

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

S. CAMPANATO

M. K. V. MURTHY

## **Una generalizzazione del teorema di Riesz-Thorin**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 19, n° 1 (1965), p. 87-100*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1965\\_3\\_19\\_1\\_87\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_1_87_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1965, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UNA GENERALIZZAZIONE DEL TEOREMA DI RIESZ-THORIN

S. CAMPANATO e M. K. V. MURTHY (\*)

Sia  $\Omega$  un insieme misurabile di  $R^n$ ,  $L^p(\Omega)$ ,  $p \geq 1$ , lo spazio di Banach delle funzioni a valori complessi di potenza  $p$ -sommabili in  $\Omega$ . Indichiamo con  $\| \cdot \|_p$  la norma in  $L^p(\Omega)$ .

È noto il seguente risultato di Riesz-Thorin sulla interpolazione per operazioni lineari tra gli spazi  $L^p(\Omega)$  (cfr. ad es. [1], [10]): (Teorema di Riesz-Thorin). Sia  $u \rightarrow Tu$  una operazione lineare che applica  $L^{p_j}(\Omega)$  in  $L^{q_j}(\Omega)$ ,  $j = 1, 2$ , con

$$(I) \quad \| Tu \|_{q_j} \leq K_j \| u \|_{p_j} \quad (j = 1, 2)$$

allora,  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $T$  applica  $L^p(\Omega)$  in  $L^q(\Omega)$  dove

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_1} + \frac{t}{q_2}$$

e inoltre

$$(II) \quad \| Tu \|_q \leq K_1^{1-t} K_2^t \| u \|_p.$$

In questa nota si dà una generalizzazione di questo teorema; più precisamente si estende il teorema di Riesz-Thorin ad operazioni lineari tra gli spazi  $L^p(\Omega)$  e gli spazi  $\mathcal{L}_k^{(q, \mu)}(\Omega)$  (cfr. [2] e il § 1 di questa nota).

È interessante rilevare che per ottenere questo risultato si seguirà lo stesso metodo di dimostrazione del teorema di Riesz-Thorin dato da Calderon-Zygmund in [1] (cfr. anche [10]) tenendo conto naturalmente delle proprietà degli spazi  $\mathcal{L}_k^{(q, \mu)}(\Omega)$ .

---

Pervenuto alla Redazione il 16 luglio 1964 e, in forma definitiva, il 10 dicembre 1964.

(\*) Ha parzialmente contribuito finanziariamente alla preparazione di questo lavoro l'Air Force Office of Scientific Research OAR con il grant AF EOAR 63-29.

Nel § 3 si trovano, come applicazione del risultato precedente, teoremi di interpolazione per applicazioni lineari definite negli spazi  $L^p$  e con immagine che varia tra gli spazi  $L^q$  e gli spazi  $C^{h, \alpha}$  passando attraverso gli spazi di Morrey, gli spazi hölderiani e certi spazi limiti come lo spazio di John-Nirenberg e altri spazi, che abbiamo indicato con  $\mathcal{C}_h(\Omega)$ , le cui proprietà non sono ancora ben studiate.

Ringraziamo il Professore G. Stampacchia per le utili discussioni sull'argomento.

1. Siano  $\Omega$  un aperto limitato dello spazio euclideo  $R^n$ ,  $d$  il diametro di  $\Omega$ ,  $\Omega_d$  l'insieme  $\bar{\Omega} \times (0 < r \leq d)$ . Per ogni  $x \in R^n$  e  $\varrho > 0$  indichiamo con  $I(x, \varrho)$  l'insieme  $\{y \in R^n : |x - y| < \varrho\}$  e poniamo  $\Omega(x, \varrho) = I(x, \varrho) \cap \Omega$ .

Richiamiamo brevemente la definizione e qualche proprietà degli spazi  $\mathcal{L}_k^{(p, \lambda)}(\Omega)$  (cfr. [2], [3], [4]):

DEF. [1.I]. Sia  $p \geq 1$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $k$  intero  $\geq 0$ ;  $\mathcal{L}_k^{(p, \lambda)}(\Omega)$  è lo spazio delle funzioni  $u \in L^p(\Omega)$  tali che<sup>(1)</sup>

$$\| \| u \| \|_{k, p, \lambda} = \sup_{(x, r) \in \Omega_d} r^{-\frac{\lambda}{p}} \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \| u - P \|_{p, \Omega(x, r)} < + \infty$$

dove  $\mathcal{P}_k$  è la classe dei polinomi di grado non superiore a  $k$ .

$\mathcal{L}_k^{(p, \lambda)}(\Omega)$  è uno spazio normato con la norma<sup>(2)</sup>

$$(1.1) \quad \| u \| \|_{k, p, \lambda} = \| u \|_p + \| \| u \| \|_{k, p, \lambda}.$$

Nel lavoro [2] sono stati studiati gli spazi  $\mathcal{L}_k^{(p, \lambda)}(\Omega)$  reali<sup>(3)</sup> e per questi spazi sono state dimostrate alcune proprietà. Ci si può rendere immediatamente conto che le dimostrazioni date in [2] e quindi le proprietà che ora enunceremo sussistono inalterate anche per gli spazi  $\mathcal{L}_k^{(p, \lambda)}(\Omega)$  complessi.

Nel seguito diremo che  $\Omega$  è di tipo (C) se esiste una costante positiva  $C$  tale che  $\forall (x, r) \in \Omega_d$

$$\text{mis } \Omega(x, r) \geq Cr^n.$$

<sup>(1)</sup> Con  $\| u \|_{p, A}$ ,  $A$  sottoinsieme misurabile di  $\Omega$ , indichiamo la norma in  $L^p(A)$ . Se  $A \equiv \Omega$  scriveremo più semplicemente  $\| u \|_p$  anzichè  $\| u \|_{p, A}$ .

<sup>(2)</sup> Vedremo più avanti che per gli scopi di questa nota converrà introdurre in  $\mathcal{L}_k^{(p, \lambda)}(\Omega)$  non la norma (1.1) ma una norma ad essa equivalente.

<sup>(3)</sup> Cioè il caso in cui nella def. [1.I] le funzioni  $u$  sono reali e di conseguenza i polinomi  $P \in \mathcal{P}_k$  sono a coefficienti reali.

Si hanno le seguenti proposizioni :

a) Se  $\Omega$  è di tipo  $(\mathcal{Q})$  e  $0 \leq \lambda < n$ ,  $\mathcal{L}_k^{(p, \lambda)}(\Omega) \sim L^{(p, \lambda)}(\Omega)$  <sup>(4)</sup> dove gli  $L^{(p, \lambda)}(\Omega)$  sono gli spazi di Morrey <sup>(5)</sup>.

b) Se  $\Omega$  è di tipo  $(\mathcal{Q})$  e convesso,  $\lambda > n$ ,  $\frac{\lambda - n}{p}$  non è intero,  $h = \left\lfloor \frac{\lambda - n}{p} \right\rfloor \leq k$ ,  $\mathcal{L}_k^{(p, \lambda)}(\Omega) \sim C^{h, \alpha}(\bar{\Omega})$  con  $\alpha = \frac{\lambda - n}{p} - h$ .

c) Indichiamo con  $\mathcal{E}_h(\Omega)$  lo spazio  $\mathcal{L}_h^{(1, n+h)}(\Omega)$  per  $h = 0, 1, 2, \dots$ ; allora se  $\Omega$  è di tipo  $(\mathcal{Q})$ ,  $\frac{\lambda - n}{p} = h$  intero e  $h \leq k$ , si ha che  $\mathcal{L}_k^{(p, \lambda)}(\Omega) \sim \mathcal{E}_h(\Omega)$ .

Ricordiamo a questo proposito che per quanto riguarda lo spazio  $\mathcal{E}_0(\Omega)$ , con  $\Omega$  cubo di  $R^n$ , John e Nirenberg hanno dato la seguente caratterizzazione [5]: sia  $u_\Omega$  la media integrale di  $u$  in  $\Omega$  e sia  $\|u\|_{\mathcal{E}_0} \leq M$ , esistono tre costanti positive  $H, \beta, l$  ( $l < 1$ ) tali che  $\forall \sigma > 0$

$$\text{mis } \{ |u - u_\Omega| > \sigma \text{ in } \Omega \} \leq H e^{-\beta \sigma M^{-1}} \text{mis } \{ |u - u_\Omega| > l\sigma \text{ in } \Omega \}.$$

Concludiamo questi brevi richiami sugli spazi  $\mathcal{L}_k^{(p, \lambda)}(\Omega)$  enunciando alcuni lemmi che saranno utili nel seguito del lavoro.

LEMMA [1.I]. Sia  $P(x) \in \mathcal{P}_k$ ,  $q$  un numero  $\geq 1$ ,  $A$  sottoinsieme misurabile della sfera  $I(x_0, r)$  verificante la condizione

$$\text{mis } A \geq Cr^n \quad (C \text{ costante } > 0)$$

esiste allora una costante  $c_1(k, q, n, C)$  <sup>(6)</sup> tale che per ogni  $n$ -pla di interi non negativi  $l \equiv (l_1, l_2, \dots, l_n)$

$$| \{ D^l P(x) \}_{x=x_0} |^q \leq \frac{c_1}{r^{n+|l|q}} \int_A |P(x)|^q dx$$

(4) Il simbolo  $\sim$  indica che gli spazi sono equivalenti come spazi di Banach.

(5) Cioè gli spazi delle funzioni  $u$  definite in  $\Omega$  tali che

$$\|u\|_{L^{(p, \lambda)}} = \sup_{(x, r) \in \Omega_d} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|u\|_{p, \Omega(x, r)} < +\infty.$$

In tali spazi si assume abitualmente come norma  $u \rightarrow \|u\|_{L^{(p, \lambda)}}$ .

(6) Qui e nel seguito con  $c_1, c_2, \dots$  si indicano costanti positive indipendenti dalle funzioni cui le maggiorazioni si riferiscono. Quando sarà utile fra ( ) scriveremo esplicitamente le quantità dalle quali le costanti dipendono.

Questo lemma, dovuto a De Giorgi, si trova dimostrato in [2] § 2 nel caso di polinomi a coefficienti reali ma la dimostrazione è valida anche se i polinomi hanno coefficienti complessi.

Ricordiamo a questo punto (cfr. [2]) che se  $u$  è una funzione di  $\mathcal{L}_k^{(p, \lambda)}(\Omega)$ ,  $k \geq 0$ , allora  $\forall (x, r) \in \Omega_d$  esiste uno ed un solo polinomio  $P_k(x, r, u, p) \in \mathcal{P}_k$  tale che

$$(1.2) \quad \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \|u - P\|_{p, \Omega(x, r)} = \|u - P_k(x, r, u, p)\|_{p, \Omega(x, r)}.$$

Detta  $\chi(x, r)$  la funzione caratteristica di  $\Omega(x, r)$ <sup>(7)</sup>, osserviamo che  $\chi \cdot P_k(x, r, u, 2)$  non è altro che la proiezione di  $\chi u$ ,  $u \in L^2$ , sulla varietà lineare di dimensione finita  $\{\chi \cdot P : P \in \mathcal{P}_k\} \subset L^2(\Omega)$  e quindi, in particolare, l'applicazione  $u \rightarrow \chi \cdot P_k(x, r, u, 2)$  è lineare e continua da  $L^2(\Omega)$  in  $\{\chi \cdot P : P \in \mathcal{P}_k\}$ .

LEMMA [1.II]. Sia  $u \in \mathcal{L}_k^{(p, \lambda)}(\Omega)$  ( $p \geq 2$ ) e  $\Omega$  di tipo  $(\mathcal{A})$ , allora

$$(1.3) \quad \|u\|_{k, p, \lambda} \leq \|u\|_p + \sup_{(x, r) \in \Omega_d} r^{-\frac{\lambda}{p}} \|u - P_k(x, r, u, 2)\|_{p, \Omega(x, r)} \leq c_2 \|u\|_{k, p, \lambda}.$$

DIMOSTRAZIONE. È sufficiente dimostrare la disuguaglianza di destra. Fissato  $(x, r) \in \Omega_d$ , poniamo,  $\forall q \geq 2$  e  $u \in \mathcal{L}_k^{(q, \lambda)}(\Omega)$ ,

$$P_k(x, r, u, q) = \sum_{|i| \leq k} a_i(q) (y - x)^i.$$

Sia allora  $u \in \mathcal{L}_k^{(p, \lambda)}(\Omega) \subset \mathcal{L}_k^{(2, \lambda)}(\Omega)$ ; dal lemma [1.I] segue che

$$(1.4) \quad |a_i(p) - a_i(2)| \leq \frac{c_1}{r^{\frac{n}{2} + |i|}} \|P_k(x, r, u, p) - P_k(x, r, u, 2)\|_{2, \Omega(x, r)}.$$

D'altra parte

$$(1.5) \quad \begin{aligned} & \|P_k(x, r, u, p) - P_k(x, r, u, 2)\|_{2, \Omega(x, r)} \leq \\ & \leq \|u - P_k(x, r, u, p)\|_{2, \Omega(x, r)} + \|u - P_k(x, r, u, 2)\|_{2, \Omega(x, r)} \leq \\ & \leq 2 \|u - P_k(x, r, u, p)\|_{2, \Omega(x, r)} \leq 2\omega^{\frac{p-2}{2p}} r^{\frac{2\lambda + n(p-2)}{2p}} \|u\|_{k, p, \lambda} \end{aligned}$$

dove  $\omega$  è la misura della sfera unitaria.

(7) Con ciò intenderemo la funzione

$$\chi(x, r) = \begin{cases} 1 & \text{in } \Omega(x, r) \\ 0 & \text{in } \Omega - \Omega(x, r). \end{cases}$$

Da (1.4) e (1.5) si ha allora

$$(1.6) \quad |a_l(p) - a_l(2)| \leq c_3 r^{\frac{\lambda-n}{p} - |l|} \|u\|_{k,p,\lambda}.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} & \|u - P_k(x, r, u, 2)\|_{p, \Omega(x, r)} \leq \\ & \leq \|u - P_k(x, r, u, p)\|_{p, \Omega(x, r)} + \|P_k(x, r, u, p) - P_k(x, r, u, 2)\|_{p, \Omega(x, r)} \leq \\ & \leq r^{\frac{\lambda}{p}} \|u\|_{k,p,\lambda} + \left\| \sum_{|l| \leq k} (a_l(p) - a_l(2)) (y-x)^l \right\|_{p, \Omega(x, r)} \leq \\ & \leq r^{\frac{\lambda}{p}} \|u\|_{k,p,\lambda} + \sum_{|l| \leq k} |a_l(p) - a_l(2)| r^{|l|} \cdot \{\text{mis } \Omega(x, r)\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Quindi applicando (1.6) si ottiene

$$(1.7) \quad \|u - P_k(x, r, u, 2)\|_{p, \Omega(x, r)} \leq c_4 r^{\frac{\lambda}{p}} \|u\|_{k,p,\lambda}.$$

Il lemma è pertanto dimostrato.

Se poniamo, per definizione,

$$(1.8) \quad \|u\|_{k,q,\lambda} = \|u\|_q + \sup_{(x,r) \in \Omega_d} r^{-\frac{\lambda}{q}} \|u - P_k(x, r, u, 2)\|_{q, \Omega(x, r)}$$

$u \rightarrow \|u\|_{k,q,\lambda}$  è evidentemente una norma in  $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ ; nel seguito del lavoro in  $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$  intenderemo sempre di aver assunto come norma la (1.8).

Dal lemma ora dimostrato segue che se  $\Omega$  è di tipo  $(\mathcal{A})$  le norme  $u \rightarrow \|u\|_{k,q,\lambda}$  e  $u \rightarrow \|u\|_{k,q,\lambda}$   $q \geq 2$  sono equivalenti e si verifica che per gli spazi  $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$  normati con la (1.8) valgono ancora le proprietà a) b) c).

LEMMA [1.III]. Sia  $u(z)$ ,  $z = \xi + i\eta$ , una funzione continua e limitata nella striscia

$$S(a, b) = \{z : a \leq \xi \leq b\},$$

olomorfa nell'interno di  $S(a, b)$ . Se

$$(1.9) \quad |u(a + i\eta)| \leq M_1, \quad |u(b + i\eta)| \leq M_2$$

allora,  $\forall z \in S(a, b)$ ,

$$(1.10) \quad |u(z)| \leq M_1^{L(\xi)} M_2^{1-L(\xi)},$$

dove  $L(\xi) = \frac{b - \xi}{b - a}$ .

Per la dimostrazione di questo lemma, noto come lemma delle tre rette, si veda ad es. [10].

§ 2. In questo paragrafo dimostriamo un teorema che generalizza il teorema di Riesz-Thorin per operazioni lineari tra gli spazi  $L^p(\Omega)$  e gli spazi  $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}(\Omega)$ .

**TEOREMA [2. I].** *Sia  $u \rightarrow Tu$  una operazione lineare che applica simultaneamente  $L^{p_j}(\Omega)$  in  $\mathcal{L}_k^{(q_j, \lambda_j)}(\Omega)$  ( $j = 1, 2$ ) tale che  $\forall u \in L^{p_j}(\Omega)$*

$$(2.1) \quad \|Tu\|_{k, q_j, \lambda_j} \leq K_j \|u\|_{p_j},$$

*allora,  $\forall t \in [0, 1]$ ,  $T$  applica  $L^p(\Omega)$  in  $\mathcal{L}_k^{(q,\lambda)}$  dove  $p, q, \lambda$  sono definiti dalle relazioni*

$$(2.2) \quad \frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_1} + \frac{t}{q_2},$$

$$\frac{\lambda}{q} = (1-t) \frac{\lambda_1}{q_1} + t \frac{\lambda_2}{q_2}$$

*e si ha la maggiorazione*

$$(2.3) \quad \|Tu\|_{k, q, \lambda} \leq K_1^{1-t} K_2^t \|u\|_p.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Fissiamo  $t$  in  $[0, 1]$  e siano  $p, q, \lambda$  i corrispondenti valori dati dalle (2.2). Supponiamo dapprima  $q > 1$  e  $p < +\infty$ . Per semplicità poniamo

$$\alpha_j = \frac{1}{p_j}, \quad \beta_j = \frac{1}{q_j},$$

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad \beta = \frac{1}{q}.$$

Per qualunque sottoinsieme misurabile  $A$  di  $\Omega$  indichiamo con  $\mathcal{F}(A)$  lo spazio vettoriale (rispetto al corpo complesso) delle funzioni semplici su  $A$ , cioè delle funzioni che sono combinazioni lineari finite di funzioni caratteristiche di sottoinsiemi misurabili di  $A$ . È ben noto che  $\mathcal{F}(A)$  è denso in  $L^p(A)$  per qualunque  $p \geq 1$  <sup>(8)</sup>.

(8)  $\mathcal{F}(A)$  è denso anche in  $L^\infty(A)$  in quanto  $A \subset \Omega$  è di misura finita.

Basterà allora dimostrare la maggiorazione (2.3) per funzioni  $u \in \mathcal{F}(\Omega)$ .

Sia  $z = \xi + i\eta$  un parametro complesso. Poniamo

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= (1-z)\alpha_1 + z\alpha_2, \\ \beta(z) &= (1-z)\beta_1 + z\beta_2, \\ \lambda(z) \cdot \beta(z) &= (1-z)\lambda_1\beta_1 + z\lambda_2\beta_2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Sia  $u \in \mathcal{F}(\Omega)$  con  $\|u\|_p = 1$ . Definiamo in  $\Omega \times S(0, 1)$  la funzione  $(y, z) \rightarrow \tilde{u}(y, z)$  ponendo

$$\tilde{u}(y, z) = |u(y)|^{\alpha(z) \cdot \alpha^{-1}} e^{i \arg. u(y)}. \tag{2.5}$$

Per ogni  $z \in S(0, 1)$  la funzione  $y \rightarrow \tilde{u}(y, z)$  appartiene ancora a  $\mathcal{F}(\Omega)$  e quindi  $T\tilde{u}$  è definita.

Sia  $(x, r)$  un punto fissato di  $\Omega_d$  e  $v$  una funzione di  $\mathcal{F}(\Omega(x, r))$  tale che  $\|v\|_{(1-\beta)^{-1}, \Omega(x, r)} = 1$ .

Definiamo in  $\Omega(x, r) \times S(0, 1)$  la funzione  $(y, z) \rightarrow \tilde{v}(y, z)$  ponendo

$$\tilde{v}(y, z) = |v(y)|^{|1-\beta(z)|(1-\beta)^{-1}} e^{i \arg. v(y)}. \tag{2.6}$$

Da (2.4), (2.5), (2.6) si ha che

$$|\tilde{u}(y, z)| = |u(y)|^{(1-\xi)\alpha_1 + \xi\alpha_2} \alpha^{-1}, \tag{2.7}$$

$$|\tilde{v}(y, z)| = |v(y)|^{[1-(1-\xi)\beta_1 - \xi\beta_2](1-\beta)^{-1}}$$

e quindi

$$\|\tilde{u}(y, i\eta)\|_{p_1} = \| |u|^{\alpha_1 \alpha^{-1}} \|_{p_1} = \|u\|_p^{\alpha_1 \alpha^{-1}} = 1, \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \|\tilde{v}(y, i\eta)\|_{(1-\beta_1)^{-1}, \Omega(x, r)} &= \| |v|^{(1-\beta_1)(1-\beta)^{-1}} \|_{(1-\beta_1)^{-1}, \Omega(x, r)} = \\ &= \|v\|_{(1-\beta)^{-1}, \Omega(x, r)}^{(1-\beta_1)(1-\beta)^{-1}} = 1 \end{aligned} \tag{2.9}$$

e analogamente si verifica che

$$\|\tilde{u}(y, 1+i\eta)\|_{p_2} = 1, \tag{2.10}$$

$$\|\tilde{v}(y, 1+i\eta)\|_{(1-\beta_2)^{-1}, \Omega(x, r)} = 1. \tag{2.11}$$



Consideriamo la funzione

$$(2.12) \quad f(x, r, z) = r^{\lambda(z) \cdot \beta(z)} \int_{\Omega(x, r)} T\tilde{u}(y, z) \cdot \tilde{v}(y, z) dy + \\ + \int_{\Omega(x, r)} [T\tilde{u}(y, z) - P_k(x, r, T\tilde{u}, 2)] \tilde{v}(y, z) dy.$$

Fissato  $(x, r) \in \Omega_d$ , la funzione  $z \rightarrow f(x, r, z)$  verifica nella striscia  $S(0, 1)$  le ipotesi del lemma [1. III].

Per quanto riguarda la continuità, la limitatezza e l'olomorfa della funzione  $z \rightarrow f(x, r, z)$  basta osservare che se  $u(y)$  è una funzione semplice

$$u(y) = \sum_{\tau=1}^s |c_\tau| e^{i\varphi_\tau} \chi_\tau(y)$$

con  $c_\tau, \varphi_\tau$  costanti e  $\chi_\tau(y)$  funzioni caratteristiche, allora dalla (2.5) e dalla linearità delle applicazioni  $u \rightarrow Tu$  e  $u \rightarrow P_k(x, r, u, 2)$  segue che

$$T\tilde{u}(y, z) = \sum_{\tau=1}^s |c_\tau| e^{i\varphi_\tau} T(\chi_\tau),$$

$$P_k(x, r, T\tilde{u}, 2) = \sum_{\tau=1}^s |c_\tau| e^{i\varphi_\tau} P_k(x, r, T\chi_\tau, 2).$$

Calcoliamo allora le costanti  $M_1$  e  $M_2$  della condizione (1.9). Applicando la disuguaglianza di Hölder e sfruttando la (2.9) si ha

$$|f(x, r, i\eta)| \leq r^{\lambda\beta_1} \left| \int_{\Omega(x, r)} T\tilde{u}(y, i\eta) \cdot \tilde{v}(y, i\eta) dy \right| + \\ + \left| \int_{\Omega(x, r)} \left\{ T\tilde{u}(y, i\eta) - P_k(x, r, T\tilde{u}(y, i\eta), 2) \right\} \cdot \tilde{v}(y, i\eta) dy \right| \leq \\ \leq \{r^{\lambda\beta_1} \|T\tilde{u}(y, i\eta)\|_{q_1, \Omega(x, r)} + \|T\tilde{u}(y, i\eta) - P_k(x, r, T\tilde{u}(y, i\eta), 2)\|_{q_1, \Omega(x, r)}\} \cdot \\ \cdot \|v(y, i\eta)\|_{(1-\beta_1)^{-1}, \Omega(x, r)} = r^{\lambda\beta_1} \{ \|T\tilde{u}(y, i\eta)\|_{q_1, \Omega(x, r)} + \\ + r^{-\lambda\beta_1} \|T\tilde{u}(y, i\eta) - P_k(x, r, T\tilde{u}(y, i\eta), 2)\|_{q_1, \Omega(x, r)} \} \leq r^{\lambda\beta_1} \|T\tilde{u}(y, i\eta)\|_{k, q_1, \lambda_1}.$$

E sfruttando l'ipotesi (2.1) e la relazione (2.8) si ha in definitiva

$$(2.13) \quad |f(x, r, i\eta)| \leq K_1 r^{\lambda\beta_1}.$$

Procedendo in modo analogo, sfruttando ora le (2.10), (2.11) e l'ipotesi (2.1) si ottiene che

$$(2.14) \quad |f(x, r, 1 + i\eta)| \leq K_2 r^{\lambda\beta_2}.$$

Applicando allora il lemma [1.III] si ottiene, per ogni  $0 \leq t \leq 1$ ,

$$(2.15) \quad |f(x, r, t)| \leq K_1^{1-t} K_2^t r^{\lambda\beta}.$$

D'altra parte, per definizione di  $\| \cdot \|_{q, \Omega(x, r)}$ ,

$$(2.16) \quad r^{\lambda\beta} \{ \| Tu \|_{q, \Omega(x, r)} + r^{-\lambda\beta} \| Tu - P_k(x, r, Tu, 2) \|_{q, \Omega(x, r)} \} = \\ = \sup_v |f(x, r, t)| \quad \text{per } v \in \mathcal{F}(\Omega(x, r)) \text{ e } \| v \|_{(1-\beta)^{-1}, \Omega(x, r)} = 1.$$

Da (2.15) e (2.16) segue allora che,  $\forall (x, r) \in \Omega_d$ ,

$$(2.17) \quad \| Tu \|_{q, \Omega(x, r)} + r^{-\lambda\beta} \| Tu - P_k(x, r, Tu, 2) \|_{q, \Omega(x, r)} \leq K_1^{1-t} K_2^t.$$

Da cui

$$\| Tu \|_{k, q, \lambda} \leq K_1^{1-t} K_2^t$$

per ogni  $u \in \mathcal{F}(\Omega)$  con  $\| u \|_p = 1$ .

Poichè  $\mathcal{F}(\Omega)$  è denso in  $L^p(\Omega)$  si è dimostrata la maggiorazione (2.3).

Nel caso in cui  $q = 1$  (cioè  $\beta = 1$ ) e quindi  $q_1 = q_2 = 1$  si ripete la stessa dimostrazione con l'unica semplificazione che al posto di  $\tilde{v}(y, z)$  definita dalla (2.6) basta assumere  $\tilde{v}(y, z) = v(y)$ .

Se  $p = +\infty$  e  $q = 1$  il teorema è banale.

Se  $p = +\infty$ , e quindi  $p_1 = p_2 = +\infty$ , e  $q > 1$  si ripete la dimostrazione data precedentemente ponendo  $\tilde{u}(y, z) = u(y)$ .

Il teorema è così dimostrato.

§ 3. In questo paragrafo mettiamo in evidenza dei teoremi di interpolazione che discendono come corollario dal teorema dimostrato nel § 2 e dalle proprietà degli spazi  $\mathcal{L}_k^{(q, \mu)}(\Omega)$  richiamate nel § 1.

Supponiamo che  $\Omega$  sia di tipo  $(\mathcal{E})$  e convesso; le proprietà a) b) c) del § 1 assicurano quanto segue:

i) Negli spazi di Morrey  $L^{(q, \mu)}(\Omega)$ ,  $q \geq 1$  e  $0 \leq \mu < n$ ,  $u \rightarrow \|u\|_{k, q, \mu}$ ,  $k \geq 0$  è una famiglia di norme equivalenti.

ii) Negli spazi hölderiani  $C^{h, \alpha}(\bar{\Omega})$ ,  $h$  intero  $\geq 0$  e  $0 < \alpha < 1$ , sono equivalenti le norme  $u \rightarrow \|u\|_{k, q, \mu}$  dove  $k, q, \mu$  sono parametri che verificano le relazioni

$$k \geq h, \quad \frac{\mu - n}{q} = h + \alpha.$$

iii) In  $\mathcal{C}_h(\Omega)$ ,  $h$  intero  $\geq 0$ , sono equivalenti le norme  $u \rightarrow \|u\|_{k, q, \mu}$  i cui parametri  $k, q, \mu$  verificano le relazioni

$$k \geq h, \quad \frac{\mu - n}{q} = h.$$

Se  $T$  è una applicazione lineare e continua da un certo  $L^p(\Omega)$  in uno degli spazi ora elencati e se in tale spazio è stata assunta come norma  $u \rightarrow \|u\|_{k, q, \mu}$  <sup>(9)</sup> allora indichiamo con  $K(k, q, \mu)$  la norma della trasformazione  $T$ .

Ciò posto, dal teorema [2.I] si deduce in particolare questo risultato:

**TEOREMA [3.I].** *Sia  $\Omega$  di tipo (A) e convesso, sia  $T$  un'operazione lineare che applica simultaneamente  $L^{p_1}(\Omega)$  in  $L^{q_1}(\Omega)$  e  $L^{p_2}(\Omega)$  in  $C^{h_2, \alpha_2}(\bar{\Omega})$  ( $h_2$  intero  $\geq 0$  e  $0 < \alpha_2 < 1$ ) tale che*

$$\|Tu\|_{L^{q_1}} \leq K_1(k, q_1, 0) \|u\|_{p_1},$$

$$\|Tu\|_{C^{h_2, \alpha_2}} \leq K_2(k, q_2, \mu_2) \|u\|_{p_2}.$$

Poniamo, per  $0 \leq t \leq 1$ ,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-t}{q_1} + \frac{t}{q_2}, \quad \frac{\mu}{q} = t \frac{\mu_2}{q_2} = t \left( h_2 + \alpha_2 + \frac{n}{q_2} \right).$$

Allora

$$a) \text{ Se } t = t_h = \frac{h + \frac{n}{q_1}}{h_2 + \alpha_2 + \frac{n}{q_1}} \text{ con } h = 0, 1, \dots, h_2, T \text{ applica } L^{p(h)}(\Omega)$$

---

<sup>(9)</sup> Ometteremo di precisare ogni volta che i parametri  $h, q, \lambda$  verificano le condizioni precisate in i) ii) iii).

in  $\mathcal{E}_h(\Omega)$  e si ha la maggiorazione

$$(3.1) \quad \|Tu\|_{\mathcal{E}_h} = \|Tu\|_{k, q(t_h), \mu(t_h)} \leq K_1^{1-t_h}(k, q_1, 0) K_2^{t_h}(k, q_2, \mu_2) \|u\|_{p(t_h)}.$$

b) Se  $0 \leq t < t_0$ ,  $T$  applica  $L^p(\Omega)$  in  $L^{(q, \mu)}(\Omega)$  e si ha la maggiorazione

$$(3.2) \quad \|Tu\|_{L^{(q, \mu)}} = \|Tu\|_{k, q, \mu} \leq K_1^{1-t}(k, q_1, 0) K_2^t(k, q_2, \mu_2) \|u\|_p.$$

c) Se  $t_h < t < t_{h+1}$   $h = 0, 1, \dots, h_2 - 1$  oppure  $t_{h_2} < t \leq 1$  allora  $T$  applica  $L^p(\Omega)$  in  $C^{h, \alpha}(\bar{\Omega})$  con  $\alpha = t \frac{\mu_2}{q_2} - \frac{n}{q} - h = t(h_2 + \alpha_2) - (1-t) \frac{n}{q_1} - h$  e si ha la maggiorazione

$$(3.3) \quad \|Tu\|_{C^{h, \alpha}} = \|Tu\|_{k, q, \mu} \leq K_1^{1-t}(k, q_1, 0) K_2^t(k, q_2, \mu_2) \|u\|_p.$$

Facciamo notare che nei casi a) e c) lo spazio immagine della applicazione  $T$  non dipende, al variare di  $t$ , dalla scelta particolare della terna di numeri  $k, q_2, \mu_2$ , cioè dalla particolare norma  $u \rightarrow \|u\|_{k, q_2, \mu_2}$  introdotta in  $C^{h_2, \alpha_2}(\bar{\Omega})$ ; nel risultato b) invece lo spazio immagine  $L^{(q, \mu)}(\Omega)$  dipende in definitiva dal parametro  $q_2$ ; è naturale in tal caso chiedersi se è possibile scegliere  $q_2$  in modo che lo spazio immagine sia « minimo »<sup>(10)</sup>. Se in tale richiesta si include la validità di una maggiorazione del tipo della (3.2) si vede che uno spazio « minimo » non esiste in quanto, per le proprietà di inclusione degli spazi di Morrey<sup>(11)</sup>, se  $q_2'' \geq q_2'$  si verifica subito che  $L^{(q'', \mu'')}(\Omega) \subset L^{(q', \mu')}(\Omega)$ <sup>(12)</sup> e quindi lo spazio minimo si avrebbe al limite per  $q_2 \rightarrow +\infty$ <sup>(13)</sup>. Ma al limite la maggiorazione (3.2) perde significato.

Se invece si rinuncia ad avere una maggiorazione quale la (3.2) la ricerca puramente qualitativa dello spazio « minimo » si riduce a questo problema:

Sia  $T$  una applicazione lineare e continua di  $L^{p_1}(\Omega)$  in  $L^{p_2}(\Omega)$  e, simultaneamente, di  $L^{p_2}(\Omega)$  in  $\mathcal{E}_0(\Omega)$ . Posto

$$\frac{1}{p(t)} = \frac{1-t}{p_1} + \frac{t}{p_2}, \quad 0 < t < 1$$

<sup>(10)</sup> È chiaro che qui si pensa a un ordinamento per inclusione.

<sup>(11)</sup>  $p_1 \leq p_2, \frac{n-\lambda_2}{p_2} \leq \frac{n-\lambda_1}{p_1} \rightarrow L^{(p_2, \lambda_2)}(\Omega) \subset L^{(p_1, \lambda_1)}(\Omega)$ . Si dimostra applicando la disuguaglianza di Hölder.

<sup>(12)</sup>  $q'' = q(q_2''), \mu'' = \mu(q_2''), q' = q(q_2'), \mu' = \mu(q_2')$ .

<sup>(13)</sup> Tale spazio sarebbe lo spazio di Morrey  $L^{(\frac{q_1}{1-t}, \frac{q_1(h_2+\alpha_2)}{1-t})}(\Omega)$ .

per ogni  $0 < t < 1$  si vuole il più piccolo spazio di Morrey  $B(t)$  tale che  $T(L^{p(t)}(\Omega)) \subset B(t)$  e l'applicazione  $u \rightarrow Tu$  sia continua da  $L^{p(t)}(\Omega)$  in  $B(t)$ .

Tale problema trova risposta nel teorema [3.1] del lavoro [9] di Stampacchia nella condizione che gli spazi  $L^{p_i}(\Omega)$ ,  $L^{q_i}(\Omega)$  ed  $\mathcal{C}_0(\Omega)$  siano spazi reali e  $\Omega$  sia un cubo. Si vede facilmente che la dimostrazione vale anche per  $\Omega$  di tipo  $(\mathcal{E})$ .

In tali ipotesi  $B(t) \subset L^{(q_1/(1-t))}(\Omega) \subset L^{(q_2/(1-t))}(\Omega)$ ; introdotta in  $\mathcal{C}_0(\Omega)$  una qualunque norma del tipo  $u \rightarrow \|u\|_{k, q_2, n}$  per ogni  $t$  ( $0 < t < 1$ ) esiste una costante  $C_5(k, t, q)$  tale che

$$\|Tu\|_{\frac{q_1}{(1-t)}} \leq C_5(k, t, q_2) \|u\|_{p(t)}$$

dove  $t \rightarrow C_5(k, t, q_2)$  diverge per  $t \rightarrow 0$  e  $t \rightarrow 1$ .

Sarebbe interessante poter stabilire per ogni scelta della norma  $u \rightarrow \|u\|_{k, q_2, n}$  la minima costante  $C_5(k, t, q_2)$ .

Lasciamo infine al lettore la dimostrazione dei seguenti risultati, analoghi al teorema [3.I], che si possono dedurre in egual maniera dal teorema [2.I].

Negli spazi  $\mathcal{C}_h(\Omega)$  [ $C^{(h, \alpha)}(\bar{\Omega})$ ] con  $h$  intero  $\geq 0$  ( $0 < \alpha < 1$ ) assumiamo come norma  $u \rightarrow \|u\|_{k, q, \mu}$  dove i parametri  $k, q, \mu$  verificano le condizioni

$$k \geq h, \frac{(\mu - n)}{q} = h \left[ k \geq h, \frac{(\mu - n)}{q} = h + \alpha \right].$$

Indichiamo con  $K_i$  la costante  $K_i(k, q_i, \mu_i)$  ( $i = 1, 2$ ). Poniamo, per  $0 < t < 1$

$$\frac{1}{p} = \frac{(1-t)}{p_1} + \frac{t}{p_2}; \quad \frac{1}{q} = \frac{(1-t)}{q_1} + \frac{t}{q_2}.$$

Si ha il seguente

**TEOREMA [3.II].** *Sia  $\Omega$  di tipo  $(\mathcal{E})$  e convesso.*

1) *Sia  $T$  un'operazione lineare che applica  $L^{p_i}(\Omega)$  in  $C^{(h_i, \alpha_i)}(\bar{\Omega})$  simultaneamente tale che*

$$\|Tu\|_{C^{(h_i, \alpha_i)}} \leq K_i \|u\|_{p_i} \quad (i = 1, 2).$$

Allora

(a) *Se  $t_h = \frac{(h - h_1) - \alpha_1}{(h_2 - h_1) + (\alpha_2 - \alpha_1)}$  con  $h = h_1 + 1, \dots, h_2$   $T$  applica  $L^{p(t_h)}(\Omega)$  in  $\mathcal{C}_h(\Omega)$  e si ha la maggiorazione*

$$\|Tu\|_{\mathcal{C}_h} \leq K_1^{(1-t_h)} K_2^{t_h} \|u\|_{p(t_h)}.$$

(b) Se  $0 \leq t < t_{h_1+1}$  o  $t_h < t < t_{h_1+1}$  ( $h = h_1 + 1, \dots, h_2 - 1$ ) oppure  $t_{h_1} < t \leq 1$   $T$  applica  $L^p(\Omega)$  in  $C^{(h, \alpha)}(\bar{\Omega})$  con  $\alpha = (1 - t)(h_1 + \alpha_1) + t(h_2 + \alpha_2) - h$  e si ha la maggiorazione

$$\|Tu\|_{C^{(h, \alpha)}} \leq K_1^{(1-t)} K_2^t \|u\|_p.$$

2) Sia  $T$  una operazione lineare che applica  $L^{p_1}(\Omega)$  in  $L^{(q_1, \mu_1)}(\Omega)$  e  $L^{p_2}(\Omega)$  in  $C^{h_2, \alpha_2}(\bar{\Omega})$  simultaneamente tale che

$$\|Tu\|_{L^{(q_1, \mu_1)}} \leq K_1 \|u\|_{p_1},$$

$$\|Tu\|_{C^{(h_2, \alpha_2)}} \leq K_2 \|u\|_{p_2}.$$

Allora

(a) Se  $t_h = \frac{h + \frac{(n - \mu_1)}{q_1}}{(h_2 + \alpha_2) + \frac{(n - \mu_1)}{q_1}}$  con  $h = 0, 1, \dots, h_2$ ,  $T$  applica  $L^{p(t_h)}(\Omega)$  in  $C^h(\Omega)$  e si ha

$$\|Tu\|_h \leq K_1^{(1-t_h)} K_2^{t_h} \|u\|_{p(t_h)}.$$

(b) Se  $0 \leq t < t_0$ ,  $T$  applica  $L^p(\Omega)$  in  $L^{(q, \mu)}(\Omega)$  dove  $\frac{\mu}{q} = \frac{(1-t)}{q_1} + \frac{t}{q_2}$  e si ha

$$\|Tu\|_{L^{(q, \mu)}} \leq K_1^{(1-t)} K_2^t \|u\|_p.$$

(c) Se  $t_h < t < t_{h_1+1}$  oppure  $t_{h_2} < t \leq 1$ ,  $T$  applica  $L^p(\Omega)$  in  $C^{(h, \alpha)}(\Omega)$  con

$$\alpha = (1 - t) \frac{(\mu_1 - n)}{q} + t(h_2 + \alpha_2) - h$$

e si ha

$$\|Tu\|_{C^{(h, \alpha)}} \leq K_1^{(1-t)} K_2^t \|u\|_p.$$

## BIBLIOGRAFIA

- [1] A. CALDERON-A. ZYGMUND : « *Contributions to Fourier Analysis* ». *Annals of Mathem. Studies*, 25, p. 166-188.
- [2] S. CAMPANATO : « *Proprietà di una famiglia di spazi funzionali* ». *Annali S. N. Superiore di Pisa*, s. III, vol. XVIII, (1964) p. 137-160.
- [3] S. CAMPANATO : « *Proprietà di hölderianità di alcune classi di funzioni* ». *Annali S. N. Superiore di Pisa*, s. III, vol. XVII, (1963) p. 175-188.
- [4] S. CAMPANATO : « *Teoremi di interpolazione per trasformazioni che applicano  $L^p$  in  $C^{h,a}$*  ». *Annali S. N. Sup. di Pisa*. vol. XVIII, 1964 p. 345-360.
- [5] F. JOHN-L. NIRENBERG : « *On functions of bounded mean oscillation* ». *Comm. Pure and Applied Math.*, vol. XIV (1961) p. 415-426.
- [6] P. GRISVARD : « *Semi-groups faiblement continus et interpolation* » *C. R. Acad. Sc. Paris* vol. 259 (1964) p. 27-29.
- [7] G. N. MEYERS : « *Mean oscillation over cubes and Hölder continuity* ». *Proc. Amer. Math. Soc.* vol 15, 1964, p. 717-721.
- [8] J. PEETRE : « *On function spaces defined using the mean oscillation over cubes* ». In corso di stampa.
- [9] G. STAMPACCHIA : «  *$\mathcal{L}^{(p,\lambda)}$  spaces and interpolation* ». *Comm. Pure and Applied Math.* Vol. XVII, 1964 p. 293-306.
- [10] A. ZYGMUND : « *Trigonometric Series* ». Vol. II, Cambridge University Press, 1959.