

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LAMBERTO CESARI

Semicontinuità e convessità nel calcolo delle variazioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 18, n° 4 (1964), p. 389-423

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_4_389_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SEMICONTINUITÀ E CONVESSITÀ NEL CALCOLO DELLE VARIAZIONI (*)

LAMBERTO CESARI

Considereremo integrali di linea in forma non parametrica

$$I[C] = \int_a^b f(t, x, x') dt$$

per curve $C: x = x(t) = (x_1, \dots, x_n)$, $a \leq t \leq b$, in E_{n+1} , le cui componenti $x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, sono funzioni assolutamente continue nell'intervallo di definizione. La funzione integranda $f(t, x, d)$ si suppone continua nei suoi $2n + 1$ argomenti $t, x = (x_1, \dots, x_n)$, $d = (d_1, \dots, d_n)$. È noto che condizioni di convessività debole della f nei suoi argomenti $d_1, \dots, d_n$ assicurano la semicontinuità inferiore di $I[C]$ nella topologia uniforme⁽¹⁾. Teoremi di J. W. Lindeberg⁽²⁾, L. Tonelli, E. E. Levi, W. T. Reid, M. R. Hestenes⁽³⁾, e altri assicurano poi che, sotto condizioni di convessità forte della f negli stessi argomenti $d_1, \dots, d_n$, la differenza $I[C] - I[C_0]$ si mantiene essenzialmente positiva quando $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, è in un intorno sufficientemente piccolo di $C_0: x = x_0(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, e la differenza $|x'(t) - x'_0(t)|$

Pervenuto alla Redazione il 26 Marzo 1964.

(*) Lavoro letto all'Istituto Matematico dell'Università di Pisa, ed eseguito con parziale assistenza finanziaria dell'Istituto di Alta Matematica di Roma e della US National Science Foundation (research grant G-57 all'Università di Michigan).

⁽¹⁾ Si veda L. TONELLI, *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, 2 voll., Zanichelli, Bologna, 1921-23.

⁽²⁾ J. W. LINDBERG, *Über einige Fragen der Variationsrechnung*, Math. Annalen, 67, 1909, 340-354.

⁽³⁾ L. TONELLI, loc. cit. in (1), vol. I, p. 422. Si veda anche L. TONELLI, *Su due proposizioni di J. W. Lindeberg ed E. E. Levi*, Rend. Accad. Lincei, 30, 1921, 1° sem., 19-22, 110-112; oppure L. TONELLI, *Opere Scelte*, Cremonese, Roma 1962, III, pp. 443-449; E. E. LEVI, *Sopra un teorema del calcolo delle variazioni di J. W. Lindeberg*, Rend. Circolo Mat. Palermo, 37, 1914, 245-248; W. T. REID, *Isoperimetric problems of Bolza in non-parametric form*, Duke Math. Journ., 5, 1939, 675-691; M. R. HESTENES, *Theorem of Lindeberg in the calculus of variations*, Transactions Amer. Math. Soc., 60, 1946, 72-92; *Sufficient conditions for the isoperimetric problem of Bolza in the calculus of variations*, ibid., 93-118; *An indirect sufficiency proof for the problem of Bolza in nonparametric form*, ibid., 62, 1947, 509-535.

non converge a zero in misura. Tali teoremi sono detti qualche volta teoremi di confronto.

Nel presente lavoro dimostriamo (§§ 3, 4) alcune proposizioni, nello stesso spirito di quelle di J. W. Lindeberg e Tonelli, mostrando che, sotto opportune ipotesi di convessità forte, la differenza $I[C] - I[C_0]$ si mantiene essenzialmente al disopra dell'integrale

$$\int_a^b c(t) |x'(t) - x'_0(t)|^2 dt$$

ove $c(t)$ è un'opportuna funzione peso.

In un successivo lavoro⁽⁴⁾ avremo occasione di applicare questi risultati alla dimostrazione di un teorema di esistenza per problemi di ottimo controllo.

§ 1. Notazioni.

Indichiamo con t la variabile indipendente, e con $x = (x_1, \dots, x_n)$, $d = (d_1, \dots, d_n)$ vettori reali $x \in E_n$, $d \in E_n$. Sia A un insieme chiuso e limitato dello spazio (t, x) , cioè $A \subset E_1 \times E_n$, e sia $f(t, x, d)$ una funzione reale e continua di (t, x, d) in $A \times E_n$. Denoteremo con $[\bar{a}, \bar{b}]$ un intervallo (finito e chiuso), $[\bar{a}, \bar{b}] \subset E_1$, che contenga interamente la proiezione dell'insieme A sull'asse t .

Denoteremo con K la collezione di tutte le curve non parametriche $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, giacenti in A , cioè di funzioni (vettore) reali $x(t)$, $a \leq t \leq b$, a componenti $x_i(t)$ assolutamente continui in $[a, b]$, tali che $(t, x(t)) \in A$ per ogni $a \leq t \leq b$, e tali che la funzione $f(t, x(t), x'(t))$, definita quasi ovunque in $[a, b]$, sia L -integrabile in $[a, b]$. Denoteremo pertanto con $I[C]$ l'integrale di Lebesgue

$$I[C] = \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) dt.$$

Per ogni curva $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, della classe K si ha necessariamente $\bar{a} \leq a \leq b \leq \bar{b}$. Denoteremo con $[C]$ l'insieme di tutti i punti (t, x) della curva C , e quindi $[C] \subset A$, e $[C]$ è un insieme chiuso e limitato (compatto).

(4) L. CESARI, *Un teorema di esistenza in problemi di controlli ottimi*. In corso di stampa in questi stessi Annali.

Per ogni vettore d denoteremo con $|d|$ la sua norma euclidea. Se b, d sono due vettori qualsiasi, $b, d \in E_n$, denoteremo con $b \cdot d$ il prodotto interno $b_1 d_1 + \dots + b_n d_n$. Pertanto ogni funzione reale lineare in d ha la forma $z(d) = r + b \cdot d$, con r scalare e $b = (b_1, \dots, b_n) \in E_n$ costanti. Per ogni funzione lineare $z(d)$ e ogni particolare vettore d_0 si ha poi

$$z(d_0) = r + b \cdot d_0, \quad z(d) = z(d_0) + b \cdot (d - d_0).$$

Date due qualunque curve C e C_0 di K , $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, $C_0: x = x_0(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, diremo distanza $\|C, C_0\|$ di C e C_0 il numero definito come d'uso nel modo seguente. Si estenda la definizione di $x(t)$ e $x_0(t)$ su tutto $(-\infty, +\infty)$ prendendo $x(t)$ costante e uguale a $x(a)$ in $(-\infty, a)$, e costante e uguale a $x(b)$ in $(b, +\infty)$, e analogamente si proceda per $x_0(t)$. Si ponga ora

$$\|C, C_0\| = |a - a_0| + |b - b_0| + \text{Max } |x(t) - x_0(t)|,$$

ove il massimo è preso in $(-\infty, +\infty)$. Si noti che $x'(t)$ è ora zero in $(-\infty, a)$ e in $(b, +\infty)$, e analoga proprietà vale per $x'_0(t)$. Ogni volta che occorra, intenderemo che $x(t)$, $x'(t)$, ecc. sono estese sull'intero intervallo $(-\infty, +\infty)$, o almeno in $[\bar{a}, \bar{b}]$, mediante le convenzioni ora stabilite. Indicheremo con intorno (ϱ) di una curva C_0 di K la sottocollezione di tutte le curve C di K con $\|C, C_0\| < \varrho$.

§ 2. Due teoremi di Lindeberg e Tonelli.

Enunciamo qui due proposizioni, per curve in E_{n+1} , che furono dimostrate da Tonelli⁽⁵⁾ per curve in E_2 e che estendono una precedente proposizione di J. W. Lindeberg⁽⁶⁾. Allo scopo di non modificare inutilmente tali enunciati, supporremo con Tonelli — ma soltanto in questa sezione — che $f(t, x, d)$ sia continua in $A \times E_n$ e abbia ivi derivate parziali prime f_{d_i} pure continue in $A \times E_n$. In queste condizioni le proprietà di convessità che qui interessano possono essere espresse mediante la funzione di Weierstrass

$$E(t, x, d, D) = f(t, x, D) - f(t, x, d) - f_d(t, x, d) \cdot (D - d),$$

ove $D = (D_1, \dots, D_n) \in E_n$ è un vettore reale arbitrario, e $f_d(t, x, d)$ denota il vettore $f_d(t, x, d) = (f_{d_1}, \dots, f_{d_n})$.

⁽⁵⁾ loc. cit. in ⁽³⁾.

⁽⁶⁾ loc. cit. in ⁽⁴⁾.

TEOREMA A (Tonelli⁽⁷⁾). Sia $C_0: x = x_0(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, una curva della classe K . Supponiamo che (α) ad ogni suo punto $(t_0, x_0(t_0))$ si possano far corrispondere un numero $\delta = \delta(t_0) > 0$, e un vettore $\bar{x}'_0 = \bar{x}'_0(t_0)$ tali che per tutti i punti (t, x) dell'insieme A posti ad una distanza $\leq \delta$ da $(t_0, x_0(t_0))$ e per tutti i vettori x' con $|x' - \bar{x}'_0| \leq \delta$ e $X' \neq x'$ risulti $E(t, x, x', X') > 0$. Supponiamo inoltre che (β) per quasi tutti i punti t_0 di $[a_0, b_0]$ sia $\bar{x}'_0(t_0) = x'_0(t_0)$. Allora, scelti ad arbitrio due numeri $\sigma > 0$, $\lambda > 0$, si possano sempre determinare due altri numeri $\varrho > 0$, $\varepsilon > 0$ in modo che per ogni curva $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, della classe K , appartenente all'intorno (ϱ) della curva C_0 , e tale che $|x'(t) - x'_0(t)| \geq \sigma$ in un insieme di misura $\geq \lambda$, risulta $I[C] - I[C_0] \geq \varepsilon$.

TEOREMA B (Tonelli⁽⁸⁾). Sia $C_0: x = x_0(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, una curva della classe K soddisfacente le condizioni (α) e (β) del teorema A. Supponiamo inoltre che (γ) esistono due numeri $\Delta > 0$, $\varphi > 0$ tali che per quasi tutti i t e per ogni X' con $|X' - x'_0(t)| = \delta(t)$ risulti $\delta(t) \leq \Delta$, $E(t, x_0(t), x'_0(t), X') \geq \varphi$. Allora, scelto ad arbitrio un numero $\lambda > 0$ è sempre possibile determinare due numeri $\varrho > 0$, $\varepsilon > 0$ tali che per ogni curva $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, della classe K , appartenente all'intorno (ϱ) di C_0 e soddisfacente la disuguaglianza $\int_a^b |x'(t) - x'_0(t)| dt \geq \lambda$, risulti anche $I[C] - I[C_0] \geq \varepsilon$.

Le dimostrazioni di questi due teoremi date da Tonelli nel caso $n = 1$ si estendono al caso $n > 1$.

§ 3. Teoremi di confronto nella classe K_η .

Supporremo la f soltanto continua come si è detto nella § 1, e pertanto dovremo esprimere come d'uso le proprietà di convessità della f mediante l'esistenza e proprietà degli iperpiani d'appoggio. Nei teoremi seguenti si userà una condizione alquanto più forte della convessità insieme a limitazioni nella classe K . Una discussione delle condizioni è fatta nella § 5. Come vedremo le asserzioni dei teoremi cadono facilmente in difetto senza tali condizioni.

Sia $\eta(t)$, $\bar{a} \leq t \leq \bar{b}$, una funzione non negativa ed a quadrato integrabile in $[\bar{a}, \bar{b}]$. Diciamo K_η la sottoclasse di tutte le curve $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, di K con $|x'(t)| \leq \eta(t)$ quasi dappertutto in $[a, b]$.

(7) loc. cit. in (1), vol., I, pag. 422.

(8) loc. cit. in (1), vol., I, pag. 429.

TEOREMA I. Sia $C_0: x = x_0(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, una curva della classe K_η . Supponiamo che esista un $\delta_0 > 0$ tale che si abbia $f(t, x, d) \geq 0$ per ogni d e per ogni $(t, x) \in A$ ad una distanza $\leq \delta_0$ da $[C_0]$. Supponiamo ancora che esista una funzione non negativa, misurabile e limitata $c(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, tale che quasi ogni punto t_0 di $[a_0, b_0]$, in cui $d_0 = x'_0(t_0)$ esiste, ha la seguente proprietà: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un numero $\delta = \delta(t_0) > 0$ e una funzione lineare $z(d) = r + b \cdot d$ tale che, per ogni $(t, x) \in A$ ad una distanza $\leq \delta$ da $(t_0, x_0(t_0))$ si abbia

$$(1) \quad f(t, x, d) \geq z(d) + c(t_0) |d - d_0|^2 \text{ per ogni } d \in E_n,$$

$$(2) \quad f(t, x, d) \leq z(d) + \varepsilon \text{ per ogni } d \in E_n \text{ con } |d - d_0| < \delta.$$

Allora, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\varrho > 0$ tale che, per ogni curva $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, della classe K_η e appartenente all'intorno (ϱ) di C_0 risulta

$$(3) \quad I[C] > I[C_0] - \varepsilon + \int_a^b c(t) |x'(t) - x'_0(t)|^2 dt.$$

DIMOSTRAZIONE. Denoteremo con μ l'integrale a secondo membro della (3). La funzione $c(t) \geq 0$ è limitata. Sarà perciò $0 \leq c(t) \leq M_0$ per qualche costante M_0 . Denotiamo con M_1 e M_2 i valori degli integrali $\int_a^b \eta(t) dt$, $\int_a^b \eta^2(t) dt$. Le funzioni $\eta(t)$, $\eta^2(t)$, $f(t, x_0(t), x'_0(t))$ sono integrabili negli intervalli $[\bar{a}, \bar{b}]$ e $[a_0, b_0]$ rispettivamente. Pertanto, dato $\varepsilon > 0$, esiste un numero $\tau > 0$ tale che per ogni insieme E di questi intervalli con $\text{mis } E < \tau$ risulta

$$(E) \int \eta dt < \varepsilon/M_0, \quad (E) \int \eta^2 dt < \varepsilon/M_0, \quad \left| (E) \int f(t, x_0(t), x'_0(t)) dt \right| < \varepsilon.$$

In forza del teorema di Lusin esiste un insieme chiuso $B \subset [a_0, b_0]$ tale che $x'_0(t)$ esiste in B ed entrambe le funzioni $c(t)$, $x'_0(t)$ sono continue su B . Possiamo assumere che ogni $t \in B$ soddisfi le condizioni del teorema e che $\text{mis } B < b_0 - a_0 - \tau$.

Per ogni $\bar{t} \in B$ esistono un numero $\bar{\delta} > 0$ e una funzione lineare $z(d) = r + b \cdot d$ soddisfacenti (1) e (2). In corrispondenza dello stesso $\bar{t} \in B$ possiamo scegliere un numero $0 < \bar{\varrho} \leq \bar{\delta}/4$ tale che $|x'_0(t) - x'_0(\bar{t})| <$

$\min [\bar{\delta}/4, \varepsilon/M_0 M_1, (\varepsilon/M_0)^{\frac{1}{2}}], |c(t) - c(\bar{t})| < \varepsilon/M_2$ per ogni $t \in B$ con $|t - \bar{t}| \leq \varrho$, e inoltre tale che $|x_0(t) - x_0(\bar{t})| < \bar{\delta}/4$ per ogni $t \in [a_0, b_0]$ con $|t - \bar{t}| \leq \varrho$.

Gli intervalli $(\bar{t} - \varrho, \bar{t} + \varrho)$ formano un ricoprimento dell'insieme compatto B . Pertanto, un numero finito di tali intervalli ricoprono B . Diciamo $I_j, j = 1, \dots, p$, tali intervalli, e $t_j, \delta_j, \varrho_j, z_j(d) = r_j + b_j \cdot d$ siano rispettivamente il centro di I_j , i due numeri e la funzione lineare associata ad I_j . Sia $R = \max [|r_j|, |b_j|, |x'_0(t_j)|, j = 1, \dots, p]$. Sia $\xi > 0$ un numero abbastanza piccolo affinché sia $\xi \leq \varepsilon/R, \xi \leq \tau, \xi \leq \varepsilon/M_0 R^2$, e inoltre tale che

$$(H) \int |x'_0(t)| dt < \varepsilon/R, \quad (H) \int \eta(t) dt < \varepsilon/M_0(R+1),$$

per ogni insieme misurabile $H \subset [a_0, b_0]$ con $\text{mis } H < \xi$. Sia G un insieme aperto di $[a_0, b_0]$ tale che $G \supset B, \text{mis}(G - B) < \xi$. L'insieme aperto G è l'unione numerabile di intervalli aperti senza punti in comune. Dato che B è compatto, un numero finito di questi intervalli aperti già ricopre B . Dunque, possiamo assumere che G sia l'unione finita di intervalli aperti senza punti in comune. Ne consegue che anche gli insiemi $G \cap I_j, j = 1, \dots, p$, sono in numero finito. Con eventuali riduzioni possiamo ottenere un gruppo finito di intervalli chiusi, ricoprenti B e senza punti interni in comune. Possiamo anche trascurare tutti quelli che non contengono punti di B . Diciamo $[\alpha_s, \beta_s], s = 1, \dots, N$, tali intervalli. Dunque

$$\text{mis} [\cup [\alpha_s, \beta_s] - B] < \text{mis}(G - B) < \xi,$$

dove l'unione $\cup$ è fatta per tutti gli $s = 1, \dots, N$. Ciascun intervallo $[\alpha_s, \beta_s]$ è contenuto in uno degli intervalli I_j . Se $[\alpha_s, \beta_s] \subset I_j$ diciamo $t_s, \delta_s, \varrho_s, z_s(d) = r_s + b_s \cdot d$ i corrispondenti elementi $t_j, \delta_j, \varrho_j, z_j(d)$ associati con I_j . Possiamo assumere che gli intervalli $[\alpha_s, \beta_s]$ siano stati numerati in modo che per $s < s'$ si abbia $\alpha_s < \beta_s \leq \alpha_{s'} < \beta_{s'}$. Possiamo anche assumere che i due intervalli estremi $[\alpha_1, \beta_1]$ e $[\alpha_N, \beta_N]$, abbiano lunghezze $< \tau$, cioè $0 < \beta_1 - \alpha_1 < \tau, 0 < \beta_N - \alpha_N < \tau$. Infatti, in caso opposto, si potrebbe suddividere tali intervalli in parti di lunghezza $< \tau$ e rinumerare tutti gli intervalli. Siano B_s, E_s gli insiemi $B_s = [\alpha_s, \beta_s] \cap B, E_s = [\alpha_s, \beta_s] - B, s = 1, \dots, N$, denotiamo con Σ' ogni somma fatta rispetto all'indice s per $s = 2, \dots, N-1$, e con E l'insieme $E = E_2 \cup \dots \cup E_{N-1}$, così che $\text{mis } E < \xi$. Si ha

$$I[C_0] = \int_{\alpha_0}^{\beta_0} f(t, x_0, x'_0) dt \leq (B) \int f(t, x_0, x'_0) dt + \varepsilon$$

$$\begin{aligned}
 &= \Sigma' (B_s) \int f(t, x_0, x'_0) dt + (B_1 + B_N) \int f(t, x_0, x'_0) dt + \varepsilon \\
 &\leq \Sigma' (B_s) \int [r_s + b_s \cdot x'_0(t)] dt + (3 + b_0 - a_0) \varepsilon \\
 &= \Sigma' \left\{ \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r_s + b_s \cdot x'_0(t)] dt - (E_s) \int [r_s + b_s \cdot x'_0(t)] dt \right\} + (3 + b_0 - a_0) \varepsilon \\
 &\leq \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r_s + b_s \cdot x'_0(t)] dt + R \Sigma' (E_s) \int (1 + |x'_0(t)|) dt + (3 + b_0 - a_0) \varepsilon \\
 (5) \quad &\leq \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r_s + b_s \cdot x'_0(t)] dt + (5 + b_0 - a_0) \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Sia ϱ il numero

$$\varrho = 2^{-1} \min [\tau, \delta_0, \delta_s, \varrho_s, s = 2, \dots, N-1, \alpha_2 - a_0, b_0 - \beta_{N-1}, (2(N-2)R)^{-1} \varepsilon].$$

Sia $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, una curva qualsiasi della classe K appartenente all'intorno (ϱ) di C_0 . Allora $|a - a_0| \leq \varrho$, $|b - b_0| \leq \varrho$ e pertanto l'intervallo $[a, b]$ contiene nel suo interno ciascuno degli $N-2$ intervalli $[\alpha_s, \beta_s]$, $s = 2, \dots, N-1$. Di più, per $t \in [\alpha_s, \beta_s]$, abbiamo $|t - t_s| \leq \varrho_s$,

$$|x(t) - x_0(t_s)| \leq |x(t) - x_0(t)| + |x_0(t) - x_0(t_s)| \leq 2^{-1} \delta_s + 2^{-1} \delta_s = \delta_s,$$

e quindi

$$f(t, x(t), x'(t)) \geq [r_s + b_s \cdot x'(t)] + c(t_s) |x'(t) - x'_0(t_s)|^2.$$

Si ha ora

$$\begin{aligned}
 I[C] &= \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) dt \geq \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} f(t, x(t), x'(t)) dt \\
 (6) \quad &\geq \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \{ [r_s + b_s \cdot x'(t)] + c(t_s) |x'(t) - x'_0(t_s)|^2 \} dt.
 \end{aligned}$$

Se indichiamo con $[a', b']$ l'unione di $[a_0, b_0]$ e $[a, b]$, e con E' l'insieme complementare degli intervalli $[\alpha_s, \beta_s]$, $s = 2, \dots, N-1$, in $[a', b']$, risulta $\text{mis } E' < |a - a_0| + |b - b_0| + \text{mis } E \leq \tau + \tau + \tau = 3\tau$. Si ha

$$\begin{aligned}
 & \sum' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t_s) |x'(t) - x'_0(t_s)|^2 - \sum' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t) |x'(t) - x'_0(t)|^2 dt \\
 &= \sum' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [c(t_s) - c(t)] |x'(t) - x'_0(t)|^2 dt + \\
 (7) \quad & + \sum' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t_s) [|x'(t) - x'_0(t_s)|^2 - |x'(t) - x'_0(t)|^2] dt \\
 &= \Delta_1 + \Delta_2.
 \end{aligned}$$

Essendo $|x'(t)|, |x'_0(t)| \leq \eta(t)$, si ha

$$\begin{aligned}
 |\Delta_1| &\leq 4 \sum' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} |c(t_s) - c(t)| \eta^2(t) dt \\
 &= 4 \sum' (B_s + E_s) \int |c(t_s) - c(t)| \eta^2(t) dt \\
 (8) \quad &\leq 4(\varepsilon/M_2) \sum' (B_s) \int \eta^2(t) dt + 8M_0 \sum' (E_s) \int \eta^2(t) dt \\
 &\leq 4(\varepsilon/M_2) \int_{a_0}^{b_0} \eta^2(t) dt + 8M_0(E) \int \eta^2(t) dt < 4(\varepsilon/M_2) M_2 + 8M_0(\varepsilon/M_0) = 12\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Osserviamo che, per a, b, c reali si ha

$$(a - b)^2 - (a - c)^2 = (b - c)^2 + 2(b - c)(c - a).$$

Se ora $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $c = (c_1, \dots, c_n)$ denotano vettori reali, si ha

$$\begin{aligned}
 ||a - b|^2 - |a - c|^2| &= |\sum_i [(a_i - b_i)^2 - (a_i - c_i)^2]| \\
 &\leq \sum_i (b_i - c_i)^2 + 2|\sum_i (b_i - c_i)(c_i - a_i)| \\
 &\leq \sum_i (b_i - c_i)^2 + 2[\sum_i (b_i - c_i)^2]^{\frac{1}{2}} [\sum_i (c_i - a_i)^2]^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

ossia

$$| | a - b |^2 - | a - c |^2 | \leq | b - c |^2 + 2 | b - c | | c - a | .$$

Abbiamo ora, essendo $0 \leq c(t_s) \leq M_0$,

$$\begin{aligned} | A_2 | &\leq \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} | | x'(t) - x'_0(t_s) |^2 - | x'(t) - x'_0(t) |^2 | c(t_s) dt \\ &\leq M_0 \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} | | x'(t) - x'_0(t_s) |^2 - | x'(t) - x'_0(t) |^2 | dt. \end{aligned}$$

Applicando la formula precedente con $a = x'(t)$, $b = x'_0(t_s)$, $c = x'_0(t)$, ed essendo $| x'(t) |$, $| x'_0(t) | \leq \eta(t)$, troviamo

$$\begin{aligned} | A_2 | &\leq M_0 \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [| x'_0(t) - x'_0(t_s) |^2 + 2 | x'_0(t) - x'_0(t_s) | | x'_0(t) - x'(t) |] dt \\ &\leq M_0 \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [| x'_0(t) - x'_0(t_s) |^2 + 4\eta(t) | x'_0(t) - x'_0(t_s) |] dt \\ &\leq M_0 \Sigma' (B_s + E_s) \int | x_0(t) - x_0(t_s) |^2 dt + 4M_0 \Sigma' (B_s + E_s) \int | x_0(t) - x_0(t_s) | \eta(t) dt \\ &\leq M_0 \Sigma' (\varepsilon/M_0) \cdot (B_s) \int dt + (E_s) \int (R + \eta(t))^2 dt \\ &\quad + 4M_0 \Sigma' (\varepsilon/M_0 M_1) \cdot (B_s) \int \eta(t) dt + (E_s) \int (R + \eta(t)) \eta(t) dt \\ &\leq \varepsilon \text{mis } B + M_0 R^2 \text{mis } E + (2M_0 R + 4M_0) \cdot (E) \int \eta(t) dt + 5M_0 \cdot (E) \int \eta^2(t) dt \\ &\leq \varepsilon(b_0 - a_0) + M_0 R^2 (\varepsilon/M_0 R^2) + (2M_0 R + 4M_0)(\varepsilon/M_0(R + 1)) + 5M_0(\varepsilon/M_0) \\ &< (b_0 - a_0 + 10) \varepsilon. \end{aligned}$$

La relazione (7) tenendo conto della (8) e (9), diventa

$$\left| \sum' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t_s) |x'(t) - x'_0(t_s)|^2 dt - \sum' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t) |x'(t) - x'_0(t)|^2 dt \right| \leq (b_0 - a_0 + 22) \varepsilon,$$

e finalmente (6) si riduce a

$$I[C] > \sum' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r_s + b_s \cdot x'(t)] dt + \sum' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t) |x'(t) - x'_0(t)|^2 dt - (b_0 - a_0 + 22) \varepsilon.$$

Dobbiamo modificare lievemente questa relazione. Allo scopo osserviamo che

$$\begin{aligned} S &\equiv \int_{\alpha'}^{b'} c(t) |x'(t) - x'_0(t)|^2 dt - \sum' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t) |x'(t) - x'_0(t)|^2 dt \\ &= (E') \int c(t) |x'(t) - x'_0(t)|^2 dt \\ &\leq 4M_0 \cdot (E') \int \eta^2(t) dt \leq 4M_0 \cdot 3(\varepsilon/M_0) = 12\varepsilon. \end{aligned}$$

La relazione precedente relativa ad $I[C]$, aggiungendo e sottraendo S e maggiorando, diventa

$$\begin{aligned} I[C] &> \sum' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r_s + b_s \cdot x'(t)] dt + \int_{\alpha'}^{b'} c(t) |x'(t) - x'_0(t)|^2 dt \\ &\quad - (b_0 - a_0 + 34) \varepsilon, \end{aligned}$$

ove il secondo integrale coincide con μ . Confrontando con la (5) si ottiene

$$\begin{aligned} I[C] - I[C_0] &\geq \sum' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} \{ [r_s + b_s \cdot x'(t)] - [r_s + b_s \cdot x'_0(t)] \} dt \\ &\quad + \mu - [39 + 2(b_0 - a_0)] \varepsilon. \\ &= \sum' b_s \cdot \{ x(\beta_s) - x_0(\beta_s) - x(\alpha_s) + x_0(\alpha_s) \} + \mu - [39 + 2(b_0 - a_0)] \varepsilon, \end{aligned}$$

ove ciascuna differenza $|x(\beta_s) - x_0(\beta_s)|$, $|x(\alpha_s) - x_0(\alpha_s)|$ è minore di $(2(N-2)R)^{-1}\varepsilon$, e d'altra parte $|b_s| \leq R$, $s = 2, \dots, N-1$. Pertanto la somma Σ' ha valore assoluto $< \varepsilon$, e quindi

$$I[C] - I[C_0] > \mu - [40 + 2(b_0 - a_0)]\varepsilon.$$

Data l'arbitrarietà di ε , la relazione (3) è con ciò dimostrata.

TEOREMA II. Sia $C_0: x = x_0(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, una curva della classe K_η . Supponiamo esista una funzione non negativa, limitata e misurabile $c(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, tale che quasi ogni punto t_0 di $[a_0, b_0]$, in cui $d_0 = x'_0(t_0)$ esiste, ha la seguente proprietà: Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un numero $\delta = \delta(t_0) > 0$ e una funzione lineare $z(d) = r + b \cdot d$ tali che, per ogni $(t, x) \in A$ ad una distanza $\leq \delta$ da $(t_0, x_0(t_0))$ si abbia

$$(10) \quad f(t, x, d) \geq z(d) + c(t_0) |d - d_0|^2 \text{ per ogni } d \in E_n,$$

$$(11) \quad f(t, x, d) \leq z(d) + \varepsilon \text{ per ogni } d \in E_n \text{ con } |d - d_0| < \delta.$$

Inoltre supponiamo che per ogni altro punto $t_0 \in [a_0, b_0]$ esistano un numero $\delta = \delta(t_0) > 0$ e una funzione lineare $z(d) = r + b \cdot d$ tali che, per ogni $(t, x) \in A$ ad una distanza $\leq \delta$ da $(t_0, x_0(t_0))$ si abbia

$$(12) \quad f(t, x, d) \geq z(d) \text{ per ogni } d \in E_n.$$

Allora, dato $\varepsilon > 0$, esiste un $\varrho > 0$ tale che, per ogni curva $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, della classe K_η e appartenente all'intorno (ϱ) di C_0 risulti

$$(13) \quad I[C] > I[C_0] - \varepsilon + \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} c(t) |x'(t) - x'_0(t)|^2 dt.$$

DIMOSTRAZIONE. Per ogni $\bar{t} \in [a_0, b_0]$ esistono un $\bar{\delta}$ e una funzione lineare $z(d) = \bar{r} + \bar{b} \cdot d$ tali che $f(t, x, d) \geq z(d)$ per ogni d e per ogni $(t, x) \in A$ con $|t - \bar{t}| < \bar{\delta}$, $|x - x_0(\bar{t})| < \bar{\delta}$. Scegliamo un numero $\bar{\varrho}$, $0 < \bar{\varrho} \leq \bar{\delta}$, tale che $|x_0(t) - x_0(\bar{t})| \leq \bar{\delta}/4$ per ogni t con $|t - \bar{t}| < \bar{\varrho}$. Un numero finito di intervalli $(\bar{t} - \bar{\varrho}, \bar{t} + \bar{\varrho})$ ricopre $[a_0, b_0]$. Riducendo la lunghezza di questi stessi intervalli possiamo sempre ottenere una suddivisione P di un intervallo $[t_0, t_N]$ lievemente più grande di $[a_0, b_0]$, diciamo $P: t_0 < a_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < b_0 < t_N$ tale che ogni intervallo $[t_{j-1}, t_j]$ è contenuto in uno degli intervalli precedenti. Denoteremo con C_{0j} , $j = 1, \dots, N$, la curva $C_{0j}: x = x_0(t)$, $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ se $j = 2, \dots, N-1$, e altrimenti la stessa curva

con a_0 al posto di t_0 se $j = 1$, e b_0 al posto di t_N se $j = N$. Nelle righe precedenti abbiamo già associato ad ogni curva C_{0j} una funzione lineare $z_j(d) = r_j + b_j \cdot d$ tale che $f(t, x, d) - z_j(d) \geq 0$ per ogni d e per ogni $(t, x) \in A$ di un intorno della curva C_{0j} nello spazio (t, x) .

Poniamo $f^{(j)}(t, x, d) = f(t, x, d) - z_j(d)$. Allora l'integrale $I^{(j)}[C] = \int f^{(j)}(t, x, x') dt$ soddisfa a tutte le ipotesi del teorema *I* rispetto alla curva C_{0j} col medesimo $c(t) \geq 0$ e funzioni lineari $z(d) = z_j(d)$, ($j = 1, \dots, N$). Dato $\varepsilon > 0$, applichiamo il teorema *I* a ciascuna curva C_{0j} ottenendo il numero $\eta_j > 0$ corrispondente a C_{0j} ed al numero ε/N al posto di ε . Posto $R = \max r_j, |b_j|$, $j = 1, \dots, N$, prendiamo

$$\varrho = 2^{-1} \min [\eta_1, \dots, \eta_N, a_0 - t_0, t_1 - a_0, b_0 - t_{N-1}, t_N - b_0, (3RN)^{-1} \varepsilon],$$

e sia $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, una qualsiasi curva di classe K_η appartenente all'intorno (ϱ) di C_0 . Allora si ha $t_0 < a < t_1$, $t_{N-1} < b < t_N$, e, se indichiamo con C_j , $j = 1, \dots, N$, le curve rappresentate da $C_j: x = x(t)$ quando t varia nel rispettivo intervallo $[a, t_1]$, $[t_{j-1}, t_j]$; $j = 2, \dots, N-1$, $[t_{N-1}, b]$, allora si ha $\|C_j, C_{0j}\| < \eta_j$, $j = 1, \dots, N$. Pertanto

$$I^{(j)}[C_j] > I^{(j)}[C_{0j}] - N^{-1} \varepsilon + \int_{t_{j-1}}^{t_j} c(t) |x'(t) - x'_0(t)|^2 dt,$$

per ogni $j = 1, \dots, N$, e ove scriveremo $\bar{a}$ al posto di t_0 per $j = 1$, e $\bar{b}$ al posto di t_N per $j = N$. D'altra parte

$$I[C_j] - I[C_{0j}] = I^{(j)}[C_j] - I^{(j)}[C_{0j}] + A_j,$$

ove

$$A_j = \int_{t_{j-1}}^{t_j} [r_j + b_j \cdot x'(t)] dt - \int_{t_{j-1}}^{t_j} [r_j + b_j \cdot x'_0(t)] dt,$$

con le ovvie convezioni circa t_0 e t_N per $j = 1$ e $j = N$ in ciascun integrale. Per $j = 2, \dots, N-1$, si ha

$$\begin{aligned} |A_j| &= \left| \int_{t_{j-1}}^{t_j} b_j \cdot [x'(t) - x'_0(t)] dt \right| \\ &= |b_j \cdot [x(t_j) - x_0(t_j) - x'(t_{j-1}) + x'_0(t_{j-1})]| \\ &\leq 2R\varrho < N^{-1} \varepsilon. \end{aligned}$$

Indicando con $a'' = \max[a, a_0]$ e con $a' = \min[a, a_0]$, abbiamo poi

$$\begin{aligned} |A_1| &\leq \int_{a'}^{a''} |r_1| \eta(t) dt + \left| \int_{a'}^{t_1} b_1 \cdot [x'(t) - x'_0(t)] dt \right| \\ &\leq R\rho + 2R\rho = 3R\rho \leq N^{-1}\varepsilon, \end{aligned}$$

e analogamente $|A_N| \leq N^{-1}\varepsilon$. Pertanto

$$I[C_j] - I[C_0] - 2N^{-1}\varepsilon + \int_{t_{j-1}}^{t_j} c(t) |x'(t) - x'_0(t)|^2 dt,$$

per ogni $j = 1, \dots, N$, e ove scriveremo $\bar{a}$ al posto di t_0 per $j = 1$, e $\bar{b}$ al posto di t_N per $j = N$. Sommando rispetto a j abbiamo

$$I[C] > I[C_0] - 2\varepsilon + \mu,$$

per ogni curva C della classe K_η con $\|C, C_0\| < \rho$. Il teorema II è così completamente dimostrato.

OSSERVAZIONE. Le condizioni dei teoremi I e II sono certamente soddisfatte con $c(t) > 0$ se $f(t, x, d)$ è continua in $A \times E_n$, se per ogni $(t, x) \in A$ la funzione $f(t, x, d)$ è di classe C^2 in $d = (d_1, \dots, d_n)$, con derivate continue in $A \times E_n$ e se esiste una costante $\gamma > 0$ tale che

$$\sum_{ij} f_{d_i d_j} \xi_i \xi_j \geq \gamma |\xi|^2$$

per ogni $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in E_n$, ove $f_{d_i d_j} = \partial^2 f / \partial d_i \partial d_j$.

COROLLARIO. Se $C_k: x = x_k(t)$, $a_k \leq t \leq b_k$, $k = 1, 2, \dots$, è una successione minimizzante per l'integrale $I[C]$ in una sottoclasse completa $K_{0\eta}$ di K_η , se C_{k_s} , $s = 1, 2, \dots$, è una sottosuccessione convergente con limite $C_0: x = x_0(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, cioè $\|C_{k_s}, C_0\| \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$, e se la curva C_0 soddisfa le ipotesi dei teoremi I o II, allora si ha necessariamente

$$(15) \quad C_0 \in K_{0\eta}, \quad I[C_0] = \lim I[C_{k_s}], \quad \lim \int_{\bar{a}}^{\bar{b}} c(t) |x'_{k_s}(t) - x'_0(t)|^2 dt = 0.$$

In altre parole, la sottosuccessione C_{k_s} , oltre che essere convergente nella metrica $\| \quad \|$ (topologia uniforme), è anche convergente nella metrica della convergenza L^2 con peso $c(t)$ sulle derivate.

DIMOSTRAZIONE. Sia $i = \inf I[C]$, ove $\inf$ è preso nella classe $K_{0\eta}$. Essendo $C_k, k = 1, 2, \dots$, una successione minimizzante in $K_{0\eta}$, abbiamo $i = \lim I[C_k]$ quando $k \rightarrow \infty$, e perciò anche $i = \lim I[C_{k_s}]$ quando $s \rightarrow \infty$. Qui i è certamente finito. Infatti, se C_0 soddisfa le ipotesi del teorema I, allora $f \geq 0$ in un intorno di C_0 e quindi $I[C_{k_s}] \geq 0$ per ogni s abbastanza grande e quindi $i \geq 0$. Se C_0 soddisfa le ipotesi del teorema II allora il ragionamento fatto per il teorema II mostra che la successione $I[C_{k_s}]$, $s = 1, 2, \dots$, è limitata inferiormente e quindi di nuovo i è finito. Possiamo ora supporre

$$i \leq I[C_k] \leq i + k^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Indichiamo con μ_{k_s} l'integrale nella terza relazione (15). Dato $\varepsilon > 0$, dai teoremi I e II risulta che, per ogni s sufficientemente grande, si ha

$$i + 1/k_s > I[C_{k_s}] > I[C_0] - \varepsilon + \mu_{k_s}.$$

D'altra parte $C_0 \in K_{0\eta}$ essendo $K_{0\eta}$ una classe completa e pertanto $I[C_0] \geq i$. Dunque

$$i \leq I[C_0] < i + 1/k_s + \varepsilon - \mu_{k_s}$$

per ogni s sufficientemente grande, e quindi

$$0 \leq \mu_{k_s} < \varepsilon + 1/k_s.$$

Dunque $\mu_{k_s} \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow \infty$ e, dalla relazione precedente, anche $I[C_0] = i$. Le relazioni (15) sono con ciò dimostrate.

OSSERVAZIONE. Nelle ipotesi del corollario, $C_k \in K_{0\eta}$ implica $|x'_k(t)| \leq \eta(t)$ ove $\eta(t)$ è una funzione fissa integrabile (col suo quadrato in $[a, b]$). Questo implica a sua volta che le funzioni $x_k(t)$ sono equicontinue e persino equiassolutamente continue. D'altra parte $(t, x_k(t)) \in A$ per ogni t e k , ove A è un insieme chiuso e limitato in E_{n+1} . Dunque, nelle ipotesi del corollario esiste sicuramente una sottosuccessione convergente in forza del teorema di Ascoli.

OSSERVAZIONE. Può accadere che non tutte le componenti $d_j, j = 1, \dots, n$, di d compaiono esplicitamente in $f(t, x, d)$. Per fissare le idee supponiamo che f sia una funzione $f(t, x_1, \dots, x_n, d_1, \dots, d_m)$ contenente solo

le prime m delle n componenti d_j di d , $0 \leq m \leq n$. I teoremi I e II e le rimanenti considerazioni valgono ancora purchè tutte le disuguaglianze (nelle ipotesi e nelle asserzioni) vengano espresse nei termini del vettore $(d_1, \dots, d_m)$, e in particolare l'espressione $|x'(t) - x'_0(t)|^2$ venga sostituita ovunque con

$$\sum_{j=1}^m [x'_j(t) - x'_{0j}(t)]^2.$$

OSSERVAZIONE. La tecnica dei piani d'appoggio usata nei teoremi I e II è la ben nota tecnica usata da Tonelli per teoremi di semicontinuità⁽⁹⁾.

4. Teoremi di confronto con curve della classe K .

TEOREMA III. Sia $C_0: x = x_0(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, una curva della classe K . Sia $\bar{x}'_0(t)$, $a_0 \leq t \leq b_0$, un vettore funzione definito per ogni $a_0 \leq t \leq b_0$. Sia $c(t)$ una funzione scalare continua in $[a_0, b_0]$. Siano $r = r(t, \varepsilon)$ scalare, $b = b(t, \varepsilon)$ vettore, entrambi funzioni di (t, ε) per $a_0 \leq t \leq b_0$, $0 < \varepsilon \leq 1$, e sia z la funzione lineare in d definita per ogni $(t, \varepsilon) \in [a_0, b_0] \times (0, 1]$ da $z = z(t, d, \varepsilon) = r(t, \varepsilon) + b(t, \varepsilon) \cdot d$, $d \in E_n$. Supponiamo che (α) $\bar{x}'_0(t) = x'_0(t)$ quasi dappertutto in $[a_0, b_0]$, e $|\bar{x}'_0(t)| \leq M$ per ogni $a_0 \leq t \leq b_0$, ove M è una costante; (β) $0 < r \leq c(t) \leq M_0$ per ogni $a_0 \leq t \leq b_0$ ove $0 < r \leq M_0$ sono due costanti; (γ) per ogni $t_0 \in [a_0, b_0]$ esiste un $\delta = \delta(t_0, \varepsilon, C_0) > 0$ tale che per ogni $(t, x) \in A$ ad una distanza $\leq \delta$ da $(t_0, x_0(t_0))$ sia

$$(16) \quad f(t, x, d) \geq z(t_0, d, \varepsilon) + c(t_0) |d - \bar{x}'_0(t_0)|^2 \quad \text{per ogni } d \in E_n,$$

$$(17) \quad f(t, x, d) \leq z(t_0, d, \varepsilon) + \varepsilon \quad \text{per ogni } d \in E_n \quad \text{con } |d - \bar{x}'_0(t_0)| \leq \delta.$$

Allora, dati due numeri $0 < \varepsilon \leq 1$, $0 < \varphi < 1$, esiste un $\varrho = \varrho(\varepsilon, \varphi, C_0)$ tale che, per ogni curva $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, della classe K appartenente all'intorno (ϱ) di C_0 , risulta

$$(18) \quad I[C] > I[C_0] - \varepsilon + \varphi \int_a^b c(t) |x'(t) - \bar{x}'_0(t)|^2 dt.$$

DIMOSTRAZIONE. La dimostrazione è divisa nelle parti (a), (b), (c), (d). Anche qui, come per i teoremi I e II, supponiamo che A sia un insieme

⁽⁹⁾ L. TONELLI, *Sugli integrali del calcolo delle variazioni in forma ordinaria*, Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, (2) 3, 1934, 401-450, oppure, L. TONELLI, *Opere Scelte*, 3, 192-253.

compatto di $E_1 \times E_n$, e che $f(t, x, d)$ sia una funzione continua di (t, x, d) in $A \times E_n$.

(a) Supporremo anzitutto che esista un $\delta_0 > 0$ tale che si abbia $f(t, x, d) \geq 0$ per ogni $d \in E_n$ e per ogni $(t, x) \in A$ ad una distanza $\leq \delta_0$ da $[C_0]$. In altre parole, dimostriamo prima il teorema III in una situazione simile a quella del teorema I. Diciamo A_0 il sottoinsieme compatto di tutti i punti $(t, x) \in A$ ad una distanza $\leq \delta_0$ da $[C_0]$. Indichiamo con μ l'ultimo integrale nella (18). Denotiamo con Z l'insieme compatto di tutti i punti $(t, x, d) \in E_1 \times E_n \times E_n$ con $(t, x) \in A_0$, $|d| \leq M + 1$. Allora f è continua in Z , e quindi limitata e uniformemente continua in Z . Esiste un $M_2 > 0$ tale che $0 \leq f(t, x, d) \leq M_2$ in Z . Di più, dato $\varepsilon_0 = 1$, esiste un $l > 0$ tale che $|f(t, x, d) - f(t_0, x_0, d_0)| \leq 1$ per ogni coppia (t, x, d) , (t_0, x_0, d_0) di punti di Z aventi mutua distanza $\leq l$. Possiamo supporre $0 < l \leq 1$. Ora si noti che

$$\begin{aligned} z &= z(t, d, \varepsilon) = r(t, \varepsilon) + b(t, \varepsilon) \cdot d \\ &= z(t, \bar{x}'_0(t), \varepsilon) + b(t, \varepsilon) \cdot (d - \bar{x}'_0(t)), \end{aligned}$$

per ogni $(t, \varepsilon) \in [a_0, b_0] \times (0, 1]$. In forza delle (16) e (17) si ha poi

$$\begin{aligned} M_2 &\geq f(t, x_0(t), \bar{x}'_0(t)) \geq z(t, \bar{x}'_0(t), \varepsilon), \\ -M_2 &\leq f(t, x_0(t), \bar{x}'_0(t)) \leq z(t, \bar{x}'_0(t), \varepsilon) + \varepsilon, \end{aligned}$$

per ogni $(t, \varepsilon) \in [a_0, b_0] \times (0, 1]$. Dunque si ha, successivamente,

$$-M_2 - 1 \leq f(t, x_0(t), \bar{x}'_0(t)) - \varepsilon \leq z(t, \bar{x}'_0(t), \varepsilon) \leq f(t, x_0(t), \bar{x}'_0(t)) \leq M_2,$$

$$(19) \quad |z(t, \bar{x}'_0(t), \varepsilon)| \leq M_2 + 1,$$

per ogni $(t, \varepsilon) \in [a_0, b_0] \times (0, 1]$.

(b) Dimostriamo che

$$(20) \quad |b(t, \varepsilon)| \leq 2/l$$

per ogni $(t, \varepsilon) \in [a_0, b_0] \times (0, 1]$. Basta dimostrare questa relazione per ogni t con $b(t, \varepsilon) \neq 0$. Se $b(t, \varepsilon) \neq 0$, si prenda

$$d = \bar{x}'_0(t) + b(t, \varepsilon) l / |b(t, \varepsilon)|,$$

onde $|d - \bar{x}'_0(t)| = l \leq 1$, e quindi anche

$$(21) \quad \begin{aligned} (t, x_0(t), \bar{x}'_0(t)) &\in Z, \quad (t, x_0(t), d) \in Z, \\ |f(t, x_0(t), d) - f(t, x_0(t), \bar{x}'_0(t))| &\leq 1. \end{aligned}$$

In forza della (16) si ha

$$(22) \quad \begin{aligned} f(t, x_0(t), d) &\geq z(t, d, \varepsilon) = z(t, \bar{x}'_0(t), \varepsilon) + b(t, \varepsilon) \cdot (d - \bar{x}'_0(t)) \\ &= z(t, \bar{x}'_0(t), \varepsilon) + |b(t, \varepsilon)| l. \end{aligned}$$

Infine dalle (17) con $d = \bar{x}'_0(t)$ si ha

$$(23) \quad f(t, x_0(t), \bar{x}'_0(t)) \leq z(t, \bar{x}'_0(t), \varepsilon) + \varepsilon.$$

Combinando le relazioni (21), (22), (23) otteniamo

$$\begin{aligned} 1 &\geq f(t, x_0(t), d) - f(t, x_0(t), \bar{x}'_0(t)) \\ &\geq z(t, \bar{x}'_0(t), \varepsilon) + |b(t, \varepsilon)| l - f(t, x_0(t), \bar{x}'_0(t)) \\ &\geq -\varepsilon + |b(t, \varepsilon)| l, \end{aligned}$$

e finalmente $|b(t, \varepsilon)| \leq (1 + \varepsilon)/l \leq 2/l$, $0 < \varepsilon \leq 1$. La relazione (20) è così dimostrata per ogni $a_0 \leq t \leq b_0$. Si noti che combinando (19) e (20) con la definizione $z = r(t, \varepsilon) + b(t, \varepsilon) \cdot d$ della funzione z , otteniamo anche

$$(24) \quad \begin{aligned} r(t, \varepsilon) &= z(t, \bar{x}'_0(t), \varepsilon) - b(t, \varepsilon) \cdot \bar{x}'_0(t) \\ &\leq M_2 + 1 + 2l^{-1}M. \end{aligned}$$

(c) Dimostriamo che esiste un $l' > 0$ tale che, per ogni curva $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, della classe K , appartenente all'intorno (l') di C_0 , risulta

$$(25) \quad |x'(t)| \leq M + 2^{\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} [f(t, x(t), x'(t)) + M_2 + 1 + 2\nu^{-1} l^{-2}]^{\frac{1}{2}},$$

e pertanto $x'(t)$ è a quadrato integrabile in $[a, b]$.

Per ogni $\bar{t} \in [a_0, b_0]$ e preso $\varepsilon_0 = 1$, esiste un $\delta = \delta(t, \varepsilon_0, C_0) > 0$ per cui valgono (16) e (17). Prendiamo un numero ϱ , $0 < \varrho \leq \delta/4$, così piccolo che $x_0(t)$ abbia una oscillazione $< \delta/4$ sul corrispondente intervallo $(\bar{t} - \varrho, \bar{t} + \varrho)$.

Gli intervalli $(\bar{t} - \varrho, \bar{t} + \varrho)$ costituiscono un ricoprimento di $[a_0, b_0]$. Un numero finito di tali intervalli ricoprono $[a_0, b_0]$, diciamo $(t_j - \varrho_j, t_j + \varrho_j)$, $j = 1, \dots, p$. Con opportune riduzioni possiamo ottenere una suddivisione $[\alpha_s, \beta_s]$, $s = 1, \dots, N$, di un intervallo $[a'_0, b'_0]$ contenente nel suo interno $[a_0, b_0]$ e tale che ogni intervallo $[\alpha_s, \beta_s]$ è parte di un intervallo $(t_j - \varrho_j, t_j + \varrho_j)$. Denoteremo con t_s, δ_s, ϱ_s rispettivamente il punto t_j e i numeri δ_j, ϱ_j relativi ad $[\alpha_s, \beta_s]$. Poniamo

$$l' = 2^{-1} \min [\delta_0, l, \delta_1, \dots, \delta_N, a_0 - a'_0, b'_0 - b_0].$$

Sia $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, una qualsiasi curva della classe K appartenente all'intorno (l') di C_0 . Allora $a'_0 < a < b < b'_0$, $|a - a_0| \leq l'$, $|b - b_0| \leq l'$. Per ogni $s = 1, \dots, N$ e per ogni $\alpha_s \leq t \leq \beta_s$ si ha ora

$$\begin{aligned} f(t, x(t), x'(t)) &\geq z(t_s, \bar{x}'_0(t_s), \varepsilon) + b(t_s, \varepsilon) \cdot [x'(t) - \bar{x}'_0(t_s)] \\ &\quad + c(t_s) |x'(t) - \bar{x}'_0(t_s)|^2, \end{aligned}$$

e quindi anche

$$\begin{aligned} (26) \quad f(t, x(t), x'(t)) &\geq -M_2 - 1 + b(t_s, \varepsilon) \cdot [x'(t) - \bar{x}'_0(t_s)] \\ &\quad + c(t_s) |x'(t) - \bar{x}'_0(t_s)|^2. \end{aligned}$$

Per ogni $\lambda > 0$ ed α, β reali si ha

$$0 \leq (\lambda\alpha + \lambda^{-1}\beta)^2 = \lambda^2\alpha^2 + \lambda^{-2}\beta^2 + 2\alpha\beta$$

e quindi come è noto

$$|\alpha\beta| \leq 2^{-1}\lambda^2\alpha^2 + 2^{-1}\lambda^{-2}\beta^2.$$

Analogamente, se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ sono vettori reali, si ha

$$\begin{aligned} |\alpha \cdot \beta| &= |\sum_i \alpha_i \beta_i| \leq \sum_i (2^{-1}\lambda^2\alpha_i^2 + 2^{-1}\lambda^{-2}\beta_i^2) \\ &\leq 2^{-1}\lambda^2 |\alpha|^2 + 2^{-1}\lambda^{-2} |\beta|^2. \end{aligned}$$

Pertanto

$$|b(t_s, \varepsilon) \cdot [x'(t) - \bar{x}'_0(t_s)]| \leq 2^{-1}\lambda^2 |x'(t) - \bar{x}'_0(t_s)|^2 + 2^{-1}\lambda^{-2} |b(t_s, \varepsilon)|^2.$$

Infine, in forza della (26) si ha

$$\begin{aligned} [c(t_s) - 2^{-1}\lambda^2] |x'(t) - \bar{x}'_0(t_s)|^2 &\leq \\ &\leq f(t, x(t), x'(t)) + M_2 + 1 + 2^{-1}\lambda^{-2} |b(t_s, \varepsilon)|^2. \end{aligned}$$

Essendo $c(t) \geq \nu > 0$, e prendendo λ così che $\lambda^2 = \nu$ risulta $c(t_s) - 2^{-1} \lambda^2 \geq \nu/2$, e infine

$$|x'(t) - \bar{x}'_0(t_s)|^2 \leq 2\nu^{-1} [f(t, x(t), x'(t)) + M_2 + 1 + 2^{-1} \nu^{-1} |b(t_s, \varepsilon)|^2].$$

Essendo $|\bar{x}'_0(t)| \leq M$, $|b(t, \varepsilon)| \leq 2l^{-1}$ per ogni t , risulta

$$|x'(t)| \leq M + 2^{\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} [f(t, x(t), x'(t)) + M_2 + 1 + 2\nu^{-1} l^{-2}]^{\frac{1}{2}}$$

per ogni $\alpha_s \leq t \leq \beta_s$, e quindi anche per ogni $a \leq t \leq b$. La relazione (25) è così dimostrata.

(d) Siano $0 < \varphi < 1$, $0 < \varepsilon \leq 1$ due numeri arbitrari. Sia P il numero

$$(27) \quad P = 8M^2 + 4\nu^{-1}(M_2 + 1) + 6\nu^{-2} l^{-2}.$$

Sia γ il massimo numero reale tale che

$$\gamma \leq (1 - \varphi)(2\varphi)^{-1}, \quad 2\gamma I[C_0] \leq \varepsilon/2,$$

e pertanto $(1 + 2\gamma)^{-1} \geq \varphi$. Sia σ il massimo numero reale tale che

$$\sigma \leq \varepsilon/10, \quad \sigma \leq \gamma/2.$$

Sia η il massimo numero reale tale che

$$\begin{aligned} (28) \quad & M_2 \eta \leq \sigma, \quad [5 + b_0 - a_0 + 5(M_2 + 1 + 4l^{-1}M)] \eta \leq \sigma, \\ & 4\eta \nu^{-1} \leq \sigma, \quad (b_0 - a_0 + 1)P\eta + 4\eta^2 \nu^{-1} M_2 \leq \sigma, \\ & 2\eta^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}} M_0(b_0 - a_0 + 1 + 4M^2) \leq \sigma, \quad 4\eta^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}} M_0(b_0 - a_0 + 4M^2)^{\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} \leq \sigma, \\ & 12\eta^{\frac{1}{2}} M_0 M(b_0 - a_0 + 1)^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} \leq \sigma, \quad 24\eta^{\frac{1}{2}} M_0 M \nu^{-\frac{1}{2}} \leq \sigma. \end{aligned}$$

Ovviamente $\gamma, \sigma, \eta > 0$. La funzione $f(t, x_0(t), x'_0(t))$ è integrabile in $[a_0, b_0]$. Pertanto, esiste un numero $\tau > 0$ tale che per ogni insieme $E \subset [a_0, b_0]$ con $\text{mis } E < \tau$ risulta

$$(E) \int f(t, x_0(t), x'_0(t)) dt < \eta,$$

e possiamo assumere $\tau \leq \eta$. La funzione $c(t)$ è continua in $[a_0, b_0]$. Pertanto esiste un numero $l'' > 0$ tale che la funzione $c(t)$ ha una oscillazione $< \eta$ in ogni intervallo di lunghezza $\leq l''$.

In forza del teorema di Lusin esiste un insieme chiuso $B \subset [a_0, b_0]$ tale che $x'_0(t)$ esiste in B ed è continua in B . Possiamo assumere che ogni $t \in B$ soddisfi la condizione (α) del teorema e che $\text{mis } B > b_0 - a_0 - \tau$. Per ogni $\bar{t} \in B$ prendiamo $\delta = \delta(\bar{t}, \eta, C_0) > 0$ e prendiamo un ϱ tale che $0 < \varrho \leq \min[\delta/4, l, l'', \tau/2]$, tale che $|x'_0(t) - x'_0(\bar{t})| < \min[\delta/4, \eta^{\frac{1}{2}}]$ per ogni $t \in B$ con $|t - \bar{t}| \leq \varrho$, e tale che $|x_0(t) - x_0(\bar{t})| < \delta/4$ per ogni $t \in [a_0, b_0]$ con $|t - \bar{t}| \leq \varrho$. Si noti che $\bar{x}'_0(t) = x'_0(\bar{t})$.

Gli intervalli $(\bar{t} - \varrho, \bar{t} + \varrho)$ formano un ricoprimento di B . Pertanto, un numero finito di intervalli $(\bar{t} - \varrho, \bar{t} + \varrho)$ ricoprono B . Diciamo I_j , $j = 1, \dots, p$, tali intervalli, e $t_j, \delta_j, \varrho_j, z_j(d) = r_j + b_j \cdot d = r(t_j, \eta) + b(t_j, \eta) \cdot d$ siano rispettivamente il centro di I_j , i due numeri e la funzione lineare associata a I_j . Sia $R = \max[|r_j|, |b_j|, j = 1, \dots, p]$. Sia $\xi > 0$ un numero abbastanza piccolo affinché sia $\xi \leq \eta/R$, $\xi \leq \tau$, e inoltre $(H) \int |x'_0(t)| dt < \eta/R$ per ogni insieme misurabile $H \subset [a_0, b_0]$ con $\text{mis } H < \xi$.

Sia G un insieme aperto in $[a_0, b_0]$ tale che $G \supset B$, $\text{mis}(G - B) < \xi$. L'insieme aperto G è l'unione numerabile di intervalli aperti senza punti in comune. Dato che B è compatto, un numero finito di questi intervalli aperti già ricopre B . Dunque, possiamo assumere che G sia l'unione finita di intervalli aperti senza punti in comune. Ne consegue che anche gli insiemi $G \cap I_j$, $j = 1, \dots, p$, sono un numero finito di intervalli. Con eventuali riduzioni, possiamo ottenere un gruppo finito di intervalli chiusi ricoprenti B e senza punti interni in comune. Possiamo anche trascurare tutti quelli che non contengono punti di B . Di tutti questi intervalli, in numero finito, diremo $[\alpha_{01}, \beta_{01}]$ quello più vicino ad a_0 , $[\alpha_{02}, \beta_{02}]$ quello più vicino a b_0 , e $[\alpha_s, \beta_s]$, $s = 1, \dots, N'$, tutti i rimanenti. Essendo $\varrho \leq \tau/2$, sappiamo già che ciascuno di questi intervalli ha lunghezza $\leq \tau$. Siano B_{01}, B_{02}, B_s le intersezioni di B con ciascuno di questi intervalli. Sia $E_s = [\alpha_s, \beta_s] - B_s$, $s = 1, \dots, N'$, e sia $E = E_1 \cup \dots \cup E_{N'}$.

Denotiamo con Σ' , $\cup'$ somme o unioni estese a tutti i valori dell'indice $s = 1, \dots, N'$. Si noti che

$$E \subset \cup' [\alpha_s, \beta_s] - B \subset G - B, \quad \text{mis } E \leq \text{mis}(G - B) < \xi.$$

Si noti che $[a_0, b_0] - \cup' [\alpha_s, \beta_s]$ è un gruppo finito di intervalli di cui uno ha un punto estremo in a_0 , e uno ha un punto estremo in b_0 , e che

$$[a_0, b_0] - \cup' [\alpha_s, \beta_s] \subset B_{01} \cup B_{02} \cup ([a_0, b_0] - B),$$

$$\text{mis}([a_0, b_0] - \cup' [\alpha_s, \beta_s]) \leq \tau + \tau + \tau = 3\tau.$$

Si ha ora, come nella dimostrazione del teorema I,

$$\begin{aligned}
 I[C_0] &= \int_{a_0}^{b_0} f(t, x_0(t), x'_0(t)) dt \leq (B) \int f(t, x_0(t), x'_0(t)) dt + \eta \\
 &= \Sigma'(B_s) \int f(t, x_0(t), x'_0(t)) dt + (B_{01} \cup B_{02}) \int f(t, x_0(t), x'_0(t)) dt + \eta \\
 &\leq \Sigma'(B_s) \int [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x'_0(t)] dt + (3 + b_0 - a_0) \eta \\
 &= \Sigma' \left\{ \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x'_0(t)] dt - (E_s) \int [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x'_0(t)] dt \right. \\
 &\quad \left. + (3 + b_0 - a_0) \eta \right. \\
 (30) \quad &\leq \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x'_0(t)] dt + R \Sigma'(E_s) \int (1 + |x'_0(t)|) dt \\
 &\quad \left. + (3 + b_0 - a_0) \eta \right. \\
 &\leq \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x'_0(t)] dt + (5 + b_0 - a_0) \eta.
 \end{aligned}$$

Consideriamo l'insieme compatto $F = [a_0, b_0] - \cup'(\alpha_s, \beta_s)$. Per ogni $\bar{t} \in F$ prendiamo $\bar{\delta} = \delta(\bar{t}, \eta, C_0) \geq 0$ e un numero $0 < \bar{\varrho} \leq \min[\bar{\delta}/4, l, l'', \tau/2, \delta/2, 1/2]$. Possiamo prendere $\bar{\varrho}$ in modo che $x_0(t)$ abbia una oscillazione $< \bar{\delta}/4$ nello stesso intervallo. Gli intervalli $(\bar{t} - \bar{\varrho}, \bar{t} + \bar{\varrho})$ formano un ricoprimento di F . Pertanto, un numero finito di questi intervalli ricoprono F , diciamo $I_j, j = p+1, \dots, q$. Siano $t_j, \delta_j, \varrho_j, z_j(d) = r_j + b_j \cdot d = r(t_j, \eta) + b(t_j, \eta) \cdot d$ al solito il centro di I_j , i due numeri e la funzione lineare associati ad I_j . Abbandoneremo ora tutti gli intervalli I_j e quelle parti di questi intervalli che sono completamente contenute in qualche intervallo $[\alpha_s, \beta_s], s = 1, \dots, N'$. Ridurremo poi i rimanenti intervalli così da ottenere un nuovo sistema finito di intervalli $[\alpha_s, \beta_s], s = N' + 1, \dots, N$, senza punti interni in comune e senza punti interni in comune con i precedenti. È evidente che il sistema complessivo $[\alpha_s, \beta_s], s = 1, \dots, N$, forma una suddivisione di un intervallo $[a'_0, b'_0]$ contenente $[a_0, b_0]$ nel suo interno.

Denoteremo come sopra con t_s , δ_s , ϱ_s , $z_s(d)$ il punto t_j , i due numeri δ_j , ϱ_j e la funzione lineare $z_j(d)$ relativi all'intervallo $[\alpha_s, \beta_s]$, $s = N' + 1, \dots, N$. Denoteremo con Σ'' , $\mathcal{U}''$ qualsiasi somma o unione estesa ai valori dell'indice $s = N' + 1, \dots, N$.

Degli intervalli $[\alpha_s, \beta_s]$, $s = N' + 1, \dots, N$, uno contiene a_0 nel suo interno e un altro contiene b_0 nel suo interno, diciamo $\alpha_{s'} < a_0 < \beta_{s'}$, $\alpha_{s''} < b_0 < \beta_{s''}$. Converterà rinumerare tutti gli intervalli $[\alpha_s, \beta_s]$, $s = 1, \dots, N$, così che $[\alpha_{s'}, \beta_{s'}]$ sia ora $[\alpha_1, \beta_1]$, e $[\alpha_{s''}, \beta_{s''}]$ sia ora $[\alpha_N, \beta_N]$, e

$$a'_0 = \alpha_1 < a_0 < \beta_1 = \alpha_2 < \dots < \beta_{N-1} = \alpha_N < b_0 < \beta_N = b'_0.$$

Naturalmente Σ' , $\mathcal{U}'$, e Σ'' , $\mathcal{U}''$ denoteranno ancora somme e unioni relative agli stessi intervalli già indicati avanti, intervalli che ora avranno indici diversi. Si noti che $a_0 - a'_0$, $b'_0 - b_0 \leq \min [\tau/2, 1/2]$, e pertanto $b'_0 - a'_0 \leq b_0 - a_0 + \tau$, $b'_0 - a'_0 \leq b_0 - a_0 + 1$.

Sia

$$\zeta = \min [\alpha_0 - \alpha_1, \beta_1 - \alpha_0, b_0 - \alpha_N, \beta_N - b_0, \beta_s - \alpha_s, s = 1, \dots, N],$$

e prendiamo

$$\varrho = 2^{-1} \min [\xi, l, l', \delta_s, \varrho_s, s = 1, \dots, N, \zeta, \delta_0, 4^{-1} l N^{-1} \sigma].$$

Sia $C: x = x(t)$, $a \leq t \leq b$, una curva qualsiasi di classe K appartenente all'intorno (ϱ) di C_0 . Allora $|a - a_0| \leq \varrho$, $|b - b_0| \leq \varrho$, con $\varrho \leq \xi/2$, e quindi $[a, b]$ contiene ciascun intervallo $[\alpha^s, \beta^s]$, $s = 2, \dots, N - 1$, mentre $\alpha_1 < a < \beta_1$, $\alpha_N < b < \beta_N$, $\alpha_1 < a_0 < \beta_1$, $\alpha_N < b_0 < \beta_N$.

Poniamo $a'' = \min [a, a_0]$, $b'' = \max [b, b_0]$, e riduciamo gli intervalli estremi $[\alpha_1, \beta_1]$, $[\alpha_N, \beta_N]$ così che d'ora in poi avremo $\alpha_1 = a''$, $\beta_N = b''$. L'intervallo $[a'', b'']$ è interno all'intervallo $[a', b']$ e quindi $b'' - a'' < b_0 - a_0 + \tau$, $b'' - a'' < b_0 - a_0 + 1$.

Per ogni $t \in [\alpha_s, \beta_s]$, $s = 1, \dots, N$, si ha

$$|x(t) - x_0(t_s)| \leq |x(t) - x_0(t)| + |x_0(t) - x_0(t_s)| \leq \delta_s/4 + \delta_s/4 = \delta_s/2,$$

con la solita convenzione circa l'estensione di $x(t)$ e $x_0(t)$, e quindi

$$f(t, x(t), x'(t)) \geq r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x'(t) + c(t_s) |x'(t) - \bar{x}'_0(t_s)|^2.$$

Si noti che in queste relazioni per $a_0 < a$, $s = 1$, $t < a$, si ha $x(t) = x(a)$, $x'(t) = 0$, e per $a < a_0$, $s = 1$, $t \leq a_0$ si ha $x_0(t) = x_0(a_0)$. Nelle stesse relazioni, per $b < b_0$, $s = N$, $t > b$, si ha $x(t) = x(b)$, $x'(t) = 0$, e per

$b_0 < b$, $s = N$, $t > b_0$ si ha $x_0(t) = x_0(b_0)$. Di più, per $a_0 < a$, $a_0 \leq t \leq a$, scriveremo $f(t, x(t), x'(t))$, ossia $f(t, x(a), 0)$, per $f(a, x(a), 0)$. Con questa convenzione si è certi che $(a, x(a), 0)$ appartiene all'insieme $A_0 \times E_n$, e d'altra parte le solite disuguaglianze (16) e (17) seguitano a valere. Analogamente, per $b < b_0$, $b \leq t \leq b_0$, scriveremo $f(t, x(t), x'(t))$, ossia $f(t, x(b), 0)$, per $f(b, x(b), 0)$. Si noti che

$$(31) \quad \left| \int_a^{a''} f(t, x(t), x'(t)) dt \right| + \left| \int_{b''}^b f(t, x(t), x'(t)) dt \right| \\ \leq M_2 [|a - a''| + |b'' - b|] \leq M_2 \tau \leq M_2 \eta \leq \sigma.$$

Con queste convenzioni si ha ora

$$(32) \quad I[C] = \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) dt \\ = \int_a^{a''} f(t, x(a), 0) dt + \int_{b''}^b f(t, x(b), 0) dt + \int_{a''}^{b''} f(t, x(t), x'(t)) dt \\ = \int_a^{a''} f(t, x(a), 0) dt + \int_{b''}^b f(t, x(b), 0) dt + (\Sigma' + \Sigma'') \int_{a_s}^{\beta_s} f(t, x(t), x'(t)) dt \\ \geq \int_a^{a''} f(t, x(a), 0) dt + \int_{b''}^b f(t, x(b), 0) dt \\ + (\Sigma' + \Sigma'') \int_{a_s}^{\beta_s} \{ [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x'(t)] + c(t_s) |x'(t) - \bar{x}'_0(t_s)|^2 \} dt.$$

Dobbiamo ora modificare le relazioni (30) e (32) prima di confrontarle. Si noti che

$$S \equiv (\Sigma' + \Sigma'') \int_{a_s}^{\beta_s} c(t_s) |x'(t) - \bar{x}'_0(t_s)|^2 - (\Sigma' + \Sigma'') \int_{a_s}^{\beta_s} c(t) |x'(t) - x'_0(t)|^2 dt$$

$$\begin{aligned}
&= (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [c(t_s) - c(t)] |x'(t) - x'_0(t)|^2 dt \\
&+ (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t_s) [|x'(t) - \bar{x}'_0(t_s)|^2 - |x'(t) - x'_0(t)|^2] dt = \Delta_1 + \Delta_2.
\end{aligned}$$

Sottraendo e aggiungendo S alla (32) otteniamo la relazione modificata

$$\begin{aligned}
I[C] &\geq \int_a^{a''} f(t, x(a), 0) dt + \int_{b''}^b f(t, x(b), 0) dt + \Delta_1 + \Delta_2 + \\
(33) \quad &+ (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x'(t) + c(t) |x'(t) - x'_0(t)|^2] dt.
\end{aligned}$$

Diremo E^* la chiusura dell'insieme $[a'', b''] - \cup [\alpha_s, \beta_s]$. Dunque E^* è una unione finita di intervalli, e si ha

$$E^* \subset [\alpha_1, \beta_1] \cup [\alpha_N, \beta_N] \cup [(a_0, b_0) - B],$$

$$\text{mis } E^* \leq \tau + \tau + \tau = 3\tau \leq 3\eta.$$

Si noti che

$$\begin{aligned}
S_0 &\equiv \Sigma'' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x'_0(t)] dt \\
&= \int_{\alpha_1}^{\alpha_0} r(t_1, \eta) dt + \int_{\alpha_0}^{\beta_1} [r(t_1, \eta) + b(t_1, \eta) \cdot x'_0(t)] dt \\
&+ \int_{b_0}^{\beta_N} r(t_N, \eta) dt + \int_{\alpha_N}^{b_0} [r(t_N, \eta) + b(t_N, \eta) \cdot x'_0(t)] dt \\
&+ \sum_{s \neq 1, N}'' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x'_0(t)] dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq (a_0 - \alpha_1) |r(t_1, \eta)| + (\beta_N - b) |r(t_N, \eta)| \\
 &+ [\max |r(t_s, \eta)| + M \max |b(t_s, \eta)|] (\text{mis } E^*) \\
 &\leq [(a_0 - \alpha_1) + (\beta_N - b) + (\text{mis } E^*)] (M_2 + 1 + 4l^{-1} M) \\
 &\leq 5\eta (M_2 + 1 + 4l^{-1} M).
 \end{aligned}$$

La relazione (30), aggiungendo e sottraendo S_0 e maggiorando, diventa ora

$$\begin{aligned}
 I[C_0] &\leq (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x'_0(t)] dt \\
 &+ [5 + b_0 - a_0 + 5(M_2 + 1 + 4l^{-1} M)] \eta,
 \end{aligned}$$

e ricordando la (28), anche

$$(34) \quad I[C_0] \leq (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x'_0(t)] dt + \sigma.$$

Dobbiamo ora valutare Δ_1 e Δ_2 . Si ha

$$|\Delta_1| \leq (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} |c(t_s) - c(t)| |x'(t) - x'_0(t)|^2 dt,$$

ove in ogni integrale si ha $|t - t_s| \leq l''$ e quindi $|c(t_s) - c(t)| \leq \eta$. D'altra parte, $|x'_0(t)| \leq M$ e, dalla formula (25), anche

$$|x'(t) - x'_0(t)| \leq 2M + 2^{\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} [f(t, x(t), x'(t)) + M_2 + 1 + 2\nu^{-1} l^{-2}]^{\frac{1}{2}}$$

per ogni $\alpha_s \leq t \leq \beta_s$. Essendo $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, otteniamo

$$\begin{aligned}
 |x'(t) - x'_0(t)|^2 &\leq 8M^2 + 4\nu^{-1} [f(t, x(t), x'(t)) + M_2 + 1 + 2\nu^{-1} l^{-2}] \\
 &\leq P + 4\nu^{-1} f(t, x(t), x'(t)),
 \end{aligned}$$

essendo P definito dalla (27). Infine

$$|\Delta_1| \leq \eta (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [P + 4\nu^{-1} f(t, x(t), x'(t))] dt$$

$$\begin{aligned}
&\leq \eta (b_0 - a_0 + 1) P + 4\eta \nu^{-1} \left| \int_a^b + \int_{a''}^a + \int_b^{b''} \right| f(t, x(t), x'(t)) dt \\
&\leq \eta (b_0 - a_0 + 1) P + 4\eta \nu^{-1} \int_a^b f(t, x(t), x'(t)) dt + 4\eta^2 \nu^{-1} M_2.
\end{aligned}$$

Ricordando la (28) troviamo

$$(35) \quad |A_1| \leq \sigma + \sigma I[C].$$

Per a, b, c numeri reali si ha

$$(a - b)^2 - (a - c)^2 = (b - c)(b + c - 2a),$$

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Se ora $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n)$, $c = (c_1, \dots, c_n)$ sono vettori reali si ha

$$\begin{aligned}
| |a - b|^2 - |a - c|^2 | &= | \sum_i [(a_i - b_i)^2 - (a_i - c_i)^2] | \\
&\leq \sum_i |b_i - c_i| |b_i + c_i - 2a_i| \\
&\leq 3^{\frac{1}{2}} \sum_i |b_i - c_i| (b_i^2 + c_i^2 + 4a_i^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 3^{\frac{1}{2}} [\sum_i (b_i - c_i)^2]^{\frac{1}{2}} [\sum_i (b_i^2 + c_i^2 + 4a_i^2)]^{\frac{1}{2}} \\
&= 3^{\frac{1}{2}} |b - c| (|b|^2 + |c|^2 + 4|a|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq 3^{\frac{1}{2}} |b - c| (|b| + |c| + 2|a|).
\end{aligned}$$

Essendo $0 \leq c(t_s) \leq M_0$ abbiamo

$$\begin{aligned}
|A_2| &\leq (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t_s) | |x'(t) - \bar{x}'_0(t_s)|^2 - |x'(t) - x'_0(t)|^2 | dt \\
&\leq M_0 (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} | |x'(t) - \bar{x}'_0(t_s)|^2 - |x'(t) - x'_0(t)|^2 | dt.
\end{aligned}$$

Applicando la formula precedente con $a = x'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$, $b = \bar{x}'_0(t_s) = (\bar{x}'_{01}(t), \dots, \bar{x}'_{0n}(t))$, $c = x'_0(t) = (x'_{01}(t), \dots, x'_{0n}(t))$, otteniamo

$$| \Delta_2 | \leq 3^{\frac{1}{2}} M_0 (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} | x'_0(t) - \bar{x}'_0(t_s) | [| \bar{x}'_0(t_s) | + | x'_0(t) | + 2 | x'(t) |] dt,$$

ove $| \bar{x}'_0(t_s) |$, $| x'_0(t) | \leq M$. Pertanto

$$(36) \quad | \Delta_2 | \leq 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} M_0 (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} | x'_0(t) - \bar{x}'_0(t_s) | (M + | x'(t) |) dt = \Delta'_2 + \Delta''_2,$$

indicando con Δ'_2 e Δ''_2 i contributi relativi alle somme Σ' e Σ'' .

Si ha ora

$$\begin{aligned} \Delta'_2 &= 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} M_0 \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} | x'_0(t) - \bar{x}'_0(t_s) | (M + | x'(t) |) dt \\ (37) \quad &\leq 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} M_0 \Sigma' \left[\int_{\alpha_s}^{\beta_s} | x'_0(t) - \bar{x}'_0(t_s) |^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\alpha_s}^{\beta_s} (M + | x'(t) |)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} M_0 \left[\Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} | x'_0(t) - \bar{x}'_0(t_s) |^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[\Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} (M + | x'(t) |)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

La prima parentesi quadra è

$$\begin{aligned} &= \Sigma' (B_s + E_s) \int | x'_0(t) - \bar{x}'_0(t_s) |^2 dt \\ &\leq \eta \Sigma' (B_s) \int dt + 4M^2 \Sigma' (E_s) \int dt \\ &\leq \eta \text{mis } B + 4M^2 \text{mis } E < \eta (b_0 - a_0) + 4M^2 \tau \\ &\leq (b_0 - a_0 + 4M^2) \eta. \end{aligned}$$

La seconda parentesi quadra è

$$\begin{aligned}
 &= \Sigma' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} (M + |x'(t)|)^2 dt < \int_a^b (M + |x'(t)|)^2 dt \\
 &\leq \int_a^b (8M^2 + 4\nu^{-1} [f(t, x(t), x'(t)) + M_2 + 1 + 2\nu^{-1} l^{-2}]) dt \\
 &= \int_a^b (P + 4\nu^{-1} f(t, x(t), x'(t))) dt \\
 &= (b - a) P + 4\nu^{-1} I[C].
 \end{aligned}$$

Pertanto, la (37) diventa

$$|\Delta'_2| \leq 2\eta^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}} M_0 (b_0 - a_0 + 4M^2)^{\frac{1}{2}} [(b - a) P + 4\nu^{-1} I[C]]^{\frac{1}{2}}.$$

Mediante la relazione $(a + b)^{\frac{1}{2}} \leq a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$ per ogni $a, b \geq 0$ si ha ora

$$\begin{aligned}
 |\Delta'_2| &\leq 2\eta^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}} M_0 (b_0 - a_0 + 4M^2)^{\frac{1}{2}} [(b - a)^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} + 2\nu^{-\frac{1}{2}} \{I[C]\}^{\frac{1}{2}}] \\
 &\leq 2\eta^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}} M_0 (b_0 - a_0 + 1 + 4M^2) P^{\frac{1}{2}} + \\
 &\quad + 4\eta^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{1}{2}} M_0 (b_0 - a_0 + 4M^2)^{\frac{1}{2}} \nu^{-\frac{1}{2}} \{I[C]\}^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

e ricordando la (28), anche

$$(38) \quad |\Delta'_2| \leq \sigma + \sigma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}}.$$

Gli intervalli $[\alpha_s, \beta_s]$ relativi alla somma Σ'' sono tutti contenuti nell'insieme E^* con $\text{mis } E^* < 3\tau \leq 3\eta$. Pertanto, si ha

$$|\Delta''_2| \leq 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} M_0 \Sigma'' \int_{\alpha_s}^{\beta_s} |x'_0(t) - \bar{x}'_0(t_s)| (M + |x'(t)|) dt$$

$$\begin{aligned}
 &\leq 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}} M_0 M \cdot (E^*) \int (M + |x'(t)|) dt \\
 &\leq 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}} M_0 M \left[(E^*) \int dt \right]^{\frac{1}{2}} \left[(E^*) \int (M + |x'(t)|)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq 4 \cdot 3^{\frac{1}{2}} M_0 M (3\eta)^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b (M + |x'(t)|)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq 12 M_0 M \eta^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b (8M^2 + 4\nu^{-1} [f(t, x(t), x'(t)) + M_2 + 1 + 2\nu^{-1} l^{-2}]) dt \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= 12 \eta^{\frac{1}{2}} M_0 M \left[\int_a^b (P + 4\nu^{-1} f(t, x(t), x'(t))) dt \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq 12 \eta^{\frac{1}{2}} M_0 M (b_0 - a_0 + 1)^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}} + 24 \eta^{\frac{1}{2}} M_0 M \nu^{-\frac{1}{2}} \{I[C]\}^{\frac{1}{2}}.
 \end{aligned}$$

Ricordando la (28) si ha ora

$$(39) \quad |A_2''| \leq \sigma + \sigma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}}.$$

La relazione (33), facendo uso delle (31), (35), (36), (38), (39), diventa

$$\begin{aligned}
 I[C] &\geq (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} [r(t_s, \eta) + b(t_s, \eta) \cdot x'(t)] dt \\
 &\quad + (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} c(t) |x'(t) - x'_0(t)|^2 dt \\
 &\quad - 4\sigma - \sigma I[C] - 2\sigma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}},
 \end{aligned}$$

ove ora il secondo termine a secondo membro è esattamente μ . Confron-

tando con la (34) si trova

$$I[C] - I[C_0] \geq \mu + (\Sigma' + \Sigma'') \int_{\alpha_s}^{\beta_s} b(t_s, \eta) \cdot [x'(t) - x'_0(t)] dt \\ - 5\sigma - \sigma I[C] - 2\sigma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}},$$

ove il secondo termine a secondo membro è uguale a

$$(\Sigma' + \Sigma'') b(t_s, \eta) \cdot [x(\beta_s) - x_0(\beta_s) - x(\alpha_s) + x_0(\alpha_s)],$$

e quindi, in valore assoluto,

$$\leq (\Sigma' + \Sigma'') (2l^{-1}) (2\rho) = 4l^{-1} N\rho \leq \sigma.$$

Dunque, si ha

$$I[C] - I[C_0] \geq \mu - 6\sigma - \sigma I[C] - 2\sigma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}},$$

ossia

$$(1 + \sigma) I[C] + 2\sigma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}} - I[C_0] \geq \mu - 6\sigma.$$

Se $0 \leq I[C] \leq 1$, allora si ha

$$I[C] - I[C_0] = \\ = \{(1 + \sigma) I[C] + 2\sigma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}} - I[C_0]\} - \{2\sigma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}} + \sigma I[C]\} \\ \geq \mu - 6\sigma - 2\sigma - \sigma = \mu - 9\sigma > \varphi\mu - \varepsilon.$$

Se $I[C] \geq 1$, allora si ha

$$I[C] - I[C_0] = (1 + 2\gamma)^{-1} \{(1 + 2\gamma) I[C] - (1 + 2\gamma) I[C_0]\} \\ = (1 + 2\gamma)^{-1} \{(1 + \gamma) I[C] + \gamma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}} \{I[C]\}^{\frac{1}{2}} - I[C_0] - 2\gamma I[C_0]\} \\ \geq (1 + 2\gamma)^{-1} \{(1 + \gamma) I[C] + \gamma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}} - I[C_0] - 2\gamma I[C_0]\}.$$

Essendo $\gamma \geq 2\sigma > \sigma$, $2\gamma I[C_0] \leq \varepsilon/2$, risulta

$$I[C] - I[C_0] \geq (1 + 2\gamma)^{-1} \{(1 + \sigma) I[C] + 2\sigma \{I[C]\}^{\frac{1}{2}} - I[C_0] - 2\gamma I[C_0]\} \\ \geq (1 + 2\gamma)^{-1} (\mu - 6\sigma - \varepsilon/2),$$

ed essendo $1 > (1 + 2\gamma)^{-1} \geq \varphi$, si ha infine

$$I[C] - I[C_0] \geq \varphi\mu - 6\sigma - \varepsilon/2 > \varphi\mu - \varepsilon/2 - \varepsilon/2 = \varphi\mu - \varepsilon.$$

Pertanto, in ogni caso, abbiamo

$$I[C] > I[C_0] + \varphi\mu - \varepsilon,$$

per ogni curva della classe K appartenente all'intorno (ρ) di C_0 . Il teorema III è con ciò dimostrato nell'ipotesi che sia $f(t, x, d) \geq 0$ per ogni $d \in E_n$ e per ogni $(t, x) \in A$ di un intorno di $[C_0]$. La dimostrazione, nel caso generale, può ora farsi come per il teorema II. Il teorema III è così completamente dimostrato.

§ 5. Discussione dei risultati.

La condizione $|x'(t)|, |x_0'(t)| \leq \eta(t)$ dei teoremi I e II, ove $\eta(t)$ è una funzione fissa a quadrato integrabile, è certo restrittiva. Una condizione analoga (cioè $|x'(t)|, |x_0'(t)| \leq N$, N un numero fisso) si trovava già nell'iniziale teorema di Lindeberg e fu eliminata dal Tonelli nel dimostrare i teoremi A e B che abbiamo riportato nella § 2. Tuttavia, l'enunciato dei teoremi I e II cade certamente in difetto se si sopprime la condizione $|x'(t)|, |x_0'(t)| \leq \eta(t)$. Ciò è dimostrato dagli esempi 1 e 2 seguenti. Gli esempi, 2, 3, 4 mostrano poi che lo stesso fenomeno può accadere persino con $c(t) \equiv 1$. L'esempio 3 mostra altresì che, senza alcuna ipotesi, $x_0'(t)$ non è necessariamente a quadrato integrabile, e l'esempio 4 mostra lo stesso fenomeno in modo ancora più semplice quando $c(t) \equiv 1$, $x_0'(t)$ è a quadrato integrabile ma non limitato, e $x'(t)$ è anche a quadrato integrabile ma non inferiore a nessuna funzione fissa a quadrato integrabile. Gli esempi 3, 4 mostrano anche che le conclusioni del teorema III possono cadere in difetto se non si assume che $x_0'(t)$ è limitato.

ESEMPIO 1. Sia $n = 1$ e consideriamo l'integrale $I[C] = \int_0^1 |x - t| x'^2 dt$.

Per $x_0(t) \equiv 0$, $0 \leq t \leq 1$, si ha $I[x_0] = 0$. Prendiamo ora $m = 7/6$, e

$$x_k(t) = t + k^m(t - (i-1)/k^3) \text{ se } (i-1)/k^3 \leq t \leq (i-1)/k^3 + 1/2k^3, \quad i = 1, \dots, k^2,$$

$$x_k(t) = t + k^m(i/k^3 - t) \text{ se } (i-1)/k^3 + 1/2k^3 \leq t \leq i/k^3, \quad i = 1, \dots, k^2,$$

$$x_k(t) = 1/k \quad \text{se } 1/k \leq t \leq 1,$$

ove $k = 2, 3, \dots$. Dunque $x'_k(t) = 1 + k^m, 1 - k^m, 0$, secondochè t è in ciascuno degli intervalli indicati sopra. D'altra parte, $0 \leq x_k(t) - t \leq k^m/2k^3 = 2^{-1} k^{-3+m} = 2^{-1} k^{-11/6}$ per ogni $0 \leq t \leq 1/k$, e quindi $x_k(t) \rightarrow x_0(t)$ uniformemente in $[0, 1]$ quando $k \rightarrow \infty$. Essendo poi $k^m + 1 \leq 2k^m$ si ha

$$I[x_k] = \int_0^1 (x_k(t) - t) x_k'^2(t) dt,$$

$$0 \leq I[x_k] \leq 2^{-1} k^{-3+m} k^{-1} (1 + k^m)^2 \leq 2^{-1} k^{-4+m} \cdot 4k^{2m} = 2k^{3m-4} = 2k^{-1/6},$$

e pertanto $I[x_k] \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$. Si noti che $f(t, x, d) = |x - t|^2$, $f(t, 0, d) = td^2$ e si può prendere $c(t) = t$. Essendo ora

$$\mu_k = \int_0^1 c(t) [x'_k(t) - x'_0(t)]^2 dt = \int_0^{1/k} t (1 \pm k^m)^2 dt,$$

e notando che $k \geq 2, m \geq 1, k^m \geq 2$, onde $k^m/2 \geq 1, k^m - 1 \geq k^m/2$, si ha

$$\mu_k > 2^{-2} k^{2m} (2^{-1} k^{-2}) = 2^{-2-1} k^{2m-2} = 2^{-3} k^{1/3},$$

e quindi $\mu_k \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Dunque $\mu_k \rightarrow \infty, I[x_k] \rightarrow 0, I[x_0] = 0$, e la relazione (3) non vale. In questo esempio il teorema I non si applica perchè $|x'(t)|$ non si mantiene inferiore ad alcuna funzione fissa a quadrato integrabile. Il teorema III non si applica perchè $c(t)$ è zero in un punto. Anche le conclusioni del teorema III non valgono in questo esempio.

ESEMPIO 2. Sia $n = 1$ e consideriamo l'integrale $I[C] = \int_0^{1/\pi} (1 + x't \operatorname{sen}(1/t) + x'^2) dt$, ove si sostituisce zero a $t \operatorname{sen}(1/t)$ per $t = 0$. Essendo $0 \leq t \leq 1/\pi$, risulta anche $|t \operatorname{sen}(1/t)| \leq 1/\pi$. Finalmente, se notiamo che $u^2 + au \geq -a^2/4$ per ogni u reale, risulta

$$f(t, d) = 1 + dt \operatorname{sen}(1/t) + d^2 \geq 1 - t^2 \operatorname{sen}^2(1/t)/4 \geq 1 - (4\pi^2)^{-1} > 0.$$

Dunque $f(t, d) > 0$ per ogni $0 \leq t \leq 1/\pi$ e per ogni d . Prenderemo $x_0(t) \equiv 0, 0 \leq t < 1/\pi$, onde $I[x_0] = \pi^{-1}$. Prendiamo ora

$$x_k(t) = 0 \text{ se } 0 \leq t \leq (h_k + 1/2)^{-1} \pi^{-1},$$

$$x_k(t) = -k^{-1} \cos(1/t) \text{ se } (h_k + 1/2)^{-1} \pi^{-1} \leq t \leq \pi^{-1},$$

ove h_k denota il più piccolo intero tale che $2^{-1} + 3^{-1} + \dots + h_k^{-1} > 4k^2$, e $k = 2, 3, \dots$. Ovviamente $x_k(t) \rightarrow x_0(t)$ uniformemente in $[0, 1/\pi]$. Si ha poi $x'_k(t) = 0$, oppure $x'_k(t) = -k^{-1}t^{-2} \sin(1/t)$, secondo che t è in uno o l'altro degli intervalli indicati sopra, e pertanto

$$\begin{aligned} I[x_k] - \int_0^1 x_k'^2(t) dt - \pi^{-1} &= \int_0^{1/\pi} t \sin(1/t) x'_k(t) dt = \\ &= -k^{-1} \int_{(h_k+1/2)^{-1}\pi^{-1}}^{\pi^{-1}} t^{-1} \sin^2(1/t) dt. \end{aligned}$$

Essendo $\sin^2(1/t) \geq 1/2$ per ogni $1/t$ compreso tra $(h+1/4)\pi$ e $(h+3/4)\pi$, $h = 1, 2, \dots, h_k - 1$, risulta

$$\begin{aligned} I[x_k] - \int_0^1 x_k'^2 dt - 1 &< -(2k)^{-1} \sum_{h=1}^{h_k-1} (h+1/4) [(h+1/4)^{-1} - (h+3/4)^{-1}] \\ &< -(4k)^{-1} \sum_{h=1}^{h_k} (h+3/4)^{-1} < -(4k)^{-1} \sum_{h=1}^{h_k-1} (h+1)^{-1} < -(4k)^{-1} (4k^2) = -k. \end{aligned}$$

In altre parole, abbiamo

$$I[x_k] - \pi^{-1} \leq \int_0^1 x_k'^2 dt - k, \quad k = 2, 3, \dots$$

Essendo $f_{x'x'} = 2$ possiamo prendere $c(t) = 1, 0 < t \leq 1/\pi$, e pertanto l'ultima relazione può essere scritta nella forma

$$I[x_k] - I[x_0] \leq -k + \int_0^1 c(t) [x'_k(t) - x'_0(t)]^2 dt.$$

È facile vedere che entrambi i membri di questa disuguaglianza tendono a $+\infty$ quando $k \rightarrow \infty$. La relazione (3) non vale. In questo esempio $x'_k(t)$ non si mantiene minore di alcuna funzione fissa a quadrato integrabile, e $c(t)$ è una costante.

ESEMPIO 3. Sia $n = 1$ e consideriamo l'integrale $I[C] = \int_0^1 f dt$ con $f = f(t, d)$ definita da

$$f(t, d) = 0 \text{ se } t = 0, \text{ oppure se } 0 < t \leq 1, 0 \leq d \leq 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}},$$

$$f(t, d) = d(d - 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}}) \text{ se } 0 \leq t \leq 1, d \leq 0, \text{ oppure se } 0 < t \leq 1, d \geq 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}}.$$

Sia poi $x_0(t) = t^{\frac{1}{2}}$, $0 \leq t \leq 1$. Allora $x'_0(t) = 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}}$ per ogni $0 < t \leq 1$, e si ha $I[x_0] = 0$. Si noti che $f(t, d)$ è una funzione continua di (t, d) per $0 \leq t \leq 1$, $-\infty < d < +\infty$. Anche si ha sempre $f \geq 0$, e per ogni $0 < t \leq 1$,

$$f(t, d) \geq 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}} (d - 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}}) + (d - 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}})^2,$$

ossia

$$f(t, d) - f(t, x'_0(t)) \geq 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}} (d - x'_0(t)) + (d - x'_0(t))^2,$$

e quindi possiamo prendere $c(t) = 1$, $0 < t \leq 1$. Definiamo ora $x_k(t)$, $0 \leq t \leq 1$, prendendo $x_k(t) = t^{\frac{1}{2}}$ se $k^{-1} \leq t \leq 1$, $x_k(t) = k^{-\frac{1}{2}}$ se $0 \leq t \leq k^{-1}$, e ove $k = 2, 3, \dots$. Ovviamente $x_k(t) \rightarrow x_0(t)$ uniformemente in $[0, 1]$ quando $k \rightarrow \infty$, e si ha $x'_k(t) = x'_0(t)$ se $k^{-1} \leq t \leq 1$, $x'_k(t) = 0$ se $0 \leq t < k^{-1}$, $I[x_k] = 0$ per ogni $k = 2, 3, \dots$. D'altra parte

$$\mu_k = \int_0^1 c(t) [x'_k(t) - x'_0(t)]^2 dt = \int_0^{k^{-1}} 2(0 - 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}})^2 dt = +\infty.$$

Si vede dunque che la relazione (3) non vale, che $x'_0(t)$ non è a quadrato integrabile, che $x'_k(t)$ non si mantiene inferiore ad una funzione fissa a quadrato integrabile, mentre $c(t) \equiv 1$.

ESEMPIO 4. Sia $n = 1$ e consideriamo l'integrale $I[C] = \int_0^1 f dt$ con $f(t, d)$ definita da

$$f(t, d) = 0 \text{ se } t = 0, \text{ oppure se } 0 < t \leq 1, -2^{-1} t^{-\frac{1}{2}} \leq d \leq 2 \cdot 3^{-1} d^{-1/3},$$

$$f(t, d) = (d + 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}})(d - 2 \cdot 3^{-1} d^{-1/3}) \text{ se } 0 < t \leq 1 \text{ e se } d \leq -2^{-1} t^{-\frac{1}{2}},$$

oppure

$$d \geq 2 \cdot 3^{-1} t^{-1/3}.$$

Assumiamo $x_0(t) = t^{2/3}$, $0 \leq t \leq 1$, e definiamo $x_k(t)$, $0 \leq t \leq 1$, $k = 2, 3, \dots$, prendendo $x_k(t) = t^{2/3}$ se $k^{-1} \leq t \leq 1$, $x_k(t) = -t^{\frac{1}{2}} + k^{-\frac{1}{2}} + k^{-2/3}$ se $k^{-2} \leq t \leq k^{-1}$, $x_k(t) = -k^{-1} + k^{-\frac{1}{2}} + k^{-2/3}$ se $0 \leq t \leq k^{-2}$. Ovviamente $x_k(t) \rightarrow x_0(t)$ uniformemente in $[0, 1]$ quando $k \rightarrow \infty$. Inoltre $I[x_k] = I[x_0] = 0$, $k = 2, 3, \dots$. Per ogni $0 < t \leq 1$ si ha ora

$$f(t, d) \geq (2 \cdot 3^{-1} t^{-1/3} + 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}}) (d - 2 \cdot 3^{-1} t^{-2/3}) + (d - 2 \cdot 3^{-1} t^{-1/3})^2,$$

ossia

$$f(t, d) - f(t, x'_0(t)) \geq (2 \cdot 3^{-1} t^{-1/3} + 2^{-1} t^{-\frac{1}{2}}) (d - x'_0(t)) + (d - x'_0(t))^2,$$

e perciò possiamo prendere $c(t) = 1$, $0 < t \leq 1$. Finalmente, si ha

$$\begin{aligned} \mu_k &= \int_0^1 c(t) [x'_k(t) - x'_0(t)]^2 dt \\ &= \int_0^{k^{-2}} 2(0 - 2 \cdot 3^{-1} t^{-1/3})^2 dt + \int_{k^{-2}}^{k^{-1}} 2(-2^{-1} t^{-\frac{1}{2}} - 2 \cdot 3^{-1} t^{-1/3})^2 dt, \end{aligned}$$

e ora $\mu_k \rightarrow +\infty$ quando $k \rightarrow \infty$. Si vede che la relazione (3) non vale nonostante che tutte le funzioni $x'_0(t)$, $x'_k(t)$ siano a quadrato integrabile mentre $c(t) = 1$, $0 < t \leq 1$. Di nuovo, le funzioni $|x'_k(t)|$ non si mantengono minori di alcuna funzione fissa a quadrato integrabile. Si noti che neppure l'asserzione del teorema III vale nella presente situazione. Qui la funzione $x'_0(t)$ non si mantiene inferiore ad alcun numero fisso.