

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

DENISE HUET

Perturbations singulières relatives au problème de Dirichlet dans un demi-espace

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 18,
n° 4 (1964), p. 425-448

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_4_425_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PERTURBATIONS SINGULIÈRES RELATIVES AU PROBLÈME DE DIRICHLET DANS UN DEMI-ESPACE

DENISE HUET

INTRODUCTION

Le but de ce travail est de donner une démonstration du théorème 3.1, annoncé dans D. HUET [7].

On se place dans le demi-espace R_+^n , et on considère un opérateur elliptique B , d'ordre $2m'$ et une famille d'opérateurs $B_\varepsilon = \varepsilon A + B$, pour $\varepsilon \in]0, 1]$, elliptiques d'ordre $2m$ ($m > m'$). On étudie la convergence, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, de la solution d'un problème de DIRICHLET non homogène, relatif à l'opérateur B_ε , vers la solution d'un problème de DIRICHLET relatif à B , en utilisant les espaces $T^{k,r}(R_+^n)$, de LIONS-MAGÉNÈS [13], PEETRE [14] et HÖRMANDER [5].

§ 1. Espaces $T^{k,r}(R_+^n)$ et problème de DIRICHLET.

1. Soit R^n l'espace euclidien réel à n dimensions. On désigne par R_+^n le sous-espace de R^n formé des points $x = (x_1, \dots, x_n)$ qui vérifient $x_n > 0$. On pose $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$ et on appelle π l'hyperplan $x_n = 0$.

Soit $\mathcal{S}'_x$ [resp. $\mathcal{S}'_{x'}$] l'espace des distributions tempérées⁽¹⁾ sur R^n [resp. π]. On désigne par $\mathcal{F}$ [resp. $\mathcal{F}_{x'}$] la transformation de FOURIER en x [resp. en x'] isomorphisme de $\mathcal{S}'_x$ [resp. $\mathcal{S}'_{x'}$] sur $\mathcal{S}'_\xi$ [resp. $\mathcal{S}'_{\xi'}$], où $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ est la variable duale de x et $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ la variable duale de x' . On désigne par $\mathcal{F}^{-1}$ [resp. $\mathcal{F}_{\xi'}^{-1}$] l'isomorphisme inverse de $\mathcal{F}_x$ [resp. $\mathcal{F}_{x'}$].

Pervenuto alla Redazione il 3 Aprile 1964.

(¹) Voir SCHWARTZ [16].

Soit Ω un ouvert de R^n ; $L^2(\Omega)$ est l'espace hilbertien des classes de fonctions complexes, de carré sommable sur Ω , muni de la norme

$$(1.1.1) \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour k réel quelconque, $H^k(R^n)^{(2)}$ est l'espace des $u \in \mathcal{S}'_x$ tels que

$$[1 + |\xi|^2]^{\frac{k}{2}} \mathcal{F}u \in L^2(R^n)$$

muni de la norme

$$(1.1.2) \quad \|u\|_{H^k(R^n)} = \|[1 + |\xi|^2]^{\frac{k}{2}} \mathcal{F}u\|_{L^2(R^n)}.$$

Pour k entier ≥ 0 , on désigne par $H^k(R_+^n)$ l'espace de HILBERT des distributions u sur R_+^n telles que $(3) D^p u \in L^2(R_+^n)$ pour $|p| \leq k$, muni de la norme

$$(1.1.3) \quad \|u\|_{H^k(R_+^n)} = (\sum \|D^p u\|_{L^2(R_+^n)}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On appelle $H_0^k(R_+^n)$ l'adhérence dans $H^k(R_+^n)$ de l'espace $\mathcal{D}(R_+^n)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans R_+^n , et par $H^{-k}(R_+^n)$ le dual fort de $H_0^k(R_+^n)$.

2. Soient k un entier quelconque et r un nombre réel quelconque. La transformation $\mathcal{G}^r = \mathcal{F}_i^{-1} (1 + |\xi'|^2)^{\frac{r}{2}} \mathcal{F}x'$ est un isomorphisme de $\mathcal{S}'_{x'}$ sur lui-même. On appelle $T^{k,r}(R_+^n)^{(4)}$, l'espace hilbertien des distributions u sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans $\mathcal{S}'_{x'}^{(5)}$ telles que $\mathcal{G}^r u = (I \otimes \mathcal{G}^r) u \in H^k(R_+^n)$, muni de

⁽²⁾ Voir en ce qui concerne ces espaces, SOBOLEV [21], [22], SCHWARTZ [17], [18], [19].

⁽³⁾ Suivant les notations habituelles $p = (p_1, \dots, p_n)$ où les p_i sont des entiers ≥ 0 , $|p| = p_1 + \dots + p_n$. Si $p = (0, \dots, 0)$, $D^p u = u$, si $|p| > 0$, $D^p u = \frac{\partial^{|p|} u}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}$.

⁽⁴⁾ Ces espaces ont été introduits dans LIONS-MAGÉNÈS [13]. Voir aussi PEETRE [14] et [15] et HÖRMANDER [5]. Nous renvoyons à [13] pour les démonstrations des propriétés de ces espaces énoncées dans le § 1.

⁽⁵⁾ Pour les distributions à valeurs vectorielles, voir SCHWARTZ [20]. L'espace utilisé ici est $\mathcal{D}'[0, +\infty; \mathcal{S}'_{x'}] = \mathcal{D}'(0, +\infty) \hat{\otimes} \mathcal{S}'_{x'}$.

la norme

$$(1.2.1) \quad \|u\|_{T^{k,r}(R_+^n)} = \|\mathcal{G}^r u\|_{H^k(R_+^n)}.$$

Pour r entier ≥ 0 , $T^{k,r}(R_+^n)$ est identifiable à l'espace des distributions u sur R_+^n telles que $D_x^p u \in H^k(R_+^n)$ pour $|p| \leq r$ la norme (1.2.1) étant alors équivalente à la norme :

$$(1.2.2) \quad \|u\|_{T^{k,r}(R_+^n)} = \left(\sum_{|p| \leq r} \|D_x^p u\|_{H^k(R_+^n)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Notons que l'on a :

$$(1.2.3) \quad T^{k,r}(R_+^n) \subset T^{k',r'}(R_+^n) \quad \text{pour } k \geq k' \\ r \geq r' \text{ (}^6\text{)}.$$

D'autre part, si on désigne par $\mathcal{B}(\overline{R_+^n})$ l'espace des fonctions complexes indéfiniment différentiables et bornées ainsi que chacune de leurs dérivées sur l'adhérence $\overline{R_+^n}$ de R_+^n , on a la

PROPOSITION 1.1 : Le produit αu d'une fonction de $\mathcal{B}(\overline{R_+^n})$ par une distribution $u \in T^{k,r}(R_+^n)$, k entier, r réel, est dans $T^{k,r}(R_+^n)$ et l'application $u \rightarrow \alpha u$ est linéaire et continue.

Pour k entier ≥ 0 , r réel quelconque, on désigne par $T_0^{k,r}(R_+^n)$ l'adhérence dans $T^{k,r}(R_+^n)$ de l'espace $\mathcal{D}(R_+^n)$. Cet espace $T_0^{k,r}(R_+^n)$ coïncide alors avec le sous-espace de $T^{k,r}(R_+^n)$ formé des u pour lesquels $\mathcal{G}^r u \in H_0^k(R_+^n)$. Si r est entier ≥ 0 , $T_0^{k,r}(R_+^n)$ est aussi $T^{k,r}(R_+^n) \cap H_0^k(R_+^n)$. Enfin on a la

PROPOSITION 1.2 : Pour k entier ≥ 0 , et r réel, le dual de $T_0^{k,r}(R_+^n)$ coïncide avec l'espace $T^{-k,-r}(R_+^n)$.

Soient k entier ≥ 1 , r réel. Pour $u \in T^{k,r}(R_+^n)$, on peut alors définir la trace sur π , $\gamma_j u$ de $\frac{\partial^j u}{\partial x_j^j}$ pour $j = 0, 1, \dots, k-1$. Posons $\vec{\gamma} u = (\gamma_0 u, \dots, \gamma_{k-1} u)$.

On a alors la

(⁶) E et F étant deux espaces vectoriels topologiques, $E \subset F$ signifie que E est contenu dans F et possède une topologie plus fine que la topologie induite par F .

PROPOSITION 1.3 : Pour k entier ≥ 1 , r réel, l'application $u \rightarrow \vec{\gamma u}$ est linéaire et continue de $T^{k,r}(R_+^n)$ sur $\prod_{j=0}^{k-1} H^{k+r-j-\frac{1}{2}}(\pi)$.⁽⁷⁾

3. On peut encore, pour r entier ≥ 0 , θ réel avec $0 < \theta < 1$, caractériser d'une autre manière l'espace $T^{k,r+1-\theta}(R_+^n)$ en utilisant les résultats de LIONS [9].⁽⁸⁾

Considérons un espace de BANACH E , de norme $\|\cdot\|$. Soient, dans E , ν opérateurs $A_1, \dots, A_\nu$, fermés, non bornés; le domaine $D(A_i)$ de A_i , pour $i = 1, \dots, \nu$, étant dense dans E et muni de la norme

$$(1.3.1) \quad \|e\|_{D(A_i)} = \|e\| + \|A_i e\|.$$

On fait les hypothèses suivantes :

(S.G.) Pour $i = 1, \dots, \nu$, A_i est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $t \rightarrow G_i(t)$ fortement continu et borné.

(C) Quels que soient i, j ($1 \leq i \leq \nu$, $1 \leq j \leq \nu$) et s, t ($s \geq 0$, $t \geq 0$), on a

$$(1.3.2) \quad G_i(s) G_j(t) = G_j(t) G_i(s).$$

Il en résulte que $G_j(t)$ applique $D(A_i)$ dans lui-même et que

$$(1.3.3) \quad A_i G_j(t) e = G_j(t) A_i e \quad \text{pour tout } e \in D(A_i).$$

Soit θ compris entre 0 et 1; posons $\alpha = \theta - \frac{1}{2}$. Désignons par $W(2, \alpha; A_1, \dots, A_\nu)$ l'espace de BANACH des fonctions u vérifiant :

$$(1.3.4) \quad t^\alpha u \in L^2(0, +\infty; D(A_i)) \quad i = 1, \dots, \nu$$

$$(1.3.5) \quad t^\alpha \frac{du}{dt} \in L^2(0, +\infty; E)$$

$\left(\frac{du}{dt}\right)$ est la dérivée de u dans l'espace $\mathcal{D}'(0, +\infty; E)$

muni de la norme

$$(1.3.6) \quad \left(\int_0^\infty t^{2\alpha} \left\{ \|u(t)\|^2 + \sum_{i=1}^\nu \|A_i u(t)\|^2 + \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 \right\} dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

⁽⁷⁾ π étant isomorphe à R^{n-1} , pour s réel quelconque, $H^s(\pi)$ est isomorphe à $H^s(R^{n-1})$.

⁽⁸⁾ Il existe d'autres procédés de construction d'espaces « intermédiaires ». Voir CALDERON [1], LIONS [10], [11], [12].

Désignons par $E(2, \alpha; A_1, \dots, A_r)$ l'espace de BANACH des $e \in E$ tels que

$$(1.3.7) \quad t^{\alpha-1} [G_i(t) e - e] \in L^2(0, +\infty; E) \quad i = 1, \dots, r$$

muni de la norme

$$(1.3.8) \quad \|e\| + \sum_{i=1}^r \left(\int_0^\infty t^{2(\alpha-1)} \|G_i(t) e - e\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si l'on désigne par $D(A)$ l'espace de BANACH des $e \in E$ tels que $e \in D(A_i)$ pour $i = 1, \dots, r$, muni de la norme

$$(1.3.9) \quad \|e\| + \sum_{i=1}^r \|A_i e\|$$

on a

$$(1.3.10) \quad D(A) \subset E(2, \alpha; A_1, \dots, A_r) \subset E.$$

L'application $u \rightarrow u(0)$ est alors continue de $W(2, \alpha; A_1, \dots, A_r)$ sur $E(p, \alpha; A_1, \dots, A_r)$.

Prenons $E = T^{k,r}(R_+^n)$ r entier ≥ 0 . Soit $A_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n-1$, le générateur infinitésimal du semi-groupe $t \rightarrow G_i(t)$ avec

$$(1.3.11) \quad G_i(t)f = f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

L'espace $D(A)$ est alors $T^{k,r+1}(R_+^n)$ et on a⁽⁹⁾

PROPOSITION 1.4: Les espaces $T^{k,r+1-\theta}(R_+^n)$ et $E(2, \alpha; A_1, \dots, A_{n-1})$ sont identifiables algébriquement et topologiquement.

4. Considérons l'opérateur différentiel linéaire d'ordre $2m$

$$(1.4.1) \quad A = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq} D^q).$$

On suppose que les coefficients $a_{pq}(x)$ sont des restrictions à R_+^n de fonctions de $\mathcal{B}(R_+^n)$. On associe à A la forme sesqui-linéaire

$$(1.4.2) \quad a(u, v) = \int_{R_+^n} \sum_{|p|, |q| \leq m} a_{pq} D^q u \overline{D^p v} dx.$$

(9) Voir par exemple LIONS [11] p. 1.11 et 1.12.

On dira que A est $H_0^m(R_+^n)$ elliptique s'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$(1.4.3) \quad \operatorname{Re} [a(u, u)] \geq c \|u\|_{H^m(R_+^n)}^2 \quad \text{pour tout } u \in H_0^m(R_+^n).$$

On notera encore A^* l'opérateur adjoint formel de A . C'est l'opérateur, qui, appliqué à u s'écrit

$$(1.4.4) \quad A^*u = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p [\overline{a_{pq}} D^q u].$$

A A^* est associée la forme sesqui-linéaire

$$(1.4.5) \quad a^*(u, v) = \overline{a(v, u)}.$$

On a alors le théorème suivant, dû à LIONS MAGÉNÈS [13]:

THÉOREME 1.1: Soit A l'opérateur différentiel défini par (1.4.1), dont les coefficients sont des restrictions à R_+^n de fonctions de $\mathcal{B}(\overline{R_+^n})$. Si A est $H_0^m(R_+^n)$ -elliptique, alors A [resp. (A, γ)] est un isomorphisme de $T_0^{m, r}(R_+^n)$ [resp. $T^{m, r}(R_+^n) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m+r-j-\frac{1}{2}}(\pi)$] sur $T^{-m, r}(R_+^n)$, pour r réel quelconque. Pour r entier ≥ 0 , on peut améliorer le théorème 1.1, en faisant des hypothèses un peu plus restrictives sur l'opérateur A . On dira que A satisfait à l'hypothèse H_0 si les conditions suivantes sont satisfaites:

1) A est uniformément fortement elliptique dans R_+^n , i. e.

$$(1.4.6) \quad \operatorname{Re} \sum_{|p|, |q| = m} a_{pq}(x) \xi^{p+q} \geq c |\xi|^{2m}$$

pour tout $x \in R_+^n$ et tout vecteur ξ réel ⁽¹⁰⁾.

2) Les coefficients $a_{pq}(x)$, $|p|, |q| \leq m$ possèdent une limite finie quand $|x| \rightarrow \infty$.

3) Le coefficient a_{00} du terme en u est suffisamment grand.

D'après les travaux de GÄRDING, si A vérifie l'hypothèse H_0 , alors A est $H_0^m(R_+^n)$ -elliptique. On a le

THÉOREME 1.2: Soit A l'opérateur différentiel défini par (1.4.1) dont les coefficients sont restrictions à R_+^n de fonctions de $\mathcal{B}(\overline{R_+^n})$. Si A satisfait

⁽¹⁰⁾ $\xi^{p+q} = \xi_1^{p_1+q_1} \dots \xi_n^{p_n+q_n}$.

à l'hypothèse H_0 , et si k et r sont deux entiers ≥ 0 , alors A est un isomorphisme de $T^{k+m, r}(R_+^n) \cap H_0^m(R_+^n)$ sur $T^{-m+k, r}(R_+^n)$ ⁽¹¹⁾.

§ 2. Perturbations singulières pour le problème de DIRICHLET homogène.

1. On considère maintenant les 2 opérateurs différentiels

$$(2.1.1) \quad A = \sum_{|p|, |q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p [a_{pq}(x) D^q]$$

et

$$(2.1.2) \quad B = \sum_{|p|, |q| \leq m'} (-1)^{|p|} D^p [b_{pq}(x) D^q]$$

sur lesquels on fait les hypothèses suivantes :

H_1 : les coefficients $a_{pq}(|p|, |q| \leq m)$ et $b_{pq}(|p|, |q| \leq m')$ sont des restrictions à R_+^n de fonctions de $\mathcal{B}(R_+^n)$.

H_2 : $m > m'$.

H_3 : B est $H_0^{m'}(R_+^n)$ -elliptique.

On pose, pour $\varepsilon \in I =]0, 1[$

$$(2.1.3) \quad B_\varepsilon = \varepsilon A + B$$

et on fait l'hypothèse

H_4 : pour $\varepsilon \in I$, B_ε est $H_0^m(R_+^n)$ -elliptique.

Si les hypothèses H_1 à H_4 sont vérifiées, d'après le théorème 1.1, B_ε est, pour $\varepsilon \in I$, un isomorphisme de $T_0^{m, r}(R_+^n)$ sur $T^{-m, r}(R_+^n)$, tandis que B est un isomorphisme de $T_0^{m', r}(R_+^n)$ sur $T^{-m', r}(R_+^n)$.

On a alors le :

LEMME 2.1 : Soit B_ε l'opérateur défini par (2.1.3) où A et B sont définis respectivement par (2.1.1) et (2.1.2). On suppose que les hypothèses H_1 à H_4 sont vérifiées. Soit r un entier ≥ 0 . Soient $f^\varepsilon \in T^{-m, r}(R_+^n)$,

⁽¹¹⁾ Si E_1 et E_2 sont deux espaces de HILBERT contenus dans un même espace vectoriel topologique F , la norme dans $E_1 \cap E_2$ est définie par

$$\|e\|_{E_1 \cap E_2} = \left(\sum_{i=1}^2 \|e\|_{E_i}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$h_\varepsilon \in T^{-m',r}(R_+^n)$, $\varepsilon \in I$. Soit u_ε l'élément de $T_0^{m,r}(R_+^n)$ qui vérifie

$$(2.1.4) \quad B_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon, \varepsilon \in I.$$

Il existe une constante $K > 0$ telle que

$$(2.1.5) \quad \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon\|_{T^{m,r}(R_+^n)} + \|u_\varepsilon\|_{T^{m',r}(R_+^n)} \leq K [\|\varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon\|_{T^{-m,r}(R_+^n)} + \|h_\varepsilon\|_{T^{-m',r}(R_+^n)}]$$

la constante K étant indépendante de ε .

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.1.

Désignons par $b(u, v)$ la forme sesqui-linéaire associée à B . À B_ε , $\varepsilon \in I$, est alors associée la forme sesqui-linéaire

$$(2.1.6) \quad b_\varepsilon(u, v) = \varepsilon a(u, v) + b(u, v).$$

En vertu des hypothèses H_3 et H_4 et de D. HUET [6], il existe des constantes α et β , positives, telles que

$$(2.1.7) \quad \operatorname{Re} [b_\varepsilon(u, u)] \geq \alpha \varepsilon \|u\|_{H^m(R_+^n)}^2 + \beta \|u\|_{H^{m'}(R_+^n)}^2$$

pour tout $\varepsilon \in I$ et tout $u \in H_0^m(R_+^n)$.

Démontrons le lemme pour $r = 0$.

On a

$$(2.1.8) \quad b_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = \langle \varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon, u_\varepsilon^- \rangle$$

où l'on fait intervenir, dans le second membre, la dualité entre $H^{-m}(R_+^n)$ et $H_0^m(R_+^n)$.

On en déduit, en utilisant (2.1.7)

$$(2.1.9) \quad \alpha \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon\|_{H^m(R_+^n)}^2 + \beta \|u_\varepsilon\|_{H^{m'}(R_+^n)}^2 \leq c_0 \{ \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon\|_{H^{-m}(R_+^n)} \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon\|_{H^m(R_+^n)} + \\ + \|h_\varepsilon\|_{H^{-m'}(R_+^n)} \|u_\varepsilon\|_{H^{m'}(R_+^n)} \}$$

d'où l'inégalité de la forme (2.1.5):

$$(2.1.10) \quad \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon\|_{H^{-m}(R_+^n)} + \|u_\varepsilon\|_{H^{m'}(R_+^n)} \leq K_0 [\|\varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon\|_{H^{-m}(R_+^n)} + \|h_\varepsilon\|_{H^{-m'}(R_+^n)}].$$

Pour démontrer le lemme pour $r \geq 1$, nous raisonnons par récurrence. Supposons que le lemme soit démontré jusqu'à l'ordre $r - 1$, et montrons-le pour l'entier r .

D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une constante $K_1 > 0$ telle que

$$(2.1.11) \quad \|\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon\|_{T^{m,r-1}(R_+^n)} + \|u_\varepsilon\|_{T^{m',r-1}(R_+^n)} \leq K_1 [\|\varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon\|_{T^{-m,r-1}(R_+^n)} + \|\hbar_\varepsilon\|_{T^{-m',r-1}(R_+^n)}].$$

Posons $w_\varepsilon = D_{x'}^q u_\varepsilon$, avec $|q| \leq r - 1$. Soit i avec $1 \leq i \leq n - 1$. Alors $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \in H_0^m(R_+^n)$. Calculons $B_\varepsilon \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \right)$. On a

$$(2.1.12) \quad B_\varepsilon \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} (B_\varepsilon w_\varepsilon) + \left[B_\varepsilon \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (B_\varepsilon w_\varepsilon) \right]$$

avec

$$(2.1.13) \quad B_\varepsilon w_\varepsilon = B_\varepsilon (D_{x'}^q u_\varepsilon) = D_{x'}^q (B_\varepsilon u_\varepsilon) + [B_\varepsilon (D_{x'}^q u_\varepsilon) - D_{x'}^q (B_\varepsilon u_\varepsilon)]$$

d'où

$$(2.1.14) \quad B_\varepsilon \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q (B_\varepsilon u_\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_i} [B_\varepsilon (D_{x'}^q u_\varepsilon) - D_{x'}^q (B_\varepsilon u_\varepsilon)] + \left[B_\varepsilon \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (B_\varepsilon w_\varepsilon) \right].$$

Or, d'après (2.1.4)

$$(2.1.15) \quad \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q (B_\varepsilon u_\varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q (\varepsilon f_\varepsilon + \hbar_\varepsilon) = \varepsilon F_{1,\varepsilon} + H_{1,\varepsilon}$$

avec

$$(2.1.16) \quad F_{1,\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q f_\varepsilon \in H^{-m}(R_+^n)$$

et

$$(2.1.17) \quad H_{1,\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q \hbar_\varepsilon \in H^{-m'}(R_+^n)$$

et

$$(2.1.18) \quad \begin{cases} \|F_{1,\varepsilon}\|_{H^{-m}(R_+^n)} \leq K_2 \|f_\varepsilon\|_{T^{-m,r}(R_+^n)} \\ \|H_{1,\varepsilon}\|_{H^{-m'}(R_+^n)} \leq K_3 \|\hbar_\varepsilon\|_{T^{-m',r}(R_+^n)} \end{cases}.$$

D'autre part, en remarquant qu'on a aussi

$$(2.1.19) \quad A = \sum_{|p| \leq 2m} \alpha_p(x) D^p \quad B = \sum_{|p| \leq 2m'} \beta_p(x) D^p$$

où les α_p ($|p| \leq m$) et β_p ($|p| \leq m'$) sont encore des restrictions à R_+^n de fonctions de $\mathcal{B}(\overline{R_+^n})$, on peut écrire

$$(2.1.20) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} [B_\varepsilon (D_{x'}^q u_\varepsilon) - D_{x'}^q (B_\varepsilon u_\varepsilon)] = \\ & = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{|p| \leq 2m} [\alpha_p D^p [D_{x'}^q u_\varepsilon] - D_{x'}^q [\alpha_p D^p u_\varepsilon]] + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{|p| \leq 2m'} [\beta_p D^p [D_{x'}^q u_\varepsilon] - D_{x'}^q [\beta_p D^p u_\varepsilon]] = \varepsilon F_{2,\varepsilon} + H_{2,\varepsilon} \end{aligned}$$

avec

$$(2.1.21) \quad \begin{cases} F_{2,\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\substack{|p| \leq 2m \\ |s| \leq r-2}} \gamma_{ps}(x) D_{x'}^s (D^p u_\varepsilon) \in H^{-m}(R_+^n) \\ H_{2,\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\substack{|q| \leq 2m' \\ |t| \leq r-2}} \delta_{qt}(x) D_{x'}^t (D^q u_\varepsilon) \in H^{-m'}(R_+^n) \end{cases} \quad (12)$$

et

$$(2.1.22) \quad \begin{aligned} \|F_{2,\varepsilon}\|_{H^{-m}(R_+^n)} &\leq K_4 \|u_\varepsilon\|_{T^{-m, r-1}(R_+^n)} \\ \|H_{2,\varepsilon}\|_{H^{-m'}(R_+^n)} &\leq K_5 \|u_\varepsilon\|_{T^{-m', r-1}(R_+^n)}. \end{aligned}$$

Enfin

$$(2.1.23) \quad \begin{aligned} B_\varepsilon \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (B_\varepsilon w_\varepsilon) &= \varepsilon \sum_{|p| \leq 2m} \left[\alpha_p D^p \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\alpha_p D^p w_\varepsilon) \right] + \\ &+ \sum_{|p| \leq 2m'} \left[\beta_p D^p \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\beta_p D^p w_\varepsilon) \right] = \\ &= -\varepsilon \sum_{|p| \leq 2m} \frac{\partial \alpha_p}{\partial x_i} D^p w_\varepsilon - \sum_{|p| \leq 2m'} \frac{\partial \beta_p}{\partial x_i} D^p w_\varepsilon = \\ &= -\varepsilon F_{3,\varepsilon} - H_{3,\varepsilon} \end{aligned}$$

(12) Les coefficients γ_{ps} ($|p| \leq 2m$, $|s| \leq r-2$) et δ_{qt} ($|q| \leq 2m'$, $|t| \leq r-2$) sont toujours des restrictions à R_+^n de fonctions de $\mathcal{B}(\overline{R_+^n})$.

avec

$$(2.1.24) \quad \begin{cases} F_{3,\varepsilon} = \sum_{|p| \leq 2m} \frac{\partial \alpha_p}{\partial x_i} D^p w_\varepsilon \in H^{-m}(R_+^n) \\ H_{3,\varepsilon} = \sum_{|p| \leq 2m'} \frac{\partial \beta_p}{\partial x_i} D^p w_\varepsilon \in H^{-m'}(R_+^n) \end{cases}$$

et

$$(2.1.25) \quad \begin{cases} \|F_{3,\varepsilon}\|_{H^{-m}(R_+^n)} \leq K_6 \|w_\varepsilon\|_{H^{-m}(R_+^n)} \leq K_7 \|u_\varepsilon\|_{T^{m,r-1}(R_+^n)} \\ \|H_{3,\varepsilon}\|_{H^{-m'}(R_+^n)} \leq K_8 \|u_\varepsilon\|_{T^{m',r-1}(R_+^n)}. \end{cases}$$

En réunissant (2.1.14), (2.1.15), (2.1.20) et (2.1.23), on obtient

$$(2.1.26) \quad B_\varepsilon \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \right) = \varepsilon F_\varepsilon + H_\varepsilon$$

avec

$$(2.1.27) \quad \begin{cases} F_\varepsilon = F_{1,\varepsilon} + F_{2,\varepsilon} - F_{3,\varepsilon} \in H^{-m}(R_+^n) \\ H_\varepsilon = H_{1,\varepsilon} + H_{2,\varepsilon} - H_{3,\varepsilon} \in H^{-m'}(R_+^n). \end{cases}$$

On a donc d'après (2.1.10)

$$(2.1.28) \quad \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{H^m(R_+^n)} + \left\| \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \right\|_{H^{m'}(R_+^n)} \leq K_0 \left[\left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} F_\varepsilon \right\|_{H^{-m}(R_+^n)} + \left\| H_\varepsilon \right\|_{H^{-m'}(R_+^n)} \right].$$

Mais, on a, en tenant compte de (2.1.18), (2.1.22), (2.1.25)

$$(2.1.29) \quad \begin{cases} \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} F_\varepsilon \right\|_{H^{-m}(R_+^n)} \leq K_2 \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \right\|_{T^{-m,r}(R_+^n)} + K_9 \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \right\|_{T^{-m,r-1}(R_+^n)} \\ \left\| H_\varepsilon \right\|_{H^{-m'}(R_+^n)} \leq K_3 \|h_\varepsilon\|_{T^{-m',r}(R_+^n)} + K_{10} \|u_\varepsilon\|_{T^{-m',r-1}(R_+^n)} \end{cases}$$

d'où, en vertu de (2.1.11) et (1.2.3)

$$(2.1.30) \quad \begin{cases} \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} F_\varepsilon \right\|_{H^{-m}(R_+^n)} \leq K_{11} \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \right\|_{T^{-m,r}(R_+^n)} \\ \left\| H_\varepsilon \right\|_{H^{-m'}(R_+^n)} \leq K_{12} \|h_\varepsilon\|_{T^{-m',r}(R_+^n)} \end{cases}.$$

Les inégalités (2.1.11), (2.1.28) et (2.1.30) entraînent immédiatement une inégalité du type (2.1.5).

En ce qui concerne la convergence de u_ε , on a le

THÉORÈME 2.1 : Les hypothèses sont celles du lemme 2.1. Nous supposons en outre que

- 1) $\varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{-m,r}(R_+^n)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$;
- 2) il existe $h \in T^{-m',r}(R_+^n)$ telle que $h_\varepsilon \rightarrow h$ dans $T^{-m',r}(R_+^n)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Alors, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, la solution $u_\varepsilon \in T_0^{m,r}(R_+^n)$ de (2.1.4) tend, dans $T_0^{m',r}(R_+^n)$, vers la solution u de

$$(2.1.31) \quad Bu = h.$$

En outre $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T_0^{m,r}(R_+^n)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.1.

Nous démontrons tout d'abord le théorème pour $r = 0$. D'après le lemme 2.1, u_ε est alors borné dans $H^{m'}(R_+^n)$ tandis que $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon$ est borné dans $H^m(R_+^n)$. De toute suite u_{ε_p} , on peut donc extraire une sous-suite, que nous noterons encore u_{ε_p} telle que u_{ε_p} converge faiblement dans $H_0^{m'}(R_+^n)$ vers un élément w , et telle que $\varepsilon_p^{\frac{1}{2}} u_{\varepsilon_p}$ converge vers 0 dans $H_0^m(R_+^n)$. Mais on a

$$(2.1.32) \quad b_{\varepsilon_p}(u_{\varepsilon_p}, v) = \varepsilon_p a(u_{\varepsilon_p}, v) + b(u_{\varepsilon_p}, v) = \langle \varepsilon_p f_{\varepsilon_p} + h_{\varepsilon_p}, \bar{v} \rangle$$

pour tout $v \in H_0^m(R_+^n)$. Par passage à la limite, en tenant compte des hypothèses faites sur f_ε et h_ε , on en déduit que w vérifie

$$(2.1.33) \quad b(w, v) = \langle h, \bar{v} \rangle$$

pour tout $v \in H_0^m(R_+^n)$, donc pour tout $v \in H_0^{m'}(R_+^n)$. Par suite $w = u$.

Il reste à montrer que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $H_0^{m'}(R_+^n)$ fort et que $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $H_0^m(R_+^n)$ fort. Pour cela, en vertu de (2.1.7), il suffit de montrer que

$$(2.1.34) \quad \varepsilon a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + b(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u) \rightarrow 0 \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Or, d'après (2.1.4) et (2.1.5), on a

$$(2.1.35) \quad \varepsilon a(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + b(u_\varepsilon - u, u_\varepsilon - u) = \langle \varepsilon f_\varepsilon, \bar{u}_\varepsilon \rangle + \\ + \langle h_\varepsilon - h, \bar{u}_\varepsilon \rangle + b(u, u) - b(u_\varepsilon, u),$$

et le second membre tend bien vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pour $r \geq 1$, on raisonne par récurrence. Supposons donc que le théorème soit démontré jusqu'à l'ordre $r - 1$; démontrons-le pour r .

D'après l'hypothèse de récurrence, on sait déjà que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $T^{m', r-1}(R_+^n)$ et que $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{m, r-1}(R_+^n)$. Soient alors $w_\varepsilon = D_{x'}^q u_\varepsilon$, $w = D_{x'}^q u$, avec $|q| \leq r - 1$. Soit $1 \leq i \leq n - 1$. Il suffit de démontrer que $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial w}{\partial x_i}$ dans $H^{m'}(R_+^n)$ et que $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \rightarrow 0$ dans $H^m(R_+^n)$. Or,

$$(2.1.26) \quad B_\varepsilon \left(\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \right) = \varepsilon F_\varepsilon + H_\varepsilon$$

et d'après (2.1.31) et l'hypothèse faite sur f_ε , $\varepsilon^{\frac{1}{2}} F_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $H^{-m}(R_+^n)$. D'autre part, d'après (2.1.16) et (2.1.17) et l'hypothèse faite sur h_ε , $H_{1,\varepsilon}$ converge dans $H^{-m'}(R_+^n)$, vers

$$(2.1.36) \quad H_1 = \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x'}^q h.$$

En outre, puisque $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $T^{-m', r-1}(R_+^n)$, d'après (2.1.21) et (2.1.25), $H_{2,\varepsilon}$ et $H_{3,\varepsilon}$ convergent respectivement, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, dans $H^{-m'}(R_+^n)$ vers

$$(2.1.37) \quad H_2 = \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\substack{|q| \leq 2m' \\ |t| \leq r-2}} \delta_{qt} D_{x'}^t (D^q u)$$

$$(2.1.38) \quad H_3 = \sum_{|p| \leq 2m'} \frac{\partial \beta_p}{\partial x_i} D^p w$$

et on a

$$(2.1.39) \quad B \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right) = H$$

avec

$$(2.1.40) \quad H = H_1 + H_2 - H_3.$$

Il résulte alors de la validité du théorème pour $r = 0$ que $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \rightarrow 0$ dans $H^m(R_+^n)$ et que $\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial w}{\partial x_i}$ dans $H^{m'}(R_+^n)$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$. C. Q. F. D.

2. Remplaçons maintenant les hypothèses H_3 et H_4 respectivement par

H_3' : B vérifie H_0 ;

H_4' : pour $\varepsilon \in I$, B_ε vérifie H_0 .

Soient k et r deux entiers ≥ 0 . Si les hypothèses H_1, H_2, H_3', H_4' sont satisfaites, alors, d'après le théorème 1.2, B est un isomorphisme de $T^{k+m', r}(R_+^n) \cap H_0^{m'}(R_+^n)$ sur $T^{-m'+k, r}(R_+^n)$ et, pour $\varepsilon \in I$, B_ε est un isomorphisme de $T^{k+m, r}(R_+^n) \cap H_0^m(R_+^n)$ sur $T^{-m+k, r}(R_+^n)$. On a alors le

THÉORÈME 2.2 : Soit B_ε l'opérateur défini par (2.1.3) où A et B sont définis respectivement par (2.1.1) et (2.1.2). On suppose vérifiées les hypothèses H_1, H_2, H_3', H_4' . Soient k et r deux entiers ≥ 0 . Soient $f_\varepsilon \in T^{-m+k, r}(R_+^n)$, $h_\varepsilon \in T^{-m'+k, r}(R_+^n)$, $\varepsilon \in I$, et $h \in T^{-m'+k, r}(R_+^n)$ des fonctions données telles que

- 1) $\varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{-m+k, r}(R_+^n)$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$.
- 2) $h_\varepsilon \rightarrow h$ dans $T^{-m'+k, r}(R_+^n)$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Soient u_ε l'élément de $T^{m+k, r}(R_+^n) \cap H_0^m(R_+^n)$ qui vérifie

$$(2.2.1) \quad B_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon, \quad \varepsilon \in I.$$

et u l'élément de $T^{m'+k, r}(R_+^n) \cap H_0^{m'}(R_+^n)$ qui vérifie

$$(2.2.2) \quad Bu = h.$$

Alors, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $T^{m', k+r}(R_+^n)$ et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{m, k+r}(R_+^n)$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, mais en général u_ε ne converge pas vers u dans $T^{k+m', r}(R_+^n)$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.2.

En vertu des hypothèses, $f_\varepsilon \in T^{-m, k+r}(R_+^n)$ et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{-m, k+r}(R_+^n)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. De même, h_ε et h sont dans $T^{-m', k+1}(R_+^n)$ et $h_\varepsilon \rightarrow h$ dans $T^{-m', k+r}(R_+^n)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

D'autre part $u_\varepsilon \in H_0^m(R_+^n)$ et $u_\varepsilon \in T^{m, k+r}(R_+^n)$. Donc $u_\varepsilon \in T^{m, k+r}(R_+^n)$. De même $u \in T_0^{m', k+r}(R_+^n)$. En appliquant alors le théorème 2.1, on en déduit que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $T^{m', k+r}(R_+^n)$ et que $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{m, k+r}(R_+^n)$.

Montrons qu'en général u_ε ne converge pas vers u dans $T^{m'+k, r}(R_+^n)$. Soient h donné dans $T^{1,1}(R_+^n)$, u_ε l'élément de $T^{2,1}(R_+^n) \cap H_0^1(R_+^n)$, vérifiant

$$-\varepsilon \Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = h.$$

Le théorème 2.1 dit que $u_\varepsilon \rightarrow h$ dans $T^{0,2}(R_+^n)$. Supposons que $u_\varepsilon \rightarrow h$ dans $T^{1,1}(R_+^n)$. Comme $u_\varepsilon \in T_0^{1,1}(R_+^n)$ fermé dans $T^{1,1}(R_+^n)$, on aurait $h \in T_0^{1,1}(R_+^n)$; or h est choisie quelconque dans $T^{1,1}(R_+^n)$.

Ce théorème étend au demi-espace un résultat de D. HUET [6]⁽¹³⁾.

3. Nous nous proposons d'étendre à r réel ≥ 0 , le théorème 2.1 sous la forme :

THÉORÈME 2.3 : Soit B_ε l'opérateur défini par (2.1.3) où A et B sont définis respectivement par (2.1.1) et (2.1.2). On suppose que les hypothèses H_1 à H_4 sont vérifiées. Soient r un entier ≥ 0 , et θ un nombre réel tel que $0 < \theta < 1$. Soient $f_\varepsilon \in T^{-m, r+1-\theta}(R_+^n)$, $h_\varepsilon \in T^{-m', r+1-\theta}(R_+^n)$, $\varepsilon \in I$, et $h \in T^{-m', r+1-\theta}(R_+^n)$ des fonctions données telles que

- 1) $\varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{-m, r+1-\theta}(R_+^n)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$;
- 2) $h_\varepsilon \rightarrow h$ dans $T^{-m', r+1-\theta}(R_+^n)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Soient u_ε l'élément de $T_0^{m, r+1-\theta}(R_+^n)$ qui vérifie

$$(2.3.1) \quad B_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon$$

et u l'élément de $T_0^{m', r+1-\theta}(R_+^n)$ qui vérifie

$$(2.3.2) \quad Bu = h.$$

Alors, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $T^{m', r+1-\theta}(R_+^n)$ et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{m, r+1-\theta}(R_+^n)$.

Reprenons les notations du § 1, n° 3 ; soit $\alpha = \theta - \frac{1}{2}$. Nous avons le

LEMME 2.2 : Soient ν opérateurs $A_1, \dots, A_\nu$, fermés, non bornés dans l'espace de BANACH E , de domaines denses dans E , $D(A_1), \dots, D(A_\nu)$, satisfaisant aux hypothèses (S.G) et (C). Si e_ε converge, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, vers e , dans l'espace $E(2, \alpha; A_1, \dots, A_\nu)$, alors, il existe w_ε et w dans l'espace $W(2, \alpha; A_1, \dots, A_\nu)$ tels que

$$(2.3.3) \quad w_\varepsilon(0) = e_\varepsilon, \quad w(0) = e.$$

$$(2.3.4) \quad t^\alpha [w_\varepsilon - w] \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, +\infty; D(A)) \text{ et, pour tout } t > 0, \\ w_\varepsilon(t) \rightarrow w(t) \text{ dans } D(A) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

$$(2.3.5) \quad t^\alpha [w'_\varepsilon - w']^{(14)} \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(0, +\infty; E) \text{ et, pour tout } t > 0, \\ w'_\varepsilon(t) \rightarrow w'(t) \text{ dans } E, \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

⁽¹³⁾ Théorème 1.11.

⁽¹⁴⁾ De façon générale $f' = \frac{df}{dt}$.

DÉMONSTRATION DU LEMME 2.2 :

On peut supposer, sans nuire à la généralité, que $\nu = 2$. Posons ⁽¹⁵⁾

$$(2.3.6) \quad H_i(t) = \frac{1}{t} \int_0^t G_i(\sigma) d\sigma \quad i = 1, 2.$$

Pour $t > 0$, $H_i(t) \in \mathcal{L}(E; D(A_i))$. Posons

$$(2.3.7) \quad v_\varepsilon(t) = H_1(t) H_2(t) e_\varepsilon, \quad v(t) = H_1(t) H_2(t) e$$

$$(2.3.8) \quad w_\varepsilon(t) = q(t) v_\varepsilon(t), \quad w(t) = q(t) v(t)$$

où $q(t)$ est une fonction indéfiniment différentiable, à support compact, égale à 1 dans un voisinage de l'origine.

Les conditions 2.3.3 sont évidemment satisfaites, et il est immédiat de vérifier que, pour chaque $t > 0$, $w_\varepsilon(t) \rightarrow w(t)$ dans E et que $t^\alpha [w_\varepsilon - w] \rightarrow 0$ dans $L^2(0, +\infty; E)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

D'autre part, on a

$$(2.3.9) \quad A_i H_i(t) = \frac{1}{t} [G_i(t) - I].$$

D'où en posant

$$(2.3.10) \quad \begin{cases} f_\varepsilon = e_\varepsilon - e \\ r_\varepsilon = v_\varepsilon - v \\ s_\varepsilon = w_\varepsilon - w \end{cases}$$

$$(2.3.11) \quad \|A_i r_\varepsilon(t)\| \leq M_2 \frac{1}{t} \|G_i(t) f_\varepsilon - f_\varepsilon\| \quad (16).$$

On obtiendrait une majoration analogue, en remplaçant A_1 par A_2 .

D'après (2.3.11), pour chaque $t > 0$, $s_\varepsilon(t) \rightarrow 0$ dans $D(A)$. En outre, comme $f_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $E(2, \alpha; A_1, \dots, A_\nu)$, en vertu de (1.3.14), $t^\alpha A_i s_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $L^2(0, +\infty; E)$ ce qui achève de démontrer (2.3.4).

De (2.3.7) et (2.3.10), on déduit :

$$(2.3.12) \quad r'_\varepsilon(t) = H_1'(t) H_2(t) f_\varepsilon + H_1(t) H_2'(t) f_\varepsilon$$

⁽¹⁵⁾ On utilise ici une construction classique : voir LIONS [9] et GAGLIARDO [2].

⁽¹⁶⁾ On a en effet, d'après l'hypothèse (S^*G) , $\|G_i(t)\|_{\mathcal{L}_b(E, E)} \leq M_i$, $i = 1, 2$, $\mathcal{L}_b(E, E)$ étant l'espace $\mathcal{L}(E, E)$ muni de la topologie de la convergence uniforme sur les parties bornées de E . Il résulte alors de (2.3.6), que $\|H_i(t)\| \leq M_i$.

et on a

$$(2.3.13) \quad H_1'(t) H_2(t) f_\varepsilon = A_1 H_1(t) H_2(t) f_\varepsilon - \\ - \frac{1}{t^2} \int_0^t [G_1(\sigma) - I] H_2(t) f_\varepsilon d\sigma.$$

Or

$$(2.3.14) \quad \left\| \frac{1}{t^2} \int_0^t [G_1(\sigma) - I] H_2(t) f_\varepsilon d\sigma \right\| \leq M_2 \frac{1}{t^2} \int_0^t \| (G_1(\sigma) - I) f_\varepsilon \| d\sigma.$$

Par suite, pour tout $t > 0$, $r'_\varepsilon(t) \rightarrow 0$ dans E , quand $\varepsilon \rightarrow 0$. En outre

$$(2.3.15) \quad t^\alpha \left\| \frac{1}{t^2} \int_0^t [G_1(\sigma) - I] H_2(t) f_\varepsilon d\sigma \right\| \leq M_2 t^{-1} \int_0^t \sigma^{\alpha-1} \| G_1(\sigma) f_\varepsilon - f_\varepsilon \| d\sigma$$

d'où, en tenant compte d'une inégalité de HARDY⁽¹⁷⁾:

$$(2.3.16) \quad \int_0^\infty t^{2\alpha} \left\| \frac{1}{t^2} \int_0^t [G_1(\sigma) - I] H_2(t) f_\varepsilon d\sigma \right\|^2 dt \leq \\ \leq K \int_0^\infty t^{(\alpha-1)^2} \| G_1(t) f_\varepsilon - f_\varepsilon \|^2 dt$$

et ceci tend vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$, en vertu de la topologie de $E(2, \alpha; A_1, \dots, A_n)$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.3.

D'après la proposition 1.3 et le lemme 2.2, il existe des fonctions $\varphi_\varepsilon(t)$, $\psi_\varepsilon(t)$, $\varepsilon \in I$ et $\psi(t)$ telles que

1) $\varphi_\varepsilon(0) = f_\varepsilon$, $\psi_\varepsilon(0) = h_\varepsilon$, $\psi(0) = h$;

2) quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi_\varepsilon(t) \rightarrow 0$ dans $T^{-m, r+1}(R_+^n)$, $\psi_\varepsilon(t) \rightarrow \psi(t)$ dans $T^{-m', r+1}(R_+^n)$, pour tout $t > 0$, et en outre $t^\alpha \varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $L^2[0, +\infty; T^{-m, r+1}(R_+^n)]$ et $t^\alpha \psi_\varepsilon \rightarrow t^\alpha \psi$ dans $L^2(0, +\infty; T^{-m', r+1}(R_+^n))$;

⁽¹⁷⁾ Voir HARDY-LITTLEWOOD-POLYA [4] p. 245.

3) quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi'_\varepsilon(t) \rightarrow 0$ dans $T^{-m, r}(R_+^n)$ et $\psi'_\varepsilon(t) \rightarrow \psi'(t)$ dans $T^{-m', r}(R_+^n)$ pour tout $t > 0$, et en outre $t^\alpha \varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi'_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $L^2(0, +\infty; T^{-m, r}(R_+^n))$ tandis que $t^\alpha \psi'_\varepsilon \rightarrow t^\alpha \psi'$ dans $L^2(0, +\infty; T^{-m', r}(R_+^n))$.

Soient alors, pour $t > 0$, $\mu_\varepsilon(t)$, l'élément de $T_0^{m, r+1}(R_+^n)$ tel que

$$(2.3.17) \quad B_\varepsilon \mu_\varepsilon(t) = \varepsilon \varphi_\varepsilon(t) + \psi_\varepsilon(t) \quad \varepsilon \in I$$

et $\mu(t)$ l'élément de $T_0^{m', r+1}(R_+^n)$ tel que

$$(2.3.18) \quad B \mu(t) = \psi(t).$$

On a alors

$$\mu_\varepsilon(0) = u_\varepsilon \quad \text{et} \quad \mu(0) = u.$$

En outre, $\mu'_\varepsilon(t)$ ⁽¹⁸⁾ est à valeurs dans $T_0^{m, r}(R_+^n)$ et vérifie, pour tout $t > 0$

$$(2.3.19) \quad B_\varepsilon \mu'_\varepsilon(t) = \varepsilon \varphi'_\varepsilon(t) + \psi'_\varepsilon(t)$$

et de même, $\mu'(t)$ est à valeurs dans $T_0^{m', r}(R_+^n)$ et vérifie, pour tout $t > 0$

$$(2.3.20) \quad B \mu'(t) = \psi'(t).$$

D'après le théorème 2.1, pour tout $t > 0$, $\mu_\varepsilon(t) \rightarrow \mu(t)$ dans $T_0^{m', r+1}(R_+^n)$, $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \mu_\varepsilon(t) \rightarrow 0$ dans $T_0^{m, r+1}(R_+^n)$, $\mu'_\varepsilon(t) \rightarrow \mu'(t)$ dans $T_0^{m', r}(R_+^n)$ et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} \mu'_\varepsilon(t) \rightarrow 0$ dans $T_0^{m, r}(R_+^n)$.

En outre, d'après (2.3.17), (2.3.19) et le lemme 2.1, on a, pour $t > 0$, $\varepsilon \in I$

$$(2.3.21) \quad t^\alpha [\|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \mu_\varepsilon(t)\|_{T^{m, r+1}(R_+^n)} + \|\mu_\varepsilon(t)\|_{T^{m', r+1}(R_+^n)}] \leq \\ \leq K_1 t^\alpha [\|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi_\varepsilon(t)\|_{T^{-m, r+1}(R_+^n)} + \|\psi_\varepsilon(t)\|_{T^{-m', r+1}(R_+^n)}]$$

et

$$(2.3.22) \quad t^\alpha [\|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \mu'_\varepsilon(t)\|_{T^{m, r}(R_+^n)} + \|\mu'_\varepsilon(t)\|_{T^{m', r}(R_+^n)}] \leq \\ \leq K_2 t^\alpha [\|\varepsilon^{\frac{1}{2}} \varphi'_\varepsilon(t)\|_{T^{-m, r}(R_+^n)} + \|\psi'_\varepsilon(t)\|_{T^{-m', r}(R_+^n)}]$$

et les seconds membres de (2.3.21) et (2.3.22) sont bornés dans $L^2(0, +\infty)$.

⁽¹⁸⁾ $\mu'_\varepsilon(t)$ [resp. $\mu'(t)$] est la dérivée de $\mu_\varepsilon(t)$ [resp. $\mu(t)$] dans l'espace $\mathcal{D}'(0, +\infty; T^{m, r}(R_+^n))$ [resp. $\mathcal{D}'(0, +\infty; T^{m', r}(R_+^n))$].

D'après le théorème de LEBESGUE, $t^a \mu_\varepsilon \rightarrow t^a \mu$ dans $L^2(0, +\infty; T^{m', r+1}(R_+^n))$, $t^a \mu'$ dans $L^2(0, +\infty; T^{m', r}(R_+^n))$. Il en résulte alors que $u_\varepsilon = \mu_\varepsilon(0) \rightarrow u = \mu(0)$ dans $T_0^{m', r+1-\theta}(R_+^n)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. De même $\frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T_0^{m, r+1-\theta}(R_+^n)$.

REMARQUE: De (1.3.12), de la proposition 1.3, de (2.3.21) et (2.3.22) on déduit la généralisation suivante du lemme 2.1:

LEMME 2.3: Soit B_ε l'opérateur défini par (2.1.3) où A et B sont définis respectivement par (2.1.1) et (2.1.2). On suppose que les hypothèses H_1 à H_4 sont vérifiées. Soit r réel ≥ 0 . Soient $f_\varepsilon \in T^{-m, r}(R_+^n)$, $h_\varepsilon \in T^{-m', r}(R_+^n)$, $\varepsilon \in I$. Soit u_ε l'élément de $T_0^{m, r}(R_+^n)$ qui vérifie

$$(2.3.23) \quad B_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon \quad \varepsilon \in I.$$

Il existe une constante $K > 0$, indépendante de ε telle que:

$$(2.3.24) \quad \left\| \frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon \right\|_{T^{m, r}(R_+^n)} + \|u_\varepsilon\|_{T^{m', r}(R_+^n)} \leq K \left[\left\| \frac{1}{\varepsilon^2} f_\varepsilon \right\|_{T^{-m, r}(R_+^n)} + \right. \\ \left. + \|h_\varepsilon\|_{T^{-m', r}(R_+^n)} \right].$$

4. Dans le cas où r est réel < 0 , on a le

THEOREME 2.4: Soit B_ε l'opérateur défini par (2.1.3) où A et B sont définis respectivement par (2.1.1) et (2.1.2). On suppose que les hypothèses H_1 à H_4 sont vérifiées. Soit r réel < 0 . Soient $f_\varepsilon \in T^{-m, r}(R_+^n)$, $h_\varepsilon \in T^{-m', r}(R_+^n)$, $\varepsilon \in I$ et $h \in T^{-m', r}(R_+^n)$ des fonctions données telles que

$$1) \quad \frac{1}{\varepsilon^2} f_\varepsilon \rightarrow 0 \text{ dans } T^{-m, r}(R_+^n) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0;$$

$$2) \quad h_\varepsilon \rightarrow h \text{ dans } T^{-m', r}(R_+^n) \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Soient u_ε l'élément de $T_0^{m, r}(R_+^n)$ vérifiant

$$(2.4.1) \quad B_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon$$

et u l'élément de $T_0^{m', r}(R_+^n)$ vérifiant

$$(2.4.2) \quad Bu = h.$$

Alors, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $T_0^{m', r}(R_+^n)$ faible et $\frac{1}{\varepsilon^2} u_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T_0^{m, r}(R_+^n)$ faible.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.4.

Nous désignons par B_ε^* [resp. B^*] l'adjoint formel de B_ε , $\varepsilon \in I$ [resp. B].

D'après la proposition 1.2, le dual de $T_0^{m',r}(R_+^n)$ [resp. $T_0^{m,r}(R_+^n)$] coïncide avec $T^{-m',-r}(R_+^n)$ [resp. $T^{-m,-r}(R_+^n)$].

Soit $\varphi \in T^{-m',-r}(R_+^n)$. Soient v_ε l'élément de $T_0^{m,-r}(R_+^n)$ tel que

$$(2.4.3) \quad B_\varepsilon^* v_\varepsilon = \varphi \quad \varepsilon \in I$$

et v l'élément de $T_0^{m',-r}(R_+^n)$ tel que

$$(2.4.4) \quad B^* v = \varphi.$$

D'après les théorèmes 2.1 et 2.3, $v_\varepsilon \rightarrow v$ dans $T_0^{m',-r}(R_+^n)$ et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} v_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T_0^{m,-r}(R_+^n)$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Or, on a

$$(2.4.5) \quad \begin{aligned} \langle u_\varepsilon - u, \varphi \rangle &= \langle u_\varepsilon, \overline{B_\varepsilon^* v_\varepsilon} \rangle - \langle u, \overline{B^* v} \rangle = \\ &= \langle \varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon, \varepsilon^{\frac{1}{2}} \overline{v_\varepsilon} \rangle + \langle h_\varepsilon, \overline{v_\varepsilon} \rangle - \langle h, \overline{v} \rangle \end{aligned}$$

et le second membre tend vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Soit maintenant $\psi \in T^{-m,-r}(R_+^n)$ et soit w_ε l'élément de $T_0^{m,-r}(R_+^n)$ tel que

$$(2.4.6) \quad B_\varepsilon^* w_\varepsilon = \varepsilon^{\frac{1}{2}} \psi \quad \varepsilon \in I.$$

D'après le lemme 2.3, il existe une constante $K > 0$ telle que

$$(2.4.7) \quad \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} w_\varepsilon \right\|_{T_0^{m,-r}(R_+^n)} + \|w_\varepsilon\|_{T_0^{m',-r}(R_+^n)} \leq K \|\psi\|_{T^{-m,-r}(R_+^n)}.$$

Mais on a

$$(2.4.8) \quad \langle \varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon, \overline{\psi} \rangle = \langle u_\varepsilon, B_\varepsilon^* w_\varepsilon \rangle = \langle \varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon, \varepsilon^{\frac{1}{2}} \overline{w_\varepsilon} \rangle + \langle h_\varepsilon, \overline{w_\varepsilon} \rangle$$

d'où, en tenant compte de (2.4.7)

$$(2.4.9) \quad |\langle \varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon, \overline{\psi} \rangle| \leq K_1 \|\psi\|_{T^{-m,-r}(R_+^n)}.$$

Il en résulte que $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon$ est faiblement borné, donc borné dans $T_0^{m,r}(R_+^n)$. De toute suite, on peut donc extraire une sous-suite u_{ε_p} convergeant fai-

blement dans $T_0^{m,r}(R_+^n)$, vers une limite qui ne peut être que 0, puisque $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \rightarrow 0$ faiblement dans $T_0^{m',r}(R_+^n)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

§ 3. Perturbations singulières pour le problème de DIRICHLET non homogène.

1. En ce qui concerne le problème de DIRICHLET non homogène, on a le théorème général suivant :

THÉOREME 3.1 : Soit B_ε l'opérateur défini par (2.1.3) où A et B sont définis respectivement par (2.1.1) et (2.1.2). On suppose que les hypothèses H_1 à H_4 sont vérifiées. Soit r réel quelconque. Soient $f_\varepsilon \in T^{-m,r}(R_+^n)$, $h_\varepsilon \in T^{-m',r}(R_+^n)$, $\varepsilon \in I$, $h \in T^{-m',r}(R_+^n)$ des fonctions données telles que

- 1) $\varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{-m,r}(R_+^n)$;
- 2) $h_\varepsilon \rightarrow h$ dans $T^{-m',r}(R_+^n)$.

On se donne aussi $g_j^\varepsilon \in H^{m+r-j-\frac{1}{2}}(\pi)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, $\varepsilon \in I$ et $g_i \in H^{m'+r-i-\frac{1}{2}}(\pi)$, $i = 0, 1, \dots, m'-1$ vérifiant la condition suivante : il existe $v_\varepsilon \in T^{m,r}(R_+^n)$ et $v \in T^{m',r}(R_+^n)$ telles que $\gamma_j v_\varepsilon = g_j^\varepsilon$ pour $j = 0, 1, \dots, m-1$, $\varepsilon \in I$, $\gamma_i v = g_i$ pour $i = 0, 1, \dots, m'-1$ et telles que $v_\varepsilon \rightarrow v$ dans $T^{m',r}(R_+^n)$ et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} v_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{m,r}(R_+^n)$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Si, dans ces conditions, u_ε est l'élément⁽¹⁹⁾ de $T^{m,r}(R_+^n)$ qui vérifie

$$(3.1.1) \quad B_\varepsilon u_\varepsilon = \varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon \quad \gamma_j u_\varepsilon = g_j^\varepsilon \quad j = 0, 1, \dots, m-1, \varepsilon \in I$$

et si u est l'élément de $T^{m',r}(R_+^n)$ qui vérifie

$$(3.1.2) \quad Bu = h \quad \gamma_i u = g_i \quad i = 0, 1, \dots, m'-1$$

⁽¹⁹⁾ D'après le théorème 1.1, $(B_\varepsilon, \vec{\gamma})$ où $\vec{\gamma} = (\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1})$ [resp. $(B, \vec{\gamma})$ où $\gamma = (\gamma_0, \dots, \gamma_{m'-1})$] est un isomorphisme de $T^{m,r}(R_+^n) \times \prod_{j=0}^{m-1} H^{m+r-j-\frac{1}{2}}(\pi)$ [resp. de $T^{m',r}(R_+^n) \times \prod_{j=0}^{m'-1} H^{m'+r-j-\frac{1}{2}}(\pi)$] sur $T^{-m,r}(R_+^n)$, [resp. $T^{-m',r}(R_+^n)$].

alors, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $T^{m',r}(R_+^n)$ et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{m,r}(R_+^n)$ pour $r \geq 0$, $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $T^{m',r}(R_+^n)$ faible et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} u_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{m,r}(R_+^n)$ faible pour $r < 0$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 3.1.

Soient v_ε , $\varepsilon \in I$ et v satisfaisant aux hypothèses du théorème. Alors $Av_\varepsilon \in T^{-m,r}(R_+^n)$ et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} Av_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T^{-m,r}(R_+^n)$, $Bv_\varepsilon \in T^{-m',r}(R_+^n)$, $Bv \in T^{-m',r}(R_+^n)$ et $Bv_\varepsilon \rightarrow Bv$ dans $T^{-m',r}(R_+^n)$. Soient alors w_ε l'élément de $T_0^{m,r}(R_+^n)$ tel que

$$(3.1.3) \quad B_\varepsilon w_\varepsilon = \varepsilon [f_\varepsilon - Av_\varepsilon] + h_\varepsilon - Bv_\varepsilon$$

et w l'élément de $T_0^{m',r}(R_+^n)$ tel que

$$(3.1.4) \quad Bw = h - Bv.$$

En vertu des théorème 2.1, 2.3 et 2.4, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, $w_\varepsilon \rightarrow w$ dans $T_0^{m',r}(R_+^n)$ et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} w_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T_0^{m,r}(R_+^n)$, pour $r \geq 0$, $w_\varepsilon \rightarrow w$ dans $T_0^{m',r}(R_+^n)$ faible et $\varepsilon^{\frac{1}{2}} w_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $T_0^{m,r}(R_+^n)$ faible pour $r < 0$.

Mais $u_\varepsilon = w_\varepsilon + v_\varepsilon$ et $u = w + v$, d'où le résultat.

REMARQUE 1 : Supposons que $g_i \in H^{m+r-i-\frac{1}{2}}(\pi)$, $i = 0, 1, \dots, m' - 1$ et que, pour chaque $j = 0, 1, \dots, m - 1$, g_j^ε possède une limite, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, dans $H^{m+r-j-\frac{1}{2}}(\pi)$, cette limite étant en outre égale à g_j pour $j = 0, 1, \dots, m' - 1$. Alors, en vertu des résultats de LIONS [8], il existe des fonctions $v_\varepsilon \in T^{m,r}(R_+^n)$ et $v \in T^{m',r}(R_+^n)$, vérifiant les hypothèses du théorème.

REMARQUE 2 : On sait que le théorème 1.1 de LIONS-MAGÉNÈS [13] est encore vrai sous la seule hypothèses que A soit un isomorphisme de $H_0^m(R_+^n)$ sur $H^{-m}(R_+^n)$ ⁽²⁰⁾.

D'autre part, si l'on regarde la démonstration du lemme 2.1, on voit qu'elle est encore valable, sous les hypothèses H_1 , H_2 , et

H_5 : B est un isomorphisme de $H_0^{m'}(R_+^n)$ sur $H^{-m'}(R_+^n)$;

H_6 : B_ε est, pour $\varepsilon \in I$, un isomorphisme de $H_0^m(R_+^n)$ sur $H^{-m}(R_+^n)$;

⁽²⁰⁾ Voir dans [13] remarque II, p. 305.

H_7 : il existe une constante $c > 0$, telle que

$$(3.1.5) \quad \left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} v_\varepsilon \right\|_{H^m(R_+^n)} + \|v_\varepsilon\|_{H^{m'}(R_+^n)} \leq c \left[\left\| \varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \right\|_{H^{-m}(R_+^n)} + \|h_\varepsilon\|_{H^{-m'}(R_+^n)} \right]$$

quels que soient $f_\varepsilon \in H^{-m}(R_+^n)$, $h_\varepsilon \in H^{-m'}(R_+^n)$ et $v_\varepsilon \in H_0^m(R_+^n)$ tels que

$$(3.1.6) \quad B_\varepsilon v_\varepsilon = \varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon.$$

Quant au théorème 2.1, il est vrai sous les hypothèses H_1, H_2, H_5, H_6 et H_8 : quels que soient $v_\varepsilon \in H_0^m(R_+^n)$, $\varepsilon \in I$, $v \in H_0^{m'}(R_+^n)$ tels que

$$(3.1.7) \quad B_\varepsilon v_\varepsilon = \varepsilon f_\varepsilon + h_\varepsilon$$

$$(3.1.8) \quad Bv = h$$

où $f_\varepsilon \in H^{-m}(R_+^n)$, $h_\varepsilon \in H^{-m'}(R_+^n)$, $\varepsilon \in I$, $h \in H^{-m'}(R_+^n)$; alors, $v_\varepsilon \rightarrow v$ dans $H_0^m(R_+^n)$, $\varepsilon^{\frac{1}{2}} v_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $H_0^{m'}(R_+^n)$, quand $\varepsilon \rightarrow 0$, dès que $\varepsilon^{\frac{1}{2}} f_\varepsilon \rightarrow 0$ dans $H^{-m}(R_+^n)$ et que $h_\varepsilon \rightarrow h$ dans $H^{-m'}(R_+^n)$.

*Institut de Mathématiques
Nancy*

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. P. CALDERON : *Intermediate spaces and interpolation*. Convegno di Varsavia. Studia Math. Serie Speciale, t. I (1963).
- [2] E. GAGLIARDO : *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili* Rend. Sem. Mat. Padova 27 (1957) p. 284-305.
- [3] L. GÄRDING : *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations*, Math. Scand., vol. I, 1953, p. 55-72.
- [4] G. HARDY - J. E. LITTLEWOOD - G. POLYA : *Inequalities*. Cambridge University Press 1934.
- [5] L. HÖRMANDER : *Linear Partial Differential operators*, Springer, 1963.
- [6] D. HUET : *Phénomènes de perturbation singulière dans les problèmes aux limites*. Ann. Inst. Fourier, 1960.
- [7] D. HUET : *Perturbations singulières* C. R. Acad. Sc. Paris, t 257, p. 3264-3266, 1963.
- [8] J. L. LIONS : *Espaces intermédiaires entre espaces hilbertiens et applications*, Bull. Math. Soc. Sc. Math. Phys. R. P. Roumanie, 2, 50 (1959), 419-432.
- [9] J. L. LIONS : *Théorèmes de trace et d'interpolation*, Ann. Scu. Norm. di Pisa, 13, 1959 p. 389-403.
- [10] J. L. LIONS : C. R. Acad. Sc., Paris, 251, 1960, p. 1851-1855.
- [11] J. L. LIONS : *Quelques procédés d'interpolation d'opérateurs linéaires et quelques applications*. Séminaire SCHWARTZ 1960-1961, Paris.
- [12] J. L. LIONS : *Sur les espaces d'interpolation - Dualité*, Math. Scand. 9-1961, p. 144-177.
- [13] J. L. LIONS - E. MAGÉNÈS : *Problemi ai limiti non omogenei*, I, Ann. Scu. Norm. Pisa, 14, 1960, p. 269-308.
- [14] J. PEETRE : *Another approach to elliptic boundary problems*. Comm. on pure and App. Math., 14, 4, 1961, p. 711-731.
- [15] J. PEETRE : *Elliptic partial differential equations*. Lecture notes : University of Maryland - 1962.
- [16] L. SCHWARTZ : *Théorie des distributions* - Hermann - 1951-1952.
- [17] L. SCHWARTZ : *Les Travaux de GÄRDING sur le problème de DIRICHLET*. Séminaire BOURBAKI - 1952.
- [18] L. SCHWARTZ , Séminaire 1954-1955, Paris.
- [19] L. SCHWARTZ : *Ecuaciones diferenciales parciales elípticas* - Lecture notes - Bogota, 1956.
- [20] L. SCHWARTZ : *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*, Ann. Inst. Fourier, 7, 1958, p. 1-141, 8, 1958, p. 1-209.
- [21] S. L. SOBOLEV : *On a theorem of functional analysis*, Mat. Sbornik, N. S, 4, 1938, p. 471-497.
- [22] S. L. SOBOLEV : *Some applications of functional analysis in mathematical physics* - Lenin-grad - 1950.