Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

Antonio Chiffi

Correnti quasi normali

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 19, nº 2 (1965), p. 185-205
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_2_185_0>

CORRENTI QUASI NORMALI (*)

di ANTONIO CHIFFI (Pisa)

In questo lavoro vengono studiate le proprietà di una classe di correnti (*correnti quasi normali*) che comprende come caso particolare le correnti normali definite da FEDERER e FLEMING in [2].

Il principale risultato è il teorema 3.11, che, sotto opportune ipotesi, assicura che il limite di una successione di correnti g-rettificabili è ancora una corrente g-rettificabile. Questo teorema estende i risultati di FEDERER-FLEMING che sono alla base di varie moderne ricerche sul problema di PLATEAU e, più in generale, sui problemi di calcolo delle variazioni relativi a varietà k dimensionali generalizzate.

Ringrazio vivamente E. DE GIORGI sotto la cui direzione è stata condotta la presente ricerca.

Premesse.

Richiamiamo sommariamente alcune definizioni e risultati contenuti nel lavoro [2], del quale adottiamo il simbolismo ed al quale rinviamo il lettore per ulteriori riferimenti. Sia R^n lo spazio euclideo a n dimensioni, indichiamo con $x = (x^1, \dots, x^n)$ un generico punto di R^n e sia k un intero con $1 \leq k \leq n$. Sia φ una forma differenziale di grado k, del tipo

$$\varphi = \sum_{(\lambda)} a_{\lambda_1 \dots \lambda_k}(x)\, dx^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge dx^{\lambda_k} \tag{1}$$

dove il simbolo (λ) sta ad indicare che la somma è fatta rispetto a tutte le possibili combinazioni degli interi $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ con $1 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_k \leq n$ e dove

---

Pervenuto alla Redazione il 26 ottobre 1964.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito della attività dei gruppi di ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

$a_{\lambda_1 \dots \lambda_k}(x)$ sono funzioni reali definite in R^n; indicheremo con $\| \varphi(x) \|$ la *comassa* [1] della forma φ nel punto x. La comassa $\| \varphi(x) \|$ verifica le relazioni:

$$p \sum_{(\lambda)} | a_{\lambda_1 \dots \lambda_k}(x) |^2 \leq \| \varphi(x) \|^2 \leq \sum_{(\lambda)} | a_{\lambda_1 \dots \lambda_k}(x) |^2$$

dove p è una costante dipendente solo da k e n. Definiamo la *comassa* di φ nel modo seguente:

$$M(\varphi) = \sup \{ \| \varphi(x) \| : x \in R^n \}. \tag{2}$$

Indichiamo con $E^k(R^n)$ lo spazio vettoriale delle forme differenziali di grado k e di classe $C^\infty(R^n)$, cioè delle forme differenziali del tipo (1) i cui coefficienti appartengono a $C^\infty(R^n)$; assumeremo come forme di grado zero le funzioni reali f definite in R^n e porremo:

$$\| f(x) \| = | f(x) |,$$

$$M(f) = \sup \{ | f(x) | : x \in R^n \}$$

$$E^0(R^n) = C^\infty(R^n).$$

Indicheremo al solito con $d\varphi$ il differenziale esterno della forma φ, con $\varphi \wedge \omega$ il prodotto esterno delle due forme φ e ω. Diremo che la successione $\{\omega_i\}$ di forme $\omega_i \in E^k(R^n)$ converge a $\omega \in E^k(R^n)$ se le successioni formate dai coefficienti delle forme ω_i e delle loro derivate di qualunque ordine convergono uniformemente ai rispettivi coefficienti di ω e alle rispettive derivate in ogni insieme compatto di R^n. Sia $E_k(R^n)$ lo spazio dei funzionali lineari su $E^k(R^n)$, continui rispetto alla convergenza ora introdotta; diremo *correnti* gli elementi di $E_k(R^n)$. Il valore di $T \in E_k(R^n)$ calcolato su $\varphi \in E^k(R^n)$ verrà indicato con $T(\varphi)$. Il supporto di T risulta un insieme compatto di R^n. Sia $T \in E_k(R^n)$ e $\omega \in E^m(R^n)$, con $m \leq k$; il *prodotto interno* $T \wedge \omega$ si definisce nel modo seguente per ogni $\varphi \in E^{k-m}(R^n)$:

$$(T \wedge \omega)(\varphi) = T(\omega \wedge \varphi).$$

Si dice *bordo* di $T \in E_k(R^n)$ la corrente $\partial T \in E_{k-1}(R^n)$ così definita per ogni $\varphi \in E^{k-1}(R^n)$:

$$(\partial T)(\varphi) = T(d\varphi).$$

---

[1] Cfr. [5] cap. I n. 13 a pag. 52 e cap. II n. 3 a pag. 62.

Indicheremo con $M(T)$, $T \in E_k(R^n)$ la *massa* di T, così definita:

$$M(T) = \sup\{T(\varphi) : \varphi \in E^k(R^n),\ M(\varphi) \leq 1\}.$$

Se $f : R^m \longrightarrow R^n$ è una funzione di classe $C^\infty(R^m)$ le cui componenti indichiamo con $f^1, \dots, f^n$ e se la (1) è una forma di $E^k(R^n)$, indicheremo con $f^\# \varphi$ la forma di $E^k(R^m)$ così definita:

$$f^\# \varphi = \sum_{(\lambda)} a_{\lambda_1 \dots \lambda_k}(f(y))\, df^{\lambda_1} \wedge \dots \wedge df^{\lambda_k}.$$

Alla corrente $T \in E_k(R^m)$ associamo la corrente $f_\# T \in E_k(R^n)$ così definita per $\varphi \in E^k(R^n)$:

$$(f_\# T)(\varphi) = T(f^\# \varphi).$$

Ricordiamo le seguenti disuguaglianze: se $T \in E_k(R^n)$ e $\omega \in E^m(R^n)$ con $m \leq k$ è una forma semplice, si ha:

(3) $$M(T \wedge \omega) \leq M(T)\, M(\omega).$$

In particolare la (3) ha luogo se ω è il differenziale di una funzione $g \in E^0(R^n)$ (²) e in tal caso è (³):

(4) $$M(\omega) = \sup\{|\operatorname{grad} g(x)| : x \in R^n\}.$$

Se $f : R^m \longrightarrow R^n$ è una funzione di classe $C^\infty(R^m)$ e uniformemente lipschitziana, detto p il suo modulo di LIPSCHITZ si ha:

(5) $$M(f_\# T) \leq p^k M(T).$$

Se è $M(T) < \infty$, la definizione di T si può prolungare con i consueti metodi della teoria dell'integrazione alle forme di grado k aventi come coefficienti funzioni di BAIRE localmente limitate in modo che, data una successione di forme $\{\varphi_h\}$ a coefficienti equilimitati sul supporto di T, se esiste una forma φ, verificante la

(6) $$\lim_{h \to \infty} \|\varphi_h(x) - \varphi(x)\| = 0$$

(²) Cfr. [5], cap. I, n. 9 a pag. 44.
(³) Cfr. [5], cap. I, n. 13 a pag. 53.

per ogni $x \in R^n$, vale la relazione

$$\lim_{h \to \infty} T(\varphi_h) = T(\varphi). \tag{7}$$

Tale prolungamento è unico e verrà ancora indicato col simbolo T. In particolare si può definire $T \wedge \omega$ nel caso che ω sia la funzione caratteristica di un insieme di BOREL B; in tal caso si pone $T \wedge \omega = T \cap B$. Se la successione $\{T_h\}$, $T_h \in E_k(R^n)$ converge debolmente a $T \in E_k(R^n)$, cioè

$$\lim_{h \to \infty} T_h(\varphi) = T(\varphi) \quad \text{per ogni} \quad \varphi \in E^k(R^n), \text{ si ha:}$$

$$M(T) \leq \min \lim_{h \to \infty} M(T_h) \tag{8}$$

$$M(\partial T) \leq \min \lim_{h \to \infty} M(\partial T_h). \tag{9}$$

Se la successione $\{M(T_h)\}$ è limitata si ha inoltre, per ogni forma continua φ di grado k:

$$\lim_{h \to \infty} T_h(\varphi) = T(\varphi). \tag{10}$$

Se $M(T) < \infty$, $T \in E_k(R^n)$, si può definire la *variazione totale* di T ponendo per ogni funzione continua $f \geq 0$ definita in R^n:

$$\| T \| (f) = \sup \{ T(\varphi) : \varphi \in E^k(R^n), \ \| \varphi(x) \| \leq f(x), \ x \in R^n \}$$

e prolungare poi la sua definizione alle funzioni continue qualunque ed alle funzioni di BAIRE con i consueti procedimenti della teoria dell'integrazione. Se $B \subset R^n$ è un insieme di BOREL porremo

$$\| T \| (B) = \| T \| (\varphi(x, B))$$

ove $\varphi(x, B)$ è la funzione caratteristica di B; vale la relazione:

$$M(T \cap B) = \| T \| (B).$$

Se la successione $\{T_h\}$ di correnti $T_h \in E_k(R^n)$ converge debolmente a $T \in E_k(R^n)$ e se $A \subset R^n$ è un insieme aperto, si ha:

$$\| T \| (A) \leq \min \lim_{h \to \infty} \| T_h \| (A).$$

Se C è un compatto di R^n e p è un numero positivo, l'insieme:

$$E_k(R^n) \cap \{T: \text{ supporto } T \subset C,\ M(T) \leq p\}$$

è debolmente compatto.

§ 1. — Correnti quasi normali.

DEFINIZIONE 1.1. Sia $\sigma \geq 0$ e $T \in E_k(R^n)$. Poniamo:

$$N^*(\sigma, T) = \inf\{M(\partial Q): \ Q \in E_k(R^n),\ M(T - Q) \leq \sigma\}.$$

La funzione $N^*(\sigma, T)$ della variabile reale σ è una funzione reale estesa (risulta cioè: $0 \leq N^*(\sigma, T) \leq +\infty$), definita per ogni $\sigma \geq 0$. Si ha evidentemente:

$$N^*(0, T) = M(\partial T).$$

DEFINIZIONE 1.2. Diremo che la corrente $T \in E_k(R^n)$ è *quasi normale* se è:

$$M(T) < +\infty$$

$$N^*(\sigma, T) < +\infty \qquad \forall\, \sigma > 0.$$

DEFINIZIONE 1.3. Le correnti di una successione $\{T_h\}$, $T_h \in E_k(R^n)$ si diranno *uniformemente quasi normali* se risulta:

$$\sup\{M(T_h): \ h = 1, 2, \ldots\} < +\infty$$

$$\sup\{N^*(\sigma, T_h): \ h = 1, 2, \ldots\} < +\infty \qquad \forall\, \sigma > 0.$$

OSSERVAZIONE 1.4. Sia $T \in E_k(R^n)$; la funzione $N^*(\sigma, T)$ (della variabile σ) è non crescente.

OSSERVAZIONE 1.5. Siano T e Q correnti di $E_k(R^n)$; per ogni $\sigma > 0$ si ha:

$$(1) \qquad N^*(\sigma + M(T - Q),\ T) \leq N^*(\sigma, Q).$$

Se infatti $S \in E_k(R^n)$ è tale che:

$$M(Q - S) \leq \sigma$$

si ha pure:

$$M(T-S) \leq \sigma + M(T-Q)$$

e si ottiene subito la (1).

DEFINIZIONE 1.6. Sia $C \subset R^n$ un insieme chiuso e $\varrho > 0$; poniamo:

$$C_\varrho = \{x : x \in R^n \text{, } distanza \ (x, C) \leq \varrho\}.$$

LEMMA 1.7. *Sia $T \in E_k(R^n)$, e sia C un insieme compatto contenente il supporto di T. Fissati i due numeri $\sigma \geq 0$ e $\varrho > 0$, esiste una corrente $Q \in E_k(R^n)$ verificante le condizioni seguenti:*

$$\text{supporto } Q \subset C_{2\varrho}$$

$$M(T-Q) \leq \sigma$$

$$M(\partial Q) \leq N^*(\sigma, T) + \frac{\sigma}{\varrho}.$$

DIMOSTRAZIONE. Il teorema è banale se $N^*(\sigma, T) = +\infty$; altrimenti, fissato il numero reale $\varrho > 0$ e l'intero $h > 0$, esiste una funzione reale $g_{\varrho h} \in C^\infty(R^n)$ verificante le condizioni seguenti:

$$g_{\varrho h}(x) = 1 \qquad \text{per} \quad x \in C_\varrho$$

$$g_{\varrho h}(x) = 0 \qquad \text{per} \quad x \in R^n - C_{2\varrho}$$

(2) $$\sup \{| \operatorname{grad} g_{\varrho h}(x)| : x \in R^n\} \leq \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{h}$$

$$(\text{supporto } |\operatorname{grad} g_{\varrho h}|) \cap C = \emptyset$$

Si ha immediatamente, tenuto conto che è $g_{\varrho h} = 1$ in un aperto contenente C:

(3) $$T = T \wedge g_{\varrho h}$$

(4) $$T \wedge dg_{\varrho h} = 0.$$

Fissato il numero reale $\sigma \geq 0$ e l'intero h, esiste, per la definizione di $N^*(\sigma, T)$, una corrente $S_h \in E_k(R^n)$ tale che:

(5) $$M(T - S_h) \leq \sigma$$

(6) $$M(\partial S_h) \leq N^*(\sigma, T) + \frac{1}{h}.$$

Poniamo:

$$Q_h = S_h \wedge g_{\varrho h} .$$

Si ha per le (3) e (5):

$$(7) \qquad M(T - Q_h) = M[(T - S_h) \wedge g_{\varrho h}] \leq M(T - S_h) \leq \sigma$$

$$(8) \qquad \text{supporto } (T - Q_h) \subset C_{2\varrho} .$$

Per la (7) e (8) esiste una successione $\{Q_{h'}\}$, estratta dalla successione $\{Q_h\}$, convergente debolmente a una corrente $Q \in E_k(R^n)$. Si ha, tenuto conto della (7):

$$(9) \qquad M(T - Q) \leq \min_{h' \to \infty} \lim M(T - Q_{h'}) \leq \sigma$$

$$(10) \qquad M(\partial Q) \leq \min_{h' \to \infty} \lim M(\partial Q_{h'}) .$$

Per ogni intero h si ha, tenuto anche conto della (4):

$$\partial Q_h = \partial (S_h \wedge g_{\varrho h}) = (\partial S_h) \wedge g_{\varrho h} - S_h \wedge dg_{\varrho h} = (\partial S_h) \wedge g_{\varrho h} - (S_h - T) \wedge dg_{\varrho h} .$$

Segue, tenuto conto delle (3) e (4) della introduzione:

$$M(\partial Q_h) \leq M(\partial S_h) + M(S_h - T)\, M(dg_{\varrho h})$$

e da questa, per le (5), (6) e (2), si ricava:

$$(11) \qquad M(\partial Q_h) \leq N^*(\sigma, T) + \frac{1}{h} + \frac{\sigma}{\varrho} + \frac{\sigma}{h} .$$

Dalle (10) e (11) segue:

$$(12) \qquad M(\partial Q) \leq N^*(\sigma, T) + \frac{\sigma}{\varrho} .$$

Le (9) e (12), assieme alla osservazione che è:

$$\text{supporto } Q \subset C_{2\varrho}$$

dimostrano il presente lemma.

TEOREMA 1.8. *Sia* $T \in E_k(R^n)$; *si ha:*

$$(13) \qquad N^*(\sigma, T) = \lim_{\varepsilon \to 0} N^*(\sigma + |\varepsilon|, T) .$$

DIMOSTRAZIONE. Il limite a secondo membro della (13) esiste per l'osservazione 1.4. ed è:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} N^*(\sigma + |\varepsilon|, T) \leq N^*(\sigma, T). \tag{14}$$

Detto C il supporto di T e fissato il numero $\varrho > 0$, esiste, per il lemma 1.7, per ogni intero $h > 0$ la corrente $Q_h \in E_k(R^n)$ verificante le condizioni:

$$\text{supporto } Q_h \subset C_{2\varrho} \tag{15}$$

$$M(T - Q_h) \leq \sigma + \frac{1}{h} \tag{16}$$

$$M(\partial Q_h) \leq N^*\left(\sigma + \frac{1}{h}, T\right) + \frac{\sigma}{\varrho} + \frac{1}{h\varrho}. \tag{17}$$

Per le (15) e (16) esiste una successione $\{Q_{h'}\}$ estratta dalla successione $\{Q_h\}$, convergente debolmente a una corrente $Q \in E_k(R^n)$ e si ha, tenuto conto delle (16) e (17):

$$M(T - Q) \leq \sigma \tag{18}$$

$$M(\partial Q) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} N^*(\sigma + |\varepsilon|, T) + \frac{\sigma}{\varrho}. \tag{19}$$

Pertanto per le (18) e (19) si ha:

$$N^*(\sigma, T) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} N^*(\sigma + |\varepsilon|, T) + \frac{\sigma}{\varrho} \tag{20}$$

e, per l'arbitrarietà di ϱ, dalle (20) e (14) segue la (13).

COROLLARIO 1.9. *Sia $T \in E_k(R^n)$. Si ha l'uguaglianza:*

$$M(\partial T) = \lim_{\varepsilon \to 0} N^*(|\varepsilon|, T). \tag{21}$$

TEOREMA 1.10. *Se la successione $\{T_h\}$ di correnti $T_h \in E_k(R^n)$ converge debolmente alla corrente $T \in E_k(R^n)$, si ha, per ogni $\sigma \geq 0$:*

$$N^*(\sigma, T) \leq \min_{h \to \infty} \lim N^*(\sigma, T_h). \tag{22}$$

DIMOSTRAZIONE. Detto C il supporto di T e fissato il numero $\varrho > 0$, esiste in virtù del lemma 1.7, per ogni intero h, una corrente $Q_h \in E_k(R^n)$

verificante le condizioni seguenti:

(23) $$\text{supporto } Q_h \subset C_{2\varrho}$$

(24) $$M(T_h - Q_h) \leq \sigma$$

(25) $$M(\partial Q_h) \leq N^*(\sigma, T_h) + \sigma/\varrho\,.$$

Per le (23) e (24) esiste una successione $\{T_{h'} - Q_{h'}\}$ estratta dalla successione $\{T_h - Q_h\}$, convergente debolmente.

La successione $\{T_{h'}\}$ converge debolmente a T per ipotesi; pertanto la successione $\{Q_{h'}\}$ converge debolmente a una corrente $Q \in E_k(R^n)$ e si ha per le (24) e (25):

(26) $$M(T - Q) \leq \sigma$$

(27) $$M(\partial Q) \leq \min_{h \to \infty} \lim N^*(\sigma, T_h) + \sigma/\varrho.$$

Ma, essendo per le (26) e (27):

(28) $$N^*(\sigma, T) \leq \min_{h \to \infty} \lim N^*(\sigma, T_h) + \sigma/\varrho$$

per l'arbitrarietà di ϱ dalla (28) segue la (22).

COROLLARIO. 1.11. *Se la successione $\{T_h\}$ di correnti $T_h \in E_k(R^n)$, uniformemente quasi normali, converge debolmente alla corrente $T \in E_k(R^n)$, la corrente T è quasi normale.*

Segue dal teorema 1.10 e dalle definizioni 1.2 e 1.3.

§ 2. — Correnti quasi normali e trasformazioni lipschitziane.

TEOREMA. 2.1. *Sia $T \in E_k(R^n)$ una corrente quasi normale e siano:*

$$f_0, f_1, \dots, f_k; \qquad g_0, g_1, \dots, g_k$$

$2k+2$ funzioni reali definite in R^n e ivi di classe C^∞. Siano p, ε due numeri, tali che si abbia, per $x \in R^n$, $i = 0, 1, \dots, k$:

$$|f_i(x)| \leq p; \qquad |\operatorname{grad} f_i(x)| \leq p$$

$$|g_i(x)| \leq p; \qquad |\operatorname{grad} g_i(x)| \leq p$$

ed inoltre, detto C il supporto di T, per $x \in C$ sia:

$$|f_i(x) - g_i(x)| \leq \varepsilon .$$

Risulta allora, per ogni $\sigma > 0$, $\varrho > 0$:

$$(1) \qquad |T(f_0 \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_k) - T(g_0 \wedge dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_k)| \leq$$

$$\leq (1 + k)\, p^k (\varepsilon + 4p\varrho) \left[M(T) + N^*(\sigma, T) + \sigma + \frac{\sigma}{\varrho}\right] + 2\sigma p^{k+1} .$$

Dimostriamo dapprima che sotto l'ulteriore ipotesi:

$$M(\partial T) < +\infty$$

si ha la disuguaglianza:

$$(2) \quad |T(f_0 \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_k) - T(g_0 \wedge dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_k)| \leq (1 + k)\, \varepsilon p^k [M(T) + M(\partial T)] .$$

La (2) è verificata per $k = 0$. Infatti in tal caso si ha:

$$|T(f_0) - T(g_0)| \leq M(T)\, \varepsilon.$$

Supponiamo che la (2) valga per un certo valore i di k e dimostriamo che essa vale per $k = i + 1$. Si ha infatti:

$$(3) \qquad |T(f_0 \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_{i+1}) - T(g_0 \wedge dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_{i+1})| \leq$$

$$\leq |T([f_0 - g_0] \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_{i+1})| +$$

$$+ |T(g_0 \wedge [df_1 \wedge \ldots \wedge df_{i+1} - dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_{i+1}])| =$$

$$= |T([f_0 - g_0] \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_{i+1})| +$$

$$+ |(\partial [T \wedge g_0])(f_1 \wedge df_2 \wedge \ldots \wedge df_{i+1} - g_1 \wedge dg_2 \wedge \ldots \wedge dg_{i+1})| .$$

Si ha:

$$(4) \qquad |T([f_0 - g_0] \wedge df_1 \wedge \ldots \wedge df_{i+1})| \leq \varepsilon p^{i+1} M(T)$$

e, avendo supposto che la (2) valga per $k = i$, si ha pure:

$$(5) \quad |(\partial[T \wedge g_0])(f_1 \wedge df_2 \wedge \ldots \wedge df_{i+1} - g_1 \wedge dg_2 \wedge \ldots \wedge dg_{i+1})| \leq (1 + i)\, \varepsilon p^i [pM(\partial T) + pM(T)].$$

Dalle (3), (4) e (5) segue che la (2), se vale per $k = i$, vale anche per $k = i + 1$. La (2) vale allora per ogni valore di k.

Passiamo ora alla dimostrazione della (1). Fissati i due numeri $\sigma > 0$ e $\varrho > 0$, e detto C il supporto di T, sia Q la corrente costruita nel lemma 1.7. Si ha subito:

$$(6) \qquad \begin{cases} (T - Q)(f_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k) \leq \sigma p^{k+1} \\ (T - Q)(g_0 \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) \leq \sigma p^{k+1} \end{cases}$$

e, per $x \in C_{2\varrho}$, $i = 0, \dots, k$ si ha pure:

$$(7) \qquad |f_i(x) - g_i(x)| \leq \varepsilon + 4p\varrho .$$

Possiamo scrivere per le (6):

$$(8) \qquad | T(f_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k) - T(g_0 \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) | \leq$$
$$\leq 2\,\sigma p^{k+1} + | Q(f_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k) - Q(g_0 \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) | .$$

Scriviamo la (2) per la corrente Q, tenendo conto della (7):

$$(9) \qquad | Q(f_0 \wedge df_1 \wedge \dots \wedge df_k) - Q(g_0 \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) | \leq$$
$$\leq (1 + k)\, p^k (\varepsilon + 4p\varrho) \left[M(T) + \sigma + N^*(\sigma, T) + \frac{\sigma}{\varrho} \right] .$$

Dalle (8) e (9) segue subito la (1).

COROLLARIO 2.2. *Sia $T \in E_k(R^n)$ una corrente quasi normale e $\{f_{0h}\}_h$, $\{f_{1h}\}_h, \dots, \{f_{kh}\}_h$ successioni di funzioni reali definite in R^n e ivi di classe C^∞, verificanti le condizioni seguenti: esista un numero positivo p tale che si abbia, per $x \in R^n$* e *$i = 0, \dots, k$; $h = 1, 2, \dots$:*

$$|f_{ih}(x)| \leq p, \quad |\operatorname{grad} f_{ih}(x)| \leq p \, ;$$

le successioni $\{f_{0h}\}, \dots, \{f_{kh}\}$ convergano uniformemente sul supporto di T. In tali ipotesi esiste il limite:

$$\lim_{h \to \infty} T(f_{0h} \wedge df_{1h} \wedge \dots \wedge df_{kh}) .$$

DIMOSTRAZIONE. Fissati i numeri $\sigma > 0$, $\varrho > 0$ e gli indici h, s applichiamo il teorema 2.1 alla differenza:

$$| T(f_{0h} \wedge df_{1h} \wedge \dots \wedge df_{kh}) - T(f_{0s} \wedge df_{1s} \wedge \dots \wedge df_{ks}) |$$

e otteniamo:

$$\text{(10)} \qquad \max\lim_{(h,s)\to\infty} | T(f_{0h} \wedge df_{1h} \wedge \ldots \wedge df_{kh}) - T(f_{0s} \wedge df_{1s} \wedge \ldots \wedge df_{ks}) | \leq$$

$$\leq (1+k)\, 4\varrho p^{k+1} [M(T) + N^*(\sigma, T) + \sigma] + (1+k)\, 4 p^{k+1} \sigma + 2\sigma p^{k+1}.$$

Basta ora far tendere prima ϱ a zero e poi $\sigma \to 0$.

COROLLARIO 2.3. *Sia* $\{T_h\}$, $T_h \in E_k(R^n)$, *una successione di correnti uniformemente quasi normali debolmente convergente; sia* K *un compatto con* ***supp*** $T_h \subset K\,(h = 1, 2, \ldots)$, *le successioni di funzioni reali* $\{f_{0h}\}_h$, $\{f_{1h}\}_h, \ldots$, $\{f_{kh}\}_h$ *verifichino le ipotesi del corollario* 2.2 *e il limite*:

$$\lim_{(h,s)\to\infty} | f_{ih}(x) - f_{is}(x) | = 0 \qquad (i = 0, \ldots, k)$$

sia uniforme rispetto a $x \in K$; *in tali ipotesi esiste il limite doppio:*

$$\text{(11)} \qquad \lim_{(r,h)\to\infty} T_r(f_{0h} \wedge df_{1h} \wedge \ldots \wedge df_{kh}).$$

DIMOSTRAZIONE. Per la convergenza debole della successione $\{T_r\}$ esiste, per ogni fissato indice h, il limite:

$$\lim_{r\to\infty} T_r(f_{0h} \wedge df_{1h} \wedge \ldots \wedge df_{kh}) \qquad (h = 1, 2, \ldots).$$

Per dimostrare l'esistenza del limite (11) basterà allora far vedere che il limite

$$\text{(12)} \qquad \lim_{h\to\infty} T_r(f_{0h} \wedge df_{1h} \wedge \ldots \wedge df_{kh})$$

esistente per ogni indice r per il corollario 2.2, è uniforme rispetto a r. Fissato σ, con $0 < \sigma < 1$, poniamo:

$$M(\sigma) = \sup \{[M(T_h) + N^*(\sigma, T_h)] : \qquad h = 1, 2, \ldots\}$$

e determiniamo un indice N tale che per ogni coppia di indici h e s, entrambi maggiori di N, si abbia, per $x \in K$ e $i = 0, \ldots, k$:

$$| f_{ih}(x) - f_{is}(x) | \leq \frac{\sigma}{M(\sigma) + 1}.$$

Fissati i due indici h e s, maggiori di N, applichiamo il teorema 2.1 alla corrente T_r e alle $2k + 2$ funzioni $f_{ih}, f_{is}\,(i = 0, \ldots, k)$ ponendovi $\varepsilon = \varrho =$

$= \sigma (M(\sigma) + 1)^{-1}$; si ha :

(13) $|T_r (f_{0h} \wedge df_{1h} \wedge \ldots \wedge df_{kh}) - T_r (f_{0s} \wedge df_{1s} \wedge \ldots \wedge df_{ks})| \leq 2\sigma p^k (1 + 5p + k + 4pk).$

La (13), valevole per ogni coppia di indici h e s entrambi maggiori di N, dimostra che il limite (12) è uniforme rispetto a r.

DEFINIZIONE 2.4. Sia $T \in E_k(R^n)$ quasi normale, sia $f: R^n \longrightarrow R^m$ una funzione uniformemente lipschitziana e sia $\{f_h\}$ una successione di funzioni $f_h : R^n \longrightarrow R^m$, di classe $C^\infty(R^n)$ uniformemente lipschitziane, convergente uniformemente a f sul supporto di T [4]. Definiamo la corrente $f_\# T \in E_k(R^m)$ nel modo seguente :

(14) $$f_\# T = \lim_{h \to \infty} f_{h\#} T.$$

Dette $(f_h^1, \ldots, f_h^m)$ le componenti della funzione f_h $(h = 1, 2, \ldots)$, si ha :

$$(f_{h\#} T)(\varphi) = T(f_h^\# \varphi) = \sum_{(\lambda)} T(a_{\lambda_1 \ldots \lambda_k}(f) \wedge df_h^{\lambda_1} \wedge \ldots \wedge df_h^{\lambda_k})$$

e pertanto il limite a secondo membro della (14) esiste per il corollario 2.2. Inoltre il limite (14) è indipendente dalla particolare successione scelta, perchè se $\{f_{1,h}\}, \{f_{2,h}\}$ verificano le condizioni enunciate, ciò accade anche per la successione $\{f_{1,1}, f_{2,1}, f_{1,2}, f_{2,2}, \ldots f_{1,h}, f_{2,h}, \ldots\}$.

OSSERVAZIONE 2.5. Sia f: $R^n \longrightarrow R^m$ uniformemente lipschitziana ; l'operazione che associa alla corrente quasi normale $T \in E_k(R^n)$ la corrente $f_\# T$ è lineare e si ha :

$$\text{supporto } (f_\# T) \subset f \text{ (supporto } T)$$

$$\partial f_\# T = f_\# \partial T.$$

Se p è un numero che maggiora il modulo di Lipschitz della f si ha :

$$M(f_\# T) \leq p^k M(T)$$

e, se è $M(\partial T) < \infty$, si ha pure:

$$M(\partial f_\# T) \leq p^{k-1} M(\partial T).$$

---

[4] Per il teorema di prolungamento delle funzioni lipschitziane la funzione f potrebbe supporsi localmente lipschitziana.

OSSERVAZIONE 2.6. *Se* $f : R^n \longrightarrow R^m$ *e* $g : R^n \longrightarrow R^m$ *sono funzioni lipschitziane e* $T \in E_k(R^n)$ *è quasi normale ; se è* $f(x) = g(x)$ *per* $x \in$ (supporto T), *è pure* :

$$f_{\#} T = g_{\#} T. \tag{15}$$

Infatti ogni successione di funzioni $\{f_h\}$ atta a definire, a norma della definizione 2.4, la corrente $f_{\#} T$, definisce pure, nello stesso modo, $g_{\#} T$.

LEMMA 2.7. *Sia* $T \in E_k(R^n)$ *quasi normale,* $f : R^n \longrightarrow R^m$ *una funzione uniformemente lipschitziana e* p *un numero che maggiora il modulo di Lipschitz di* f. *Si ha:*

$$N^*(p^k \sigma, f_{\#} T) \leq p^{k-1} N^*(\sigma, T). \tag{16}$$

Sia $S \in E_k(R^n)$ una corrente tale che $M(T - S) \leq \sigma$, $M(\partial S) < +\infty$. Si ha, per l'osservazione 2.5 :

$$M(f_{\#} T - f_{\#} S) \leq p^k \sigma \tag{17}$$

$$M(\partial f_{\#} S) \leq p^{k-1} M(\partial S). \tag{18}$$

Le (17) e (18) dimostrano la (16).

COROLLARIO 2.8. *Se* $T \in E_k(R^n)$ *è quasi normale e* $f : R^n \longrightarrow R^m$ *è una funzione uniformemente lipschitziana, la corrente* $f_{\#} T$ *è quasi normale.*

COROLLARIO 2.9. *Le correnti della successione* $\{T_h\}$, $T_h \in E_k(R^n)$, *siano uniformemente quasi normali e la funzione* $f : R^n \longrightarrow R^m$ *sia uniformemente lipschitziana. In tali ipotesi le correnti della successione* $\{f_{\#} T_h\}$ *sono uniformemente quasi normali.*

COROLLARIO 2.10. *Sia* $f : R^n \longrightarrow R^m$ *uniformemente lipschitziana, la successione* $\{T_h\}$ *di correnti di* $E_k(R^n)$ *uniformemente quasi normali converga debolmente a* T *ed esista un compatto* K *tale che* : (supporto T_h) $\subset K$ $(h = 1, 2, \ldots)$. *In tali ipotesi si ha :*

$$\lim_{h \to \infty} f_{\#} T_h = f_{\#} T.$$

Segue subito dal corollario 2.3.

§ 3. — Le correnti g-rettificabili.

Definizione 3.1. Sia $\sigma \geq 0$, A un aperto di R^n e $T \in E_k(R^n)$; poniamo:

$$M(T; A) = \sup\{T(\omega) : \omega \in E^k(R^n), M(\omega) \leq 1, \text{ supporto } \omega \subset A\}$$

$$N^*(\sigma, T; A) = \inf\{M(\partial Q; A) : Q \in E_k(R^n), M(T - Q; A) \leq \sigma\}.$$

Osservazione 3.2. Sia $A \subset R^n$ un insieme aperto e $T \in E_k(R^n)$; si ha:

$$M(T; A) \leq M(T)$$

$$N^*(\sigma, T; A) \leq N^*(\sigma, T) \qquad \forall \sigma > 0.$$

Definizione 3.3. Sia $C \subset R^n$ un insieme chiuso e $\varrho > 0$; indichiamo con A_ϱ l'insieme aperto così definito:

$$A_\varrho = \{x : x \in R^n, \quad \text{distanza } (x, C) < \varrho\}.$$

Lemma 3.4. *Sia $T \in E_k(R^n)$ una corrente di massa finita, C un insieme chiuso. Fissati i numeri $\varrho > 0$ e $\sigma \geq 0$, detto A_ϱ l'insieme di cui alla definizione 3.3, ha luogo la disuguaglianza:*

$$(1) \qquad N^*\{\sigma + M[T \cap (A_\varrho - C)], T \cap C\} \leq$$
$$\leq N^*(\sigma, T; A_\varrho) + \frac{2}{\varrho}\{\sigma + M[T \cap (A_\varrho - C)]\}.$$

Dimostrazione. Fissato $\varrho > 0$ e l'intero $h > 0$, esiste una funzione reale $g_{\varrho h} \in C^\infty(R^n)$ verificante le condizioni seguenti:

$$g_{\varrho h}(x) = 1 \qquad \text{per} \quad x \in C$$

$$g_{\varrho h}(x) = 0 \qquad \text{per} \quad x \in R^n - A_{\varrho/2}$$

$$\sup\{|\operatorname{grad} g_{\varrho h}(x)| : x \in R^n\} \leq \frac{2}{\varrho} + \frac{1}{h}.$$

Si ha subito, qualunque sia $S \in E_k(R^n)$:

$$(2) \qquad M(S \wedge g_{\varrho h}) \leq M(S; A_\varrho)$$

$$(3) \qquad M(S \wedge dg_{\varrho h}) \leq M(S; A_\varrho)\left(\frac{2}{\varrho} + \frac{1}{h}\right)$$

e si ha pure:

$$M(T \wedge dg_{\varrho h}) \leq M[T \cap (A_\varrho - C)]\left(\frac{2}{\varrho} + \frac{1}{h}\right). \tag{4}$$

Fissato $\sigma \geq 0$ e l'intero $h > 0$, determiniamo, nella ipotesi $N^*(\sigma, T; A_\varrho) < +\infty$, una corrente S_h tale che si abbia:

$$M(T - S_h;\ A_\varrho) \leq \sigma \tag{5}$$

$$M(\partial S_h;\ A_\varrho) \leq N^*(\sigma, T;\ A_\varrho) + \frac{1}{h}. \tag{6}$$

Posto:

$$Q_h = S_h \wedge g_{\varrho h}$$

si ha subito, tenendo conto della (2) e della (5);

$$\begin{aligned} M(T \cap C - Q_h) &= M[(T - S_h) \wedge g_{\varrho h}] + M(T \cap C - T \wedge g_{\varrho h}) \leq \\ &\leq M(T - S_h;\ A_\varrho) + M[T \cap (A_\varrho - C)] \leq \sigma + M[T \cap (A_\varrho - C)] \end{aligned} \tag{7}$$

ed anche, per le (2), (3), (4), (5) e (6):

$$\begin{aligned} M(\partial Q_h) &\leq M(\partial S_h \wedge g_{\varrho h}) + M[(S_h - T) \wedge dg_{\varrho h}] + M(T \wedge dg_{\varrho h}) \leq \\ &\leq M(\partial S_h;\ A_\varrho) + M(S_h - T;\ A_\varrho)\left(\frac{2}{\varrho} + \frac{1}{h}\right) + M[T \cap (A_\varrho - C)]\left(\frac{2}{\varrho} + \frac{1}{h}\right) \leq \\ &\leq N^*(\sigma, T;\ A_\varrho) + \frac{2}{\varrho}\{\sigma + M[T \cap (A_\varrho - C)]\} + \frac{\sigma + M(T) + 1}{h}. \end{aligned} \tag{8}$$

Dalla (7) e (8) segue:

$$\begin{aligned} N^*\{\sigma + M[T \cap (A_\varrho - C)],\ T \cap C\} &\leq M(\partial Q_h) \leq \\ &\leq N^*(\sigma, T;\ A_\varrho) + \frac{2}{\varrho}\{\sigma + M[T \cap (A_\varrho - C)]\} + \frac{\sigma + M(T) + 1}{h} \end{aligned}$$

e quindi, passando al limite per $h \to \infty$, si ottiene la (1).

TEOREMA 3.5. *Sia $\{T_h\}$ una successione di correnti $T_h \in E_k(R^n)$ uniformemente quasi normali (definizione 1.3) e C un insieme chiuso. Le funzioni di ϱ:*

$$M[T_h \cap (A_\varrho - C)]$$

convergano a zero per $\varrho \rightarrow 0$, uniformemente rispetto a h; allora le correnti della successione

$$\{ T_h \cap C \}$$

sono uniformemente quasi normali.

Fissato $\sigma > 0$ determiniamo $\varrho > 0$ in modo che si abbia:

$$M[T_h \cap (A_\varrho - C)] < \frac{\sigma}{2} \qquad (h = 1, 2, \ldots).$$

Basta ora scrivere la (1) del lemma 3.4 per la corrente T_h, ponendo $\frac{\sigma}{2}$ al posto di σ e verificare che è:

$$N^*(\sigma, T_h \cap C) \leq N^*\left(\frac{\sigma}{2}, T_h; A_\varrho\right) + \frac{2\sigma}{\varrho} \leq N^*\left(\frac{\sigma}{2}, T_h\right) + \frac{2\sigma}{\varrho}.$$

COROLLARIO. 3.6. *Se $T \in E_k(R^n)$ è quasi normale e $B \subset R^n$ è un insieme di Borel, anche la corrente $T \cap B$ è quasi normale.*

Se B è chiuso, $T \cap B$ è quasi normale per il teorema 3.5. Sia B un insieme di BOREL; fissato $\sigma > 0$ esiste un insieme chiuso $C_\sigma \subset B$ tale che:

$$\| T \| (B - C_\sigma) = M[T \cap (B - C_\sigma)] = M[(T \cap B) - (T \cap C_\sigma)] \leq \sigma.$$

Dalla osservazione 1.5 segue subito:

$$N^*(2\sigma, T \cap B) \leq N^*(\sigma, T \cap C_\sigma) < +\infty \qquad \forall \sigma > 0.$$

TEOREMA 3.7. *Sia $\{ T_h \}$ una successione di correnti $T_h \in E_k(R^n)$ uniformemente quasi normali e la successione di misure $\{ \| T_h \| \}$ converga debolmente alla misura μ; allora, per ogni compatto $C \subset R^n$ verificante la relazione*

$$\mu(\mathcal{F} C) = 0 \tag{9}$$

la successione:

$$\{ T_h \cap C \}$$

è una successione di correnti uniformemente quasi normali.

Fissato il compatto C verificante la (9), si ha [5]:

$$\lim_{h \to \infty} \| T_h \| (C) = \mu(C). \tag{10}$$

---

[5] Cfr. [4] pp. 221-224; [1] pp. 194-195.

La misura μ è limitata perchè le misure della successione $\{\| T_h \|\}$ sono equilimitate; pertanto la funzione di ϱ: $\mu(\mathcal{F} A_\varrho)$ è diversa da zero per un insieme al più numerabile di valori di ϱ. Se ϱ non appartiene a tale insieme si ha:

$$\lim_{h \to \infty} \| T_h \| (A_\varrho) = \mu(A_\varrho) \tag{11}$$

e dalle (10) e (11) segue, per tali valori di ϱ:

$$\lim_{h \to \infty} \| T_h \| (A_\varrho - C) = \mu(A_\varrho - C). \tag{12}$$

Fissato $\varepsilon > 0$ determiniamo ϱ' in modo che per esso valga la (12) e si abbia: $\mu(A_{\varrho'} - C) < \varepsilon$. Determiniamo poi l'indice h' tale che per ogni $h > h'$ si abbia:

$$\| T_h \| (A_{\varrho'} - C) < 2\varepsilon. \tag{13}$$

Per la monotonia delle funzioni di ϱ: $\| T_h \| (A_\varrho - C)$, la (13) ha luogo anche per ogni $\varrho < \varrho'$. Determiniamo poi ϱ'' in modo che per ogni $\varrho < \varrho''$ e per $h = 1, 2, \ldots h'$ si abbia:

$$\| T_h \| (A_\varrho - C) < 2\varepsilon. \tag{14}$$

Pertanto le funzioni di ϱ:

$$\{\| T_h \| (A_\varrho - C)\}$$

convergono a zero per $\varrho \to 0$, uniformemente rispetto a h e, per il teorema 3.5 e l'uguaglianza:

$$\| T_h \| (A_\varrho - C) = M[T_h \cap (A_\varrho - C)]$$

il presente teorema è dimostrato.

DEFINIZIONE 3.8. Sia $T \in E_k(R^n)$ una corrente quasi normale e $g: R^n \to R^k$ una trasformazione localmente lipschitziana. Diremo che la corrente T è *g-rettificabile* se la corrente $g_{\#}(T \cap B)$ è rettificabile per ogni insieme di BOREL $B \subset R^n$; cioè se per ogni insieme di BOREL $B \subset R^n$ esiste una funzione γ a valori interi, definita in R^k e ivi sommabile, tale che per ogni forma $\varphi \in E^k(R^k)$ si abbia:

$$(g_{\#}[T \cap B])(\varphi) = \int_{R^k} \gamma \varphi.$$

La corrente $g_{\#}(T \cap B)$ esiste per il corollario 3.6 e la definizione 2.4.

TEOREMA 3.9. *Sia $\mathcal{C}$ una famiglia di insiemi di R^n tale che la minima famiglia contenente $\mathcal{C}$ e chiusa rispetto all'operazione di limite d'una successione d'insiemi sia la famiglia degli insiemi di Borel di R^n. Detta $g: R^n \longrightarrow R^k$ una trasformazione lipschitziana e $T \in E_k(R^n)$ una corrente quasi normale, la corrente T è g-rettificabile se e solo se $g_{\#}(T \cap C)$ è rettificabile per ogni $C \in \mathcal{C}$.*

DIMOSTRAZIONE. Basta osservare che se B è limite di una successione $\{B_h\}$ di insiemi di BOREL, si ha:

$$0 = \lim_{h \to \infty} \| T \| (B - B_h) = \lim_{h \to \infty} M(T \cap B - T \cap B_h)$$

$$\lim_{h \to \infty} M[g_{\#}(T \cap B) - g_{\#}(T \cap B_h)] = 0,$$

e quindi se $g_{\#}(T \cap B_h)$ è rettificabile lo è pure $g_{\#}(T \cap B)$.

LEMMA 3.10. *Sia $\{T_h\}$ una successione di correnti uniformemente quasi normali* n*-dimensionali dello spazio R^n, convergente debolmente a una corrente $T \in E_n(R^n)$; i supporti delle correnti T_h siano tutti contenuti in uno stesso compatto $C \subset R^n$. In tali ipotesi si ha:*

$$\lim_{h \to \infty} M(T_h - T) = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Fissato $\sigma > 0$ esistono le correnti $Q_{h\sigma} \in E_n(R^n)$ e il numero M_σ tale che:

$$M(T_h - Q_{h\sigma}) \leq \sigma \tag{15}$$

$$M(\partial Q_{h\sigma}) \leq M_\sigma, \quad M(Q_{h\sigma}) \leq M_\sigma . \tag{16}$$

Si può inoltre supporre che i supporti delle correnti $Q_{h\sigma}$ siano tutti contenuti in un intorno limitato di C. Dalla (15) segue allora che esiste una corrente $Q_\sigma \in E_n(R^n)$ tale che $\{Q_{h\sigma}\}$ converga debolmente a Q_σ e si abbia:

$$M(T - Q_\sigma) \leq \sigma. \tag{17}$$

Mediante l'isomorfismo di $E_n(R^n)$ su $E_0(R^n)$ (lo spazio delle distribuzioni a supporto compatto) così definito:

$$T \longrightarrow T \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

e tenendo conto delle (16), possiamo applicare alla successione $\{Q_{h\sigma}\}$ un teorema di compattezza riguardante le distribuzioni le cui derivate sono misure [6] e scrivere :

(18) $$\lim_{h \to \infty} M(Q_{h\sigma} - Q_\sigma) = 0.$$

Tenendo presenti le (15), (17) e (18) si ha,

$$\max \lim_{h \to \infty} M(T - T_h) \leq 2\sigma$$

e il presente lemma risulta dimostrato.

TEOREMA 3.11. *Sia g : R^k — R^n una trasformazione localmente lipschitziana e $\{T_h\}$ una successione di correnti $T_h \in E_k(R^n)$ uniformemente quasi normali e g-rettificabili, convergente debolmente a $T \in E_k(R^n)$. In tali ipotesi T è g-rettificabile.*

DIMOSTRAZIONE. Basta verificare, a norma del teorema 3.9, la rettificabilità delle correnti $\{T \cap C\}$, per C appartenente ad una opportuna famiglia di insiemi.

Osserviamo dapprima che, essendo le correnti della successione $\{T_h\}$ uniformemente quasi normali, le misure $\| T_h \|$ sono uniformemente limitate. Possiamo allora trovare una successione subordinata $\{T_{h'}\}$ tale che $\{\| T_{h'} \|\}$ converga debolmente ad una misura μ.

La famiglia $\mathcal{C}$ di insiemi compatti di cui al teorema 3.9 si può allora determinare prendendo tutti gli insiemi compatti C tali che :

(19) $$\mu(\mathcal{F} C) = 0.$$

Inoltre dalla (19) si deduce facilmente che la successione $\{T_{h'} \cap C\}$ converge debolmente a $T \cap C$.

Per il teorema 3.7, fissato l'insieme $C \in \mathcal{C}$, la successione :

$$\{T_{h'} \cap C\}$$

è formata da correnti uniformemente quasi normali.

Per il corollario 2.9 lo sono anche le correnti della successione :

(20) $$\{g_{\#}(T_{h'} \cap C)\}.$$

---

(6) Cfr. [3] teorema 1.6 a pag. 33.

Le correnti della successione (20) sono k-dimensionali dello spazio R^k, convergono debolmente alla corrente $g_{\#}(T \cap C)$ e verificano tutte le ipotesi del lemma 3.10; pertanto si ha:

$$\lim_{h' \to \infty} M[g_{\#}(T_{h'} \cap C) - g_{\#}(T \cap C)] = 0. \tag{21}$$

Dalla (21) e dalla g-rettificabilità di ogni corrente $T_{h'} \cap C$ segue la g rettificabilità di $T \cap C$.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. De Giorgi: *Su una teoria generale della misura $(r-1)$ dimensionale in uno spazio ad r dimensioni.* Annali di Matematica pura e applicata, vol. 36 (1954), pp. 191-213.

[2] H. Federer and W. H. Fleming: *Normal and integral currents.* Annals of Mathematics, vol. 72 (1960), pp. 458-520.

[3] M. Miranda: *Distribuzioni aventi derivate misure. Insiemi di perimetro localmente finito.* Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. 18 (1964), pp. 27-56.

[4] De La Vallée Poussin: *Extension de la méthode du balayage de Poincaré et problème de Dirichlet.* Annales de l'Institut H. Poincaré, vol. 2 (1932), pp. 169-232.

[5] H. Whitney: *Geometric Integration Theory.* Princeton, 1957.