 + |Df_\varepsilon|^2\}^{1/2}\,dx - \int_\Omega \{1 + |Df|^2\}^{1/2}\,dx \leq \int_\Omega |D(f_\varepsilon - f)|\,dx. \tag{5.10}$$

D'altra parte, per la (5.8), vale quasi ovunque su Ω

$$D(f_\varepsilon - f) = \theta_\varepsilon \cdot D(u - f) + (u - f)\cdot \theta'_\varepsilon \cdot Dg\,; \tag{5.11}$$

e poichè si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\Omega |D(u - f)| \cdot \theta_\varepsilon\,dx = 0, \tag{5.12}$$

basterà valutare $\int_\Omega |u - f| \cdot \theta' \,|Dg|\,dx$.

Per questo si osservi che vale, detto $\Omega_\varepsilon = \{x\,;\ 1 - \varepsilon < g(x) < 1\}$,

$$\int_\Omega |u - f|\,\theta'_\varepsilon \cdot |Dg|\,dx \leq K_g \cdot \sup_{\Omega_\varepsilon} |u - f| \cdot \frac{\operatorname{mis}\Omega_\varepsilon}{\varepsilon}. \tag{5.13}$$

Poichè valgono le relazioni

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \sup_{\Omega_\varepsilon} |u - f| = \max_{\partial\Omega} |u - f|, \tag{5.14}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} K_g \cdot \frac{\operatorname{mis}\Omega_\varepsilon}{\varepsilon} = K_g \cdot \int_{|\theta| = 1} |\tilde{\theta} - x_0|^n\,d\theta = c(\Omega), \tag{5.15}$$

si ricava dalle (5.9), (5.10), (5.11), (5.12), (5.13) la (5.6).

c.v.d.

6. Nella dimostrazione del teorema di esistenza avremo bisogno di una proposizione relativa alla validità della B.S.C..

Per dare tale proposizione poniamo la seguente definizione.

DEFINIZIONE 6.1. *Diremo uniformemente convesso un aperto Ω di R^n ($n \geq 2$) se esiste una costante k non negativa e per ogni $x \in \partial\Omega$ un iperpiano π_x di R^n passante per x, tale che Ω venga a trovarsi in uno dei due semispazi determi-*

nati da π_x , *e per il quale valga*

$$\sup_{y \in \Omega} \frac{|x-y|^2}{\operatorname{dist}(y, \pi_x)} \leq k. \tag{6.1}$$

PROPOSIZIONE 6.2. *Se* Ω *è un insieme limitato e uniformemente convesso di* R^n $(n \geq 2)$, *se* φ *è una funzione continua colle derivate prime e seconde su* R^n , *allora la restrizione di* φ *a* $\partial\Omega$ *verifica la* B.S.C. .

DIM.

Indichiamo con k la costante che compare nella Definizione 6.1, indichiamo con M il massimo modulo della φ e delle sue derivate dei primi due ordini su $\overline{\Omega}$, indichiamo con d il diametro di Ω. Verifichiamo che la restrizione di φ a $\partial\Omega$ verifica la B.S.C. con costante eguale a:

$$M\left((2n-1)\, d + n + (n-1)^2 k\right).$$

Per questo consideriamo un punto di $\partial\Omega$ e supponiamo che sia l'origine. Possiamo supporre, per comodità, che sia $\varphi(0) = 0$ e che Ω sia contenuto nel semispazio $\{x\,;\, x_1 > 0\}$ e valga (cfr. (6.1))

$$0 \leq \frac{\sum_{i=2}^{n} x_i^2}{x_1} \leq k, \qquad \forall\, x \in \overline{\Omega} - \{0\}. \tag{6.2}$$

Consideriamo il fascio di iperpiani di R^{n+1} individuato dai due iperpiani: $x_1 = 0$, $x_{n+1} - \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(0)\, x_i = 0$, e valutiamo l'inclinazione dei piani di tale fascio che incontrano il grafico della restrizione di φ a $\partial\Omega$ in almeno un punto distinto da $(0, 0)$. Sia $\overline{x} \in \partial\Omega - \{0\}$. Consideriamo il piano del fascio che passa per $(\overline{x}, \varphi(\overline{x}))$. Questo avrà equazione:

$$x_{n+1} = \frac{1}{\overline{x}_1} \left\{ \varphi(\overline{x}) - \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(0)\, \overline{x}_i \right\} x_1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(0)\, x_i . \tag{6.3}$$

Valutiamo il coefficiente di x_1 , essendo banale la valutazione degli altri. Per il coefficiente di x_1 si ha, sviluppando $\varphi(\overline{x})$ e tenendo conto di (6.2),

$$\frac{1}{\overline{x}_1} \left\{ \varphi(\overline{x}) - \sum_{i=2}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(0)\, \overline{x}_i \right\} \leq M\left(1 + (2n-1)\, d + (n-1)^2 k\right). \tag{6.4}$$

Dalla (6.4) e dalla (6.3) si ricava allora facilmente la maggiorazione annunciata.

c.v.d.

7. Possiamo ora enunciare e dimostrare il teorema di esistenza per il problema dell'area minima.

TEOREMA 7.1. *Sia Ω un aperto limitato e uniformemente convesso di R^n $(n \geq 2)$. Sia φ una funzione reale continua su $\partial\Omega$. Allora esiste $\psi \in C(\bar{\Omega})$ con $\psi = \varphi$ su $\partial\Omega$ e tale che:*

$$(7.1) \quad \text{area}\,\{y = \psi(x)\,;\, x \in \bar{\Omega}\} \leq \text{area}\,\{y = f(x)\,;\, x \in \bar{\Omega}\}, \quad \forall f \in C(\bar{\Omega}), f = \varphi \text{ su } \partial\Omega.$$

DIM.

Indichiamo con $\{\varphi_h\}$ una successione di funzioni reali e continue colle derivate dei primi due ordini su R^n, e le cui restrizioni a $\partial\Omega$ convergano uniformemente a φ. Per la Proposizione 6.2 le restrizioni delle φ_h a $\partial\Omega$ verificano la B.S.C. e quindi, grazie al Teorema 1.2, per ogni h esiste una funzione u_h lipschitziana su Ω che risolve il problema: $\int_\Omega \{1 + |Dz|^2\}^{1/2}\,dx =$ $=$ minimum, nella classe delle funzioni z lipschitziane su Ω tali che $z = \varphi_h$ su $\partial\Omega$. Per il principio di massimo stabilito nel Teorema 2.1 si ha d'altra parte

$$(7.2) \qquad \max_{\bar{\Omega}} |u_h - u_k| = \max_{\partial\Omega} |\varphi_h - \varphi_k|$$

e quindi la successione $\{u_h\}$ converge uniformemente su $\bar{\Omega}$ verso una funzione continua, che indicheremo con ψ, la quale verifica ovviamente $\psi = \varphi$ su $\partial\Omega$. Ma ψ risolve anche il problema di minimo per l'area. Infatti se f è una funzione continua su $\bar{\Omega}$ tale che $f = \varphi$ su $\partial\Omega$, si ha, per il Lemma 5.1,

$$(7.3) \quad \int_\Omega \{1 + |Du_h|^2\}^{1/2}\,dx \leq \text{area}\,\{y = f(x)\,;\, x \in \Omega\} + c(\Omega) \max_{\partial\Omega} |\varphi_h - \varphi|,$$

da cui, passando al limite per h tendente all'infinito, e ricordando la seguente proprietà dell'area di Lebesgue:

$$(7.4) \qquad \text{area}\,\{y = \psi(x)\,;\, x \in \bar{\Omega}\} \leq \min_{h \to \infty} \lim \int_\Omega \{1 + |Du_h|^2\}^{1/2}\,dx,$$

si ha la (7.1).

c.v.d.

III. Il teorema di unicità.

8. Per quanto visto in [3] (cfr. Teorema 1.3) si ha che se f è una funzione continua su $\bar{\Omega}$, dove Ω è un aperto limitato di R^n $(n \geq 2)$ ed area $\{y = f(x)\,;\ x \in \bar{\Omega}\}$ è finita, allora f ha derivate misure su Ω, e queste hanno variazione totale finita su Ω.

Per provare il teorema di unicità ci sarà utile stabilire un metodo diretto per il calcolo di area $\{y = f(x)\,;\ x \in \bar{\Omega}\}$ attraverso le derivate di f. Per questo osserviamo innanzitutto che se f è una funzione continua su $\bar{\Omega}$ e se Ω è convesso e limitato, allora esiste (cfr. [4], Teorema 1.II) $\tilde{f}$ continua su R^n, con $\tilde{f} = f$ su $\bar{\Omega}$ e avente derivate funzioni sommabili su $R^n - \bar{\Omega}$. Se ora f ha derivate misure su Ω, a variazione totale finita su Ω ed Ω è convesso limitato, allora $\tilde{f}$ risulta avere derivate misure su R^n a variazione totale finita su R^n, e ciò grazie al Teorema 2.6 di [5] al quale ci si può ricondurre operando su R^n una trasformazione bilipschitziana che muti Ω in una sfera C. Dal Teorema 2.6 di [5] segue anche, per la continuità di $\tilde{f}$,

$$\int_{\partial\Omega} |d\nu_{\tilde{f}}| = 0, \qquad \text{(per la notazione v. [3]).} \tag{8.1}$$

Dalla (8.1), per il Teorema 1.8 di [3], segue allora

$$\text{area } \{y = f(x)\,;\ x \in \bar{\Omega}\} = \int_{\Omega} |d\nu_f|\,. \tag{8.2}$$

Da queste considerazioni discende allora immediatamente la seguente proposizione

PROPOSIZIONE 8.1. *Se Ω è un aperto convesso e limitato di R^n $(n \geq 2)$, ed f è una funzione continua su Ω, si ha che:*

1) $\{y = f(x)\,;\ x \in \bar{\Omega}\}$ *ha area di Lebesgue finita se e solo se f ha derivate misure su Ω, a variazione totale finita su Ω.*

2) l'area $\{y = f(x)\,;\ x \in \bar{\Omega}\}$ *si calcola mediante* la (8.2).

Dalla Proposizione 8.1 e dal Teorema 1.II di [4] discende immediatamente quanto segue.

OSSERVAZIONE 8.2. Per ogni aperto limitato e convesso $\Omega \subset R^n$ $(n \geq 2)$, e per ogni funzione reale e continua φ su $\partial\Omega$, esiste $\Phi \in C(\bar{\Omega})$ con $\Phi = \varphi$

su $\partial\Omega$ e

$$\text{area}\,\{y = \Phi(x);\ x \in \bar{\Omega}\} < \infty. \tag{8.3}$$

9. Proviamo ora un teorema di unicità per il problema dell'area minima in n variabili, più debole di quello annunciato.

TEOREMA 9.1. *Se f, g sono funzioni continue su $\bar{\Omega}$, con Ω aperto limitato di R^n $(n \geq 2)$, soluzioni del problema dell'area minima nella classe di tutte le funzioni continue su Ω che hanno una stessa traccia su $\partial\Omega$, se inoltre le derivate di f sono misure assolutamente continue rispetto alla misura di Lebesgue, ovvero vale*

$$\text{area}\,\{y = f(x);\ x \in \bar{\Omega}\} = \int_\Omega \{1 + |Df|^2\}^{1/2}\,dx, \tag{9.1}$$

allora si ha

$$f = g, \qquad \text{su} \quad \Omega. \tag{9.2}$$

DIM.

Sia μ una misura positiva su Ω rispetto alla quale siano assolutamente continue le misure $D_i g$ $(i = 1, \dots, n)$ e la misura di Lebesgue. Avremo allora, indicando con α la derivata della misura di Lebesgue rispetto a μ e ancora con $D_i f$ e $D_i g$ le derivate delle misure $D_i f$ e $D_i g$ rispetto a μ:

$$\int_\Omega \left\{\alpha^2 + \sum_{i=1}^n |D_i f|^2\right\}^{1/2} d\mu = \int_\Omega \left\{\alpha^2 + \sum_{i=1}^n |D_i g|^2\right\}^{1/2} d\mu = \text{minimum}. \tag{9.3}$$

Indichiamo ora con Ω_0 l'insieme

$$\Omega_0 = \{x;\ x \in \Omega,\ \alpha(x) = 0\}. \tag{9.4}$$

Avremo allora ovviamente mis $\Omega_0 = 0$ ed inoltre, poichè vale

$$2\left\{\alpha^2 - \sum_{i=1}^n |D_i(f+g)/2|^2\right\}^{1/2} \leq \left\{\alpha^2 + \sum_{i=1}^n |D_i f|^2\right\}^{1/2} + \left\{\alpha^2 + \sum_{i=1}^n |D_i g|^2\right\}^{1/2} \tag{9.5}$$

si ha

$$\int_\Omega \left\{\alpha^2 + \sum_{i=1}^n |D_i(f+g)/2|^2\right\}^{1/2} d\mu \leq \text{minimum}. \tag{9.6}$$

Ma poichè ovviamente vale $(f+g)/2 = f = g$ su $\partial\Omega$, deve essere

$$(9.7) \qquad \int_{\Omega} \left\{\alpha^2 + \sum_{i=1}^{n} | D_i(f+g)/2 |^2\right\}^{1/2} d\mu = \text{area}\left\{y = \frac{1}{2}(f+g)(x);\, x \in \overline{\Omega}\right\} \geq \text{minimum}.$$

e quindi dalle (9.6) e (9.7) segue che deve valere

$$(9.8) \qquad \int_{\Omega} \left\{\alpha^2 + \sum_{i=1}^{n} | D_i(f+g)/2 |^2\right\}^{1/2} d\mu = \text{minimum}.$$

Dalla (9.8) e (9.5) segue allora che nella (9.5) deve valere μ-quasi ovunque il segno di eguaglianza, e questo, nei punti dove $\alpha \neq 0$ implica $Df = Dg$ Avremo quindi che $Df = Dg$ in $\Omega - \Omega_0$. D'altra parte valgono

$$(9.9) \qquad \int_{\Omega - \Omega_0} | d\nu_g | + \int_{\Omega_0} | d\nu_g | = \int_{\Omega - \Omega_0} | d\nu_f | = \text{minimum},$$

$$(9.10) \qquad \int_{\Omega - \Omega_0} | d\nu_g | = \int_{\Omega - \Omega_0} | d\nu_f |,$$

e quindi deve essere

$$(9.11) \qquad \int_{\Omega_0} | d\nu_g | \geq \int_{\Omega_0} | Dg | \, d\mu = 0,$$

da questa e dal fatto che $Df = Dg$ su $\Omega - \Omega_0$ segue che le misure $D_i f$ e $D_i g$ coincidono su Ω e quindi poichè $f = g$ su $\partial\Omega$ deve valere la (9.2).

c.v.d.

10. Alla dimostrazione del Teorema di unicità premettiamo il seguente lemma, che è conseguenza del Teorema 9.1.

LEMMA 10.1. *Sia Ω un aperto limitato di R^n $(n \geq 2)$. Sia f una funzione continua su $\overline{\Omega}$ con* area $\{y = f(x);\, x \in \overline{\Omega}\} < \infty$ *e soluzione del problema dell'area minima nella classe di tutte le funzioni continue su $\overline{\Omega}$ che assumono i suoi stessi valori su $\partial\Omega$. Sia u una funzione lipschitziana su Ω soluzione del problema dell'area minima nella classe di tutte le funzioni lipschitziane su Ω che assumono i suoi stessi valori su $\partial\Omega$. Allora se vale*

$$(10.1) \qquad f \leq u, \qquad \text{su } \partial\Omega,$$

vale anche

$$f \leq u, \qquad \text{su} \quad \Omega, \tag{10.2}$$

e lo stesso è vero se nelle (10.1) *e* (10.2) *si invertono i segni di diseguaglianza.*

DIM.

Proviamo solo che dalla (10.1) segue la (10.2) essendo analoga la deduzione nel caso in cui si invertano le diseguaglianze.

Indichiamo con f_h una successione di funzioni lipschitziane su Ω e convergente uniformemente su Ω verso la f e tale che

$$\text{area}\,\{y = f(x)\,;\; x \in \overline{\Omega}\} = \lim_{h \to \infty} \int_{\Omega} \{1 + |Df_h|^2\}^{1/2}\, dx. \tag{10.3}$$

Supponiamo per assurdo che la (10.2) sia falsa. Allora posto $w = \max(u, f)$ si ha che $w \neq u$. Quindi, osservato che u, grazie alla diseguaglianza (5.2), è soluzione del problema dell'area minima nella classe di tutte le funzioni continue che assumono i suoi stessi valori su $\partial\Omega$, per il Teorema 9.1, poichè vale $w = u$ su $\partial\Omega$, si ha che esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\text{area}\,\{y = w(x)\,;\; x \in \overline{\Omega}\} > \text{area}\,\{y = u(x)\,;\; x \in \overline{\Omega}\} + \varepsilon. \tag{10.4}$$

Posto $w_h = \max(u, f_h)$ abbiamo che $\{w_h\}$ converge uniformemente a w e quindi avremo

$$\min_{h \to \infty} \lim\; \text{area}\,\{y = w_h(x)\,;\, x \in \overline{\Omega}\} > \text{area}\,\{y = u(x)\,;\, x \in \overline{\Omega}\} + \varepsilon, \tag{10.5}$$

da cui si ricava che può supporsi

$$\text{area}\,\{y = w_h(x)\,;\, x \in \overline{\Omega}\} > \text{area}\,\{y = u(x)\,;\, x \in \overline{\Omega}\} + \varepsilon, \;\; \forall\, h. \tag{10.6}$$

Detto allora A_h l'insieme $\{x\,;\, x \in \Omega,\; f_h(x) > u(x)\}$, avremo

$$\text{area}\,\{y = w_h(x)\,;\, x \in \overline{\Omega}\} = \int_{A_h} \{1 + |Df_h|^2\}^{1/2}\, dx + \int_{\Omega - A_h} \{1 + |Du|^2\}^{1/2}\, dx, \tag{10.7}$$

e quindi, dalle (10.6) e (10.7), si ha

$$\int_{A_h} \{1 + |Df_h|^2\}^{1/2}\, dx > \int_{A_h} \{1 + |Du|^2\}^{1/2}\, dx + \varepsilon, \quad \forall\, h. \tag{10.8}$$

Indichiamo ora con σ_h e σ rispettivamente $\min(f_h, u)$ e $\min(f, u)$. Avremo che $\{\sigma_h\}$ converge uniformemente a σ ed inoltre $\sigma = f$ su $\partial\Omega$. Allora si ha

$$\text{(10.9)} \qquad \text{area}\{y=f(x); x\in\bar{\Omega}\} \leq \text{area}\{y=\sigma(x); x\in\bar{\Omega}\} \leq \min_{h\to\infty} \lim \text{area}\{y=\sigma_h(x); x\in\bar{\Omega}\}.$$

D'altra parte vale

$$\text{(10.10)} \qquad \text{area}\{y=\sigma_h(x);\ x\in\bar{\Omega}\} = \int_{A_h} \{1+|Du|^2\}^{1/2}\,dx + \int_{\Omega-A_h} \{1+|Df_h|^2\}^{1/2}\,dx,$$

quindi, per la (10.8) si ha

$$\text{(10.11)} \qquad \text{area}\{y=\sigma_h(x);\ x\in\bar{\Omega}\} < \text{area}\{y=f_h(x);\ x\in\bar{\Omega}\} - \varepsilon, \ \forall h.$$

Dalla (10.3), (10.9) e (10.11) segue allora

$$\text{(10.12)} \qquad \text{area}\{y=f(x);\ x\in\bar{\Omega}\} < \text{area}\{y=f(x);\ x\in\bar{\Omega}\} - \varepsilon,$$

ciò che è assurdo essendo per ipotesi area $\{y=f(x);\ x\in\bar{\Omega}\} < \infty$, e quindi la (10.2) deve valere.

c.v.d.

TEOREMA 10.2. *Se Ω è un aperto limitato e uniformemente convesso di R^n ($n \geq 2$), se φ è una funzione reale e continua su $\partial\Omega$, allora è unica la soluzione del problema dell'area minima nella classe delle funzioni continue su Ω che hanno traccia φ su $\partial\Omega$.*

DIM.

Siano $\{\varphi_h^+\}$ e $\{\varphi_h^-\}$ due successioni di funzioni reali e continue colle loro derivate dei primi due ordini su R^n e tali che

$$\text{(10.13)} \qquad \varphi_h^+ \geq \varphi_{h+1}^+ \geq \varphi_{h+1}^- \geq \varphi_h^-,$$

$$\text{(10.14)} \qquad \lim_{h\to\infty} \varphi_h^+ = \lim_{h\to\infty} \varphi_h^- = \varphi, \quad \text{uniformemente su } \partial\Omega.$$

Siano allora u_h^+ e u_h^- funzioni lipschitziane su Ω soluzioni del problema dell'area minima nelle classi delle funzioni lipschitziane su Ω che assumono su $\partial\Omega$ i valori φ_h^+ e φ_h^- rispettivamente (per la esistenza delle u_h^+ e u_h^- si veda il Teorema 1,2 e la Proposizione 6.1). Come abbiamo già osservato nella dimostrazione del Teorema di esistenza, grazie al principio di massimo e alla convergenza uniforme dei dati al contorno verso φ, le successioni u_h^+ e u_h^- convergono uniformemente su Ω verso una funzione continua u che risolve il problema dell'area minima relativamente al dato φ. Sia ora ψ una qualunque altra soluzione dello stesso problema. Per l'osservazione 8.2 vale area $\{y = \psi(x)\,;\ x \in \bar{\Omega}\} < \infty$ e quindi grazie al Lemma 10.1 avremo le relazioni

$$u_h^- \leq \psi \leq u_h^+\,, \qquad \text{su } \Omega \quad \forall\, h, \tag{10.15}$$

e quindi al limite per h tendente all'infinito avremo

$$\psi = u \qquad \text{su } \Omega. \tag{10.16}$$

Per concludere ripetiamo l'enunciato del Teorema di esistenza (Teorema 7.1) e unicità (Teorema 10.2).

c.v.d.

TEOREMA. *Se Ω è un aperto limitato e uniformemente convesso di R^n $(n \geq 2)$ e φ è una funzione reale continua su $\partial\Omega$, allora non è vuota la classe delle superfici $\{y = f(x)\,;\ x \in \bar{\Omega}\}$, con $f \in C(\bar{\Omega})$ e $f = \varphi$ su $\partial\Omega$, ed aventi area di Lebesgue finita, ed in tale classe vi è una ed una sola superficie di area minima.*

BIBLIOGRAFIA

[1] T. RADO: « *On the Problem of Plateau* ». Erg. d. Math., 1933.

[2] G. STAMPACCHIA: « *On some regular multiple integral problems in the calculus of variation* ». Comm Pure Appl. Math., 1963.

[3] M. MIRANDA: « *Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro finito sui prodotti cartesiani* ». Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa, 1964.

[4] E. GAGLIARDO: « *Caratterizzazione delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili* ». Rend. Sem. Mat., Padova, 1957.

[5] M. MIRANDA: « *Distribuzioni aventi derivate misure ed insiemi di perimetro localmente finito* » Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa, 1964.