ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

JURI I. MANIN

Moduli fuchsiani

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 19, nº 1 (1965), p. 113-126

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1965_3_19_1_113_0>

MODULI FUCHSIANI

di JURI I. MANIN [1] (Mosca)

Introduzione

È ben noto che una grande parte della teoria di equazioni differenziali lineari ordinarie è « formale », cioè appartiene all'algebra. Limitiamoci a indicare l'esempio della teoria di Picard-Vessiot, che ha acquistato tutta la sua generalità e semplicità soltanto nella presentazione algebrica di Kolchin.

In questo lavoro ci proponiamo di studiare l'analogo algebrico di una altra classe di equazioni differenziali — quella del tipo di Fuchs ([1], [2]). Mentre l'oggetto principale della teoria algebrica di Picard-Vessiot è un corpo differenziale, noi invece studiamo una certa classe di moduli differenziali. Data un'equazione differenziale lineare, costruiamo lo spazio lineare, generato dalle soluzioni di questa equazione sopra un corpo, contenente i coefficienti dell'equazione, e consideriamo l'azione di derivazione su questo spazio, utilizzando la tecnica dell'algebra lineare.

Nel § 1 sono descritte le proprietà generali dei D-moduli. Nel §§ 2-3 si trova la struttura di gruppo delle classi dei D-moduli di dimensione 1. Oltre a ciò viene introdotta la nozione di discriminante di un D-modulo al posto della nozione classica di wronskiano del sistema delle soluzioni. I §§ 4-5 contengono le definizioni e i risultati di classificazione dei D-moduli fuchsiani su un corpo di serie formali. Nel § 7 si trova la relazione tra gli invarianti locali di un modulo fuchsiano su un corpo di funzioni algebriche di una variabile.

Questo lavoro fu motivato dal ruolo dei D-moduli nella teoria delle varietà abeliane su un corpo di funzioni algebriche ([3]). Ho speranza di spiegare, in una successiva pubblicazione, qualche applicazione dei risultati qui presentati.

Pervenuto alla Redazione il 31 luglio 1964.

[1] Questo lavoro è stato scritto durante la permanenza dell'autore presso l'Istituto Matematico dell'Università di Pisa sotto gli auspici del C. N. R.

Mi sia consentito ringraziare qui la Signorina Maura Silvestri per il lavoro di correzione della lingua del mio manoscritto.

1. Definizione e proprietà generali dei D-moduli.

Sia k un corpo. Un omomorfismo di gruppi additivi $\partial : k \longrightarrow k$ si dice derivazione, se $\partial(xy) = \partial x \cdot y + x\, \partial y$ per ogni $x, y \in k$. Sia D uno spazio k-lineare di derivazioni di un corpo k. Sia dato uno spazio k-lineare M con una legge di composizione $D \times M \longrightarrow M : (\partial, m) \longrightarrow \partial m$, lineare rispetto al primo argomento, additiva rispetto al secondo. Chiameremo M un D-modulo, se $\partial(xm) = \partial x \cdot m + x\, \partial m$ per ogni $\partial \in D$, $x \in k$, $m \in M$. La definizione di un omomorfismo di D-moduli è evidente.

Siano dati due D-moduli M, N; denoteremo con $M \otimes N$ il D-modulo avente come spazio lineare soggiacente $M \underset{k}{\otimes} N$ e legge di composizione

$$\partial(m \otimes n) = \partial m \otimes n + m \otimes \partial n, \quad m \in M, \quad n \in N.$$

Similmente denoteremo con $\mathrm{Hom}(M, N)$ il D-modulo avente come spazio lineare soggiacente $\mathrm{Hom}_k(M, N)$ e legge di composizione

$$(\partial h)(m) = \partial(h(m)) - h(\partial m), \quad h \in \mathrm{Hom}(M, N), \quad m \in M.$$

In particolare, il corpo k è un D-modulo; indichiamo con M^t il D-modulo $\mathrm{Hom}(M, k)$. In ciascun caso è facile verificare gli assiomi di struttura di D-modulo.

La proposizione seguente mostra la compatibilità di queste definizioni con isomorfismi canonici di algebra lineare.

PROPOSIZIONE 1. *I seguenti isomorfismi canonici di spazi lineari sono isomorfismi di D-moduli:*

(1) $M \otimes N = N \otimes M$

(2) $(L \otimes M) \otimes N = L \otimes (M \otimes N)$

(3) $\mathrm{Hom}(M, N) = M^t \otimes N$

(4) *Se la dimensione di M è finita, allora* $(M^t)^t = M$.

DIMOSTRAZIONE. Limitiamoci a verificare che (3) è isomorfismo di D-moduli; le altre tre asserzioni sono ancora più ovvie. Sia $h \in M^t$, $m \in M$, $n \in N$; l'isomorfismo canonico (3) fa corrispondere all'elemento $h \otimes n \in M^t \otimes N$ l'omomorfismo $f_{h,n} : m \longrightarrow h(m)\, n$, $f_{h,n} \in \mathrm{Hom}(M, N)$. Secondo la definizione, si ha

$$(\partial f_{h,n})(m) = \partial(f_{h,n}(m)) - f_{h,n}(\partial m) = \partial(h(m))\,n + h(m)\,\partial n - h(\partial m)\,n =$$

$$= (\partial h)(m)\,n + h(m)\,\partial n = (f_{\partial h,n} + f_{h,\partial n})(m),$$

il che prova la nostra asserzione.

Sia $T(M)$ l'algebra tensoriale del D-modulo M sul corpo k. D è uno spazio di derivazioni omogenee dell'algebra $T(M)$. Su ciascuna componente omogenea $T_n(M)$ opera il gruppo simmetrico $\mathfrak{S}_n$, e per ogni $\partial \in D$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $m \in T_n(M)$ si ha

$$\partial(m^\sigma) = (\partial m)^\sigma.$$

In particolare, l'ideale $I \subset T(M)$, generato dagli elementi $m_1 \otimes m_2 - m_2 \otimes m_1$, e l'ideale $J \subset T(M)$, generato dagli elementi $m_1 \otimes m_2 + m_2 \otimes m_1$, sono D-sottomoduli di $T(M)$. Dunque su un'algebra simmetrica $S(M)$ e su un'algebra esterna $\Lambda(M)$ esistono strutture naturali di D-moduli (ossia di D-algebra graduata).

Spesso ometteremo l'indicazione di D e useremo il termine modulo al posto di D-modulo. La dimensione dello spazio soggiacente al modulo M sarà denotata con $\dim M$ e sarà chiamata dimensione di M. Se $\dim M = a < \infty$, denoteremo con $d(M)$ il modulo $\Lambda^a M$ di dimensione 1.

PROPOSIZIONE 2, *a*) Sia $0 \to M_1 \to M \to M_2 \to 0$ una successione esatta di moduli di dimensione finita. Allora

$$d(M) = d(M_1) \otimes d(M_2).$$

b) Siano M, N moduli di dimensione finita, $\dim M = a$, $\dim N = b$. Allora

$$d(M \otimes N) = (d(M))^{\otimes b} \otimes (d(N))^{\otimes a}.$$

DIMOSTRAZIONE. Questi moduli sono identificati per mezzo dei seguenti isomorfismi di spazi lineari:

a) Sia $s = M_2 \to M_1$ una sezione k-lineare della nostra successione esatta. Definiremo l'isomorfismo dello spazio lineare $d(M_1) \otimes d(M_2) \to d(M)$, ponendo

$$\bigwedge_1^a m_i \otimes \bigwedge_{a+1}^{a+b} m_i \to \bigwedge_1^a m_i \bigwedge_{a+1}^{a+b} s(m_i),$$

ove $m_1, \dots, m_a \in M_1$; $m_{a+1}, \dots, m_{a+b} \in M_2$. Questo isomorfismo è ovviamente indipendente da s.

b) Similmente, definiremo l'isomorfismo $d(M \otimes N) \longrightarrow d(M)^{\otimes b} \otimes \otimes d(N)^{\otimes a}$, ponendo

$$\bigwedge_1^{ab} (m_i \otimes n_i) \longrightarrow \left(\bigotimes_{k=0}^{b-1} \bigwedge_{j=1}^{a} m_{ka+j}\right) \otimes \left(\bigotimes_{k=0}^{a-1} \bigwedge_{i=1}^{b} n_{kb+i}\right).$$

In ogni caso la verifica della consistenza degli isomorfismi con struttura di D-modulo è banale.

2. Moduli unidimensionali.

Sia Δ_k la totalità a meno di isomorfismi dei D-moduli di dimensione 1. Dalla proposizione 1 segue che il prodotto tensoriale induce su Δ_k una legge di composizione commutativa ed associativa. Ovviamente, la classe del modulo k è l'identità. Dimostriamo che Δ_k è in effetti un gruppo, cioè che per ogni elemento esiste un elemento inverso.

Sia M un modulo unidimensionale. Si ha $M \otimes M^t = \mathrm{Hom}(M, M)$, e il modulo $M \otimes M^t$ è generato su k dall'immagine i dell'isomorfismo identico $M \longrightarrow M$. Dalla relazione

$$(\partial i)(m) = \partial(i(m)) - i(\partial m) = 0$$

segue che l'isomorfismo $k \longrightarrow M \otimes M^t$, $1_k \longrightarrow i$, di spazi lineari, è un isomorfismo di D-moduli. Perciò la classe di M^t nel Δ_k è inversa della classe di M, ciò che prova l'asserto.

Calcoliamo il gruppo Δ_k. Poniamo $\Omega = \mathrm{Hom}_k(D, k)$ e definiamo un omomorfismo dei gruppi

$$d\, ln : k^* \longrightarrow \Omega,$$

ove k^* è il gruppo moltiplicativo del corpo k, mediante la formula

$$(d\, ln\, x)(\partial) = x^{-1}\, \partial x$$

per ogni $x \in k^*$, $\partial \in D$.

Ora sia M un modulo unidimensionale. Dato un elemento $m \in M$, l'applicazione $\omega_m : \partial \longrightarrow x_m(\partial)$, ove $\partial m = x_m(\partial)\, m$, appartiene allo spazio Ω. Si ha,

$$\partial(ym) = (y^{-1}\, \partial y + x_m(\partial))\, m$$

sicchè $\omega_{ym} - \omega_m = d\, ln\, y$, ove $y \in k^*$. Ne consegue che la classe degli elementi ω_m, $m \in M$, nel gruppo $\Omega / d\, ln\, k^*$ è definita univocamente e dipende soltanto dalla classe di M nel gruppo Δ_k. Quindi esiste un'applicazione

$$\omega : \Delta_k \longrightarrow \Omega/d \ ln \ k^*.$$

TEOREMA 1. L'applicazione ω è un isomorfismo di gruppi.

DIMOSTRAZIONE. Prima di tutto, ω è un omomorfismo. Infatti, per ogni $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ si ha

$$\partial (m_1 \otimes m_2) = (x_{m_1}(\partial) + x_{m_2}(\partial))\, m_1 \otimes m_2$$

sicchè $\omega_{m_1 \otimes m_2} = \omega_{m_1} + \omega_{m_2}$, ciò che prova l'asserto.

Per ogni elemento $\nu \in \Omega$ esiste un D-modulo unidimensionale $M = km$ con legge di composizione

$$\partial (m) = \nu(\partial)\, m, \quad \partial \in D;$$

dunque ω è un epimorfismo.

Infine sia M un modulo unidimensionale la cui classe nel gruppo Δ_k appartiene al nucleo dell'omomorfismo ω'. Allora per ogni elemento $m \in M$, $m \neq 0$, esiste un elemento $y \in k^*$ tale che $x_m(\partial) = y^{-1}\, \partial y$, $\partial \in D$. Quindi $x_{y^{-1}m}(\partial) = 0$ per ogni $\partial \in D$, e l'applicazione $M \longrightarrow k$, per la quale $y^{-1} m \longrightarrow 1$ è un isomorfismo di D-moduli. Dunque ω è un isomorfismo.

Il nostro asserto è completamente dimostrato.

Qualche volta identificheremo i gruppi Δ_k e $\Omega/d \ ln \ k^*$ mediante l'isomorfismo ω.

3. Discriminante e anello di Grothendieck.

Sia M un modulo di dimensione finita. Dicesi discriminante del modulo M e si indica con $\delta(M)$ la classe del modulo $d(M)$ nel gruppo Δ_k.

Sia $\mathcal{M}$ la categoria abeliana dei D-moduli di dimensione finita e sia $K(\mathcal{M})$ l'anello di Grothendieck di essa. Ricordiamo che $K(\mathcal{M})$ come gruppo additivo è generato dai simboli $\gamma(M)$, $M \in \mathcal{M}$ con le relazioni $\gamma(M) = \gamma(M_1) + \gamma(M_2)$ per ogni successione esatta $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$. Il prodotto tensoriale induce su $K(\mathcal{M})$ la struttura di anello commutativo. Ponendo $\dim \gamma(M) = \dim M$, si può estendere l'applicazione dim sul gruppo $K(\mathcal{M})$ e definire un omomorfismo $\dim : K(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathbb{Z}$. Similmente, ponendo $\delta(\gamma(M)) = \delta(M)$ e tenendo conto della proposizione 2, a), si può estendere l'applicazione δ sul gruppo $K(\mathcal{M})$ e definire un omomorfismo $\delta : K(\mathcal{M}) \longrightarrow \Delta_k = \Omega/d \ ln \ k^*$. Definiamo sul gruppo additivo $\mathbb{Z} \times \Delta_k$ una struttura di anello con la legge di moltiplicazione

$$(z, \alpha)(z', \alpha') = (zz', z\alpha' + z'\alpha), \; z, z' \in Z \, ; \; \alpha, \alpha' \in \Delta_k \, .$$

TEOREMA 2. La totalità I degli elementi $\mu \in K(\mathcal{M})$ con $\dim \mu = 0$, $\delta(\mu) = 0$ è un ideale dell'anello $K(\mathcal{M})$, e l'omomorfismo di gruppi $K(\mathcal{M}) \xrightarrow{(\dim. \, \delta)} \mathbf{Z} \times \Delta_k$ induce un isomorfismo di anelli

$$K(\mathcal{M}) \, / \, I \to \mathbf{Z} \times \Delta_k \, .$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $\mu_1 = \gamma(M_1)$, $\mu_2 = \gamma(M_2)$ si ha

$$\dim(\mu_1 \mu_2) = \dim \mu_1 \dim \mu_2$$

$$\delta(\mu_1 \mu_2) = \dim \mu_1 \, \delta(\mu_2) + \dim \mu_2 \, \delta(\mu_1)$$

(proposizione 2, b)). Queste formule sussistono anche per ogni $\mu_1, \mu_2 \in K(\mathcal{M})$ poichè le due parti sono bilineari e gli elementi $\gamma(M)$ generano il gruppo $K(\mathcal{M})$. Ne segue che I è un ideale e che $(\dim, \delta)$ induce l'immersione di anelli $K(\mathcal{M}) \, / \, I \to \mathbf{Z} \times \Delta_k$. Per finire la dimostrazione basterà provare che per ogni $z \in \mathbf{Z}$, $z > 0$ e $\alpha \in \Delta_k$ esiste un modulo M con $\dim M = z$, $\delta(M) = \alpha$. Ciò è vero per $z = 1$ (teorema 1); la somma diretta M del modulo unidimensionale di classe α con $z - 1$ copie di k è di dimensione z e ha discriminante α.

4. Moduli fuchsiani sul corpo locale.

In questo paragrafo k è un corpo completo rispetto ad una valutazione discreta v di rango 1. Supporremo che il corpo residuo k_0 di k rispetto a v sia di caratteristica 0. Si può considerare il corpo k_0 come un sottocorpo di k. Sia D lo spazio unidimensionale delle derivazioni continue del corpo k banali su k_0. Indicheremo con A la schiera valutante di v e con $P \subset A$ l'ideale massimo.

Supporremo la valutazione v normalizzata in modo tale che per ogni $f \in A, f \neq 0$ si abbia $f \in P^{v(f)} - P^{v(f)+1}$. Sia $D_0 = \{\partial \in D \mid \partial P \subset P\}$. Ovviamente, D_0 è un A-modulo libero di rango 1.

Sia M un D-modulo. Per ogni $m \in M$ denoteremo con $E(m)$ l'A-sottomodulo minimo di M, contenente m e tale che $\partial E(m) \subset E(m)$ per ogni $\partial \in D_0$.

Un D-modulo M dicesi fuchsiano se per ogni $m \in M$ l'A-modulo $E(m)$ è di tipo finito.

PROPOSIZIONE 3, *a*) Il corpo k e ogni suo sopracorpo finito sono moduli fuchsiani.

b) Se M, N sono moduli fuchsiani, tale è $M \otimes N$.

c) Se M è un modulo fuchsiano, di dimensione finita, M^t è un modulo fuchsiano.

d) Ogni sottomodulo e ogni modulo quoziente di un modulo fuchsiano sono fuchsiani.

DIMOSTRAZIONE. *a*) Sia $P = tA$; allora $k \simeq k_0((t))$ e $A \simeq k[[t]]$. Indicheremo con $\partial_t \in D$ la derivazione tale che $\partial_t\, t = t$. Si ha $D = k\partial_t$, $D_0 = A\partial_t$. In particolare, $v(\partial x) \geq v(x)$ per ogni $\partial \in D_0$, $x \in k$; ne segue che $E(x) \subset Ax$.

Sia $k' \supset k$ un sopracorpo finito. Esiste un'unica estensione di v su k'; la schiera valutante A' di questa estensione è la chiusura aritmetica di A in k, finita come A-modulo. È facile dimostrare che $v(\partial x) \geq v(x)$ anche per ogni $x \in k'$, $\partial \in D_0$; ne segue che $E(x) \subset A'\, x$. Tenendo conto che l'anello A è noetheriano, otteniamo la nostra asserzione.

b) Siano M, N moduli fuchsiani. Per ogni $m \in M, n \in N$ si ha

$$E(m \otimes_k n) \subset E(m) \otimes_A E(n)$$

e per ogni $m_i \in M \otimes N$, $i = 1, \dots, a$, si ha

$$E\left(\sum_{i=1}^{a} m_i\right) \subset \sum_{i=1}^{a} E(m_i).$$

Quindi il modulo $M \otimes N$ è fuchsiano.

c) Sia M un modulo fuchsiano di dimensione finita. Per ogni $h \in M^t$ esiste un A-modulo di tipo finito $E_h \subset M$ tale che $h(E_h) \subset A$, $M = k\, E_h$, $D_0\, E_h \subset E_h$. Infatti, sia $m_1, \dots, m_a$ una k-base di M e sia $a_i = \min_{m \in E(m_i)} v(h(m))$; allora $E_h = \sum_{i=1}^{k} t^{-a_i} E(m_i)$ ha tutte le proprietà necessarie.

Sia $h_1 \in M^t$; se $h_1(E_h) \subset A$, in virtù della formula

$$(\partial h_1)(m) = \partial(h_1(m)) - h_1(\partial m)$$

si ha $(\partial h_1)(E_h) \subset A$ per ogni $\partial \in D_0$. D'altra parte, se due applicazioni $h_1, h_2 \in M^t = \mathrm{Hom}(M, k)$ coincidono su E_h, esse sono uguali. Ne segue che l'A-modulo $E(h)$ è isomorfo ad un sottomodulo dell'A-modulo $\mathrm{Hom}_A(E_h, A)$ che è di tipo finito.

L'ultima asserzione è banale.

COROLLARIO. Se M è un modulo fuchsiano di dimensione finita, $d(M)$ è un modulo fuchsiano.

OSSERVAZIONE. Per verificare che un modulo M è fuchsiano, basterà provare che gli A-moduli $E(m_i)$ sono di tipo finito per ogni elemento m_i d'una base dello spazio M. Infatti, $E(m+n) \subset E(m) + E(n)$ e $E(xm) \subset \subset E(x) E(m) = \{\Sigma x_i m_i \mid x_i \in E(x), m_i \in E(m)\}$. La nostra asserzione risulta allora dalla proposizione 3, *a*), perchè l'anello A è noetheriano. Ne segue altresì che la somma diretta di moduli fuchsiani è fuchsiana.

5. Moduli fuchsiani unidimensionali.

Conserviamo le notazioni del paragrafo precedente; in particolare, $P = tA$. Per ogni $x \in k$ denoteremo con $dx \in \Omega = \mathrm{Hom}(D, k)$ l'applicazione $\partial \longrightarrow \partial x$.

TEOREMA 3, *a*) Il gruppo Δ_k è isomorfo al gruppo $kdt \Big/ \left(\dfrac{\mathbf{Z}}{t} + A\right) dt$.

b) Le classi dei moduli fuchsiani unidimensionali formano un sottogruppo $\Delta_k^0 \subset \Delta_k$, isomorfo al

$$\left(\frac{k_0^+}{t} + A\right) dt \Big/ \left(\frac{\mathbf{Z}}{t} + A\right) dt \simeq k_0^+ / \mathbf{Z},$$

dove k_0^+ è il gruppo additivo del corpo k_0.

Quest'ultimo isomorfismo è canonico e non dipende da t.

DIMOSTRAZIONE. *a*) Utilizzando il teorema 1, otteniamo $\Omega = k\,dt$, $\Delta_k = = kdt / d\,ln\,k^*$. Vogliamo far vedere che $d\,ln\,k^* \simeq \left(\dfrac{\mathbf{Z}}{t} + A\right) dt$. Infatti, il gruppo k^* si decompone come prodotto diretto dei sottogruppi

$$k^* = \{t^i\}_{i \in \mathbf{Z}} \times k_0^* \times \{1 + P\}.$$

Si vede subito che $d\,ln\,(t^i) = it^{-1}\,dt$; $d\,ln\,x = 0$ per ogni $x \in k_0^*$. Oltre a ciò, $d\,ln\,\{1 + P\} = Adt$, perchè in questo caso l'omomorfismo $d\,ln$ è in realtà la composizione dei due epimorfismi $1 + P \xrightarrow{ln} P \xrightarrow{d} Adt$. Ne segue la prima asserzione.

b) Dalla proposizione 3 discende che Δ_k^0 è un sottogruppo di Δ_k. Sia M un modulo unidimensionale fuchsiano, $m \in M$, $\partial_t^a m = x_m^{(a)}(\partial_t)\, m$, $a \geq 1$. Si ha

$$x_m^{(a+1)}(\partial_t) = \partial_t\, x_m^{(a)}(\partial_t) + x_m^{(a)}(\partial_t)\, x_m(\partial_t).$$

Se $v(x_m^{(1)}(\partial_t)) < 0$, ne segue che

$$x^{(a+1)}(\partial_t) \neq 0, \quad v(x_m^{(a+1)}(\partial_t)) < v(x_m^{(a)}(\partial_t)).$$

Quindi l'A-modulo $E(m)$ non è di tipo finito. Se invece $x_m^{(1)}(\partial_t) = 0$ ovvero $v(x_m^{(1)}(\partial_t)) \geq 0$, risulta

$$v(x_m^{(a+1)}(\partial_t)) \geq v(x_m^{(a)}(\partial_t)),$$

da dove discende che $E(m)$ è modulo di tipo finito.

Quindi i moduli fuchsiani unidimensionali corrispondono alle classi di applicazioni $\nu: D \to k$, per le quali $\nu(D_0) \subset A$. È facile provare che il sottogruppo di queste classi è isomorfo al sottogruppo $\left(\frac{k_0}{t} + A\right) dt \subset k\, dt$.

L'applicazione

$$\left(\frac{k_0}{t} + A\right) dt \Big/ \left(\frac{\mathbb{Z}}{t} + A\right) dt \to \operatorname{res}\left(\frac{k_0}{t} + A\right) dt \Big/ \operatorname{res}\left(\frac{\mathbb{Z}}{t} + A\right) dt = k_0^+ / \mathbb{Z}$$

è ovviamente un isomorfismo canonico.

6. Classificazione dei moduli fuchsiani.

Sia $\xi \in \Delta_k^0 = k_0^+ / \mathbb{Z}$; denoteremo con M^ξ un modulo unidimensionale fuchsiano della classe ξ. M^ξ è unico a meno di isomorfismi; $M^0 \simeq k$.

Teorema 4, *a*) Ogni modulo fuchsiano di dimensione finita è una somma diretta di moduli fuchsiani indecomponibili, definiti univocamente.

b) Se il corpo k_0 è algebricamente chiuso, ogni modulo fuchsiano indecomponibile M contiene l'unico sottomodulo unidimensionale $M^\xi \subset M$. La classe ξ di questo modulo e la dimensione di M formano un sistema completo di invarianti del modulo indecomponibile M: per ogni $a \geq 1$, $a \in Z$ e ogni $\xi \in \Delta$ esiste un unico (a meno di isomorfismi) modulo indecomponibile M con $\dim M = a$, $M^\xi \subset M$.

Dimostrazione. La prima asserzione è un caso particolare del teorema di Krull-Schmidt ([4]).

Cominciamo a dimostrare l'asserzione *b*): Proveremo dapprima che ogni modulo fuchsiano di dimensione finita M contiene un sottomodulo unidimensionale. Sia $P = tA$, $D_0 = A\partial_t$, e sia $E \subset M$ un A-sottomodulo non nullo di tipo finito, per il quale si ha $D_0 E \subset E$. Allora il k_0-spazio E/tE ha una dimensione finita non nulla, e ∂_t induce su E/tE una certa trasformazione lineare. Sia $x \in k_0$ un autovalore della trasformazione, tale che $x - a$ non sia autovalore di essa per nessun $a \geq 1$, $a \in \mathbf{Z}$. Sia $\xi = x \bmod \mathbf{Z}$. Dimostriamo che M contiene un sottomodulo, isomorfo a M^{ξ}. Basterà trovare un elemento $m \in E$ tale che $\partial_t m = xm$.

In virtù della definizione della x, esiste un elemento $m_1 \in E$ tale che

$$\partial_t m_1 = xm_1 + tn_1 , n_1 \in E.$$

Supporremo che un elemento m_k, con la proprietà

$$\partial_t m_k = xm_k + t^k n_k , k \geq 1, n_k \in E,$$

sia già stato trovato. Vogliamo far vedere l'esistenza d'un elemento $m_{k+1} = m_k + t^k r_k , r_k \in E$ dello stesso tipo. Si ha

$$\partial_t m_{k+1} = xm_{k+1} + t^k ((\partial_t - x + k) r_k + n_k).$$

In virtù della scelta dell'autovalore x, l'operatore $\partial_t - x + k$ induce su E/tE una trasformazione lineare non degenere, e perciò esiste un elemento $r_k \in E$ tale che

$$(\partial_t - x + k) r_k + n_k \in tE.$$

Ponendo $m_{k+1} = m_k + t^k r_k$ e $m = \lim_{n \to \infty} m_k$, otteniamo $\partial_t m = xm$. Dunque $M^{\xi} \subset M$.

Ora sia $a \geq 1$ un numero intero. Consideriamo il modulo

$$M^{(a)} = \sum_{i=0}^{a-1} km_i , \partial_t m_i = m_{i-1} , m_{-1} = 0.$$

Dall'osservazione esposta alla fine del paragrafo 3 discende che $M^{(a)}$ è modulo fuchsiano. Poichè esiste un unico sottomodulo unidimensionale $M^{(1)} \subset M^{(a)}$, il modulo $M^{(a)}$ è indecomponibile.

Proveremo che ogni modulo indecomponibile di dimensione $a \geq 1$ è isomorfo a un modulo $M^{\xi} \otimes M^{(a)}$, dove $\xi \in k_0^+ / \mathbf{Z}$ è unico. Basterà provare che se $M^0 \simeq M^{(1)} \subset M$, allora $M \simeq M^{(a)}$. Infatti, se M è indecomponibile e $M^{\xi} \subset M$, allora $M^{-\xi} \otimes M$ è indecomponibile e $M^0 \subset M$.

Supporremo l'asserzione provata per ogni modulo fuchsiano indecomponibile di dimensione $\leq a$ (per $a = 1$ è già provata). Sia $\dim M = a + 1$. Consideriamo una successione esatta $0 \to M^{(1)} \to M \xrightarrow{\varphi} M' \to 0$ e dimostriamo che il modulo M' è indecomponibile se M è indecomponibile. Sia $M' = M_1 \oplus M_2$, $M_1 \cap M_2 = 0$ e sia $\bar{M}_1 = \varphi^{-1}(M_1)$, $\bar{M}_2 = \varphi^{-1}(M_2)$. Allora

$M = \overline{M}_1 + \overline{M}_2$, $\overline{M}_1 \cap \overline{M}_2 = M^{(1)}$. Se almeno uno dei moduli $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2$ è decomponibile, per esempio $\overline{M}_1 = \overline{M}_1' \oplus \overline{M}_2'$, esiste un sottomodulo $\overline{M}_1' \subset M$ tale che $\overline{M}_1' \supset M^{(1)}$ e $M = \overline{M}_1' \oplus (\overline{M}_2' \oplus \overline{M}_2)$. Se invece $\overline{M}_1$ e $\overline{M}_2$ sono indecomponibili, si ha $\overline{M}_1 \simeq M^{(b_1)}$, $\overline{M}_2 \simeq M^{(b_2)}$, perchè $\dim \overline{M}_i < \dim M$, $i = 1, 2$. Sia $\overline{M}_1 = \sum_{i=0}^{b_1-1} km_i$, $\partial_t m_i = m_{i-1}$ e $\overline{M}_2 = \sum_{i=0}^{b_2-1} kn_i$, $\partial_t n_i = n_{i-1}$. Si può supporre che $b_1 \leq b_2$ e $m_0 = n_0$; allora $M = \overline{M}_1' \oplus \overline{M}_2$, ove $\overline{M}_1' = \sum_{i=1}^{b_1-1} k(m_i - n_i)$.

Poichè M' è indecomponibile e $\dim M' = a$, si ha $\overline{M'} \simeq M^{\xi} \otimes M^{(a)}$. Consideriamo la successione esatta $0 \to M^{\xi} \to M^{\xi} \otimes M \xrightarrow{\varphi} M^{(a)} \to 0$. Sia $M^{\xi} = kn$, ove $\partial_t n = xn$, $x \in k_0$, $\xi = x \bmod \mathbb{Z}$. Sia $M^{(a)} = \sum_{i=0}^{a-1} km_i$, $\partial_t m_i = m_{i-1}$. Scegliamo un elemento $\overline{m} \in M^{\xi} \otimes M$ tale che $\varphi(\overline{m}) = m_{a-1}$. Allora $\partial_t^a \overline{m} = yn$, ove $y \in A$, perchè $M^{\xi} \otimes M$ è un modulo fuchsiano. Altresì $y \neq 0$, perchè se $y = 0$, $M^{\xi} \otimes M = kn \oplus \sum_i k\, \partial_t^i \overline{m}$.

Su ogni spazio $k^0 t^i n$ l'operatore ∂_t induce la moltiplicazione per $i + x$. Ne segue che se $\xi \neq 0$ esiste un elemento $z \in A$ tale che $\partial_t(zn) = yn$. Dunque $\partial_t^a(\overline{m} - zn) = 0$, e $M^{\xi} \otimes M = kn \oplus_i \sum_i k\, \partial_t^i(\overline{m} - zn)$. Quindi $\xi = 0$, se il modulo M è indecomponibile.

In questo caso si può scegliere n tale che $\partial_t n = 0$, e in ogni caso si può scegliere $z \in A$ tale che $\partial_t(m - zn) \in k_0 n$. Allora $\partial_t^{a+1}(\overline{m} - zn) = 0$. Ne segue che $M \simeq M^{(a+1)}$, se M è indecomponibile.

Il teorema è dimostrato.

Ogni modulo fuchsiano di dimensione finita è isomorfo ad una somma diretta di moduli $M^{\xi} \otimes M^{(a)}$, $\xi \in k_0^+/\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{Z}$. Si ha $(M^{(a)})^t \simeq M^{(a)}$ e $(M^{\xi})^t \simeq M^{-\xi}$. Calcoliamo in conclusione il prodotto tensoriale $M^{(a)} \otimes M^{(b)}$.

Proposizione 4. Sia $a \leq b$; allora

$$M^{(a)} \otimes M^{(b)} \simeq \bigoplus_{i=1}^{a} M^{(a+b-2i+1)}.$$

Dimostrazione. Per $a = 1$ l'asserzione è banale.

Sia $a = 2$, $b \geq 2$. Si ha $M^{(2)} = km_0 + km_1$, $\partial_t m_1 = m_0$, $\partial_t m_0 = 0$; similmente $M^{(b)} = \sum_{i=0}^{b-1} kn_i$, $\partial_t n_i = n_{i-1}$. Poniamo $m = m_1 \otimes n_{b-1}$ e $n = (b-1) m_0 \otimes n_{b-1} - m_1 \otimes n_{b-2}$. Siano M_1, M_2 i sottomoduli di $M = M^{(2)} \otimes M^{(b)}$ generati rispettivamente da m ed n. Vogliamo dimostrare che $M_1 \simeq M^{(b+1)}$, $M_2 \simeq M^{(b-1)}$ e $M = M_1 \oplus M_2$.

Si ha anzitutto

$$\begin{cases} \partial_t^i m = i m_0 \otimes n_{b-i} + m_1 \otimes n_{b-i-1}\,, & 0 \leq i \leq b-1, \\ \partial_t^b m = b m_0 \otimes n_0\,;\ \partial_t^{b+1} m = 0, & \end{cases}$$

$$\begin{cases} \partial_t^i n = (b-i-1)\, m_0 \otimes n_{b-i-1} - m_1 \otimes n_{b-i-2}\,, & 0 \leq i \leq b-2, \\ \partial_t^{b-1} n = 0. & \end{cases}$$

Ne segue dapprima che $M_1 \simeq M^{(b+1)}$ e $M_2 \simeq M^{(b-1)}$. Inoltre, $m \otimes n_j \in M_1 + M_2$ per $i = 0, 1$ e $j = 0, \ldots, b-1$. Dunque $M = M_1 + M_2$. Finalmente, $\dim M_1 + \dim M_2 = 2b = \dim M$; quindi $M_1 \cap M_2 = \{0\}$.

Supporremo che l'isomorfismo

$$M^{(c)} \otimes M^{(b)} \simeq \bigoplus_{i=1}^{c-1} M^{(c+b-2i+1)}$$

sia dimostrato per ogni $c \leq a-1 < b$. Si ha allora

$$(M^{(2)} \otimes M^{(a-1)}) \otimes M^{(b)} \simeq (M^{(a)} \oplus M^{(a-2)}) \otimes M^{(b)} \simeq$$

$$\simeq (M^{(a)} \otimes M^{(b)}) \bigoplus_{i=1}^{a-2} M^{(a+b-2i-1)}.$$

D'altra parte si ha

$$M^{(2)} \otimes (M^{(a-1)} \otimes M^{(b)}) \simeq M^{(2)} \otimes \left(\bigoplus_{i=1}^{a-1} M^{(a+b-2i)} \right) \simeq$$

$$\simeq \bigoplus_{i=1}^{a-1} M^{(a+b-2i-1)} \bigoplus_{i=1}^{a-1} M^{(a+b-2i+1)}.$$

In virtù dell'associatività del prodotto tensoriale e utilizzando il teorema di Krull-Schmidt, otteniamo la nostra asserzione.

COROLLARIO. Sia $\mathfrak{M}^0$ la categoria di moduli fuchsiani di dimensione finita. Allora

$$K(\mathfrak{M}^0) \simeq \mathbb{Z}\,[k_0^+ / \mathbb{Z}\,].$$

7. Il caso globale.

In questo paragrafo indicheremo con k un corpo di funzioni algebriche di una variabile sopra un corpo algebricamente chiuso k_0 di caratteristica 0.

Sia D lo spazio unidimensionale delle derivazioni di k banali su k_0. Per ogni valutazione discreta v del corpo k, banale su k_0, denoteremo con k_v il corpo completo corrispondente. Sia $A_v \subset k_v$ la schiera valutante e sia $D_v = k_v \otimes D$. Un D-modulo M dicesi fuchsiano, se per ogni v il D_v-modulo $M_v = k_v \otimes M$ è fuchsiano.

Teorema 5, *a*) Sia Δ_k^0 un gruppo di classi di moduli fuchsiani unidimensionali. Allora $\Delta_k^0 \simeq \Omega_0/d\, ln\, k^*$, ove Ω_0 è il gruppo dei differenziali del corpo k aventi i poli di ordine ≤ 1.

b) Sia M un D-modulo fuchsiano di dimensione finita a. Esiste una totalità finita S delle valutazioni v tale che $M_v \simeq \bigoplus\limits_1^a k_v$ per ogni $v \notin S$. Sia $M_{vi} \simeq \bigoplus_j M^{\xi_{ij}} \otimes M^{(a_{ij})}$, $v_i \in S$. Allora

$$\sum_{i,j} a_{ij}\, \xi_{ij} = 0, \qquad \xi_{ij} \in k_0^+/\mathbf{Z}.$$

Dimostrazione. La prima asserzione è conseguenza immediata del risultato locale del teorema 3.

Per dimostrare la seconda asserzione scegliamo un elemento $x \in k$, trascendente su k_0. Sia $\partial \in D$ la derivazione tale che $\partial x = 1$. Fissata una base $m_1, \ldots, m_a$ dello spazio M, definiamo la matrice $Y = (y_{ij})$ $(i, j = 1, \ldots, a)$ ponendo

$$\partial\,(m_1, \ldots, m_a) = (m_1, \ldots, m_a)\, Y.$$

Supponiamo che S contenga tutte le valutazioni v, tali che $v(dx) \neq 0$ oppure $v(y_{ij}) < 0$ per qualunque i, j. Per ogni $v \notin S$ l'elemento $x_v \in k_0$ è definito dalla condizione $v(x - x_v) > 0$. Allora $t_v = x - x_v$ è un parametro uniformizzante per v. Sia $\partial_v = (x - x_v)\,\partial$, $E_v = A_v m_1 + \ldots + A_v m_a \subset M_v$. L'$A_v$-modulo E_v è chiuso rispetto a $D_{0,v} = A_v\,\partial_v$. Inoltre, $(x - x_v)\, y_{ij} \in P_v$. Dunque ∂_v induce la trasformazione nulla sullo spazio $E_v/(x - x_0)\, E_v$. Dalla dimostrazione del teorema 3, *b*) discende l'esistenza degli a elementi linearmente indipendenti $\bar{m}_i \subset M_v$, $i = 1, \ldots, a$, tali che $\partial_v\, \bar{m}_i = 0$. Quindi $M_v \simeq \bigoplus\limits_1^a k_v$ per ogni $v \notin S$.

Se $M_{v_i} \simeq \bigoplus\limits_j M^{\xi_{ij}} \otimes M^{(a_{ij})}$, si ha in virtù della proposizione 2:

$$\delta\,(M_{v_i}) = \sum_j a_{ij}\, \xi_{ij},$$

perchè $\delta\,(M_v^{(a)}) = 0$ per ogni a. D'altra parte, sia $\omega \in \Omega_0$ un rappresentante globale dell'elemento $\delta\,(M)$ nel corpo k. Allora in virtù del teorema 3, *b*) si ha

$$\sum_j a_{ij}\,\xi_{ij} = \mathrm{res}_{v_i}(\omega) \bmod \mathbb{Z}.$$

L'ultima asserzione del teorema discende allora dal fatto che la somma dei residui del differenziale globale è nulla.

Istituto Matematico, Acc. Scienze
URSS

BIBLIOGRAFIA

[1] INCE E. L., *Ordinary differential equations*, Longmans 1927.

[2] POOLE E. G. C. *Introduction to the theory of linear differential equations*, New York, 1960.

[3] MANIN JU. I. *Rational points of algebraic curves over functional fields*, Izvestiya AN SSSR, ser. mat, 27 (1963), pp. 1397-1442 (in russo).

[4] JACOBSON N. *The theory of rings*, New York, 1943.