Annali della
Scuola Normale Superiore di Pisa
Classe di Scienze

F. Mantovani

S. Spagnolo

Funzionali analitici reali e funzioni armoniche

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 18, nº 4 (1964), p. 475-513

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_4_475_0>

FUNZIONALI ANALITICI REALI E FUNZIONI ARMONICHE

F. MANTOVANI - S. SPAGNOLO

Introduzione.

1. Lo scopo di questo lavoro è principalmente lo studio dello spazio $\mathcal{A}(A)$ delle funzioni analitiche *reali* su un insieme qualsiasi A di $\mathbf{R}^n$ (vedi Def. 3, § 2, Cap. III) e del suo duale.

I funzionali analitici furono introdotti da FANTAPPIÉ ([2] e [4]), e da lui in seguito applicati alla teoria delle equazioni differenziali, specialmente al problema di CAUCHY per operatori a coefficienti analitici con dati su una ipersuperficie qualunque non caratteristica (vedi ad esempio [3] e [5]).

Un contributo decisamente nuovo alla teoria si è avuto con l'introduzione da parte di SEBASTIÃO e SILVA (ad. es. in [16] e [17]) dei metodi propri della teoria degli spazi vettoriali topologici.

Uno studio sistematico in questa direzione fu poi sviluppato da KÖTHE ([9]) e da SILVA DIAS ([19]), nel caso di funzioni olomorfe locali su un insieme chiuso del piano proiettivo, e da GROTHENDIECK ([6]) nel caso di funzioni olomorfe su varietà complesse.

Lo studio delle applicazioni al problema di CAUCHY (anche con dati su una superficie caratteristica) fu ripreso da LERAY (ad esempio in [11] e [12]) mentre applicazioni al calcolo operazionale furono sviluppate specialmente da SEBASTIÃO e SILVA ([18]).

Pervenuto alla Relazione il 16 Giugno 1964.

Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche (anno accademico 1963-64).

Recentemente poi MARTINEAU ha ripreso la teoria dei funzionali analitici su varietà complesse, studiando la trasformata di FOURIER-BOREL ([13]), e facendo uso dei risultati sulle funzioni complesse di OKA-CARTAN-SERRE.

In tutte queste ricerche, le funzioni analitiche reali sono state considerate come traccia di funzioni olomorfe. Ci sembra invece che molte difficoltà possano essere superate introducende la teoria dei funzionali armonici (TILLMANN [20]).

2. Il Capitolo I contiene uno studio topologico dello spazio $\mathcal{A}(A)$ delle funzioni armoniche locali su un'insieme qualsiasi $A \subset \tilde{\mathbf{R}}^n$ e del suo duale $\mathcal{A}'(A)$. I teoremi principali sono la Prop. 1 del § 3, che enuncia le proprietà topologiche di $\mathcal{A}(A)$, il teorema di dualità (Teor. 1 del § 4) che stabilisce un isomorfismo canonico fra gli spazi $\mathcal{A}'(A)$ e $\mathcal{A}(\complement A)$ e il Teor. 1 del § 5.

Il Capitolo II contiene alcune applicazioni della formula di dualità di cui le principali si trovano contenute nel Teor. 1 del § 1 (sulla approssimazione di funzioni), nel Teor. 1 del § 2 (MITTAG-LEFFLER) e nel Teor. 1 del § 3 (sulla decomposizione di funzionali).

Il Capitolo III contiene lo studio dello spazio $\mathcal{C}(A)$ delle funzioni analitiche su un insieme $A \subseteq \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$ e del suo duale $\mathcal{C}'(A)$. Il § 1 mostra che tutte le proprietà topologiche dello spazio $\mathcal{A}(A)$ e la formula di dualità sono ancora valide per il sottospazio $\mathcal{A}_s(A)$ delle funzioni armoniche simmetriche su A (Teor. 1 e 2); il § 2, che gli spazi $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{A}_s(A)$ sono isomorfi, pur di identificare una funzione analitica su $A \subseteq R^n$ alla funzione armonica simmetrica su un aperto di $\mathbf{R}^{n+1}$ contenente A, che si ottiene risolvendo un opportuno problema di CAUCHY (Teor. 1); il § 3 contiene la trasposizione agli spazi dei funzionali analitici delle proprietà dimostrate nel Cap. I e II per i funzionali armonici.

3. Dobbiamo infine ringraziare il Prof. E. DE GIORGI per averci suggerito l'argomento ed avere diretto la ricerca.

NOTAZIONI

Per le definizioni legate alla teoria degli spazi vettoriali topologici (limiti induttivi, proiettivi, isomorfismi, omomorfismi, dualità, topologia di MACKEY, spazi di tipo $(\mathcal{F})$, $(\mathcal{DF})$, $(\mathcal{M})$, $(\mathcal{S})$, spazi « bornologique » e « tonnelé »), si rimanda a [8] e [10].

$\mathbf{R}^n$ rappresenta il prodotto topologico di n copie della retta reale; $\mathbf{C}^n$ il prodotto topologico di n copie del piano complesso; $\tilde{\mathbf{R}}^n = \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$ la compattificazione di $\mathbf{R}^n$ mediante l'aggiunta di un punto all'∞, identificabile con la sfera unitaria di $\mathbf{R}_{n+1}$ attraverso la proiezione (stereografica) di centro il polo nord $(0, \ldots, 0, 1)$ sul piano equatoriale $x_{n+1} = 0$; $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ è il punto generico di $\mathbf{R}^n$. Se i punti $x, y \in \mathbf{R}^n$, la loro distanza si indicherà

$$d(x, y) = \left[\sum_1^n{}_i (y_i - x_i)^2\right]^{1/2}$$

in particolare si porrà $|x| = d(x, 0)$.

Se $x, y \in \widetilde{\mathbf{R}}^n$ si indicherà $\widetilde{d}(x, y)$ la distanza in quanto punti della sfera unitaria di $\mathbf{R}^{n+1}$, cioè la distanza indotta da $\mathbf{R}^{n+1}$.

Sia U un insieme aperto di $\mathbf{R}^n$, diremo *funzione* su U un'applicazione di U nel corpo complesso.

Sia r un numero intero ≥ 0. Una funzione u su U si dirà di classe $\mathcal{C}^r$, oppure r volte differenziabile, se u possiede tutte le derivate continue di ordine $\leq r$. Si scriverà $u \in \mathcal{C}^r(U)$.

La u si dirà poi di classe $\mathcal{C}^\infty$, oppure differenziabile, se possiede tutte le derivate (di ogni ordine) continue. Si scriverà in tal caso $u \in \mathcal{C}^\infty(U)$.

Se poi $u \in \mathcal{C}^\infty$ ha supporto compatto in U si scriverà $u \in \mathcal{C}_0^\infty$.

Lo spazio delle funzioni su U di classe $\mathcal{C}^\infty$, con la topologia descritta da Schwartz ([15]), si indicherà $\mathcal{E}(U)$, lo spazio delle distribuzioni su U $\mathcal{E}'(U)$.

Se $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ è una n-pla di interi ≥ 0, porremo

$$|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$$

$$k! = k_1!\, k_2! \ldots k_n!$$

Se u è una funzione su U, indicheremo

$$D^k u = \frac{\partial^{|k|} u}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}.$$

Per la definizione di insiemi fra loro connessi si veda la nota a piè di pagina del § 1, Cap. I.

Inoltre se $\{E_i, r_i^j\}_{i \in I}$ è una famiglia induttiva (risp. proiettiva) il limite induttivo si indicherà $\varinjlim_{i \in I} E_i$ (risp: il limite proiettivo con $\varprojlim_{i \in I} E_i$).

CAP. I. — FUNZIONALI ARMONICI

In tutto questo Capitolo e nel successivo, si supporrà $n \geq 3$. Inoltre, parlando di *sottoinsieme* di $\widetilde{\mathbf{R}}^n$, si sottointenderà l'aggettivo *proprio*, salvo espressa menzione del contrario.

§ 1. Spazio delle funzioni armoniche locali.

DEFINIZIONE 1. « Sia Ω un aperto di $\widetilde{\mathbf{R}}^n$. Una funzione f a valori complessi definita su Ω, si dice *armonica* su Ω se è 2 volte differenziabile e inoltre:

$$\Delta f = \sum_1^n {}_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f \equiv 0 \qquad \text{su} \quad \Omega - \{\infty\}$$

$$\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0 \qquad \text{se} \quad \infty \in \Omega \text{ ».}$$

È noto che le funzioni armoniche sono analitiche.

DEFINIZIONE 2. « Sia A un sottoinsieme di $\widetilde{R}^n$. Consideriamo sull'insieme delle coppie (u, Ω), dove Ω è un aperto contenente A ed u è una funzione armonica su Ω, la relazione di equivalenza:

$$(u, \Omega_1) \sim (v, \Omega_2)$$

se e solo se esiste un aperto

$$\Omega \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_2 \qquad \text{per cui:} \qquad \Omega \supseteq A \qquad \text{e} \qquad u \equiv v \qquad \text{su } \Omega.$$

L'insieme quoziente rispetto a tale relazione si dirà insieme delle *funzioni armoniche* (*locali*) su A ; si indicherà $\mathcal{A}(A)$. »

OSSERVAZIONE 1. « Ogni funzione armonica locale su A può rappresentarsi come (u, Ω) ove Ω è un aperto connesso con A (¹) ed u è una funzione armonica su Ω ».

(¹) A' si dice *connesso con* A se $A' \supseteq A$ e in ogni componente connessa di A' si trova qualche punto di A.

OSSERVAZIONE 2. « $\mathcal{A}(A)$ è uno spazio vettoriale con le operazioni usuali ».

OSSERVAZIONE 3. « Sia $A \supseteq B$, allora è possibile definire un'applicazione di *restrizione*

$$r_B^A : \mathcal{A}(A) \to \mathcal{A}(B)$$

in modo ovvio. Tale restrizione è una applicazione lineare, iniettiva purchè A sia connesso con B (vedi anche Prop. 1, § 1, Cap. II). Inoltre se $A \supseteq B \supseteq C$ si ha

$$r_C^A = r_C^B \circ r_B^A . »$$

OSSERVAZIONE 4. « Sia $\mathcal{I} = \mathcal{I}(A)$ la famiglia (semiordinata per inclusione e filtrante) degli aperti $\Omega \supseteq A$.

Allora gli spazi vettoriali

$$\{\mathcal{A}(\Omega)\}_{\Omega \in \mathcal{I}}$$

con le applicazioni di restrizione

$$r_{\Omega'}^{\Omega} : \mathcal{A}(\Omega) \to \mathcal{A}(\Omega'), \qquad \text{per} \quad \Omega \supseteq \Omega' \supseteq A,$$

formano una famiglia induttiva (¹) ».

OSSERVAZIONE 5. « La famiglia semiordinata $\mathcal{K} = \mathcal{K}(A)$ dei sottoinsiemi compatti di A definisce analogamente la famiglia proiettiva (¹):

$$\{\mathcal{A}(K)\}_{K \in \mathcal{K}}, \quad r_{K'}^K : \mathcal{A}(K) \to \mathcal{A}(K') \quad \text{per} \quad K' \subseteq K \subseteq A. »$$

LEMMA 1. « *Valgono i seguenti isomorfismi algebrici:*

$$\mathcal{A}(A) \simeq \varinjlim_{\Omega \in \mathcal{I}} \mathcal{A}(\Omega) \simeq \varprojlim_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{A}(K) ».$$

PROVA i) $\mathcal{A}(A) \simeq \varinjlim_{\Omega \in \mathcal{I}} \mathcal{A}(\Omega)$.

Se $\{E_i, r_i^j\}_{i \in I}$ è una famiglia induttiva di spazi vettoriali, ed F è un altro spazio vettoriale, per definire una applicazione lineare

$$v : \varinjlim_{i \in I} E_i \to F$$

(¹) Per le definizioni di limite induttivo e proiettivo, algebrico e topologico, vedi [10].

basta definire, per ogni $i \in I$, una applicazione lineare

$$v_i : E_i \longrightarrow F$$

in modo che le $\{v_i\}$ siano compatibili con le restrizioni, i. e.:

$$v_j = v_i \circ r_i^j, \qquad \forall j \geq i.$$

Nel nostro caso, se consideriamo le applicazioni lineari

$$r_A^\Omega : \mathcal{A}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{A}(A), \qquad \Omega \in \mathcal{I},$$

è facile verificare che esse sono compatibili con le restrizioni e che inducono un'applicazione lineare biunivoca:

$$r : \varinjlim_{\Omega \in \mathcal{I}} \mathcal{A}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{A}(A).$$

ii) $\mathcal{A}(A) \simeq \varprojlim_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{A}(K)$.

Se $\{E_i, r_i^j\}_{i \in I}$ è una famiglia proiettiva di spazi vettoriali ed F è un altro spazio vettoriale, per definire un'applicazione lineare

$$v : F \longrightarrow \varprojlim_{i \in I} E_i$$

basta definire per ogni $i \in I$ una applicazione lineare

$$v_i : F \longrightarrow E_i$$

in modo che le $\{v_i\}$ siano compatibili con le restrizioni, i. e.:

$$v_i = r_i^j \circ v_j \qquad \forall j \geq i.$$

Nel nostro caso le applicazioni lineari

$$r_K^A : \quad \mathcal{A}(A) \longrightarrow \mathcal{A}(K), \qquad K \in \mathcal{K},$$

sono compatibili con le restrizioni, quindi definiscono una applicazione lineare

$$r : \mathcal{A}(A) \longrightarrow \varprojlim_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{A}(K).$$

Tale r è iniettiva, in quanto se $u \in \mathcal{A}(A)$, $r(u) = 0$ comporta

$$r_K^A(u) = 0, \qquad \forall\, K \in \mathcal{K},$$

e, limitandoci ai K unipuntuali, questo significa che u è nulla in un intorno di ogni punto di A, quindi u è nulla in un intorno di A.

Verificare che r è surgettiva, significa mostrare che per ogni famiglia

$$\{u_K\}_{K \in \mathcal{K}} \quad \text{appartenente a} \quad \varprojlim_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{A}(K)$$

(cioè tale che $r_{K'}^K(u_K) = u_{K'}$ se $K \supseteq K'$), esiste una funzione $u \in \mathcal{A}(A)$ tale che

$$r_K^A(u) = u_K, \qquad \forall\, K \in \mathcal{K};$$

anzi basterà verificare che

$$r_x^A(u) = u_x \qquad \forall\, x \in A.$$

Ora è facile constatare che è sufficiente provare l'esistenza di una tale u *localmente*, cioè, la tesi sarà provata se per ogni $x \in A$ sarà possibile trovare un intorno $V = V(x)$ ed una funzione $u \in \mathcal{A}(A \cap V)$ tali che

$$r_y^{A \cap V}(u) = u_y, \qquad \forall\, y \in A \cap V.$$

Ma negare quest'ultimo fatto equivale ad ammettere l'esistenza di un punto $x_0 \in A$ e di una successione $\{x_n\} \subset A$ convergente ad x_0, tali che le funzioni u_{x_n} ed u_{x_0} non hanno una comune estensione all'insieme $K = x_0 \bigcup_n x_n$; ora K è un compatto di A, e la funzione u_K è proprio una comune estensione delle u_{x_n}.

§ 2. Topologie sullo spazio $\mathcal{A}(A)$.

DEFINIZIONE 1. «Sia A un aperto di $\tilde{\mathbf{R}}^n$. Consideriamo assegnata sullo spazio $\mathcal{A}(A)$ la famiglia di seminorme

$$\| u \|_K = \sup_{x \in K} | u(x) |, \quad \text{per} \quad K \in \mathcal{K}».$$

È noto che tali seminorme forniscono ad $\mathcal{A}(A)$ una struttura di spazio vettoriale topologico localmente convesso, metrizzabile e completo, cioè di tipo $(\mathcal{F})$, e inoltre di tipo $(\mathcal{M})$; anzi, se $A \not\ni \infty$, $\mathcal{A}(A)$ viene ad essere un sottospazio topologico chiuso dello spazio di SCHWARTZ $\mathcal{E}(A)$.

OSSERVAZIONE 1. « Una sottofamiglia di seminorme inducente su $\mathcal{A}(A)$ la stessa topologia, si ottiene facendo variare K tra i sottoinsiemi compatti di $A - \infty$ ».

Invero se $K \in \mathcal{K}$, si può sempre trovare un $K' \supseteq K$ che sia la chiusura di un aperto di A contenente ∞ (beninteso se $\infty \in A$; nel caso contrario non v'è nulla da dimostrare); ma allora il bordo $\partial K'$ è un compatto di A non contenente ∞ e, per il teorema del massimo modulo:

$$\| u \|_K \leq \| u \|_{K'} \leq \| u \|_{\partial K'}, \qquad \forall\, u \in \mathcal{A}(A).$$

Possiamo a questo punto dimostrare un Lemma, sulla rappresentazione dei funzionali su $\mathcal{A}(A)$, che ci sarà utile nel seguito.

LEMMA 1. « *Sia A un aperto di $\tilde{\mathbf{R}}^n$ e T un funzionale lineare e continuo su $\mathcal{A}(A)$. Allora si può trovare una funzione $\tau \in \mathcal{C}_0^\infty(A - \infty)$ tale che :*

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{A-\infty} \tau\varphi, \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{A}(A) \text{ »}.$$

PROVA : Per l'osservazione precedente, $\mathcal{A}(A)$ è un sottospazio chiuso di $\mathcal{A}(A - \infty)$ e quindi anche di $\mathcal{E}(A - \infty)$; per il teorema di HAHN-BANACH si può allora prolungare T ad una distribuzione a supporto compatto $\tilde{T} \in \mathcal{E}'(A - \infty)$.

Ora, se $M \subseteq A - \infty$ è il supporto di $\tilde{T}$ e $\varepsilon = d(M, \partial(A - \infty)) > 0$, si può facilmente costruire una funzione $\varrho(x)$ tale che:

i) $\varrho(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbf{R}^n)$

ii) $\varrho(x) = \varrho(y)$ se $|x| = |y|$

iii) $\varrho(x) = 0$ per $|x| \geq \varepsilon/4$

iv) $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^n} \varrho(x)\, dx = 1.$

Allora la funzione $\tau = \tilde{T} * \varrho \in \mathcal{C}_0^\infty(A - \infty)$ verifica la tesi : sia invero $\varphi \in \mathcal{A}(A)$ e $\bar{\varphi}$ una funzione di $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ coincidente con φ sull'insieme

$$\{x \in A - \infty : d(x, \partial(A - \infty)) \geq \varepsilon/3\}.$$

Per la proprietà della media $\bar{\varphi} * \varrho \equiv \varphi$ in un intorno di M. Ma allora si ha:

$$\langle \tilde{T} * \varrho, \varphi \rangle = \langle \tilde{T} * \varrho, \bar{\varphi} \rangle = \langle \tilde{T}, \bar{\varphi} * \varrho \rangle = \langle \tilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

DEFINIZIONE 2. « Sia A un sottoinsieme qualsiasi di $\tilde{\mathbf{R}}^n$. Considereremo assegnata sullo spazio $\mathscr{A}(A)$ la topologia limite induttivo degli $\mathscr{A}(\Omega)$, per Ω aperto $\supseteq A$:

$$\mathscr{A}(A) \simeq \varinjlim_{\Omega \in \mathcal{I}} \mathscr{A}(\Omega). \text{»}$$

OSSERVAZIONE 2. « Nel caso che A sia un aperto di $\tilde{\mathbf{R}}^n$ la Def. 2 assegna ad $\mathscr{A}(A)$ la stessa topologia della Def. 1 ».

OSSERVAZIONE 3. « Poichè la sottofamiglia $\mathcal{I}^* \subset \mathcal{I}$ degli aperti connessi con A (vedi nota (1) del § 1) è cofinale con la famiglia $\mathcal{I}$, si ha ancora:

$$\mathscr{A}(A) \simeq \varinjlim_{\Omega \in \mathcal{I}^*} \mathscr{A}(\Omega)$$

e questa volta, data la iniettività delle applicazioni di restrizione r_A^{Ω}, potremo scrivere $\mathscr{A}(\Omega) \subseteq \mathscr{A}(A)$ ».

OSSERVAZIONE 4. « Nel caso che A sia un chiuso di $\tilde{\mathbf{R}}^n$, detto

$$\Omega_n = \left\{ x : \tilde{d}(x, A) < \frac{1}{n} \right\} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

e $\bar{\mathscr{A}}(\Omega_n)$ lo spazio di BANACH delle funzioni armoniche su Ω_n e continue su $\bar{\Omega}_n$, con la norma $\operatorname*{Max}_{\bar{\Omega}_n} |u|$, si ha

$$\mathscr{A}(A) \simeq \varinjlim_{n} \bar{\mathscr{A}}(\Omega_n),$$

anche in senso topologico.

In tal modo si vede che $\mathscr{A}(A)$ è limite induttivo di spazi di BANACH Inoltre le applicazioni di restrizione

$$r_{\Omega_{n+1}}^{\Omega_n} : \bar{\mathscr{A}}(\Omega_n) \to \bar{\mathscr{A}}(\Omega_{n+1}),$$

dal momento che Ω_{n+1} è relativamente compatto in Ω_n, sono tutte completamente continue (HARNACK). »

OSSERVAZIONE 5. « Se A e B sono due insiemi qualsiasi di $\tilde{\mathbf{R}}^n$ e $A \supseteq B$, l'applicazione di restrizione

$$r_B^A : \mathscr{A}(A) \longrightarrow \mathscr{A}(B)$$

è continua ».

OSSERVAZIONE 6. « La topologia su $\mathscr{A}(A)$, dove A è un sottoinsieme qualsiasi di $\tilde{\mathbf{R}}^n$, è più fine di quella limite proiettivo degli $\{\mathscr{A}(K)\}_{K \in \mathscr{K}}$ ».

Basta invero verificare che le applicazioni

$$r_K^\Omega : \mathscr{A}(\Omega) \longrightarrow \mathscr{A}(K), \text{ per } \Omega \supseteq A \supseteq K,$$

sono continue.

Vedremo inoltre più avanti (§ 5) che le due topologie sono in realtà identiche.

§ 3. Proprietà topologiche di $\mathscr{A}(A)$.

Abbiamo richiamato che, nel caso che A sia aperto, $\mathscr{A}(A)$ è uno spazio di tipo $(\mathscr{F})$ e $(\mathscr{M})$. Nel caso A chiuso, si ha il

LEMMA 1. « *Sia A un chiuso di $\tilde{\mathbf{R}}^n$. Allora $\mathscr{A}(A)$ è uno spazio separato, bornologique e tonnelé (anzi di tipo $(\mathscr{LF})$), di tipo $(\mathscr{M})$ e completo (anzi di tipo $(\mathscr{DF})$). Inoltre:*

a) *un insieme $F \subseteq \mathscr{A}(A)$ è chiuso se e solo se per ogni aperto $\Omega \supseteq A$, connesso con A, $F \cap \mathscr{A}(\Omega)$ è chiuso in $\mathscr{A}(\Omega)$.*

b) *un insieme $L \subseteq \mathscr{A}(A)$ è limitato se e solo se esiste un aperto $\Omega \supseteq A$, connesso con A, tale che $L \subseteq \mathscr{A}(\Omega)$ ed è ivi limitato* ».

PROVA: Per l'Oss. 4 del § 2, $\mathscr{A}(A)$ è il limite induttivo di nna successione di spazi di BANACH con applicazioni di restrizione iniettive e completamente continue, quindi, da un lato esso verifica la proprietà (a) [17], Teor. I pag. 399) e in particolare è separato, d'altra parte ([8] Cor. 2 della Prop. 5, pag. 313) è uno spazio, oltre che di tipo $(\mathscr{LF})$, di tipo $(\mathscr{DF})$ ed $(\mathscr{M})$.

In quanto spazio $(\mathscr{LF})$ esso è allora bornologique e tonnelé (tali proprietà sono invero verificate per spazi $(\mathscr{F})$ e si conservano passando al limite induttivo), in quanto spazio $(\mathscr{DF})$ ed $(\mathscr{M})$, esso è completo (vedi [8], Corollario 2 della Prop. 4, pag. 311: gli spazi $(\mathscr{DF})$ riflessivi sono completi)

Infine la proprietà (b) è sempre valida per spazi $(\mathcal{LF})$ completi ([8], Corollario 2 del Teor. 1, pag. 270).

Per una diversa dimostrazione vedere [17].

Vedremo che la maggior parte di queste proprietà si conserva anche nel caso generale (A insieme qualsiasi).

PROPOSIZIONE 1. « *Sia A un sottoinsieme qualsiasi di* $\tilde{\mathbf{R}}^n$. *Allora* $\mathcal{A}(A)$ *è uno spazio separato, bornologique, tonnelé, di tipo* $(\mathcal{M})$ *e inoltre gode della proprietà :*

b) *un insieme* $L \subseteq \mathcal{A}(A)$ *è limitato se e solo se esiste un* $\Omega \supseteq A$, *connesso con* A, *tale che* $L \subseteq \mathcal{A}(\Omega)$ *ed è ivi limitato* ».

PROVA : $\mathcal{A}(A)$ è separato in quanto ha una topologia più fine di quella

$$\lim_{\substack{\longleftarrow \\ K \in \mathcal{K}}} \mathcal{A}(K) \qquad \text{(vedi Oss. 6 del § 2)}$$

e questa è separata, dato che ogni $\mathcal{A}(K)$ lo è.

$\mathcal{A}(A)$ è bornologique e tonnelé in quanto limite induttivo di spazi bornologique e tonnelé.

È poi subito visto che dalla (b) segue che $\mathcal{A}(A)$ è di tipo $(\mathcal{M})$; resta quindi da provare la proprietà (b).

Sia dunque L una parte limitata di $\mathcal{A}(A)$, si tratta di provare che tutte le $f \in L$ hanno una estensione ad un aperto comune $\Omega \supseteq A$, e che L è limitato in $\mathcal{A}(\Omega)$.

Ora, con un ragionamento del tutto analogo a quello fatto nella seconda parte della prova del Lemma 1, § 1, si vede che una tale proprietà basta verificarla localmente e quindi basta provare che, se $\{x_n\}$ è una successione di punti di A convergente ad un punto $x_0 \in A$, le funzioni $f \in L$ ammettono una estensione $\tilde{f}$ ad un intorno comune Ω di $K = \{x_0\} \bigcup_n \{x_n\}$ e che $\tilde{L} = \{\tilde{f}\}$ è limitato in $\mathcal{A}(\Omega)$. Ma poichè K è un compatto, la proprietà (b) è valida per $\mathcal{A}(K)$ (Lemma 1) e questo prova l'asserto.

COROLLARIO 1. « *$\mathcal{A}(A)$ è isomorfo (anche in senso topologico) ad* $\mathcal{A}''(A)$», [riflessività]

(Esso è infatti di tipo $(\mathcal{M})$ e tonnelé).

COROLLARIO 2. « $\mathcal{A}(A)$ *ed* $\mathcal{A}'(A)$ *hanno la topologia di* MACKEY » ($\mathcal{A}(A)$ è infatti bornologique (vedi [8], prop. 6, pag. 200). Dal Cor. 1 segue poi che anche $\mathcal{A}'(A)$ ha la top. di MACKEY).

COROLLARIO 3. « *Sia* $\{f_n\}$ *una successione di* $\mathcal{A}(A)$ *convergente ad* f. *Allora esiste un aperto* $\Omega \supseteq A$, *connesso con* A, *tale che*:

i) $f, f_n \in \mathcal{A}(\Omega)$

ii) $f_n \to f$ *in* $\mathcal{A}(\Omega)$ ».

PROVA: L'insieme $L = \{f\} \bigcup_n \{f_n\}$ è limitato in $\mathcal{A}(A)$ quindi (i) segue dalla Prop. 1, parte (b); poichè $\mathcal{A}(\Omega)$ è di tipo ($\mathcal{M}$), ogni sottosuccessione di $\{f_n\}$ ha una sottosuccessione convergente, il cui limite non può essere che f; ma allora $\{f_n\}$ stessa converge ad f in $\mathcal{A}(\Omega)$.

§ 4. Formula di dualità.

Sia $e(x - t)$ la soluzione fondamentale, relativa al punto $t \in \mathbf{R}^n$, dell'operatore Δ_x, infinitesima all'∞; precisamente

$$e(x - t) = -\frac{1}{\omega_n} \frac{1}{|x - t|^{n-2}}$$

dove ω_n è una certa costante.

Indicheremo $P_k(x, t)$ i polinomi, armonici nella t, che compaiono nello sviluppo in serie di LAURENT, relativo all'origine, di $e(x - t)$:

$$e(x - t) = \sum_{0}^{\infty}{}_k \frac{P_k(x, t)}{|x|^{n+2(k-1)}}.$$

Data una superficie orientata γ, unione di un numero finito di superfici chiuse e regolari a pezzi di $\mathbf{R}^n$, tra loro disgiunte, e date due funzioni u e v di classe $\mathcal{C}^1$ in un intorno di γ, porremo

$$G_\gamma(u, v) = \int_\gamma \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) d\gamma.$$

Così se Ω è un aperto limitato di $\mathbf{R}^n$ la cui frontiera $\partial\Omega$ è regolare a pezzi, e φ, ψ sono due funzioni di classe $\mathcal{C}^2$ in un intorno di $\overline{\Omega}$, si ha:

$$G_{\partial\Omega}(\varphi, \psi) = \langle \Delta\varphi, \psi \rangle_\Omega - \langle \psi, \Delta\varphi \rangle_\Omega$$

pur di assegnare a $\partial\Omega$ l'orientazione tale che la sua normale sia interna ad Ω.

Si può osservare che la formula precedente vale anche per Ω illimitato, purchè si facciano opportune ipotesi di decrescenza all'∞, snlle φ, ψ.

LEMMA 1. « *Sia A un sottoinsieme di $\widetilde{\mathbf{R}}^n$, sia u una funzione armonica su un aperto $\Omega_1 \supseteq \mathcal{A}$, v una funzione armonica su un aperto $\Omega_2 \supseteq \complement A$. Allora è possibile costruire una superficie γ, unione di un numero finito di superfici chiuse e regolari di $\mathbf{R}^n$, a due a due disgiunte, in modo che γ separi $\complement \Omega_1$ da $\complement \Omega_2$ (cioè in modo che γ sia la frontiera di un aperto $\Omega \subset \widetilde{\mathbf{R}}^n$ per cui $\Omega_2 \supset \overline{\Omega} \supset \Omega \supset \complement \Omega_1$)* ».

PROVA: È una classica costruzione.

Con le notazioni del Lemma I, diremo che γ separa le singolarità di u da quelle di v.

LEMMA 2. « *Sia $A \subset \widetilde{\mathbf{R}}^n$, $u \in \mathcal{A}(A)$, $v \in \mathcal{A}(\complement A)$. Allora se u_1 è una funzione rappresentatrice di u, v_1 una funzione rappresentatrice di v (vedi Oss. 1, § 1) e γ una superficie separante le singolarità di u_1 e v_1, orientata in modo che la sua normale sia esterna alle singolarità di v_1, il numero*

$$G_\gamma(u_1, v_1)$$

non dipende dalla scelta di u_1, v_1 e γ.
Tale numero si indicherà allora:

$$G_\gamma(u, v). \quad »$$

PROVA: i) Fissati u_1 e v_1, $G_\gamma(u_1, v_1)$ non dipende dalla scelta di γ. Infatti, sia γ' un'altra superficie separante le singolarità di u_1 e v_1; non è restrittivo supporre che γ' non intersechi γ (infatti ci si può ridurre ad una terza superficie γ'' che non interseca nè γ nè γ')

In tal caso si ha:

$$G_{\gamma'}(u_1, v_1) - G_\gamma(u_1, v_1) = G_{\gamma' \cup \gamma}(u_1, v_1) = \langle \Delta u_1, v_1 \rangle - \langle u_1, \Delta v_1 \rangle = 0,$$

dal momento che $\gamma' \cup \gamma$ è la frontiera di un aperto su cui u_1 e v_1 sono entrambe armoniche.

ii) Cambiando poi il rappresentante di u, sia questi u_2, si ha che u_1 ed u_2 coincidono in un intorno $\Omega \supseteq A$, ed allora basta scegliere, per la (i), γ tutta contenuta in Ω perchè si abbia:

$$G_\gamma(u_1, v_1) = G_\gamma(u_2, v_1).$$

La tesi è così provata.

TEOREMA 1 (di dualità)

« *Sia A un sottoinsieme di $\widetilde{\mathbf{R}}^n$, $T \in \mathcal{A}'(A)$. Allora.*

i) *Esiste una funzione u_T, armonica su $\complement A$, il cui sviluppo in serie di Taylor in un intorno del punto $x_0 \in \complement A$ è:*

$$(\alpha) \qquad u_T(x) = \Sigma_k \langle T_t, (D^k e)(x_0 - t) \rangle \frac{(x - x_0)^k}{k!}$$

e il cui sviluppo in serie di LAURENT *in un intorno di ∞ (se $\infty \in \complement A$) è:*

$$(\alpha') \qquad u_T(x) = \sum_0^\infty{}_r \langle T_t, P_r(x, t) \rangle \frac{1}{|x|^{n+2(r-1)}} .$$

ii) *L'applicazione*

$$\Psi_A : \mathcal{A}'(A) \longrightarrow \mathcal{A}(\complement A),$$

definita da $\Psi_A(T) = u_T$, è un isomorfismo tale che

$$\Psi_{\complement A} = {}^t\Psi_A .$$

iii) *Vale la formula:*

$$\langle T, \varphi \rangle = G_\gamma(u_T, \varphi), \qquad \forall \varphi \in \mathcal{A}(A) \text{»}.$$

PROVA : i)

a) Nel caso che A sia aperto, dato $T \in \mathcal{A}'(A)$, sia $\tau \in \mathcal{C}_0^\infty(A - \infty)$ una funzione tale che (Lemma 1, § 2):

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{A-\infty} \tau\varphi , \qquad \forall \varphi \in \mathcal{A}(A).$$

Allora (se $e(\xi)$ è la soluzione fondamentale di Δ_ξ relativa all'origine e nulla all'∞) la funzione $\tau * e \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ è tale che

$$\begin{cases} \Delta(\tau * e) = \tau \\ \lim\limits_{|x| \to \infty} (\tau * e)(x) = 0 . \end{cases}$$

In particolare $\tau * e$ è armonica al di fuori del supporto di τ, e quindi $\tau * e \in \mathcal{A}(\complement A)$.

Inoltre $\tau * e$ ha proprio lo sviluppo di TAYLOR (α) in un intorno del punto $x_0 \in \complement A - \infty$:

$$D^k(\tau * e)(x_0) = (\tau * D^k e)(x_0) = \int \tau(t)(D^k e)(x_0 - t)\, dt = \langle T_t, (D^k e)(x_0 - t) \rangle \ \forall k,$$

e lo sviluppo di LAURENT (α') in un intorno di ∞, se $\infty \in \complement A$.

Ciò prova (i) nel caso di A aperto.

b) Nel caso generale (A qualsiasi) non può ripetersi lo stesso ragionamento.

Assumiamo allora come definizione della u_T, in un intorno di $x_0 \in \complement A$, le serie formale (α) se $x_0 \neq \infty$, e la (α') se $x_0 = \infty$.

Perché in tal modo si possa dire di aver definito una funzione $u_T \in \mathcal{A}(\complement A)$ occorre verificare i due fatti seguenti:

I) Le serie (α) ed (α') convergono uniformemente, in un intorno di x_0, ad una funzione armonica $(u_T)_{x_0} \in \mathcal{A}(x_0)$.

II) Le funzioni $(u_T)_{x_0}$ per $x_0 \in \complement A$ sono estendibili ad una funzione comune $u_T \in \mathcal{A}(\complement A)$.

Per provare (I), fissato $x_0 \in \complement A$, e dato che $\tilde{\mathbf{R}}^n - x_0$ è connesso con A (quindi $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{R}}^n - x_0) \subseteq \mathcal{A}(A)$), restringiamo T ad un funzionale $\tilde{T} \in \mathcal{A}'(\tilde{\mathbf{R}}^n - x_0)$.

Ora $\tilde{\mathbf{R}}^n - x_0$ è aperto, quindi si può costruire, come in (a) una funzione $u_{\tilde{T}} \in \mathcal{A}(x_0)$ avente lo sviluppo (α) od (α') in x_0.

Provare (II) equivale a mostrare (vedi seconda parte della prova del Lemma 1 § 1) che, se $\{x_n\} \subseteq \complement A$ è una successione di punti convergente ad un $x_0 \in \complement A$, le funzioni

$$(u_T)_{x_n}, \qquad \forall\, n, \qquad \text{ed} \quad (u_T)_{x_0}$$

hanno una comune estensione armonica su $K = \{x_0\} \bigcup\limits_n \{x_n\}$.

Ora $\tilde{\mathbf{R}}^n - K$ è aperto connesso, quindi, detta $\tilde{T}$ la restrizione di T ad $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{R}}^n - K)$, la funzione $u_{\tilde{T}} \in \mathcal{A}(K)$, costruita con il procedimento (a), fornisce una comune estensione delle $(u_T)_{x_n}$ e della $(u_T)_{x_0}$.

ii) Proviamo che, se

$$\Psi_A : \mathcal{A}'(A) \longrightarrow \mathcal{A}(\complement A)$$

è l'applicazione definita da $\Psi_A(T) = u_T$, essa è lineare e biunivoca. È certamente lineare; per la biunivocità basterà costruire una applicazione inversa

$$\Phi_A : \mathcal{A}(\complement A) \longrightarrow \mathcal{A}'(A).$$

Definiamo Φ_A attraverso la formula:

$$\langle \Phi_A(v), u \rangle = G_\gamma(v, u), \qquad v \in \mathcal{A}(\complement A), u \in \mathcal{A}(A).$$

Ora si tratta di provare che $\Psi_A \circ \Phi_A = Id$, cioè che, se $v \in \mathcal{A}(\complement A)$, le due funzioni v e $\Psi_A \circ \Phi_A(v)$ coincidono in un intorno di $\complement A$, ovvero hanno le stesse derivate in ogni punto $x_0 \in \complement A$.

Ma $[D^k(\Psi_A \circ \Phi_A)(v)](x_0) = \langle \Phi_A(v), (D^k e)(x_0 - t) \rangle = G_\gamma(v(t), (D^k e)(x_0 - t))$, per la classica formula di Green, è proprio $(D^k v)(x_0)$.

Provare che $\Phi_A \circ \Psi_A = Id$ equivale a provare la validità della formula (iii):

$$G_\gamma(u_T, \varphi) = \langle T, \varphi \rangle \qquad \forall\, T \in \mathscr{A}'(A), \varphi \in \mathscr{A}(A).$$

Ora se φ è (rappresentabile da) una funzione armonica su un aperto $\Omega \supseteq A$, connesso con A, e se $\widetilde{T} \in \mathscr{A}'(\Omega)$ è la restrizione di T ad $\mathscr{A}(\Omega)$, si costruisca, come (i), una funzione $u_{\widetilde{T}}$ coincidente con u_T su un aperto $\Omega' \supseteq \complement\, \Omega$. Basta allora sciegliere γ (separante le singolarità di u_T e φ) in modo che $\gamma \subset \Omega' \cap \Omega$ per avere subito la (iii):

$$G_\gamma(u_T, \varphi) = G_\gamma(u_{\widetilde{T}}, \varphi) = \langle \Delta u_{\widetilde{T}}, \varphi \rangle - \langle u_{\widetilde{T}}, \Delta\varphi \rangle = \langle \widetilde{T}, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

Resta da provare che tale Ψ_A è un isomorfismo (topologico).

Poichè $\mathscr{A}(\complement\, A)$ ha la topologia di MACKEY, allora basterà provare che Ψ_A è un isomorfismo debole (Cor. 3 della Prop. 29, pag. 153, e Cor. 2 della Prop. 28 pag. 151. [8]). Ora dalla definizione di Φ_A risulta subito la formula

$$(1) \qquad \langle \Phi_A u, v \rangle = \langle u, \Phi_{\complement A} v \rangle = G_\gamma(u, v), \qquad \forall\, u \in \mathscr{A}(\complement\, A), v \in \mathscr{A}(A)$$

e da questa segue la formula

$$(2) \qquad \langle T, v \rangle = \langle \Psi_A T, \Phi_{\complement A} v \rangle, \qquad \forall\, T \in \mathscr{A}'(A),\ v \in \mathscr{A}(A).$$

Ma la (2) comporta subito che la Ψ_A «identifica» gli intorni deboli di $\mathscr{A}'(A)$ con gli intorni deboli di $\mathscr{A}(\complement\, A)$.

Dalla (3) segue anche che

$$\Psi_{\complement A} = {}^t\Psi_A.$$

OSSERVAZIONE 1. «Come ogni funzione $u \in \mathscr{A}(A)$ può estendersi a (o meglio rappresentarsi con) una funzione armonica su un aperto $\Omega \supseteq A$, così per il teorema di dualità, ogni funzionale $T \in \mathscr{A}'(A)$ può in un certo senso estendersi ad un funzionale su $\mathscr{A}(K)$, dove K è un certo compatto di A».

§ 5. Ulteriori proprietà topologiche di $\mathscr{A}(A)$.

Si è visto (Lemma 1, § 1) che vale l'isomorfismo algebrico

$$\mathscr{A}(A) \simeq \varprojlim_{K \in \mathscr{K}} \mathscr{A}(K),$$

proveremo in questo paragrafo che esso è anche un isomorfismo topologico.

Indicheremo $\mathcal{T}_i$ la topologia di $\mathcal{A}(A)$ come limite induttivo degli $\{\mathcal{A}(\Omega)\}_{\Omega \in \mathcal{F}}$, cioè quella finora considerata, e $\mathcal{T}_p$ la topologia limite proiettivo degli $\mathcal{A}(K)$; già sappiamo che

$$\mathcal{T}_i \geq \mathcal{T}_p \qquad \text{(Osservazione 6, § 2).}$$

LEMMA 1. « *La topologia $\mathcal{T}_p$ su $\mathcal{A}(A)$ è compatibile con la dualità*

$$(\mathcal{A}(A), \mathcal{A}'(A))\text{ ».}$$

PROVA: Ogni funzionale lineare su $\mathcal{A}(A)$ che sia continuo rispetto a $\mathcal{T}_p$ è certo continuo anche rispetto a $\mathcal{T}_i$. Sia viceversa $T \in \mathcal{A}'(A)$ un funzionale continuo rispetto a $\mathcal{T}_i$; allora, per l'Oss. 1 del § 4, esiste un compatto $K_0 \subseteq A$ tale che T si *estende* ad un $\tilde{T} \in \mathcal{A}'(K_0)$. Ma la topologia $\mathcal{T}_p$ rende continua l'applicazione

$$r^A_{K_0}: \quad (\mathcal{A}(A), \mathcal{T}_p) \longrightarrow \mathcal{A}(K_0)$$

quindi, anche, risulta continua la

$$T = \tilde{T} \circ r^A_{K_0}: \quad (\mathcal{A}(A), \mathcal{T}_p) \longrightarrow \mathbf{C}.$$

LEMMA 2. « *Le parti di $\mathcal{A}'(A)$ equicontinue rispetto a una delle due topologie (su $\mathcal{A}(A)$): $\mathcal{T}_i$ e $\mathcal{T}_p$, sono equicontinue anche rispetto all'altra* ».

PROVA: Certamente ogni parte equicontinua per $\mathcal{T}_p$ lo è anche per $\mathcal{T}_i$. Se viceversa $L \subseteq \mathcal{A}'(A)$ è una parte equicontinua rispetto a $\mathcal{T}_i$, essa è in particolare limitata in $\mathcal{A}'(A)$ (Prop. 4 pag. 193, [8]) e allora, passando (attraverso la Ψ_A) all'insieme $\Psi_A(L)$, per la Prop. 1, § 3, (b), si può trovare un compatto $K_0 \subseteq A$ tale che $L \subseteq \mathcal{A}'(K_0)$ ed è ivi limitata. Ma per spazi tonnelè, le parti limitate (anzi, le debolmente limitate: Prop. 5 pag. 194, [8]) del duale sono equicontinue, così L è equicontinua in $\mathcal{A}'(K_0)$ e quindi anche in $\mathcal{A}'(A)$ relativamente a $\mathcal{T}_p$.

TEOREMA 1. « *Le due topologie $\mathcal{T}_i$ e $\mathcal{T}_p$ coincidono* ».

PROVA: Basta osservare che la topologia di uno spazio localmente convesso coincide con la topologia della convergenza uniforme sulle parti equicontinue del suo duale (Cor. 3 della Prop. 18 pag. 117, [8]) e tener conto dei Lemmi 1 e 2.

COROLLARIO 1. « *$\mathcal{A}(A)$ è uno spazio di tipo ($\mathcal{S}$)* ».

PROVA: Per il Cor. 2 della Prop. 4, pag. 335 di [8], un limite proiettivo di spazi ($\mathcal{S}$) è di tipo ($\mathcal{S}$), d'altronde ogni $\mathcal{A}(K)$ è di tipo ($\mathcal{DF}$) ed ($\mathcal{M}$), quindi ($\mathcal{S}$).

COROLLARIO 2. « *$\mathcal{A}(A)$ è uno spazio completo* ».

PROVA: Per (10), § 19, pag. 235 di [10], un limite proiettivo di spazi completi è completo.

CAP. II — PROPRIETÀ ED APPLICAZIONI

§ 1. Teoremi di approssimazione.

Sia $A' \supseteq A$ e $r_A^{A'}$ la restrizione ad A delle funzioni armoniche su A'. È immediato verificare la:

PROPOSIZIONE 1. « *Se A' è connesso con A, $r_A^{A'}$ è iniettivo* ».
Premettiamo ora un lemma esprimente la canonicità degli isomorfismi

$$\Psi_A : \quad \mathcal{A}'(A) \rightarrow \mathcal{A}(\complement A).$$

LEMMA 1. « *Il diagramma seguente è commutativo*:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}'(A) & \xrightarrow[{}^t r_A^{A'}]{} & \mathcal{A}'(A') \\ \Psi_A \downarrow & & \downarrow \Psi_{A'} \\ \mathcal{A}(\complement A) & \xrightarrow[r_{\complement A'}^{\complement A}]{} & \mathcal{A}(\complement A') \end{array} \qquad (A' \supseteq A) \text{ »}$$

PROVA: discende dal teorema di dualità.

PROPOSIZIONE 2. « *$r_A^{A'}$ ha immagine densa, purchè $\complement A$ sia connesso con $\complement A'$* ».

PROVA: discende dal Lemma 1 e dalla Prop. 1.

Combinando le Proposizioni 1 e 2 si ha:

TEOREMA 1. « *Se A' è connesso con A e $\complement A$ è connesso con $\complement A'$, $\mathcal{A}(A')$ è un sottospazio denso di $\mathcal{A}(A)$* ».

Si può ora migliorare il Teor. 1 introducendo dei sottospazi di $\mathcal{A}(A')$ densi in $\mathcal{A}(A)$.

Dato $x_0 \in \tilde{\mathbf{R}}^n$, consideriamo il sottospazio lineare di $\mathcal{A}(\tilde{\mathbf{R}}^n - x_0)$ generato dalle funzioni:

$$(D^k e)(x - x_0), \qquad x_0 \neq \infty,$$

e dai polinomi armonici

$$P_k(x), \qquad x_0 = \infty.$$

Indicheremo tale spazio (detto: lo spazio delle funzioni armoniche con *singolarità polare* in x_0) $\mathcal{A}_p(\complement x_0)$.

Sia ora $A \subset \tilde{\mathbf{R}}^n$ ed $x_0 \in \complement A$, allora per la Prop. 1: $\mathcal{A}_p(\complement x_0) \subset \mathcal{A}(A)$. Possiamo quindi dare la:

DEFINIZIONE 1. « Si chiama spazio delle funzioni *armoniche polari* su A il sottospazio vettoriale di $\mathcal{A}(A)$ generato dagli

$$\{\mathcal{A}_p(\complement x_0)\} \quad \text{per} \quad x_0 \in \complement A.$$

Lo indicheremo: $\mathcal{A}_p(A)$ ».

TEOREMA 2. « *Sia* $B = \bigcup_{i \in I} B_i$, *dove i* B_i *sono insiemi connessi di* $\tilde{\mathbf{R}}^n$. *Scelto ad arbitrio per ogni* $i \in I$ *un punto* $x_i \in B_i$, *lo spazio vettoriale generato dagli* $\mathcal{A}_p(\complement x_i)$ *(cioè quello delle funzioni armoniche con sole singolarità polari nei punti* x_i*) è denso nello spazio delle funzioni armoniche su* $\complement B$ ».

PROVA: Per dimostrare il teorema, basta provare che ogni funzionale su $\mathcal{A}(\complement B)$ che sia nullo su ogni $\mathcal{A}_p(\complement x_i)$ è il funzionale nullo. Dalle formule (α) del teorema di dualità, ogni funzionale $T \in \mathcal{A}'(\complement B)$ nullo su tutte le funzioni del tipo $(D^k e)(x - x_i)$, se $x_i \neq \infty$, e sui polinomi armonici $P_k(x)$, se ∞ è uno degli x_i, ha una funzione rappresentatrice $u_T \in \mathcal{A}(B)$ nulla in un intorno di ogni x_i.

Ma allora $u_T \equiv 0$, per la analiticità di u_T, in un intorno di ogni B_i; e quindi $T = 0$.

COROLLARIO 1. « *Sia* $A' \supseteq A$. *Allora* $\mathcal{A}_p(A')$ *è denso in* $\mathcal{A}(A)$ *purchè* A' *sia connesso con* A *e* $\complement A$ *sia connesso con* $\complement A'$ ».

OSSERVAZIONE 1. « Se A è un insieme aperto, $\mathcal{A}(A)$ è uno spazio di FRÉCHET; quindi ogni densità in $\mathcal{A}(A)$ può intendersi per successioni ».

Lasciamo al lettore la cura di determinare altre condizioni che diano densità per successioni, sfruttando appunto la Osservazione 1.

COROLLARIO 2. « *Sia A un insieme aperto di $\mathbf{R}^n$. Condizione (necessaria) e sufficiente perchè i polinomi armonici $P_k(x)$ approssimino le funzioni armoniche su A è che $\complement A$ sia connesso* ».

Dato un punto $x_0 \neq \infty$, il funzionale corrispondente (attraverso la Φ_A del teorema di dualità) alla funzione $(D_k e)(x - x_0)$ è :

$$D^k \delta_{x_0} : \quad \varphi \longrightarrow (-1)^{|k|} (D^k \varphi)(x_0).$$

Vale allora il :

COROLLARIO 3. « *Se B è un insieme connesso di $\widetilde{\mathbf{R}}^n$ ed $y \in B - \infty$, ogni funzionale $T \in \mathcal{A}'(B)$ è approssimabile con funzionali del tipo :*

$$\sum_{|k| \leq m} \lambda_k (D^k \delta_y) \text{ ».}$$

OSSERVAZIONE 2. « Nel caso che B non sia connesso si otterranno approssimazioni di T scegliendo per ogni componente connessa di B un punto y ».

OSSERVAZIONE 3. « Se $B \ni \infty$, una approssimazione di T con funzionali aventi per « *sostegno* » il punto ∞ (anzichè y) si otterrà prendendo al posto dei

$$D^k \delta_y = \Phi_y [(D^k e)(t - y)]$$

i funzionali

$$T_k = \Phi_\infty (P_k)$$

dove i $\{P_k\}$ sono una base di polinomi armonici ».

Tenendo conto di questa osservazione, si possono trasportare al caso ∞ i teoremi che via via enunceremo nei casi al finito.

§ 2. Teorema di Mittag Leffler.

DEFINIZIONE 1. « Sia $\{K_m\}$ una successione di insiemi chiusi di $\widetilde{\mathbf{R}}^n$. Diciamo *insieme limite* dei K_m il chiuso di $\widetilde{\mathbf{R}}^n$:

$$K = \{x \in \widetilde{\mathbf{R}}^n : \min_m \lim \widetilde{d}(x, K_m) = 0\} = \{x \in \widetilde{\mathbf{R}}^n : x = \lim_k x_{n_k} \text{ per } x_{n_k} \in K_{n_k}\} \text{ ».}$$

LEMMA 1. « *Per ogni aperto $V \supset K$, esiste un indice $\nu = \nu(V)$ tale che :*

$$K_m \subset V \quad \text{per} \quad m \geq \nu \text{ ».}$$

PROVA: Se la tesi del Lemma fosse falsa, si potrebbe trovare una successione di punti $\{x_{n_k}\} \in K_{n_k} - V$ convergente a qualche punto x. Ma tale x dovrebbe allora appartenere a K e quindi anche a V, assurdo.

LEMMA 2. « $K \bigcup_m K_m = \overline{\bigcup_m K_m}$ ».

PROVA: è una facile verifica.

TEOREMA 1. « *Sia* $\{K_m\}$ *una successione di chiusi di* $\widetilde{\mathbf{R}}^n$, *tale che* $\overline{\bigcup_m K_m} \neq \widetilde{\mathbf{R}}^n$. *Sia* φ_m *una funzione armonica su* $\complement K_m$ (*per* $m = 1, 2, \ldots$). *Allora è possibile trovare una funzione* φ *tale che:*

i) φ *è armonica al di fuori di* $\overline{\bigcup_m K_m}$;

ii) $\varphi - \varphi_{m_0}$ *è prolungabile ad una funzione armonica su*

$$\complement\,(\overline{\bigcup_{m \neq m_0} K_m}), \qquad \forall\, m_0 .$$

iii) φ *è del tipo*:

$$\varphi = \sum_1^\infty{}_j\,(\vartheta_j - \varphi_j) \qquad \textit{dove} \quad \vartheta_j \in \mathcal{A}_p(\complement\, K). \text{ »}$$

PROVA: Ci si può anzitutto ricondurre al caso $\mathring{K}_m = \emptyset$, pur di estendere ogni φ_m a zero nell'interno di K_m.

Sia

$$H_m = \{x \in \widetilde{\mathbf{R}}^n : \widetilde{d}(x, K) < 2 \sup_{y \in K_m} \widetilde{d}(y, K)\},$$

allora, per m abbastanza grande, $H_m \neq \widetilde{\mathbf{R}}^n$.

Ma $H_m = \complement\,(\complement\, H_m)$ è connesso con $K = \complement\,(\complement\, K)$, quindi (Teor. 2 e Prop. 2, § 1) per ogni m si può trovare una funzione $\vartheta_m \in \mathcal{A}_p(\complement\, K)$ tale che:

$$\sup_{\complement H_m} |\vartheta_m - \varphi_m| < 1/2^m .$$

Allora la serie $\sum_1^\infty{}_j\,(\vartheta_j - \varphi_j)$ converge uniformemente al di fuori di $\overline{\bigcup_m K_m}$: infatti se $y \notin \overline{\bigcup_m K_m}$, esiste un intorno $W \ni y$ tale che:

$$\overline{W} \cap \overline{\bigcup_m K_m} = \emptyset,$$

e quindi $H_m \cap W = \emptyset$ per $m \geq \overline{m}$; ne segue che:

$$\sum_{\overline{m}}^{\infty}{}_j \| \vartheta_j - \varphi_j \|_W < \sum_{\overline{m}}^{\infty}{}_j \left(\frac{1}{2}\right)^j < \infty .$$

Quindi $\varphi = \sum_1^{\infty}{}_j (\vartheta_j - \varphi_j)$ è una funzione armonica fuori di $\overline{\bigcup_m K_m}$.

Resta infine da provare (ii):

$$\varphi - \varphi_{m_0} = \sum_1^{\infty}{}_j (\vartheta_j - \varphi_j) - \varphi_{m_0} = \sum_1^{m_0-1}{}_j (\vartheta_j - \varphi_j) + \vartheta_{m_0} + \sum_{m_0+1}^{\infty}{}_j (\vartheta_j - \varphi_j)$$

è una funzione estendibile a tutti i punti di

$$\tilde{\mathbf{R}}^n - \overline{\bigcup_{m \neq m_0} K_m} .$$

COROLLARIO 1. (MITTAG LEFFLER) « *Sia $\{x_m\}$ una successione di $\mathbf{R}^n$ convergente all'∞. Assegnata per ogni m una funzione armonica $\varphi_m \in \mathcal{A}(\complement x_m)$, esiste una successione $\{P_m(x)\}$ di polinomi armonici tale che la serie:*

$$\varphi(x) = \sum_1^{\infty}{}_j (P_j(x) - \varphi_j(x))$$

converge uniformemente al di fuori dell'insieme $\{\infty\} \bigcup_m \{x_m\}$; inoltre $\varphi - \varphi_m$ è prolungabile ad una funzione armonica anche su x_m ».

DEFINIZIONE 2. « Sia $T \in \mathcal{A}'(A)$. Diciamo che un insieme chiuso $K \subseteq A$ è un *sostegno* di T, se u_T è armonica su $\complement K$, cioè se:

$$T = {}^t r_K^A (T')$$

per qualche $T' \in \mathcal{A}'(K)$.

Se esiste un sostegno minimo, lo si dirà un *supporto* ».

DEFINIZIONE 3. « Diciamo che $T \in \mathcal{A}'(A)$ è *nullo* su un insieme $B \subset \tilde{\mathbf{R}}^n$ se esiste un sostegno K di T tale che: $B \cap K = \emptyset$ ».

La trasposizione del Teor. 1 in termini di funzionali, conduce al:

TEOREMA 2. « *Sia $\{K_m\}$ una successione di chiusi di $\tilde{\mathbf{R}}^n$, tale che*

$$\overline{\bigcup_m K_m} \neq \tilde{\mathbf{R}}^n$$

e sia T_m un funzionale di sostegno K_m $(m = 1, 2 \ldots)$.

Allora esiste un funzionale T di sostegno $B = \overline{\bigcup_m K_m}$ tale che:

i) ${}^t r^B_{K_{m_0}}(T_{m_0}) - T$ *ha come sostegno* $\overline{\bigcup_{m \neq m_0} K_m}$

ii) $$T = \sum_{1}^{\infty}{}_j \left[{}^t r^B_K(\Theta_j) - {}^t r^B_{K_j}(T_j)\right]$$

dove i Θ_j sono certi funzionali di sostegno K, del tipo di quelli del Cor. 3, § 1».

N. B. «Il Teorema 1 nel caso di un numero finito $K_1, K_2, \dots, K_\nu$ di chiusi, è ovvio: basta prendere

$$\varphi = \sum_{1}^{\nu}{}_j \varphi_j\,, \qquad K = \bigcap_{j=1}^{\nu} K_j \text{ »}.$$

§ 3. Teorema di decomposizione.

Premettiamo un noto teorema di spazi vettoriali topologici:

Teorema 1. « *Siano E ed F due spazi entrambi di* Frechét-Schwartz (($\mathcal{F}$), ($\mathcal{S}$)-*spazi*) *o duali di* Frechét-Schwartz ($\mathcal{D}$(($\mathcal{F}$), ($\mathcal{S}$))-*spazi*). Sia $u: E \longrightarrow F$ *un'applicazione lineare continua. Allora si hanno le condizioni equivalenti:*

i) *u è un isomorfismo su $u(E)$;*

ii) *${}^t u$ è surgettivo;*

iii) *u è iniettivo ed $u(E)$ è chiuso.*

Inoltre un sottospazio $E_1 \subset E$ è chiuso se e solo se è chiuso per successioni ».

Prova: vedi [7], [8], [10].

Richiamiamo il risultato seguente (vedi Capitolo I).

« Se A è un aperto di $\tilde{\mathbf{R}}^n$, $\mathcal{A}(A)$ è un ($\mathcal{F}$), ($\mathcal{S}$)-spazio.

Se A è un chiuso di $\tilde{\mathbf{R}}^n$, $\mathcal{A}(A)$ è un ($\mathcal{D}$(($\mathcal{F}$), ($\mathcal{S}$))-spazio ».

Teorema 2 (di decomposizione) « *Siano A_1 ed A_2 due insiemi entrambi chiusi o aperti di $\tilde{\mathbf{R}}^n$.*

Sia $A = A_1 \cup A_2$; sia $T \in \mathcal{A}'(A)$. Allora esistono due funzionali

$$T_1 \in \mathcal{A}'(A_1) \text{ e } T_2 \in \mathcal{A}'(A_2)$$

tali che:

$${}^t r^A_{A_1}(T_1) - {}^t r^A_{A_2}(T_2) = T \text{ »}.$$

PROVA : Si tratta di provare che l'applicazione:

$$\psi : \mathcal{A}'(A_1) \oplus \mathcal{A}'(A_2) \longrightarrow \mathcal{A}'(A)$$

definita da

$$\psi(T_1 \oplus T_2) = {}^t r^A_{A_1}(T_1) - {}^t r^A_{A_2}(T_2)$$

è surgettiva.
Ma ψ è l'applicazione trasposta della:

$$\Phi : \mathcal{A}(A) \longrightarrow \mathcal{A}(A_1) \oplus \mathcal{A}(A_2)$$

definita da:

$$\Phi(u) = r^A_{A_1}(u) - r^A_{A_2}(u),$$

e, dato che la somma diretta di due $(\mathcal{F})$, $(\mathcal{S})$-spazi è un $(\mathcal{F})$, $(\mathcal{S})$-spazio e la somma di due $(\mathcal{D}((\mathcal{F}), (\mathcal{S}))$-spazi è ancora un $(\mathcal{D}((\mathcal{F}), (\mathcal{S}))$-spazio (vedi ([8])), siamo nell'ipotesi del Teor. 1, e basta quindi provare che Φ è una applicazione iniettiva ed ha immagine chiusa per successioni.

Ora se $u \in \mathcal{A}(A)$ è tale che:

$r^A_{A_1}(u) = r^A_{A_2}(u) = 0$, si ha che u è nulla in un intorno di $A = A_1 \cup A_2$.
Qnanto al resto, se:

$$\begin{cases} r^A_{A_1}(u_n) \longrightarrow v_1 \in \mathcal{A}(A_1) \\ r^A_{A_2}(u_n) \longrightarrow v_2 \in \mathcal{A}(A_2) \end{cases}$$

si ha:

$$r^{A_1}_{A_1 \cap A_2}(v_1) = r^{A_2}_{A_1 \cap A_2}(v_2) = \lim_n r^A_{A_1 \cap A_2}(u_n)$$

quindi v_1 e v_2 si saldano in $A_1 \cap A_2$; e allora esiste una $v \in \mathcal{A}(A)$ tale che:

$$r^A_{A_1}(v) = v_1, \quad r^A_{A_2}(v) = v_2.$$

OSSERVAZIONE 1. « L'applicazione definita nella prova del Teor. 2.

$$\psi : (T_1 \oplus T_2) \longrightarrow T$$

è un omomorfismo ».

PROVA: Ogni applicazione surgettiva (lineare e continua) tra due spazi $(\mathcal{F})$, $(\mathcal{S})$ o $(\mathcal{D}((\mathcal{F}), (\mathcal{S}))$ è un omomorfismo (Teor. 1).

Passando attraverso le

$$\Psi_B : \mathcal{A}'(B) \longrightarrow \mathcal{A}(\complement B)$$

della formula di dualità, ψ induce un omomorfismo

$$\psi' : \mathscr{A}(\complement A_1) \oplus \mathscr{A}(\complement A_2) \longrightarrow \mathscr{A}(\complement A)$$

definito da:

$$\psi'(u \oplus v) = u_{|\complement A} - v_{|\complement A}.$$

Si vede allora che $u \oplus v \in Ker\,\psi'$ implica $u_{|\complement A} = v_{|\complement A}$, e quindi u e v si saldano su $\complement A_1 \cap \complement A_2$. Così si ha l'isomorfismo:

$$Ker\,\psi' \simeq \mathscr{A}(\complement A_1 \cup \complement A_2).$$

Data l'arbitrarietà di A_1 e A_2, si ha (modificando le notazioni) la

PROPOSIZIONE 1. «*Siano A_1 e A_2 due insiemi entrambi aperti o chiusi di $\tilde{\mathbf{R}}^n$. L'applicazione*

$$\psi' : \mathscr{A}(A_1) \oplus \mathscr{A}(A_2) \longrightarrow \mathscr{A}(A_1 \cap A_2)$$

definita da:

$$\psi'(u \oplus v) = u_{|A_1 \cap A_2} - v_{|A_1 \cap A_2},$$

è un omomorfismo surgettivo, il cui nucleo è tale che:

$$Ker\,\psi' \simeq \mathscr{A}(A_1 \cup A_2)\text{»}.$$

COROLLARIO 1. «*Siano K_1 e K_2 due insiemi entrambi chiusi o aperti tali che: $K_1 \cup K_2 = \tilde{\mathbf{R}}^n$ Allora si ha l'isomorfismo:*

$$\mathscr{A}(K_1) \oplus \mathscr{A}(K_2) \simeq \mathscr{A}(K_1 \cap K_2)\text{»}.$$

In particolare, se γ è una superficie chiusa, e K_1, K_2 sono la chiusura delle due parti in cui γ divide $\tilde{\mathbf{R}}^n$:

$$\mathscr{A}(K_1) \oplus \mathscr{A}(K_2) \simeq \mathscr{A}(\gamma).$$

Sia la Prop. 1 che il Cor. 1 danno luogo a due altre affermazioni, per dualità:

PROPOSIZIONE 2. «*L'applicazione ψ definita nella prova del Teor. 2 è un omomorfismo il cui nucleo è isomorfo a $\mathscr{A}'(A_1 \cap A_2)$*».

COROLLARIO 2. «*Se K_1 e K_2 souo due insiemi entrambi chiusi o aperti tali che $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, si ha l'isomorfismo*

$$\mathscr{A}'(K_1) \oplus \mathscr{A}'(K_2) \simeq \mathscr{A}'(K_1 \cup K_2)\text{»}.$$

CAP. III. — FUNZIONALI ANALITICI

§ 1. Funzionali armonici simmetrici.

Nel corso di questo paragrafo supporremo $n \geq 2$. Si considererà qui, inoltre, $\mathbf{R}^n$ come sottoinsieme di $\widetilde{\mathbf{R}}^{n+1}$; il generico punto di $\mathbf{R}^{n+1}$ si indicherà con: (x, t), dove

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n .$$

DEFINIZIONE 1. « Un insieme A di $\widetilde{\mathbf{R}}^{n+1}$ si dice *simmetrico* rispetto ad $\mathbf{R}^n$, se:

$$(x, t) \in A \text{ implica } (x, -t) \in A \text{ ».}$$

Indicheremo con

$$B(a; \varrho) = \{b \in \mathbf{R}^{n+1} : |b - a| < \varrho\}, \text{ per } a \in \mathbf{R}^{n+1},$$

$$B(\infty; \varrho) = \{b \in \mathbf{R}^{n+1} : |b| > \varrho\} \cup \{\infty\}$$

LEMMA 1. « *Sia A un insieme simmetrico di $\widetilde{\mathbf{R}}^{n+1}$, ed Ω un aperto contenente A. Allora esiste un aperto simmetrico Ω' tate che $\Omega \supseteq \Omega' \supseteq A$* ».

PROVA: Per ogni punto $(x, t) \in A$, si può trovare un $\varrho = \varrho(x, t) > 0$ tale che i due intorni sferici $B((x, t); \varrho)$ e $B((x, -t); \varrho)$ siano entrambi contenuti in Ω. L'aperto:

$$\Omega' = \bigcup_{(x,t) \in A} B((x, t); \varrho)$$

è simmetrico e:

$$\Omega \supseteq \Omega' \supseteq A.$$

Indicheremo con $\mathcal{J}_s = \mathcal{J}_s(A)$ la famiglia semiordinata degli aperti simmetrici contenenti A. $\mathcal{J}_s$ è cofinale con $\mathcal{J}$.

LEMMA 2. « *Sia A un insieme simmetrico di $\widetilde{\mathbf{R}}^{n+1}$, e K un compatto di A. Allora esiste un compatto simmetrico di A, K', tale che: $K \subseteq K' \subseteq A$* ».

PROVA: Consideriamo l'insieme $K_s = \{(x, -t) : (x, t) \in K\}$.
Allora $K' = K \cup K_s$ verifica la tesi.

Indicheremo con $\mathcal{K}_s = \mathcal{K}_s(A)$ la famiglia semiordinata dei compatti simmetrici di A. $\mathcal{K}_s$ è cofinale con $\mathcal{K}$.

DEFINIZIONE 2. « Sia A un insieme simmetrico di $\tilde{\mathbf{R}}^{n+1}$. Una funzione $u \in \mathcal{A}(A)$ si dirà *simmetrica* (risp. *antisimmetrica*) se esiste un aperto simmetrico $\Omega \supseteq A$ su cui u è simmetrica, i. e.:

$$u(x, t) = u(x, -t)$$

(risp. antisimmetrica, i. e.: $u(x, t) = -u(x, -t)$).

TEOREMA 1. « *Sia A un insieme simmetrico di $\tilde{\mathbf{R}}^{n+1}$. Sia $\mathcal{A}_s(A)$ lo spazio delle funzioni armoniche simmetriche su A, ed $\mathcal{A}_a(A)$ lo spazio delle funzioni armoniche antisimmetriche. Allora si ha la decomposizione in somma diretta algebrica e topologica:*

$$\mathcal{A}(A) \simeq \mathcal{A}_s(A) \oplus \mathcal{A}_a(A) \text{ ».}$$

PROVA: Definiamo su $\mathcal{A}(A)$ i due proiettori

$$p_s, p_a : \mathcal{A}(A) \to \mathcal{A}(A)$$

nel modo seguente:

$$p_s(u) = \frac{1}{2}[u(x, t) + u(x, -t)]$$

$$p_a(u) = \frac{1}{2}[u(x, t) - u(x, -t)].$$

Allora è facile verificare che:

$$p_s^2 = p_s, \; p_a^2 = p_a; \quad p_s + p_a = Id, \; p_s p_a = p_a p_s = 0.$$

Infine p_s e p_a sono continui: se $\{u_n\}$ è una successione convergente a zero in $\mathcal{A}(A)$ (Cor. 3, § 3 Cap. I) allora $\{u_n\}$ converge uniformemente a zero su ogni compatto di qualche aperto simmetrico $\Omega \supseteq A$; ma in tal caso anche $\{u_n(x, -t)\}$ converge uniformemente a zero sui compatti di Ω e quindi:

$$p_s(u_n) \to 0; \quad p_a(u_n) \to 0.$$

Poichè infine

$$\mathfrak{Im}\,(p_s) = \mathscr{A}_s\,(A), \quad \mathfrak{Im}\,(p_a) = \mathscr{A}_a\,(A),$$

si ha la tesi.

Si indicherà, conformemente al risultato del teorema, con $\mathscr{A}_s\,(A)$ ($\mathscr{A}_a\,(A)$) lo spazio delle funzioni armoniche simmetriche (antisimmetriche) con la topologia indotta da $\mathscr{A}\,(A)$.

LEMMA 3. « *Valgono gli isomorfismi seguenti*:

$$\mathscr{A}_s\,(A) \simeq \varinjlim_{\Omega \in \mathcal{J}_s} \mathscr{A}_s\,(\Omega) \simeq \varprojlim_{K \in \mathscr{K}_s} \mathscr{A}_s\,(K)$$

e analogamente per le antisimmetriche ».

PROVA : i) Sia $j : \mathscr{A}_s\,(A) \longrightarrow \varinjlim_{\Omega \in \mathcal{J}_s} \mathscr{A}_s\,(\Omega)$ l'isomorfismo algebrico ovviamente definito; si tratta di provare che j e j^{-1} sono continui. Poichè $\mathscr{A}_s\,(A)$ è bornologique, in quanto quoziente di uno spazio bornologique per un sottospazio chiuso, basta provare che j è continuo per successioni. Ora se $\{u_n\} \in \mathscr{A}_s\,(A)$ è una successione che converge a zero, esiste un $\Omega \in \mathcal{J}_s$ tale che $\{u_n\} \longrightarrow 0$ in $\mathscr{A}_s\,(\Omega)$ e quindi $\{u_n\} \longrightarrow 0$ anche in

$$\varinjlim_{\Omega \in \mathcal{J}_s} \mathscr{A}_s\,(\Omega).$$

Viceversa, basta provare che j^{-1} è continuo su ogni $\mathscr{A}_s\,(\Omega)$, $\Omega \in \mathcal{J}_s$, e ciò è ovvio.

ii) Si ha anche qui un ovvio isomorfismo algebrico:

$$\mathscr{A}_s\,(A) \simeq \varprojlim_{K \in \mathscr{K}_s} \mathscr{A}_s\,(K).$$

Quanto alle topologie, si noti che poichè, se $\mathscr{A}_s\,(K)$ ha la topologia indotta da $\mathscr{A}\,(K)$,

$$\varprojlim_{K \in \mathscr{K}_s} \mathscr{A}_s(K)$$

ha la topologia indotta dal sovraspazio

$$\varprojlim_{K \in \mathscr{K}_s} \mathscr{A}\,(K)$$

che è proprio la topologia di $\mathscr{A}\,(A)$.

Proveremo ora che dal punto di vista della dualità, il comportamento dei funzionali simmetrici e antisimmetrici è lo stesso di quello dei funzionali armonici.

Dalla decomposizione in somma diretta si hanno gli isomorfismi (algebrici e topologici).

$$\mathcal{A}'_s(A) \simeq (\mathcal{A}_a(A))^0 ; \quad \mathcal{A}'_a(A) \simeq (\mathcal{A}_s(A))^0 ; \quad \mathcal{A}'(A) \simeq \mathcal{A}'_s(A) \oplus \mathcal{A}'_a(A).$$

Diremo che $T \in \mathcal{A}'(A)$ è un *fnnzionale simmetrico* se $T \in \mathcal{A}'_s(A)$, o, che è lo stesso, se T si annulla sulle funzioni armoniche antisimmetriche.

T si dirà *antisimmetrico* se appartiene a $\mathcal{A}'_a(A)$, cioè se si annulla sulle funzioni simmetriche.

Lemma 4. « *Sia A un insieme simmetrico di $\widetilde{\mathbf{R}}^{n+1}$ e T un funzionale simmetrico (risp. antisimmetrico) su A. Allora la funzione u_T (corrispondente a T attraverso l'isomorfismo Ψ_A del teorema di dualità) è una funzione simmetrica (risp. antisimmetrica)* ».

Prova: Sia T simmetrico. Basterà mostrare che la funzione:

$$u_T(x, t) - u_T(x, -t)$$

è nulla con tutte le derivate in ogni punto $(x, t) \in \complement A$. Ma:

$$D^k [u_T(x, t) - u_T(x, -t)] = \langle T_\xi , (D^k e)((x, t) - \xi) - (D^k e)((x, -t) - \xi) \rangle = 0$$

in quanto la funzione:

$$\psi(\xi) = (D^k e)((x, t) - \xi) - (D^k e)((x, -t) - \xi)$$

è antisimmetrica su A, e T si annulla sulle funzioni antisimmetriche.

Analoga prova nel caso che $T \in \mathcal{A}'_a(A)$.

Teorema 2. « *Esiste un isomorfismo canonico:*

$$\mathcal{A}'_s(A) \simeq \mathcal{A}_s(\complement A) \qquad (\text{ed} \quad \mathcal{A}'_a(A) \simeq \mathcal{A}_a(\complement A)) ».$$

Prova: L'isomorfismo

$$\Psi_A : \mathcal{A}'(A) \to \mathcal{A}(\complement A)$$

è tale che (Lemma 4):

$$\Psi_A(\mathcal{A}'_s(A)) \subseteq \mathcal{A}_s(\complement A) ; \quad \Psi_A(\mathcal{A}'_a(A)) \subseteq \mathcal{A}_a(\complement A).$$

Ma è pure facile verificare che

$$u \in \mathcal{A}_s(\complement A) \qquad \text{implica} \qquad \Psi_A^{-1}(u) \in \mathcal{A}'_s(A)$$

e così per le antisimmetriche.

N. B. « Se $T \in \mathcal{A}'_s(A)$, allora T si può pensare appartenente ad $\mathcal{A}'(A)$ e quindi ha senso l'espressione $\langle T, \varphi \rangle$ anche per $\varphi \in \mathcal{A}(A)$.

Del resto $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, p_s \varphi \rangle$.

Il teorema 2 ci assicura quindi l'esistenza delle formule di dualità per i funzionali armonici simmetrici e antisimmetrici. È poi facile vedere che gli spazi $\mathcal{A}_s(A)$ ed $\mathcal{A}_a(A)$ conservano tutte le proprietà topologiche dimostrate per lo spazio $\mathcal{A}(A)$ nel corso del Capitolo I (ricordiamo che $\mathcal{A}_s(A)$ è al tempo stesso un sottospazio chiuso e un quoziente di $\mathcal{A}(A)$) ».

Infine con ovvie modifiche tutta la teoria svolta nel Capitolo II per gli spazi $\mathcal{A}(A)$ si trasporta agli spazi $\mathcal{A}_s(A)$ e $\mathcal{A}_a(A)$.

§ 2. Funzionali analitici: definizione.

In tutto ciò che segue, considereremo sempre insiemi $A \subseteq \mathbf{R}^n \subset \widetilde{\mathbf{R}}^{n+1}$.

DEFINIZIONE 1. « Sia Ω un aperto di $\mathbf{R}^n$. Diciamo che una funzione $u : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ è *analitica* su Ω, se per ogni punto $x \in \Omega$ esiste un intorno $V \ni x$ su cui u è sviluppabile in serie di TAYLOR ».

Sia A un insieme di $\mathbf{R}^n$. Consideriamo sull'insieme delle coppie : $\{u, \Omega\}$, dove Ω è un aperto di $\mathbf{R}^n$ contenente A, ed u una funzione analitica su Ω, la relazione di equivalenza :

$$(u, \Omega_1) \sim (v, \Omega_2)$$

se e solo se esiste un aperto Ω tale che

$$A \subseteq \Omega \subseteq \Omega_1 \cap \Omega_2 \,, \quad u_{|\Omega} = v_{|\Omega} \,.$$

DEFINIZIONE 2. « L'insieme quoziente rispetto a tale relazione d'equivalenza si dirà insieme delle funzioni *analitiche* (*locali*) su A. Sarà indicato con $\mathcal{Q}(A)$ ».

OSSERVAZIONE 1. « $\mathcal{Q}(A)$ è un'algebra ».

Vogliamo ora dare una topologia ad $\mathcal{A}(A)$, ricorrendo alle funzioni olomorfe (per $n = 1$) ed armoniche (nel caso $n \geq 2$).

Caso 1 ($n = 1$). Tenendo conto del fatto che esiste un ovvio isomorfismo algebrico dello spazio delle funzioni analitiche su A sullo spazio delle funzioni olomorfe su A (in quanto sottoinsieme del piano proiettivo), si può dare ad $\mathcal{A}(A)$ la topologia di questo secondo spazio. Per lo studio di $\mathcal{A}(A)$ nel caso $n = 1$ vedi ad esempio [6] e [9].

Caso 2 ($n \geq 2$). Premettiamo il seguente lemma che ci sarà utile nel seguito:

Lemma 1. « *Sia u una funzione analitica reale sul cubo chiuso*

$$V_{2\alpha}(x_0) = \{x \in \mathbf{R}^n : \| x - x_0 \| \leq 2\alpha\}$$

(*ove* $\| x - x_0 \| = \sup | x_i - x_{0i} |$),
avente un unico sviluppo in serie di potenze, di modo che:

$$\| u \|_{2\alpha, x_0} = \Sigma_k \, | D^k u(x_0) | \, \frac{(2\alpha)^{|k|}}{k!} < \infty.$$

Sia $\tilde{u}(x, t)$ *la serie formale*

$$\sum_0^\infty {}_r \, (-1)^r \Delta^r u(x) \frac{t^{2r}}{(2r)!} .$$

Allora si ha:

i) $\tilde{u}(x, t)$ *è analitica in* $B_\alpha(x_0) = \left\{(x, t) : \| x - x_0 \| < \alpha, \; | t | < \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}}\right\}$
con un unico sviluppo in serie di potenze e continua su $\overline{B_\alpha(x_0)}$.

ii) $\sup\limits_{B_\alpha(x_0)} | \tilde{u}(x, t) | \leq 2^n (n + 1) \| u \|_{2\alpha, x_0}$ ».

Prova: Indichiamo con $u(z)$ il prolungamento olomorfo di $u(x)$ in

$$W_{2\alpha}(x_0) = \{z \in \mathbf{C}^n : \| z - x_0 \| \leq 2\alpha\}.$$

Si ha

$$\sup_{W_{2\alpha}(x_0)} | u(z) | \leq \Sigma_k \, | D^k u(x_0) | \, \frac{(2\alpha)^{|k|}}{k!} = \| u \|_{2\alpha, x_0} .$$

Ne derivano le seguenti diseguaglianze (formula di CAUCHY)

$$\sup_{W_\alpha(x_0)} |D^k u(z)| \leq 2^n \sup_{W_{2\alpha}(x_0)} |u(z)| \frac{k!}{\alpha^{|k|}} \leq 2^n \frac{k!}{\alpha^{|k|}} \|u\|_{2\alpha, x_0}.$$

Sia ora

$$\sum_0^\infty {}_r (-1)^r \Delta^r u(x) \frac{t^{2r}}{(2r)!}$$

la serie data.

Sviluppando e passando al campo complesso si ha

$$\sum_0^\infty {}_r \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k!} \left| \frac{\partial^{2r} u(z)}{\partial z_1^{2k_1} \dots \partial z_n^{2k_n}} \right| \frac{|z_{n+1}|^{2r}}{(2r)!} \leq$$

$$\leq 2^n \sum_0^\infty {}_r \sum_{|k|=r} \frac{r!}{k!} \frac{(2k_1)! \dots (2k_n)!}{\alpha^{2r} \cdot (2r)!} \cdot \|u\|_{2\alpha, x_0} \cdot \frac{\alpha^{2r}}{(\sqrt{n+1})^{2r}} \leq$$

$$\leq 2^n (n+1) \|u\|_{2\alpha, x_0} < \infty$$

purchè sia

$$\|z - x_0\| \leq \alpha, \quad |z_{n+1}| \leq \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}}.$$

(Si noti che $k! \leq |k|!$) Questo dimostra (teor. di WEIERSTRASS) che la $\tilde{u}(z, z_{n+1})$ è olomorfa, e quindi la sua traccia su $B_{\alpha}(x_0)$, che è la funzione $\tilde{u}(x, t)$, è analitica.

Per dimostrare (ii), basta osservare che:

$$\sup_{B_\alpha(x_0)} |u(x, t)| \leq \sup \left\{ |\tilde{u}(z, z_{n+1})| ;\ z \in W_\alpha(x_0),\ |z_{n+1}| \leq \frac{\alpha}{\sqrt{n+1}} \right\} \leq$$

$$\leq \|u\|_{2\alpha, x_0} \cdot 2^n (n+1).$$

TEOREMA 1. « *Sia A un aperto di $\mathbf{R}^n$, sia u una funzione analitica su A. Allora si può trovare un'unica funzione armonica simmetrica $\tilde{u}(x, t)$ su un intorno simmetrico (aperto in $\tilde{\mathbf{R}}^{n+1}$) di A, che estenda la u, i. e.:*

$$\tilde{u}(x, 0) = u(x) \qquad \forall\, x \in A \text{ ».}$$

PROVA : Si tratta di risolvere il seguente problema (equivalente ad un problema di CAUCHY) « Trovare una funzione $\tilde{u}(x, t)$ definita su un aperto

Ω di $\mathbf{R}^{n+1}$, contenente A, tale che

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0 & \text{su} \quad \Omega \\ \tilde{u}(x, 0) = u(x) & \text{per} \quad x \in A \\ \tilde{u}(x, t) = \tilde{u}(x, -t). \end{cases}$$

Ogni soluzione $\tilde{u}$ del sistema (1), in quanto analitica in un intorno di A, deve essere della forma (per ogni punto $x_0 \in A$):

$$\tilde{u}(x, t) = \sum_0^\infty {}_r\, a_r(x_0 ; x) \cdot \frac{t^r}{r!}, \quad \text{per} \quad \| x - x_0 \| < \varrho(x_0), \ | t | < \varrho(x_0).$$

Calcoliamo le funzioni $a_r(x_0 ; x)$.

Dalla condizione di simmetria si ha che

$$a_r(x_0 ; x) = 0$$

per r dispari. La seconda condizione di (1) ci dà inoltre:

$$u(x) = \tilde{u}(x, 0) = a_0(x_0 ; x)$$

e la prima:

$$0 = \Delta \tilde{u}(x, t) = \Delta_x \tilde{u}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{u}(x, t) = \sum_0^\infty {}_r [\Delta_x a_r + a_{r+2}] \frac{t^r}{r!}.$$

Si hanno così le identità:

$$a_{r+2}(x_0 ; x) = - \Delta_x (a_r(x_0 ; x)),$$

per $r = 0$ si ha: $a_2(x_0 ; x) = - \Delta u(x)$

per $r = 2$ si ha: $a_4(x_0 ; x) = \Delta^2 u(x)$

. . . .

per $r = 2p - 2$ si ha: $a_{2p}(x_0 ; x) = (-1)^p \Delta^p u(x)$.

Quindi, se esiste una soluzione $\tilde{u}$ di (1) essa è necessariamente del tipo:

$$(2) \qquad \tilde{u}(x, t) = \sum_0^\infty {}_r (-1)^r \Delta^r u(x) \frac{t^{2r}}{(2r)!}.$$

Ma il Lemma 1 ci assicura che, se $\varrho(x_0)$ è un numero tale che u ha uno sviluppo in serie di TAYLOR nel cubo

$$V_{2\varrho}(x_0) = \{x \in \mathbf{R}^n : \| x - x_0 \| \leq 2\varrho(x_0)\}, \quad \forall\, x_0 \in A,$$

la funzione $\tilde{u}$ è ben definita da (2) ed è analitica nell'intorno di A:

$$\bigcup_{x_0 \in A} \left[V_\varrho(x_0) \times \left\{ t \in \mathbf{R} : |t| < \frac{\varrho(x_0)}{\sqrt{n+1}} \right\} \right].$$

COROLLARIO 1. « *Vale l'isomorfismo algebrico:* $\mathcal{C}(A) \simeq \mathcal{A}_s(A)$ ».

PROVA: Se A è aperto, l'asserzione segue subito dal Teor. 1. Nel caso di A qualsiasi, basta passare al limite induttivo.

DEFINIZIONE 3. « Diremo, d'ora in poi, *spazio delle funzioni analitiche reali* su A lo spazio $\mathcal{C}(A)$ con la topologia di $\mathcal{A}_s(A)$. »

Ci proponiamo ora di definire su $\mathcal{C}(A)$, nel caso che A sia un compatto di $\mathbf{R}^n$, una topologia *intrinseca*.

Sia dunque A un compatto di $\mathbf{R}^n$ e $\mathcal{C}_r(A)$ il sottospazio di $\mathcal{C}(A)$ costituito dalle funzioni u la cui serie di TAYLOR relativa al punto $x \in A$ converge nel cubo chiuso di $\mathbf{R}^n$:

$$V_{2r}(x) = \{y \in \mathbf{R}^n : \| x - y \| \leq 2r\}.$$

Si può verificare che:

1) $r'' > r'$ implica $\mathcal{C}_{r'}(A) \supseteq \mathcal{C}_{r''}(A)$

2) Vale l'isomorfismo algebrico:

$$\mathcal{C}(A) \simeq \varinjlim_{1/r} \mathcal{C}_r(A) \simeq \varinjlim_{n} \mathcal{C}_{1/n}(A)$$

3) È possibile dare ad $\mathcal{C}_r(A)$ la norma

$$\| u \|_r = \operatorname*{Sup}_{x \in A} \left[\Sigma_k \, | D^k u(x) | \, \frac{r^k}{k!} \right]$$

anzi, vale la diseguaglianza $\| u \|_r \leq 2^{2n} \operatorname*{Sup}_{z \in \Gamma_{2r}} |f(z)|$ dove $f(z)$ è l'estensione olomorfa di $u(x)$ e

$$\Gamma_{2r} = \bigcup_{x \in A} \{z \in \mathbf{C}^n : \| z - x \| \leq 2r\}.$$

4) Gli omomorfismi iniettivi:

$$j_{r'}^{r''} : \mathcal{O}_{r''}(A) \longrightarrow \mathcal{O}_{r'}(A)$$

sono completamente continui.

(1 e 2 sono di facile verifica, 3 e 4 discendono dalla formula di CAUCHY e dalle proprietà di normalità di MONTEL) Allora se diamo ad $\mathcal{O}(A)$ la topologia $\lim\limits_{\overrightarrow{n}} \mathcal{O}_{1/n}(A)$, esso viene ad essere uno spazio di tipo $(\mathcal{LF})$ (anzi: [17] limite induttivo di spazi di BANACH con applicazioni di restrizione iniettive e completamente continue).

TEOREMA 2 « *Sia A un insieme compatto di* $\mathbf{R}^n$. *Allora la topologia, su* $\mathcal{O}(A)$, $\lim\limits_{\overrightarrow{1/r}} \mathcal{O}_r(A)$ *è la stessa di quella introdotta nella Definizione* 3 ».

PROVA: Poichè entrambe le topologie sono di tipo $(\mathcal{LF})$, si può applicare il teorema del grafico chiuso ([8] pag. 271).

Basterà quindi dimostrare che le due topologie sono confrontabili. Ma le iniezioni

$$j_r : \mathcal{O}_r(A) \longrightarrow \mathcal{A}_s(A)$$

sono continue. Infatti:

i) $\mathfrak{J}\mathrm{m}\,(j_r) \subseteq \mathcal{A}_s(\Omega)$ per un certo aperto Ω tale che $\tilde{\mathbf{R}}^{n+1} \supset \Omega \supseteq A$

ii) $\| j_r(u) \|_K \leq M \| u \|_r$ per ogni compatto $K \subset \Omega$ (Lemma 1, (*ii*)).

Questo prova il teorema.

Poniamo a questo punto la seguente definizione (dove A è un qualunque insieme di $\mathbf{R}^n$).

DEFINIZIONE 4. « Gli elementi di $\mathcal{O}'(A)$ si dicono *funzionali analitici reali* su A ».

§ 3. Proprietà.

Vogliamo ora riassumere le principali conseguenze dell'applicazione della teoria fino ad ora svolta al caso particolare dei funzionali analitici su A qualsiasi. Le dimostrazioni sono immediate, tenuto conto dei Capitoli I e II, e del paragrafo 1 Capitolo III.

TEOREMA 1. « *Sia $\mathcal{O}(A)$ lo spazio delle funzioni analitiche reali su A. La topologia introdotta su $\mathcal{O}(A)$ (Def. 3, § 2) è localmente convessa, separata, completa, di tipo bornologique, tonnelé e di tipo* $(\mathcal{S})$ ed $(\mathcal{M})$

a) *Un insieme* $L \subseteq \mathcal{A}(A)$ *è limitato se e soltanto se tutte le* $f \in L$ *ammettono un prolungamento armonico simmetrico comune su un aperto* $\Omega \supseteq A$ *di* $\tilde{\mathbf{R}}^{n+1}$, *e sono ivi uniformemente limitate sui compatti.*

b) *Una successione* $\{u_n\}$ *in* $\mathcal{A}(A)$ *converge se e solo se gli* $\{u_n\}$ *hanno un prolungamento armonico simmetrico ad un aperto comune di* $\tilde{\mathbf{R}}^{n+1}$ *ed ivi convergono uniformemente sui compatti.*

c) *La topologia di* $\mathcal{A}(A)$ *coincide con la topologia limite proiettivo* $\{\mathcal{A}(K)\}$ *per* K *compatto* $\subseteq A$ ».

Dalla proprietà (c) e dai Teor. 1 e 2 si ottengono altri criteri di limitatezza e convergenza in funzione della topologia *intrinseca.* Infatti un insieme è limitato nella topologia limite proiettivo se e solo se è limitato in ogni $\mathcal{A}(K)$ e quindi se:

$$\exists\, r = r(K) : \operatorname*{Sup}_{f \in L} \left[\operatorname*{Sup}_{K} \Sigma_k \,|\, D^k f \,|\, \frac{r^{|k|}}{k!} \right] < \infty , \qquad \forall\, K \subseteq A .$$

Una successione $\{u_n\}$ converge a zero se e solo se convergono a zero tutte le $\{r_K^A(u_n)\}$, cioè se:

$$\exists\, r = r(K) : \operatorname*{Sup}_{K} \left[\Sigma_k \,|\, D^k u_n \,|\, \frac{r^{|k|}}{k!} \right] \xrightarrow{n} 0 \qquad \forall\, K \subseteq A .$$

TEOREMA 2 (di dualità). « *Esiste una corrispondenza biunivoca e bicontinua fra* $\mathcal{A}'(A)$ *ed* $\mathcal{A}_s(\complement A)$ (¹). *La corrispondenza è data dall'applicazione*

$$\Psi_A : \mathcal{A}'(A) \longrightarrow \mathcal{A}_s(\complement A)$$

definita nel modo seguente:

se (x, t) *è un punto interno di* $\complement A$, *diverso da* ∞, *e* $T \in \mathcal{A}'(A)$:

$$u_T(x, t) = \Psi_A(T)(x, t) = \left\langle \dot{T}_\xi , -\frac{1}{\omega_n} \frac{1}{\left[\sum_1^n {}_i (x_i - \xi_i)^2 + t^2 \right]^{\frac{n-1}{2}}} \right\rangle .$$

Si ottiene poi $\Psi_A(T)$ *su un intorno di* $\complement A$, *per continuità.*

Uno sviluppo all'infinito è:

$$u_T(x, t) = \Sigma_k (D_x^k e)(x, t) \langle T_\xi , \xi^k \rangle \frac{1}{k!} .$$

(¹) In tutto ciò che seguirà $\complement A$ indicherà il complementare di A in $\tilde{\mathbf{R}}^{n+1}$.

Vale inoltre la formula

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\gamma} \left(\frac{\partial u_T}{\partial n} \tilde{\varphi} - \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial n} u_T \right) d\gamma$$

ove $\tilde{\varphi}$ *è l'estensione armonica simmetrica di* φ (vedi Teor. 1 § 2) *e* γ *è un opportuna superficie orientata che separa le singolarità di* u_T *da quelle di* $\tilde{\varphi}$ ».

Nel caso dei funzionali analitici si può anche parlare di *supporto* (cioè di sostegno minimo). Si osserva infatti che prolungando per continuità la funzione rappresentatrice si ottiene un prolungamento massimo, e quindi un sostegno minimo per il funzionale. Si ha quindi:

Osservazione 1. « Ogni funzionale analitico su A ammette un supporto compatto ».

La formula di dualità fornisce alcune proprietà sui funzionali che sono facilmente ricavabili. Ricordiamo solo che: una successione $\{T_n\}$ di funzionali analitici converge a T_0 se e solo se esiste un sostegno comune K e se $T_n \to T_0$ in $\mathcal{A}'(K)$.

I teoremi del Cap. II si semplificano, poichè nel caso di sotto-insiemi di $\mathbf{R}^n$, alcune delle ipotesi che intervengono in quei teoremi sono automaticamente verificate.

Teorema 3. « *Siano* A *e* B *due sottoinsiemi qualsiasi di* $\mathbf{R}^n$ *con* $A \subseteq B$. *Condizione sufficiente perchè* $\mathcal{A}(B)$ *sia denso in* $\mathcal{A}(A)$ *è che* B *sia connesso con* A ».

(Infatti $\complement A$ è sempre connesso con $\complement B$, dato che $\complement A$ è connesso).

In particolare:

Corollario 1. (Teorema di Weierstrass) « *Sia* A *un aperto di* $\mathbf{R}^n$. *Ogni funzione analitica su* A *può essere approssimata da una successione di polinomi* ».

I teoremi di densità non sono in generale validi per successioni, però sotto ipotesi molto larghe lo diventano.

Si vede che l'insieme dei funzionali analitici del tipo

$$\sum_{|k| \leq m_y} \lambda_k D^k \delta_y , \qquad \text{per} \quad y \in A,$$

è denso in $\mathcal{A}'(A)$.

Se poi $A = \{x_0\}$, si ha che tutti e soli i funzionali analitici a supporto in $\{x_0\}$ sono della forma $\Sigma_h P_h$, dove

$$P_h = \sum_{|k| \leq m_h} \lambda_k D^k \delta_{x_0} .$$

TEOREMA 4. « *Sia K_m una successione di chiusi di $\mathbf{R}^n$ tale che $\overline{\bigcup_m K_m} \subset \mathbf{R}^n$ (la chiusura si intende fatta in $\widetilde{\mathbf{R}}^{n+1}$) e siano $\{T_m\}$ dei funzionali di sostegno K_m ($m = 1, 2, \ldots$). Allora esiste un funzionale analitico T di sostegno $B = \overline{\bigcup_m K_m}$ tale che :*

i) ${}^t r^B_{K_0} (T_{m_0}) - T$ *ha sostegno* $\overline{\bigcup_{m \neq m_0} K_m}$, $\forall\, m_0$

ii) $T = \sum_{1}^{\infty}{}_j \, [{}^t r^B_K (\Theta_j) - {}^t r^B_{K_j} (T_j)]$

dove i Θ_j sono certi funzionali analitici aventi sostegno l'insieme K limite dei $\{K_m\}$ (vedi Cap. II, § 2), e del tipo $\sum_i \sum_{|k| \leq m_i} \lambda_k D^k \delta_{y_i}$, $y_i \in K$».

Si osservi che nel caso di $\overline{\bigcup_m K_m} \ni \infty$, il teorema è falso in generale.

TEOREMA 5 (decomposizione). « *Siano A_1 e A_2 due insiemi chiusi e limitati di $\mathbf{R}^n$; sia $A = A_1 \cup A_2$; Se $T \in \mathcal{A}'(A)$, esistono due funzionali*

$$T_1 \in \mathcal{A}'(A_1) \quad \text{e} \quad T_2 \in \mathcal{A}'(A_2)$$

tali che

$$ {}^t r^A_{A_1} (T_1) - {}^t r^A_{A_2} (T_2) = T .$$

L'applicazione che alla coppia (T_1, T_2) fa corrispondere T è un omomorfismo il cui nucleo è $\mathcal{A}'(A_1 \cap A_2)$ ».

Università di Pisa

BIBLIOGRAFIA

[1] N. BOURBAKI, « *Eléments de mathématique* », Livre V, Espaces vectoriels topologiques. Act. Sci. et Ind Nr. 1189, 1229, (1953, 1955).

[2] L. FANTAPPIÉ, « *La giustificazione del calcolo simbolico e le sue applicazioni all'integrazione delle equazioni a derivate parziali* » Mem. R. Accad. Italia. Cl. Sci Fis. Mat. Nat. Vol. I Matematica. n. 2 (1930).

[3] L. FANTAPPIÉ, « *Risoluzione in termini finiti del problema di Cauchy, con dati iniziali su una ipersuperficie qualunque.* » Atti Accad. Italia Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (7) 2, 948-956, (1941).

[4] L. FANTAPPIÉ, « *Nuovi fondamenti della teoria dei funzionali analitici* » Atti Accad. Italia Nem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. 12, 617-706, (1942).

[5] L. FANTAPPIÉ, « *Les nouvelles méthodes d'integration, en termes finis, des équations aux dérivées partielles.* » Second colloque sur les équations aux dérivées partielles. Bruxelles 1954, 95-128.

[6] A. GROTHENDIECK, « *Sur certains espaces de functions holomorphes* » I, II. J. reine angew. Math. 192, 35-64, 77-95, (1953).

[7] A. GROTHENDIECK, « *Sur les espaces* $(\mathcal{F})$ *et* $(\mathcal{D}\mathcal{F})$, Summa Brasil. Math. 3, 57-123 (1954).

[8] A. GROTHENDIECK, « *Espaces vectoriels topologiques* » Publicação da Societade de Matematica de S. Paulo. 2ª Edizione (1958).

[9] G. KÖTHE, « *Dualität in der Funktionen-theorie.* » J. reine angew. Math. 191, 30-49,. (1953).

[10] G. KÖTHE, « *Topologische Lineare Raüme* » Springer-Verlag, (1960).

[11] J. LERAY, « *La solution unitaire d'un opérateur différentiel linéaire.* Bull. Soc. Math. France. 86, 75-96, (1958).

[12] J. LERAY, « *Le calcul différentiel et intégral sur une varieté analitique complexe.* » Bull Soc. Math. France. 87, 81-180, (1959).

[13] A. MARTINEAU, « *Sur les fonctionelles analytiques et la trasformation de Fourier-Borel.* » J. Analyse Math. 11, 1-164, (1963).

[14] A. MARTINEAU, « *Indicatrices des fonctions analytiques et inversion de la trasformation de Fourier-Borel par la trasformation de Laplace.* » C. R. Acad. Sci. Paris 225, 2888-2890, (1962).

[15] L. SCHWARTZ, « *Theorie des distributions.* » Act. Sci. et Ind. Nr. 1091, 1092 (1950-51).

[16] J. SEBASTIÃO E SILVA, « *As funçoes analitícas e a análise functional.* » Port. Math. 9, 1-130, (1950).

[17] J. SEBASTIÃO E SILVA, « *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni.* » Rend. Mat. Roma, V. ser. 14, 388-410, (1955).

[18] J. SEBASTIÃO E SILVA, « *Sur le calcul symbolique d'operateurs permutables à spectres vide ou non borné* ». Ann. di Mat. pura e appl. serie IV LVIII 219-275 (1962).

[19] C. L. da SILVA DIAS, « *Espaços vectoriais topológicos e sua applicaçao nos espaços funcionais analitícos.* « Bol. Soc. Mat. São Paulo 5, 1-58 (1950).

[20] H. G. TILLMANN, « *Dualität in der Potentialtheorie* » Port. Math. 13, 55-86, (1954).