

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

IACOPO BARSOTTI

**Metodi analitici per varietà abeliane in caratteristica
positiva. Capitoli 1, 2**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 18,
n° 1 (1964), p. 1-25*

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1964_3_18_1_1_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1964, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

METODI ANALITICI PER VARIETÀ ABELIANE IN CARATTERISTICA POSITIVA. CAPITOLI 1, 2.

IACOPO BARSOTTI ⁽¹⁾

Introduzione. Inizio qui la pubblicazione dei dettagli di certi risultati che fino ad ora sono stati esposti solo in seminari e conferenze (seminario alla Brown University nell'estate 1961; N. S. F. Report del luglio 1961; corso alla Scuola Normale Superiore di Pisa nell'anno 1961-62; conferenza al Colloque sur la théorie des groupes algébriques tenuta a Bruxelles nel giugno 1962, e pubblicata a p. 77 del volume omonimo). Questa prima parte, che consta di due capitoli, sviluppa la teoria dei bivettori e i metodi analitici veri e propri; nei capitoli successivi si fa largo uso dei risultati di MC (*Moduli canonici e gruppi analitici commutativi*, di I. Barsotti; Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 13, 1959, p. 303). Ad evitare troppi richiami alle definizioni, una lista alfabetica di queste, e dei simboli più usati, compare alla fine del presente lavoro.

Desidero ringraziare H. Matsumura, le cui critiche precise e fondate hanno valso ad eliminare vari errori dalla prima stesura di questi, ed altri, capitoli.

CAPITOLO 1.

I bivettori.

1. In questo capitolo indicheremo sempre con I l'anello degli interi, con Q il corpo razionale, con p un primo razionale fisso, con I_p l'anello

Pervenuto alla Redazione il 17 Luglio 1963 ed in forma definitiva il 28 Gennaio 1964.

⁽¹⁾ Questa ricerca è stata sostenuta finanziariamente dai seguenti enti: National Science Foundation, col grant G 15983 (Brown University, 1961); C. O. N. A. R. M. (1962); Institut des hautes études scientifiques (Aprile 1963); Office of Aerospace Research, col grant AFEOAR 6329 (dal Dicembre 1962).

degli interi p -adici razionali, con C_p il corpo fondamentale di caratteristica p . Gli anelli considerati saranno sempre commutativi con identità; i moduli saranno unitari sinistri; le algebre saranno (salvo avvertimento in contrario) commutative, con identità, e unitarie. Con *topologia gruppale non archimedeica* (su un gruppo abeliano addittivo) si intenderà una topologia definita da un insieme di intorno aperti dello zero che siano sottogruppi, e la cui intersezione sia ridotta all'elemento 0; si tratta quindi di topologie di Hausdorff. Se A è un anello ed M un A -modulo, una topologia A -lineare di M è una topologia gruppale non archimedeica determinata da un insieme di intorno aperti dello zero che siano sotto- A -moduli; ciò si applica in particolare alle topologie A -lineari di A , per le quali gli intorno saranno quindi ideali.

Nel seguito, se si hanno elementi x_i di un sopraanello di un anello B , si parlerà di « monomi nelle x_i , a coefficienti in B , di peso h , e divisibili per una certa x_j (o di grado positivo in x_j), quando alle x_i si attribuiscono i pesi h_i »; con tale locuzione imprecisa si intenderà una espressione $f(\dots, x_i, \dots)$, quando $f(\dots, X_i, \dots)$ sia un monomio nelle indeterminate X_i su B , a coefficienti in B , di peso h quando alle X_i si attribuiscono i pesi h_i , e divisibile per la X_j . Premettiamo anche che chiamiamo *monomio ammesso* nelle x_i un monomio il cui coefficiente sia il prodotto di un elemento di I_p per i reciproci dei fattoriali degli esponenti: $q[(r_0!) \dots (r_s!)]^{-1} x_0^{r_0} \dots x_s^{r_s}$, con $q \in I_p$. Si noti che in questa definizione ogni fattoriale può essere sostituito con la potenza di p che lo divide esattamente; ed è utile osservare che l'esponente con cui p compare in $r!$ è $(p-1)^{-1}[r - S(r)]$, ove $S(r)$ indica, come sempre nel seguito, la somma delle cifre del numero r espresso nel sistema p -esimale.

Sia A un'algebra su Q (risp. su C_p), dotata di una topologia I_p -lineare (risp. C_p -lineare), e siano $i \rightarrow x_{\mu}$ ($i = -1, -2, \dots$) delle successioni di elementi di A ; si attribuisca peso p^i alle x_{μ} . Diremo che tali successioni sono *simultaneamente ammesse* (se ve n'è una sola diremo che essa è *ammessa*) se: per ogni intorno U dello 0, e per ogni intero $m \geq 0$, esiste un intero positivo r tale che siano in U tutti i monomi ammessi (risp. monici) nelle x_{μ} , di peso p^{-m} , ciascuno dei quali abbia grado positivo in qualche x_{μ} con $i \leq -r$. Diremo poi che la topologia è *ammessa* se successioni ammesse qualsiasi, in numero finito, sono simultaneamente ammesse.

1.1 LEMMA. *Siano X_i delle indeterminate su Q , ed Y_j dei polinomi nelle X_i , che siano somme di monomi ammessi di gradi positivi; sia Z un monomio ammesso nelle Y_j ; allora Z è somma di monomi ammessi nelle X_i .*

DIM. Si può supporre $Z = \prod_j (s_j!)^{-1} Y_j^{s_j}$; sia poi $Y_j = \sum_h V_{jh}$, ove i V_{jh} sono monomi ammessi di grado positivo nelle X_i . Quando si computa $Y_j^{s_j}$,

ogni monomio nelle X_i che vi compare è del tipo

$$(s_j!) [\prod_h (r_{jh}!)^{-1} V_{jh}^{r_{jh}}], \quad \text{ove} \quad \sum_h r_{jh} = s_j;$$

poichè si può anche supporre $V_{jh} = \prod_l (n_{jhl}!)^{-1} X_l^{n_{jhl}}$, ogni monomio nelle X_i che compare in Z è del tipo

$$\prod_j \prod_h (r_{jh}!)^{-1} \prod_l (n_{jhl}!)^{-r_{jh}} X_l^{n_{jhl} r_{jh}},$$

ove per ogni j, h almeno un n_{jhl} è positivo.

Per dimostrare che questo è ammesso basta dimostrare che $(nr)!$ è divisibile per $(n!)^r$ quando n, r sono interi non negativi, ed anche per $(r!)(n!)^r$ se $n > 0$. Ora, se $n = 0$ o $r = 0$ ciò è ovvio; se n, r sono positivi, siano $x_1, \dots, x_r$ indeterminate, e si consideri lo sviluppo di $(x_1 + \dots + x_r)^{nr}$; esso contiene il termine $[(nr)!/(n!)^r] (x_1 \dots x_r)^n$, cosicchè $(nr)!$ è divisibile per $(n!)^r$. Poichè tale termine è invariante per tutte le permutazioni delle x_i , il suo coefficiente deve essere divisibile per $r!$, C. V. D..

2. È opportuno familiarizzarsi con le topologie di uso più frequente nel seguito. Chiameremo intanto *pseudovalutazione* di un anello R un'applicazione $x \rightarrow w(x)$ di R su $\Gamma \cup \{\infty\}$ (Γ essendo l'insieme degli elementi non negativi di un gruppo ordinato addittivo) che soddisfi agli assiomi: $w(x+y) \geq \min(w(x), w(y))$, $w(xy) = w(x) + w(y)$, $w(1) = 0$, $w(0) = \infty$; ad una pseudovalutazione applicheremo la stessa nomenclatura che si applica ad una valutazione.

1.2 LEMMA. Sia R un anello di caratteristica p ; siano $w_r, r \in \mathcal{I}$, sue pseudovalutazioni di rango ≤ 1 , tali che $w_i(x) = \infty$ per ogni i solo se $x = 0$. Si munisca R della topologia R -lineare definita dal sistema di intorno dello 0 i cui elementi sono gli $U(r_1, \dots, r_h; s_1, \dots, s_h)$, con $r_1, \dots, r_h \in \mathcal{I}$, così definiti: $y \in U(r_1, \dots, r_h; s_1, \dots, s_h)$ se e solo se $w_{r_i}(y) \geq s_i$ (gli s_i sono reali non negativi). Siano $j \rightarrow x_{ij}$ ($j = -1, -2, \dots$) successioni di elementi di R ; sia $n \rightarrow \alpha_r(n)$ la massima applicazione monotona non decrescente dell'insieme degli interi positivi sull'insieme dei reali non negativi, e dell'elemento ∞ , che soddisfa la $\alpha_r(n) \leq p^n w_r(x_{i,-n})$ per ogni i ; in altre parole, sia $\alpha_r(n) = \text{estr inf } p^j w_r(x_{i,-j})$, per i qualsiasi e $j \geq n$. Allora le $j \rightarrow x_{ij}$ sono simultaneamente ammesse se e solo se tutte le serie $\sum_{n=1}^{\infty} p^{-n} \alpha_r(n)$ sono divergenti.

DIM. Per semplificare le notazioni daremo la dimostrazione nel caso in cui vi sia una sola w_i , che chiameremo w , ed una sola successione, che chiameremo $j \rightarrow x_j$; le modifiche da fare nel caso generale sono facili e non

essenziali. Vi sarà anche una sola applicazione α_r , che chiameremo α . Anzitutto definiremo $\alpha(0) = 0$, e definiremo anche, per ogni $m > 0$, la applicazione β_m così: è la massima applicazione monotona non decrescente dell'insieme $\{0, \dots, m\}$ sui reali non negativi, e sull'elemento ∞ , che soddisfa le $\beta_m(0) = 0$, $\beta_m(i) \leq p^i w(x_{-i})$ per $0 < i \leq m$. Si ha $\beta_m(i) \geq \alpha(i)$ per $0 < i \leq m$; inoltre, $\beta_m(i) = p^i w(x_{-i})$ per certi valori di i , che chiameremo $r_1 < r_2 < \dots < r_h$; è certamente $r_h = m$; definiremo anche $r_0 = 0$ per comodità.

I monomi monici nelle x_j , di peso 1, e divisibili per x_{-m} , sono gli $M_s = x_{-m}^{s_m} x_{-m+1}^{s_{m-1}} \dots x_{-1}^{s_1}$, ove (1) gli s_i sono interi non negativi, (2) $s_m > 0$, e (3) $\sum_i s_i p^{-i} = 1$. Si ha $w(M_s) = s_m w(x_{-m}) + \dots + s_1 w(x_{-1}) \geq s_m p^{-m} \beta_m(m) + \dots + s_1 p^{-1} \beta_m(1) = z_m(s)$. Vogliamo trovare il minimo di $z_m(s)$; a tal uopo, ordiniamo lessicograficamente l'insieme degli $s = (s_m, \dots, s_1)$, e osserviamo che il successore di un s (se esiste) si ottiene aumentando l'ultimo s_i (ossia quello col minimo i) passibile di essere aumentato senza toccare gli s_j che lo precedono, e diminuendo degli s_j con $j < i$ in maniera che la somma $\sum_1^i s_r p^{-r}$ rimanga invariata. Tale operazione aumenta però, o lascia invariata, la somma $\sum_1^i s_r p^{-r} \beta_m(r)$, cosicchè si può concludere che il minimo di $z_m(s)$ è raggiunto per il minimo s , che è $S_m = (p, p-1, p-1, \dots, p-1)$; tale valore di z_m è $z_m(S_m) = p^{-m} \beta_m(m) + (p-1) \sum_1^m p^{-i} \beta_m(i)$. Il minimo dei valori $w(M_s)$ sarà $\geq z_m(S_m)$, ed $= z_m(S_m)$ se questo è uno dei valori che $w(M_s)$ può assumere; dimostreremo che questo è proprio il caso. Se infatti si prendono tutti gli s_i eguali a 0, eccetto gli s_{r_j} ($j > 0$), che vengono presi eguali a $p^{r_j-r_{j-1}} - 1$ se $j < h$, mentre $s_{r_h} = s_m = p^{m-r_{h-1}-1}$, si ha che $w(M_s) = w(x_{-m}) + \sum_1^h (p^{r_i-r_{i-1}} - 1) w(x_{-r_i}) = p^{-m} \beta_m(m) + \sum_1^h (p^{r_i-r_{i-1}} - 1) p^{-r_i} \beta_m(r_i)$. Osservando poi che $\beta_m(j) = \beta_m(r_i)$ se $r_{i-1} < j \leq r_i$ ($i = 1, \dots, h$), si ha $(p^{r_i-r_{i-1}} - 1) p^{-r_i} \beta_m(r_i) = (p-1) \sum_j p^{-j} \beta_m(j)$, ove la sommatoria si estende da $r_{i-1} + 1$ ad r_i ; pertanto $w(M_s) = z_m(S_m)$, come annunciato.

È ora chiaro che condizione necessaria e sufficiente accchè la $j \rightarrow x_j$ soddisfi, per i monomi di peso 1, la condizione per l'ammissibilità, è che $\lim_{m \rightarrow \infty} z_m(S_m) = \infty$; il termine $p^{-m} \beta_m(m)$ non ha evidentemente influenza sulla divergenza di $z_m(S_m)$, e quindi la condizione diviene

$$1.3 \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_1^m p^{-i} \beta_m(i) = \infty;$$

ora, è certo $\sum_1^m p^{-i} \beta_m(i) \geq \sum_1^m p^{-i} \alpha(i)$, cosicchè la divergenza della serie

$\sum_1^m p^{-i} \alpha(i)$ è condizione sufficiente per l'ammissibilità, finchè si resta ai monomi di peso 1; d'altra parte, se la condizione per l'ammissibilità è soddisfatta, la $i \rightarrow \alpha(i)$ non può intanto rimanere costante e finita per valori elevati di i , in quanto $\lim_{n \rightarrow \infty} p^n w(x_{-n}) = \infty$; quindi, se $\alpha(i)$ rimane finita, vi sono infiniti valori di m tali che $\alpha(m) < \alpha(m+1)$; e per ciascun tale valore di m si ha $\alpha(m) = p^m w(x_{-m})$, onde $\beta_m(i) = \alpha(i)$ per $0 < i \leq m$. Se perciò è verificata la 1.3, è anche verificata la $\sum_1^\infty p^{-i} \alpha(i) = \infty$, come detto nell'enunciato. Il risultato è così dimostrato per quanto riguarda i monomi di peso 1; si vede però subito che la considerazione dei monomi di peso p^{-r} dà luogo alla stessa condizione, C. V. D..

1.4 COROLLARIO. *Ipotesi come nell'1.2; suppongasi inoltre che le w_i siano tutte discrete. Allora la topologia è ammessa, e una successione $j \rightarrow x_j$ è ammessa se e solo se per ogni i esiste un n tale che $w_i(x_{-j}) > 0$ per $j > n$.*

DIM. Per dimostrare l'ultima asserzione, si osservi che essendo la w_i discreta si ha, per un dato i , o $w_i(x_{-j}) = 0$ per infiniti valori di j , ovvero $w_i(x_{-j}) \geq 1$ per j elevato. Nel primo caso è $\alpha_i(n) = 0$ per ogni n , e quindi, per 1.2, la successione non è ammessa; nel secondo caso è $\alpha_i(n) \geq p^n$ per n elevato, e quindi la serie dell'1.2 diverge e la successione è ammessa. La prima asserzione discende ora subito da questo criterio, C. V. D..

1.5 COROLLARIO. *Ipotesi come nell'1.2; suppongasi che talune delle w_i non siano discrete. Allora la topologia di R può non essere ammessa, ed è certamente non ammessa se l'insieme delle pseudovalutazioni si riduce ad un solo elemento, ed R contiene elementi di valore p^{-i} per ogni intero non negativo i . In ogni caso è però simultaneamente ammesso un qualsiasi insieme finito di successioni ciascuna delle quali soddisfi la condizione seguente: se $j \rightarrow x_j$ è la successione, per ogni i esiste un $\beta_i > 0$ tale che $w_i(x_{-j}) \geq \beta_i$ per j elevato; in altre parole, $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{j \geq n} w_i(x_{-j}) > 0$.*

DIM. Dimostriamo la seconda asserzione: la condizione posta assicura che $\alpha_i(n) \geq p^n \beta_i$ per n elevato, onde la serie dell'1.2 diverge; se vi è più di una successione, basta usare, per ogni i , il minimo fra i β_i delle varie successioni.

Per dimostrare la prima asserzione supporremo che vi sia una sola pseudovalutazione w (che sarà quindi una valutazione), e che questa soddisfi alla condizione descritta. Daremo un esempio di due successioni ammesse ma non simultaneamente ammesse. La prima successione $j \rightarrow x_j$ sia tale

Si ha :

1.9 LEMMA. $\psi_i(Y_{i-1}, \dots, Y_0)$ è divisibile per Y_0 , ed è isobarico di peso p^i quando ad Y_j si attribuisca il peso p^j ; ogni monomio che compare in ψ_i ha grado maggiore di $(p-1)i$. Ed il monomio $Y_0^{r_0} \dots Y_{i-1}^{r_{i-1}}$ compare in ψ_i con coefficiente del tipo $[(r_0!) \dots (r_{i-1}!)]^{-1} m$, ove $m \in I$.

DIM. L'asserzione della isobaricità è ovvia; inoltre, facendo $Y_0 = 0$ nelle 1.6 si ottiene che $f_i(Y_i, \dots, Y_1, 0) = f_{i-1}(Y_i, \dots, Y_1)$, il che prova la prima asserzione. L'asserzione sul grado discende dalle due precedenti, in quanto per ottenere un monomio di minimo grado, di peso p^i , e divisibile per Y_0 , si deve dare esponente $p-1$ ad $Y_{i-1}, Y_{i-2}, \dots, Y_1$, ed esponente p ad Y_0 .

Resta da dimostrare l'ultima asserzione, e questa basta provarla per $f_i(Y_i, \dots, Y_0)$. Ciò sarà fatto per induzione su i , dato che essa è vera per $i=0$. Sia D_i la derivazione $\partial/\partial Y_i$, e sia σ l'omomorfismo di $Q[Y]$ che applica ogni Y_j sullo 0; sia $bY_0^{r_0} \dots Y_{i-1}^{r_{i-1}}$ il monomio considerato; se esso si riduce a bY_i , la i -esima fra le 1.6 dice subito che $b=1$; altrimenti, l'applicazione di $\sigma D_0^{r_0} \dots D_{i-1}^{r_{i-1}}$ alla i -esima fra le 1.6 dà che $b(r_0!) \dots (r_{i-1}!)$ è una somma di termini del tipo

$$(p^j - 1)! [\sigma \Delta_1 f_{i-j}(Y_{i-j}, \dots, Y_0)] \dots [\sigma \Delta_{p^j} f_{i-j}(Y_{i-j}, \dots, Y_0)],$$

con $j=1, \dots, i$, e ove i Δ_h sono monomi monici nelle $D_1, D_2, \dots$, il cui prodotto è $D_0^{r_0} \dots D_{i-1}^{r_{i-1}}$. Ora, per l'ipotesi di ricorrenza, ciascuna delle espressioni in parentesi quadra è un intero, C. V. D..

Un gruppo addittivo topologico G sarà detto *quasi completo* se ogni successione di Cauchy $i \rightarrow g_i$ ($i=1, 2, \dots$) di elementi di G converge ad un elemento di G . Se la topologia è numerabile, ossia determinata da un insieme numerabile di intorno dello 0, o equivalentemente se essa è determinata da una metrica, G è quasi completo se e solo se è completo. In generale, il *quasi completamento* di G è l'insieme G' dei limiti, nel completamento di G , delle successioni di Cauchy di elementi di G ; G' è quasi completo.

1.10 TEOREMA. Sia A un'algebra su Q , quasi completa rispetto ad una topologia I_p -lineare; sia $i \rightarrow x_i$ ($i=-1, -2, \dots$) una successione ammessa di elementi di A , e pongasi, per $i=-1, -2, \dots$:

$$(a) \quad y_i = x_i + p^{-1} x_{i-1}^p + p^{-2} x_{i-2}^{p^2} + \dots$$

Allora la $i \rightarrow y_i$ è ammessa, e si ha:

$$(b) \quad x_i = y_i + \psi_1(y_{i-1}) + \psi_2(y_{i-1}, y_{i-2}) + \dots$$

delle :

$$\begin{aligned} X_0 &= g_0(X_0) \\ X_1 &= g_1(X_1, X_0) + \psi_1(g_0(X_0)) \\ X_2 &= g_2(X_2, X_1, X_0) + \psi_1(g_1(X_1, X_0)) + \psi_2(g_1(X_1, X_0), g_0(X_0)) \\ &\dots \end{aligned}$$

ove le X_j formano un insieme di indeterminate su Q . Queste si scrivono anche, per la 1.7 :

$$\begin{aligned} X_0 &= f_0(g_0(X_0)) \\ X_1 &= f_1(g_1(X_1, X_0), g_0(X_0)) \\ X_2 &= f_2(g_2(X_2, X_1, X_0), g_1(X_1, X_0), g_0(X_0)) \\ &\dots \end{aligned}$$

e dimostrano che le applicazioni

$$\{X_0, \dots, X_i\} \rightarrow \{g_0(X_0), \dots, g_i(X_i, \dots, X_0)\}$$

e

$$\{Y_0, \dots, Y_i\} \rightarrow \{f_0(Y_0), \dots, f_i(Y_i, \dots, Y_0)\}$$

sono reciproche l'una dell'altra. Ma la reciproca della seconda applicazione è anche fornita dalla 1.6, il che dimostra che

$$g_i(X_i, \dots, X_0) = X_i + p^{-1} X_{i-1}^p + \dots + p^{-i} X_0^{p^i}.$$

Si può quindi ripetere il ragionamento precedente, dopo aver scambiato le y_j con le x_j , le f_j con le g_j , e, come si è visto, le $\psi_i(y_{-r}, y_{-r-1}, \dots, y_{-r-i+1})$ con le $p^{-i} x_{-r-i+1}^{p^i}$. Il risultato è che se le y_j sono date da (a), esse soddisfano la (b), C. V. D..

4. Sia $\{X_0, X_1, \dots; Y_0, Y_1, \dots\}$ un insieme di indeterminate su Q ; dalla teoria dei vettori di Witt è nota l'esistenza di funzioni razionali intere $\varphi'_i (i=0, 1, \dots)$ di $2i+2$ argomenti, a coefficienti interi, tali che, in notazioni di vettori di Witt, si abbia $(X_0, X_1, \dots) + (Y_0, Y_1, \dots) = (\varphi'_0(X_0; Y_0), \varphi'_1(X_1, X_0; Y_1, Y_0), \dots)$; ciò equivale a dire che per $n=0, 1, \dots$ si ha :

$$\sum_0^n p^{-i} X_{n-i}^{p^i} + \sum_0^n p^{-i} Y_{n-i}^{p^i} = \sum_0^n p^{-i} [\varphi'_{n-i}(X_{n-i}, \dots, X_0; Y_{n-i}, \dots, Y_0)]^{p^i}.$$

Pongasi, per $i = 1, 2, \dots$,

$$\varphi_i(X_{i-1}, \dots, X_0; Y_{i-1}, \dots, Y_0) = \varphi'_i(X_i, \dots, X_0; Y_i, \dots, Y_0) - \\ - \varphi'_{i-1}(X_i, \dots, X_1; Y_i, \dots, Y_1);$$

è ben noto che se ad X_j ed Y_j si attribuisce il peso p^j , la $\varphi_i(X_{i-1}, \dots, X_0; Y_{i-1}, \dots, Y_0)$ è isobara di peso p^i ; inoltre essa è divisibile per $X_0 Y_0$. Porremo poi $\varphi_0(X_0; Y_0) = \varphi'_0(X_0; Y_0) = X_0 + Y_0$, ed useremo gli stessi simboli per indicare le funzioni razionali intere ottenute riducendo i coefficienti di queste modulo p .

Per il seguito faremo la seguente convenzione: se $i \rightarrow x_i$ è ammessa, l'elemento y_i dato dalla (a) di 1.10 sarà indicato con $x^{(i)}$; se poi è data una $i \rightarrow x^{(i)}$ ammessa, le x_i saranno ottenute dalle $x^{(j)}$ come nella (b) di 1.10, quando in essa si legga $x^{(j)}$ in luogo di y_j .

1.11 TEOREMA. *Le φ_i sono le uniche funzioni razionali intere che soddisfano alle condizioni seguenti:*

1. $\varphi_i(X_{i-1}, \dots, X_0; Y_{i-1}, \dots, Y_0)$ è divisibile per $X_0 Y_0$ quando $i > 0$ (qui, le X_j, Y_j sono indeterminate);

2. Per ogni algebra A su Q , o risp. su C_p , che sia quasi completa rispetto ad una topologia I_p -lineare, o risp. C_p -lineare, e per ogni coppia $i \rightarrow x_i, i \rightarrow y_i$ di successioni simultaneamente ammesse di elementi di A (ove $i = -1, -2, \dots$), la

$$\varphi_0(x_{-1}; y_{-1}) + \sum_1^{\infty} \varphi_i(x_{-2}, \dots, x_{-i-1}; y_{-2}, \dots, y_{-i-1})$$

converge ad un elemento $\Phi(x_{-1}, x_{-2}, \dots; y_{-1}, y_{-2}, \dots)$ di A (e questa è la definizione di Φ);

3. Nelle ipotesi di 2, e quando A è un'algebra su Q , posto $z_{-i} = \Phi(x_{-i}, x_{-i-1}, \dots; y_{-i}, y_{-i-1}, \dots)$, la $i \rightarrow z_i$ è ammessa e si ha $z^{(i)} = x^{(i)} + y^{(i)}$.

Se poi si ha un insieme S di successioni simultaneamente ammesse, e se S contiene le $i \rightarrow x_i$ ed $i \rightarrow y_i$, anche l'insieme ottenuto aggiungendo ad S la $i \rightarrow z_i$ consta di successioni simultaneamente ammesse.

DIM. Dimostriamo dapprima l'unicità, ammessa l'esistenza di funzioni φ_i (non necessariamente quelle definite più sopra) che soddisfino le 1, 2, 3. Sia A un prolungamento di trascendenza infinita di Q , con la topologia discreta. Se x_{-1}, y_{-1} sono elementi di A , algebricamente indipendenti su Q , le successioni $\{x_{-1}, 0, 0, \dots\}, \{y_{-1}, 0, 0, \dots\}$ sono simultaneamente ammesse, e le 1, 2, 3 dicono subito che $\varphi_0(x_{-1}; y_{-1}) = x_{-1} + y_{-1}$, come voluto.

Suppongasi poi che la unicità delle $\varphi_0, \dots, \varphi_{n-1}$ sia stata dimostrata, e si considerino le successioni simultaneamente ammesse $\{x_{-1}, \dots, x_{-n-1}, 0, 0, \dots\}$, $\{y_{-1}, \dots, y_{-n-1}, 0, 0, \dots\}$, con le x_i, y_j algebricamente indipendenti su Q . Le 1, 2, 3 comportano allora che, in notazioni di vettori di Witt, $(x_{-n-1}, \dots, x_{-1}) + (y_{-n-1}, \dots, y_{-1}) = (z_{-n-1}, \dots, z_{-1})$; ciò dimostra che anche φ_n deve essere quella sopra definita.

Resta da dimostrare che le φ_i introdotte soddisfano le 1, 2, 3; ora, la 1 si è visto essere vera, e la 2 discende dall'essere le $i \rightarrow x_i, i \rightarrow y_i$ simultaneamente ammesse. Quanto alla 3, si ha intanto che, nelle notazioni della dimostrazione dell'1.10, è

$$g_n(x_{-1}, \dots, x_{-n-1}) + g_n(y_{-1}, \dots, y_{-n-1}) = g_n(\varphi'_n, \dots, \varphi'_0),$$

ove φ'_{n-i} sta per $\varphi'_{n-i}(x_{-i-1}, \dots, x_{-n-1}; y_{-i-1}, \dots, y_{-n-1})$.

Si consideri la differenza $g_n(\varphi'_n, \dots, \varphi'_0) - g_m(\varphi'_n, \dots, \varphi'_{n-m})$, ove $n > m$; essa è data da $p^{-m-1} \varphi'^{p^{m+1}}_{n-m-1} + \dots + p^{-n} \varphi'^{p^n}_0$; ora, per la 1 dell'1.11, già dimostrata, φ'_{n-i} è somma di x_{-i-1}, y_{-i-1} , e di termini ciascuno dei quali è divisibile per $x_{-j} y_{-j}$, ove j varia fra $-i-2$ e $-n-1$. Pertanto, dato un intorno U dello 0, esiste un m tale che per $n > m$ l'elemento $g_n(\varphi'_n, \dots, \varphi'_0)$ differisce per un elemento di U da $g_m(\varphi'_n, \dots, \varphi'_{n-m})$; quindi, facendo $n \rightarrow \infty$, la relazione precedente mostra che $x^{(-1)} + y^{(-1)}$ differisce per un elemento di U da $g_m(z_{-1}, \dots, z_{-m-1})$. Se ora si fa $m \rightarrow \infty$ ne segue $x^{(-1)} + y^{(-1)} = z^{(-1)}$, come voluto. L'ultima asserzione è ora evidente, C. V. D..

5. Sia A un'algebra su Q , ovvero su C_p , quasi completa rispetto ad una topologia I_p -lineare, o rispettivamente C_p -lineare. Una successione ammessa $i \rightarrow x_i$ ($i = -1, -2, \dots$) sarà anche chiamata un *covettore* (di Witt), e indicata con $x = (\dots, x_{-2}, x_{-1})$; le x_i ne sono le *componenti*, e nel caso delle algebre su Q le $x^{(i)}$ ne sono le *componenti fantasma*; la stessa nomenclatura si usa per una qualsiasi I -algebra A che sia sottoalgebra di una Q -algebra.

Se due covettori x, y sono simultaneamente ammessi, si può definire il covettore z dato da: $z_{-i} = \Phi(x_{-i}, x_{-i-1}, \dots; y_{-i}, y_{-i-1}, \dots)$; tale z sarà indicato con $x + y$. Vogliamo dimostrare che l'operazione $+$ gode, quando è definita, delle proprietà dell'operazione di composizione in un gruppo abeliano (addittivo), lo 0 essendo $(\dots, 0, 0)$; e in particolare che $-x$ esiste per ogni covettore x . Queste asserzioni sono ovvie, per 1.11, quando A sia un'algebra su Q , o una sotto- I -algebra di una tale algebra; nel caso di un'algebra su C_p , esse possono essere dimostrate col metodo di riduzione mod p , di cui daremo un esempio nel dimostrare l'associatività.

Siano x, y, z covettori simultaneamente ammessi a componenti nell'algebra A su C_p ; si considerino indeterminate X_{-i}, Y_{-i}, Z_{-i} ($i = 1, 2, \dots$) su Q , e si dia peso p^{-i} ad $x_{-i}, y_{-i}, z_{-i}, X_{-i}, Y_{-i}, Z_{-i}$. Si doti $Q[X, Y, Z]$ della topologia così definita: se la topologia di A è discreta, anche $Q[X, Y, Z]$ viene dotato della topologia discreta; se la topologia di A non è discreta, per ogni intorno U dello 0 in A , e per ogni intero non negativo n si scelga un intero positivo $m = m(U, n)$ tale che siano in U tutti i monomi monici di peso p^{-n} nelle x_i, y_i, z_i , ciascuno dei quali abbia grado positivo in almeno una x_i , o y_i , o z_i con $i \leq -m$; e si scelga questo $m(U, n)$ in modo che non esista nessuna coppia $\{n, N\}$ di interi tale che $m(U, n) < N$ per ogni U (ciò è possibile non appena l'insieme degli U è infinito). Si indichi con U' il sotto- I_p -modulo di $Q[X, Y, Z]$ generato da tutti i monomi ammessi nelle X_i, Y_i, Z_i ciascuno dei quali (1) ha peso p^{-n} per qualche n , e (2) è divisibile per qualche X_i , o Y_i , o Z_i con $i \leq -m(U, n)$. Gli U' , presi come intorni dello 0, determinano in $Q[X, Y, Z]$ una topologia che rende continuo l'omomorfismo σ di $I_p[X, Y, Z]$ su $F' = C_p[x, y, z]$ che applica X_i, Y_i, Z_i rispettivamente su x_i, y_i, z_i , e che applica I_p su tutto C_p secondo l'omomorfismo naturale. Quindi σ può essere esteso ad un omomorfismo continuo, ancora indicato con σ , del quasi completamento B di $I_p[X, Y, Z]$ sulla chiusura F di F' in A ; inoltre B è sottoanello del quasi completamento B' di $Q[X, Y, Z]$, e quest'ultimo è un'algebra su Q . Le successioni $i \rightarrow X_i, i \rightarrow Y_i, i \rightarrow Z_i$ sono simultaneamente ammesse, e si possono considerare i covettori $X = (\dots, X_{-2}, X_{-1}), Y, Z$, per i quali si ha $(X + Y) + Z = X + (Y + Z)$. Applicando σ si ottiene $(x + y) + z = x + (y + z)$, come richiesto. Si noti che qualunque sia il covettore x , l'elemento $-x$ esiste sempre, e gli elementi $x, -x$ sono simultaneamente ammessi.

Nel seguito supporremo d'aver scelto un insieme di covettori a componenti in A , tali che (1) un numero finito di essi siano sempre simultaneamente ammessi, (2) essi formino un gruppo addittivo, e (3) tale insieme contenga tutti i covettori aventi una sola componente non nulla; una ulteriore condizione sarà imposta al n° 6. Tale insieme sarà indicato con $\text{cov } A$. Per quanto precede, se la topologia di A è ammessa si può prendere per $\text{cov } A$ l'insieme di tutti i covettori a componenti in A ; e per l'1.5, se la topologia è quella descritta nell'1.2, si può scegliere per $\text{cov } A$ l'insieme degli x tali che: per ogni i , i w_i -valori degli x_{-j} con j elevato sono inferiormente limitati da un $\beta_i > 0$.

6. Per ogni covettore x , esiste il covettore tx definito da: $(tx)_i = x_{i-1}$; se poi l'applicazione $\pi: a \rightarrow a^p$ di A su se stesso è continua, per ogni covettore x esiste anche il covettore πx definito da: $(\pi x)_i = \pi(x_i) = x_i^p$. Si

scriverà talvolta x^t, x^π in luogo di $tx, \pi x$; t è un endomorfismo rispetto all'operazione $+$, e π è tale quando A è algebra su C_p ; è poi $t\pi = \pi t$. Quando A è un'algebra su $\mathbb{Q}$, si ha anche $(tx)^{(i)} = x^{(i-1)}$, $(\pi x)^{(i)} = p(x^{(i+1)} - x_{i+1})$, ove si dia valore arbitrario ad x_0 . Quindi è anche

$$(t\pi x)^{(i)} = px^{(i)} - px_i = (px)^{(i)} - px_i;$$

a questa si può applicare il metodo del n° 5 per ottenere un risultato valido quando A abbia caratteristica p ; tenendo conto della 1.8, il risultato è:

1.12 TEOREMA. *Se A è un'algebra su C_p , quasi completa rispetto ad una topologia C_p -lineare, e se π è un'applicazione continua di A , per ogni covettore x a componenti in A si ha $t\pi x = px$.*

Nel seguito, supporremo anche che $\text{cov } A$ sia tale che $t \text{ cov } A \subseteq \text{cov } A$, e che $\pi \text{ cov } A \subseteq \text{cov } A$ se π è applicazione continua di A ; questo è automaticamente il caso quando $\text{cov } A$ è scelto come alla fine del n° 5.

7. Sia A un anello di caratteristica p , quasi completo rispetto ad una topologia A -lineare; se U è un intorno dello 0 in A , indicheremo con U' l'insieme degli $x \in \text{cov } A$ tali che $x_i \in U$ per ogni valore di i ; gli U' sono sottogruppi di $\text{cov } A$, e se vengono presi come intorni dello 0 determinano in $\text{cov } A$ una topologia gruppenda non archimedea.

1.13 TEOREMA. *Sotto le ipotesi descritte, $\text{cov } A$ può essere esteso in modo da risultare quasi completo rispetto alla topologia descritta; in particolare, se la topologia di A è quella descritta all'1.2, e se $\text{cov } A$ è stato scelto come alla fine del n° 5, $\text{cov } A$ è quasi completo.*

DIM. Sia $j \rightarrow y_j$ una successione di Cauchy di elementi di $\text{cov } A$; la successione $i \rightarrow x_i = y_{i+1} - y_i$ è una zero-successione; ed allora, per ogni h le $i \rightarrow x_{ih}$ sono zero-successioni, uniformemente rispetto ad h . Da ciò segue subito che le $j \rightarrow y_{jh}$ sono di Cauchy, uniformemente rispetto ad h ; esse hanno quindi in A dei limiti z_h .

Fissato l'intorno U dello 0 in A , si trovi un j tale che $z_h - y_{jh} \in U$ per ogni h ; dato poi un intero $n \geq 0$, ed attribuito peso p^h alle y_{jh} e z_h , si trovi il minimo h_0 tale che siano in U i monomi monici di peso p^{-n} nelle y_{jh} di grado positivo in qualche y_{jh} con $h < -h_0$ (j fissato come descritto); si vede allora che lo stesso vale per gli analoghi monomi delle z_h ; quindi $z = (\dots, z_{-2}, z_{-1})$ è un covettore.

Aggiungeremo allora al dato insieme $\text{cov } A$ tutti gli z ottenuti in questo modo, e chiameremo Z l'insieme così ottenuto. Si vede subito, con lo stesso metodo ora usato, che elementi di Z , in numero finito, sono simultaneamente ammessi, e che Z è un gruppo addittivo; inoltre $tZ \subseteq Z$, e $\pi Z \subseteq Z$. Una to-

pologia può essere introdotta in Z nello stesso modo in cui è stata introdotta in $\text{cov } A$, e tale topologia induce in $\text{cov } A$ quella data. Si prenderà quindi Z come l'estensione di $\text{cov } A$ di cui si vuol dimostrare l'esistenza, e resta solo da provare che $\text{cov } A$ è denso in Z , o meglio che, nelle notazioni precedenti, $z = \lim_{j \rightarrow \infty} y_j$. Ed infatti, le $j \rightarrow (y_j - z)_h$ sono di Cauchy, uniformemente rispetto ad h , e tendono uniformemente a $(z - z)_h$; il che è quanto dire che z è il limite della $j \rightarrow y_j$.

Per dimostrare che il $\text{cov } A$ descritto alla fine del n° 5 è già quasi completo basta osservare che se, per un dato w_i , si ha $w_i(y_{j+1,h} - y_{j,h}) > \alpha_i > 0$ per ogni h e per $j \geq j_0$, mentre $w_i(y_{j_0,h}) > \beta_i > 0$ per $h < h_0$, allora $w_i(z_h) \geq \min(\alpha_i, \beta_i) > 0$ per $h < h_0$, C. V. D..

Ferme restando le ipotesi dell'ultima parte dell'1.13, suppongasì che A sia un'algebra su un anello k perfetto, di caratteristica p , e privo di elementi pseudonulli: ciò è equivalente al dire che ogni elemento di k ha in k una unica radice p -esima. Si indichi con $\text{vect } k$ l'anello dei vettori (infiniti) di Witt ad elementi in k : gli elementi $a \in \text{vect } k$ saranno indicati al solito con $(a_0, a_1, \dots)$. Si consideri dapprima un $a_{(r)} \in \text{vect } k$ del tipo $a_{(r)} = (0, 0, \dots, 0, a_r, 0, 0, \dots)$, ove r zeri precedono a_r . Se $x \in \text{cov } A$, definiremo $a_{(r)} x$ come il covettore $y_{(r)}$ tale che $(y_{(r)})_{-i} = a_r^{p^{-r-i}} x_{-r-i}^p$; questo appartiene certamente a $\text{cov } A$. È chiaro che la successione $r \rightarrow y_{(r)}$ è una zerosuccessione, onde esiste in $\text{cov } A$ l'elemento $y = \sum_0^\infty y_{(r)}$. Porremo per definizione $y = ax$ se $a = \sum_0^\infty a_{(r)} = (a_0, a_1, \dots)$.

1.14 TEOREMA. *Nelle ipotesi dette (ossia se A ha caratteristica p ed è quasi completa rispetto alla topologia descritta all'1.2, se k è perfetto e privo di elementi pseudonulli, e se $\text{cov } A$ è scelto come alla fine del n° 5), $\text{cov } A$ diviene un $(\text{vect } k)$ -modulo; la topologia di $\text{cov } A$ è $(\text{vect } k)$ -lineare, e l'applicazione $\{a, x\} \rightarrow ax$ è un'applicazione continua di $(\text{vect } k) \times (\text{cov } A)$ su $\text{cov } A$, qualora in $\text{vect } k$ si ponga la topologia in cui gli intorno dello 0 che la definiscono sono i $p^n \text{vect } k$, per $n = 0, 1, \dots$.*

DIM. Dati a ed x come nella definizione, si noti anzitutto che, come già visto nella dimostrazione dell'1.13, si ha $(ax)_{-i} = \lim_{r \rightarrow \infty} (a_{(0)} x + a_{(1)} x + \dots + a_{(r)} x)_{-i}$; ora per un vettore (finito o infinito) a , e rispettivamente per un covettore x , si indichi con $\varrho_r a$, e rispettivamente con $\varrho_r x$, il vettore finito di Witt $(a_0, \dots, a_{r-1})$, e rispettivamente $(x_{-r}, \dots, x_{-1})$, ad r componenti. Allora, dalle definizioni, è

$$t^r \varrho_{i-r}(a_{(r)} x) = (\pi^{-i} \varrho_i a_{(r)}) (\varrho_i x) \quad \text{per } i > r,$$

il che significa che per $i > r$ le ultime $i - r$ componenti di $a_{(r)} x$ coincidono con le ultime $i - r$ componenti di $(\pi^{-i} \varrho_i a_{(r)}) (\varrho_i x)$.

Scelti allora un $s > 0$ ed un intorno U dello 0 in A , per $i - r$ abbastanza elevato le ultime s componenti di

$$(\pi^{-i} \varrho_i (a_{(0)} + a_{(1)} + \dots + a_{(r)}) (\varrho_i x))$$

differiscono dalle corrispondenti ultime s componenti di $a_{(0)} x + \dots + a_{(r)} x$ per elementi di U ; e prendendo anche r abbastanza elevato si vede che sono in U le differenze fra le ultime s componenti di $(\pi^{-i} \varrho_i a) (\varrho_i x)$ e le corrispondenti ultime s componenti di ax . Poichè

$$(\pi^{-i} \varrho_i (a + b)) (\varrho_i x) = (\pi^{-i} \varrho_i a) (\varrho_i x) + (\pi^{-i} \varrho_i b) (\varrho_i x),$$

si conclude che $(a + b)x = ax + bx$. La relazione $a(x + y) = ax + ay$ si ottiene poi nello stesso modo, osservando che per i elevato le ultime s componenti di $\varrho_i(x + y)$ differiscono per elementi di U dalle corrispondenti componenti di $\varrho_i x + \varrho_i y$. Infine la $a(bx) = (ab)x$ discende dalla definizione di prodotto.

È così provato che $\text{cov } A$ è un $(\text{vect } k)$ -modulo. Le rimanenti asserzioni dell'enunciato sono ora ovvie, C. V. D..

Si noti che la dimostrazione precedente mostra anche che la definizione di prodotto ax ora data è collegata a quella data a p. 366 di MC nel modo seguente:

$$(ax \text{ nel senso di MC}) = (\pi^{-1} a) x.$$

(Si noti anche che l'esponente nell'ultima riga di p. 366 di MC deve essere p^{-n-r} anzichè p^{-n+r}).

Il risultato seguente è immediato:

1.15 TEOREMA. Nelle ipotesi di 1.14, è $\pi(ax) = (\pi a)(\pi x)$, $t(ax) = (\pi^{-1} a)(tx)$, $t(a\pi x) = (ta)x$.

CAPITOLO 2.

I bivettori.

8. Le convenzioni rimanendo le stesse del n° 1, sia R un anello di caratteristica p , quasi completo rispetto ad una topologia C_p -lineare. Un *bivettore* (di Witt) *a componenti in* R è un'applicazione $x: i \rightarrow x_i$ di I su R tale che, per ogni $n \in I$, il $y_n = (\dots, x_{n-1}, x_n)$ sia un covettore. Il bivettore x sarà usualmente indicato con $(\dots, x_{-1}; x_0, x_1, \dots)$; gli elementi di un in-

sieme di bivettori diconsi *simultaneamente ammessi* se tali sono, per ogni n , i corrispondenti covettori y_n . Se x, y sono bivettori simultaneamente ammessi, si definirà $x + y$ mediante la

$$(x + y)_i = \Phi(x_i, x_{i-1}, \dots; y_i, y_{i-1}, \dots);$$

per il n° 5, questa operazione di somma gode, quando hanno senso, delle proprietà commutativa e associativa; il bivettore $-x$ tale che $-x + x = 0 = (\dots, 0; 0, 0, \dots)$ esiste sempre. Fra i bivettori vi sono quelli *speciali*, per i quali $x_{-i} = 0$ per i elevato; e fra questi vi sono quelli tali che $x_i = 0$ per $i < 0$; questi ultimi formano un gruppo addittivo isomorfo a $\text{vect } R$ (gruppo addittivo dei vettori infiniti di Witt a componenti in R), e saranno senz'altro identificati coi vettori. Le definizioni di t e π , operanti sui bivettori, sono analoghe a quelle del n° 6; e l'analogo dell'1.12 resta valido.

9. Nel resto di questo capitolo si supporrà che l' R introdotto al n° 8 sia perfetto e privo di elementi pseudonulli; si supporrà poi che la sua topologia sia del tipo descritto all'1.2, e che R sia quasi completo rispetto ad essa. Indicheremo con $\text{biv } R$ l'insieme dei bivettori x , a componenti in R , tali che: per ogni intero positivo i , esiste un $\beta_i > 0$ tale che $w_i(x_{-j}) \geq \beta_i$ per j elevato. Nelle notazioni del n° 8, ed avendo scelto per $\text{cov } R$ quello descritto alla fine del n° 5, è quanto dire che $x \in \text{biv } R$ se e solo se $y_n \in \text{cov } R$ per qualche n , e quindi per tutti gli n . Si vede allora che $\text{biv } R$ è un gruppo rispetto all'operazione $+$, e che il gruppo dei bivettori speciali è divisorio, e coincide quindi con $Q \text{ vect } R$, mentre $\text{cov } R \cong \text{biv } R / \text{vect } R$.

Sia Q' l'insieme dei razionali non negativi del tipo mp^n , con n, m interi; chiameremo Q' -polinomio un polinomio in cui gli esponenti degli argomenti possano prendere valori in Q' . Ciò premesso, la topologia di R soddisfa evidentemente alle condizioni seguenti:

- (A) l'applicazione π è un omeomorfismo di R ;
- (B) esiste un sistema di intorno dello 0 (che sarà quello costantemente usato nel resto di questo capitolo), tale che per ogni suo intorno U sia in U ogni Q' -monomio monico di grado 1 i cui argomenti siano in U .

Se U è un intorno dello 0, indicheremo con U_n (per $n \in I$) l'insieme degli $x \in \text{biv } R$ tali che siano in U tutti gli $x_i^{p^{-i}}$ con $i \leq n$. Per quanto precede, gli U_n sono sottogruppi di $\text{biv } R$, ed al variare di U e di n formano un insieme di intorno dello 0 per una topologia gruppale non archimedea di $\text{biv } R$. Il gruppo $\text{vect } R$ è anche un anello; pertanto è un anello, in modo naturale, l'insieme $Q \text{ vect } R$ dei bivettori speciali; vogliamo dimostrare che la topologia indotta in questo anello dalla topologia di $\text{biv } R$ sopra introdotta rende $Q \text{ vect } R$ anello topologico, ossia rende continua l'applicazione prodotto.

Si indichi allora (notazione sempre mantenuta nel seguito) con $\{a\}$ il bivettore $(\dots, 0, 0; a, 0, 0, \dots) \in \text{biv } R$; un elemento $x \in Q \text{ vect } R$ può mettersi sotto la forma $x = \sum_i p^i(x'_i)$, ove $x'_i = \pi^{-i} x_i$; se y viene espresso analogamente (con s in luogo di r), dalla teoria dei vettori di Witt segue subito che

$$xy = \sum_{s+r} p^i \sum_{a+b=i} \{x'_a y'_b\}.$$

Se quindi $x \in U_m$ ed $y \in V_n$, si ha che $xy \in (U + V)_{n+m+1}$; da questa si vede appunto che l'applicazione prodotto è continua.

10. Vogliamo ora dimostrare che:

2.1 TEOREMA. *Sia R come descritto al n° 9; allora $Q \text{ vect } R$ è denso in $\text{biv } R$; se R' è un sottoanello di R , denso in R , anche $Q \text{ vect } R'$ è denso in $\text{biv } R$. Se infine $i \rightarrow y_i$ è una successione di Cauchy di elementi di $\text{biv } R$, e se gli y_i soddisfano uniformemente alla condizione dell'1.5 (nel senso che precisaremo subito), allora la successione converge ad un elemento di $\text{biv } R$.*

Il dire che gli y_i soddisfano uniformemente alla condizione dell'1.5 significa questo: per ogni r , è $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{estr inf } w_r(y_{i,-j}) > 0$, ove l'estremo inferiore è preso su tutti gli i e sugli $j \geq n$. Per 1.2 questa condizione implica che gli y_i sono simultaneamente ammessi.

DIM. $Q \text{ vect } R$ è denso in $\text{biv } R$ perchè se $x \in \text{biv } R$ si ha $x = \lim_{n \rightarrow \infty} (\dots, 0, 0, x_{-n}, x_{-n+1}, \dots, x_{-1}; x_0, x_1, \dots)$. Ora occorre dimostrare che $Q \text{ vect } R'$ è denso in $Q \text{ vect } R$. Se $x = (\dots, 0, x_{-n}, \dots, x_{-1}; x_0, x_1, \dots) \in Q \text{ vect } R$, si scelgano un intorno U dello 0 in R , ed un intero $m > 0$; si scelgano poi gli elementi $y_{-n}, y_{-n+1}, \dots, y_m \in R'$ per ricorrenza nel modo seguente: $x_{-n} + y_{-n} \in \pi^{-n} U$; poi, supposti trovati gli $y_{-n}, \dots, y_r$ ($-n \leq r < m$), e chiamato Y_i l'elemento di $Q \text{ vect } R'$ la cui unica componente non nulla è quella di indice i , tale componente essendo y_i , si supponga dimostrato che $Z_r = x + Y_{-n} + Y_{-n+1} + \dots + Y_r \in U_r$ (ciò è vero per $r = -n$); si scelga $y_{r+1} \in R'$ in modo che $(Z_r)_{r+1} + y_{r+1} \in \pi^{r+1} U$. Allora $Z_{r+1} = x + Y_{-n} + \dots + Y_{r+1} \in U_{r+1}$. Si giunge così a $Z_m \in U_m$, ossia $x + (Y_{-n} + \dots + Y_m) \in U_m$, con $Y_{-n} + \dots + Y_m \in Q \text{ vect } R'$, come richiesto.

Sia infine $i \rightarrow y_i$ una successione come descritta nell'enunciato; pongasi $x_1 = y_1$, e $x_i = y_i - y_{i-1}$ per $i > 1$; la $i \rightarrow x_i$ è una zero-successione, e gli x_i sono simultaneamente ammessi. Dato un intero positivo r , si ha $y_{i+1,j} = y_{i,j} + P_{ijr} + Q_{ijr}$, ove P_{ijr} è un polinomio nelle $y_{i,j-1}, \dots, y_{i,j-r}$, $x_{i,j}, \dots, x_{i,j-r}$, mentre Q_{ijr} è una serie nelle $y_{i,s}, x_{i,s}$ ($s < j$), ogni cui mono-

mio ha peso p^j (attribuendo i soliti pesi alle $x_{i,j}, y_{i,j}$) ed è divisibile per un $y_{i,s}$ od un $x_{i,s}$ con $s < r$. Scelto un intorno U dello 0 in R , e fissato j , essendo gli x_i, y_i simultaneamente ammessi è possibile trovare r in modo che, per ogni i , $Q_{ijr} \in U$; dato che inoltre la $i \rightarrow x_i$ è una zero-successione, è possibile trovare i_0 in modo che per $i > i_0$ siano in U le P_{ijr} . Pertanto la $i \rightarrow y_{i,j}$ è di Cauchy, ed ha in R un limite z_j ; per la condizione posta, per ogni r si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{j \geq n} w_r(z_{-j}) > 0$, e quindi $z = (\dots, z_{-1}; z_0, \dots) \in \text{biv } R$.

Infine, se $x_i \in U_n$ per $i > s$, anche $z - y_s \in U_n$, C. V. D..

Nelle notazioni e ipotesi di 2.1, i completamenti di $\text{biv } R$, $Q \text{ vect } R$, $Q \text{ vect } R'$ coincidono; essi saranno indicati con $\text{Biv } R$; se H è un intorno aperto dello 0 in $\text{biv } R$, si indicherà ancora con H l'interno della chiusura di H in $\text{Biv } R$. L'operazione di prodotto, definita in $Q \text{ vect } R$, è bilineare e continua; quindi può essere estesa in modo unico, bilinearmente e continuamente, a $\text{Biv } R$ per il 2.1.

2.2 COROLLARIO. *Nelle ipotesi di 2.1, $\text{Biv } R$ è un anello topologico completo, ed è un'algebra su Q ; più precisamente, se U, V sono intorni dello 0 in R , si ha $U_n V_m \subseteq (U + V)_{n+m+1}$. La topologia di $\text{Biv } R$ è $(\text{vect } R)$ -lineare, e $\text{biv } R$ è un $(Q \text{ vect } R)$ -modulo.*

DIM. Le prime due asserzioni sono ottenute, per continuità, da fatti già noti; la topologia di $\text{Biv } R$ è $(\text{vect } R)$ -lineare perchè ogni elemento y di $\text{vect } R$ appartiene ad ogni V_{-1} , cosicchè $y V_n \subseteq (V + V)_n = V_n$. Resta da dimostrare che $\text{biv } R$ è un $(Q \text{ vect } R)$ -modulo, e per questo basta dimostrare che se $y \in \text{biv } R$ ed $x \in \text{vect } R$, si ha $xy \in \text{biv } R$. Ora, per definizione xy è la somma degli z_i dati da $z_{i,j} = x_i^{p^{-i+j}} y_{j-i}^{p^i}$, per $i = 0, 1, \dots$. Si constata subito che gli z_i , e quindi le somme di essi in numero (finito) qualsiasi, soddisfano uniformemente alla condizione dell'1.5; ed allora per 2.1 la $\sum_i z_i$ è un elemento di $\text{biv } R$, C. V. D..

È opportuno notare che la identificazione di $\text{cov } R$ con $\text{biv } R / \text{vect } R$ dà una topologia in $\text{cov } R$, che non è in generale la stessa definita al n° 7; se k è un sottoanello perfetto di R , il 2.2 dà un modo di definire una struttura di $(\text{vect } k)$ -modulo su $\text{cov } R$; un confronto con la definizione di prodotto data al n° 7 mostra che questa struttura è, algebricamente ma non sempre topologicamente, la stessa di cui l'1.14 asserisce l'esistenza.

2.3 COROLLARIO. *Siano $x, y \in \text{biv } R$, e suppongasi che per ogni w_r esista un reale $\beta_r > 0$ tale che $p^{i-j} w_r(x_{-i}) + p^{-i} w_r(y_{i-j}) \geq \beta_r$ per i, j elevati. Allora $xy \in \text{biv } R$.*

DIM. Nelle notazioni della dimostrazione del 2.2, basta dimostrare che anche gli z_{-i} , con i intero elevato, soddisfano uniformemente alla condizione dell'1.5. Ora, $w_r(z_{-i, -j}) = p^{i-j} w_r(x_{-i}) + p^{-i} w_r(y_{i-j}) \geq \beta_r$, C. V. D..

11. È opportuno notare esplicitamente che vi sono degli R per i quali $\text{biv } R$ non è completo; ed anzi, tali che qualsiasi scelta di $\text{biv } R$, come gruppo addittivo di bivettori contenente quelli del tipo $\{x\}$, produce un gruppo non completo. Ecco un esempio: preso un corpo perfetto k di caratteristica $p > 2$, e presa un'indeterminata ξ , sia R l'anello delle serie di potenze nella ξ , per le quali gli esponenti possano prendere i valori razionali non negativi della forma mn^{-1} , ove n ha al più i fattori primi 2 e p . L'anello R è perfetto, ed è una schiera valutante completa per una valutazione w di rango 1 e non discreta, che supporremo normalizzata in modo da rendere $w(\xi) = 1$. Si indichi con U^α l'intorno dello 0 formato dagli elementi di w -valore $\geq \alpha$; la serie $\sum_{i=-\infty}^{\infty} p^i \{\xi^{(2/p)^i}\}$ converge ad un elemento $x \in \text{Biv } R$, in quanto $p^i \{\xi^{(2/p)^i}\} \in U_m^\alpha$ non appena $i > m$, ovvero $i \leq m$ ma $(2/p)^i > \alpha$. Supposto che x sia un bivettore, si chiami τ l'automorfismo continuo di R che induce l'identità in k , e che applica ξ su $\xi^{1/2}$; si può far operare τ anche sui bivettori mediante le componenti. Si ha $px = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p^i \{\xi^{(2/p)^{i-1}}\} = \pi \tau x$, onde $tx = \tau x$, ossia $x_i = \tau^{-i} x_0$, e quindi $w(x_i) = 2^i w(x_0)$; poichè $\lim_{i \rightarrow \infty} p^i w(x_{-i}) = \infty$, è $w(x_0) = c > 0$. La $i \rightarrow x_i$ deve essere ammessa ($i = -1, -2, \dots$), e perciò si deve avere $\lim_{i \rightarrow \infty} (x_{-i}^p, x_{-i+1}^{p-1}, x_{-i+2}^{p-1}, \dots, x_{-1}^{p-1}) = 0$, ossia $\lim_{i \rightarrow \infty} [p2^{-i} + (p-1)(2^{-i+1} + 2^{-i+2} + \dots + 2^{-1})] = \infty$. Ma ciò è falso perchè il limite ora scritto è in realtà $p-1$; questo conclude il controesempio.

12. Supporremo ora che R contenga un sottocorpo perfetto k , necessariamente di caratteristica p , e porremo $K = \text{vect } k$; è noto che K è una schiera valutante completa rispetto ad una valutazione p -adica non ramificata v , che supporremo normalizzata mediante la $v(p) = 1$; poichè la topologia di R induce in k quella discreta, la topologia di $\text{biv } R$ induce in K quella p -adica. Indicheremo con $K' = QK \subseteq Q \text{ vect } R$ il corpo quoziente di K ; si noti che $Q \text{ vect } R = K' \text{ vect } R$.

2.4 LEMMA. Nelle ipotesi precedenti, sia $x = \sum_{i=-\infty}^{\infty} p^i \{x_i\}$ un elemento di $\text{biv } R$; sia U un intorno dello 0 in R , e siano $m \geq 0$, $n > 0$ interi; sia $a \in K'$, e si considerino gli elementi $y_h = \prod_{i=1}^n x_i^{h_i}$ tali che $\sum_{i=1}^n h_i \leq m - v(a)$. Condizione sufficiente a che $ax^n \in U_m$ è che siano in U tutti gli y_h .

DIM. Per 2.1, basta dimostrarlo sotto l'ipotesi che $x \in Q \text{ vect } R$; in tal caso, ax^n differisce per elementi di $p^{m+1} \text{ vect } R \subseteq U_m$ da una combinazione

lineare, a coefficienti interi razionali, degli $ap^{r_h}\{y_h\}$, ove $r_h = \sum_1^n h_s$. La condizione posta assicura appunto che tale combinazione è essa stessa in U_m , C. V. D..

13. Il 2.4 dà un criterio di convergenza, in Biv R , della serie $\sum_0^\infty a_n x^n$, ove $a_n \in K'$ ed $x \in \text{biv } R$; in particolare, per le serie *logaritmica* ed *esponenziale*, in cui è rispettivamente $a_n = -n^{-1}$ (per $n = 1, 2, \dots$) ed $a_n = (n!)^{-1}$ (per $n = 0, 1, \dots$), si ha $v(a_n) \geq -\log_p n$, e rispettivamente $v(a_n) \geq -(n-1)(p-1)^{-1}$ (più precisamente, come si è già visto, nel secondo caso è $v(a_n) = -(p-1)^{-1}(n-S(n))$); in 2.4 basta quindi considerare le y_h per le quali $\sum_1^n h_s \leq q$, ove $q = m + \log_p n$ nel primo caso, e $q = m + (n-1)(p-1)^{-1}$ nel secondo. Occorre trovare gli insiemi h che soddisfano a queste relazioni: ora, fissato un intero positivo N , si vede che per n elevato o gli $h_s \leq 0$ sono in numero maggiore di N , ovvero, se sono in numero $\leq N$, la loro somma è, in valore assoluto, $\geq n - N - q$, cosicchè in questo caso almeno un h_s negativo ha valore assoluto $\geq (n-q)N^{-1} - 1$.

Ciò mostra che nel caso della serie logaritmica, od anche in quello della serie esponenziale quando $p \neq 2$, dato un intero positivo N , per n elevato ogni y_h o contiene più di N fattori x'_i con $i \leq 0$, ovvero ne contiene almeno uno con $i < -N$. Se allora x è tale che, fissato un intorno U dello 0, per N elevato tanto i monomi monici di grado $\geq N$ nelle $x'_0, x'_{-1}, \dots$, quanto gli x'_i con $i < -N$, siano in U , si conclude che la serie logaritmica, e quella esponenziale se $p \neq 2$, convergono. Si noti però che la seconda condizione è sempre soddisfatta per la definizione stessa di bivettore.

Quanto alla serie esponenziale per $p = 2$, si ha analogamente che o il numero degli $h_s \leq 1$ è $> N$, ovvero, se esso è $\leq N$, la somma dei valori assoluti di quelli ≤ 0 è $\geq n - 2N - m + 1$, e quindi almeno uno di questi è, in valore assoluto, $\geq (n-m+1)N^{-1} - 2$; questo è di nuovo crescente al crescere di n , e si può fare un ragionamento analogo al precedente. In conclusione, per la convergenza delle serie esponenziale e logaritmica basta che per ogni intorno U dello 0 in R esista un $N > 0$ tale che siano in U tutti i monomi monici di grado $\geq N$ nelle $x_0, x_{-1}^p, x_{-2}^{p^2}, \dots$; nel caso della caratteristica 2 e della serie esponenziale, a questi occorre aggiungere $x_1^{p^{-1}}$. Ciò significa che per ogni r deve esistere un $\beta_r > 0$ tale che $p^i w_r(x_{-i}) \geq \beta_r$ per $i \geq 0$ (o $i \geq -1$ nel caso esponenziale se $p = 2$). Ora, essendo x elemento di biv R , questa è automaticamente soddisfatta per i abbastanza elevato; basta quindi assicurarsi che $w_r(x_{-i}) > 0$ per i rimanenti valori di i :

2.5 TEOREMA. Se R soddisfa alla condizione posta all'inizio del n° 12, e se $x \in \text{biv } R$, la serie logaritmica $-\sum_1^\infty n^{-1} x^n$ converge in $\text{Biv } R$ se per ogni r ed ogni $i \leq 0$ si ha $w_r(x_i) > 0$. La serie esponenziale $\sum_0^\infty (n!)^{-1} x^n$ converge sotto le stesse condizioni se $p \neq 2$; se $p = 2$, la condizione diviene: $w_r(x_i) > 0$ per ogni r e per $i \leq 1$.

I limiti di queste serie saranno indicati con $\log(1-x)$ ed $\exp x$ rispettivamente.

14. Occorre ora togliere la condizione $x \in \text{biv } R$ da quanto precede.

2.6 LEMMA. Sia $x \in \text{Biv } R$, e sia U un intorno dello 0 in R ; allora esiste un intero n tale che $x \in U_n$.

DIM. Sia $y \in \text{biv } R$ tale che $x - y \in U_0$; sia poi r tale che $y \in U_r$; allora $x \in U_n$, ove $n = \min(0, r)$, C. V. D..

2.7 TEOREMA. Se R soddisfa alla condizione posta all'inizio del n° 12, per ogni intorno U dello 0 in R pongasi $U'_i = \bigcup_0^\infty \pi^{-N} U_i$. Se allora $x \in \text{Biv } R$, e se $x \in U'_0$ per ogni U , la serie logaritmica per $\log(1-x)$ converge. Lo stesso vale per la serie esponenziale per $\exp x$ quando $p \neq 2$; quando invece $p = 2$, U'_0 va sostituito con U'_1 .

DIM. Ragioniamo, per esempio, sul caso esponenziale, e per $p \neq 2$. Suppongasi dapprima $x \in \text{biv } R$; allora la condizione espressa nel 2.5 è equivalente alla condizione dell'enunciato.

Per il caso generale occorre rifarsi alla dimostrazione del 2.5; in essa si è visto (sostituendo N con p^N) che: esiste una funzione $n = n(m, N, r)$ ($m, N, r = 0, 1, \dots$), a valori interi positivi, tale che $(i!)^{-1} x^i \in U_m$ per ogni $i \geq n$ e per ogni $x \in \text{biv } R$ che appartenga a $U_{-r} \cap \pi^{-N} U_0$ (risp. $U_{-r} \cap \pi^{-N} U_1$ se $p = 2$); ed anzi il valore di n fornito dalla dimostrazione del 2.5 è

$$n(m, N, r) = \text{minimo intero} \geq (p-2)^{-1} [(p-1)(m + p^N(r+1)) - 1] \text{ se } p \neq 2,$$

$$\text{ovvero } n(m, N, r) = 2^N(r+2) + m - 1 \text{ se } p = 2.$$

Sia ora $x \in U'_0$ (in $\text{Biv } R$) per ogni U ; allora, e per 2.6, ad ogni U corrispondono un N ed un r tali che $x \in U_{-r} \cap \pi^{-N} U_0$. Per ogni tale U , e per ogni intero $h > 0$, si scelga in $\text{biv } R$ un $x_{U_h} \in U_{-r} \cap \pi^{-N} U_0 \cap (x + U_h)$; allora $(j!)^{-1} x_{U_h}^j \in U_m$ quando $j \geq n(m, N, r)$. La successione generalizzata $U_h \rightarrow x_{U_h}$ tende ad x , onde la $U_h \rightarrow (j!)^{-1} x_{U_h}^j$ (j fisso e $\geq n$) tende a

$(j!)^{-1}x^j$; questo pertanto appartiene ad U_m , e ciò prova che la serie per $\exp x$ converge, C. V. D..

D'ora in poi, la locuzione « $\exp x$ esiste », e analogamente per $\log(1-x)$, significherà che x soddisfa la condizione espressa al 2.7.

2.8 TEOREMA. *Sia $x \in \text{Biv } R$ tale che $\exp x$ (e quindi $\log(1-x)$) esista; pongasi $z = 1 - \exp x$ (risp. $z = \log(1-x)$); allora $x = \log(1-z)$ (risp. $x = 1 - \exp z$). Si ha poi*

$$(\exp x)(\exp y) = \exp(x + y),$$

$$\log(1-x) + \log(1-y) = \log[(1-x)(1-y)],$$

nel senso che l'esistenza dei primi membri comporta anche quella dei secondi. Infine, le applicazioni $x \rightarrow \exp x$ e $x \rightarrow \log(1-x)$ sono continue.

Dim. Sia $\pi^N x \in U_0$ (risp. $\in U_1$ se $p = 2$) per N elevato; basta dimostrare che $\pi^N \log(1-x) \in U_0$ e $\pi^N(1 - \exp x) \in U_0$ (risp. $\in U_1$). Essendo π un endomorfismo di anelli, basta verificare che $\log(1 - \pi^N x) \in U_0$ e che $1 - \exp \pi^N x \in U_0$ (risp. $\in U_1$). Scrivendo x in luogo di $\pi^N x$, e supponendo quindi $x \in U_0$ (risp. $\in U_1$), le relazioni volute saranno conseguenza della $(i!)^{-1} \in U_0$ (risp. $\in U_1$) per $i \geq 1$; ma questa è conseguenza immediata del 2.2, ovvero anche del fatto che, nelle notazioni della dimostrazione del 2.7, si ha $n(0, 0, 0) = 1$.

Stabilita così l'esistenza di $\log(1-z)$ e rispettivamente di $1 - \exp z$, occorrerebbe far vedere che questi coincidono con x ; ma ciò è verificabile in maniera puramente formale, e sarà omesso. Puramente formale è anche la verifica delle altre formule. Resta da provare la continuità.

Sia dunque $U_m (m \geq 0)$ un intorno dello 0 in $\text{Biv } R$; se $x \in U_m$, a maggior ragione anche $(i!)^{-1}x^i \in U_m$ per ogni i (cfr. 2.2), onde $\exp x \in U_m$; ciò prova la continuità di $\exp x$ nel punto $x = 0$. Se $x \neq 0$, si ha che $\exp(x+z) = (\exp x)(\exp z)$; se perciò $z \in U_m$, $\exp(x+z)$ appartiene ad $(\exp x)U_m$; se $\exp x \in U_r$ per qualche r (come certo accade per 2.6), si ha $\exp(x+z) \in U_{m+r+1}$, il che mostra appunto la continuità nel punto x .

Per il logaritmo, la continuità nel punto 0 si dimostra nello stesso modo; poi, $\log[1 - (x+z)] = \log[(1-x)(1-z(1-x)^{-1})]$. Ora, $(1-x)^{-1} = 1 + y$ se $y = x + x^2 + x^3 + \dots$, onde $\log[1 - (x+z)] = \log(1-x) + \log[1 - z(1+y)]$; se $z \in U_m$ ed $y \in U_r (r < 0)$, sarà $z(1+y) \in U_{m+r+1}$, e di qui segue la continuità di $\log$ nel punto x , C. V. D..

15. Definiamo la *funzione di Artin-Hasse* nel solito modo:

$$2.9 \quad F(z) = \exp(z + p^{-1}z^p + p^{-2}z^{p^2} + \dots) = \prod (1 - z^n)^{-\mu(n)/n},$$

ove il $\prod$ è esteso a tutti gli n interi positivi primi con p , e ove $\mu(\cdot)$ indica la funzione di Möbius, ossia

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \text{ è divisibile per il quadrato di un primo} \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ (-1)^\alpha & \text{se } n \text{ è il prodotto di } \alpha \text{ primi distinti.} \end{cases}$$

Se l'anello in cui si sta operando è un'algebra su $\mathbb{Q}$, la 2.9 è valida non appena la topologia sia I_p -lineare, l'anello sia quasi completo, e la successione $\{z, z, z, \dots\}$ sia ammessa; condizione sufficiente per questo è di avere $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n/n! = 0$; si intende che $(1 - z^n)^{-\mu(n)/n}$ va interpretato mediante la corrispondente serie binomiale. Se l'anello è un'algebra su $\mathbb{C}_p$, la prima definizione di 2.9 perde significato e solo la seconda resta valida (con la detta interpretazione delle potenze ad esponente razionale), semprechè la topologia sia $\mathbb{C}_p$ -lineare, l'anello sia quasi completo, e si abbia $\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0$.

2.10 TEOREMA. Sia $y \in \text{Biv } R$; allora $y \in \text{biv } R$ e $ty = y$ se e solo se esiste un $x \in R$ tale che $y = \log \{x\}$, o equivalentemente $\{x\} = \exp y$. Se la condizione è verificata si ha anche $\lim_{i \rightarrow \infty} (1 - x)^i = 0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \pi^i y = 0$, $\lim_{i \rightarrow \infty} y_0^i = 0$, e $x = F(y_0)$.

DIM. Dimostriamo le varie asserzioni separatamente.

1. $ty = y$ comporta $\lim_{i \rightarrow \infty} \pi^i y = 0$, ed anche $\lim_{i \rightarrow \infty} y_0^i = 0$ se $y \in \text{biv } R$.

Sia infatti U_n un intorno dello 0 in $\text{Biv } R$; per un $m < n$ opportuno si ha $y \in U_m$; se $ty = y$ si avrà $y = t^{n-m} y \in t^{n-m} U_m = \pi^{m-n} U_n$, e $\pi^i y \in U_n$ per $i \geq n - m$.

2. $y = \log \{x\}$ comporta $\lim_{i \rightarrow \infty} (1 - x)^i = 0$. Ciò è vero per la nostra convenzione sulla esistenza del logaritmo.

3. $y = \log \{x\}$ comporta $ty = y$ ed $y \in \text{biv } R$. Infatti, da $\{x\}^p = \pi \{x\}$ e da 2.8 segue $py = \pi y$, onde $ty = y$. Pongasi poi $z = -\sum_i i^{-1} (1 - \{x\})^i \in \text{vect } R$, ove $\sum_i$ è estesa a tutti gli interi positivi i non divisibili per p ; allora $y = \log \{x\} = \sum_j p^{-j} \pi^j z = \sum_j t^{-j} z$. Ogni componente di $1 - \{x\}$ è divisibile per $1 - x$, onde ogni componente di z ha la stessa proprietà; pertanto, e dato che $\lim_{i \rightarrow \infty} (1 - x)^i = 0$, i bivettori $t^{-j} z$ soddisfano uniformemente alla condizione dell'1.5, e ciò prova, per 2.1, che $y \in \text{biv } R$.

4. $ty = y$ ed $y \in \text{biv } R$ comporta $\exp y = \{x\}$, con $x = F(y_0)$. Si noti intanto che $\exp y$ esiste per 1. Pongasi poi $z = (\dots, y_0, y_0; y_0, 0, 0, \dots)$, co-

sicchè $y = \lim_{i \rightarrow \infty} t^i z$. Si ha $\exp t^i z = \pi^{-i} \exp p^i z = \pi^{-i} [\exp z]^{p^i}$. È però $z = \{y_0\} + p^{-1}\{y_0\}^p + p^{-2}\{y_0\}^{p^2} + \dots$, onde $\exp t^i z = \pi^{-i} [F(\{y_0\})]^{p^i}$; per 2.9 questo è elemento di $\text{vect } R$, e quindi la sua componente di posto 0 è $\pi^{-i} [F(y_0)]^{p^i} = F(y_0)$. Passando al limite per $i \rightarrow \infty$ si deduce, per 2.8, che $\exp y \in \text{vect } R$ e che $(\exp y)_0 = F(y_0)$. D'altra parte, la $ty = y$ dà $py = \pi y$, $(\exp y)^p = \pi \exp y$; questa, combinata con l'essere $\exp y \in \text{vect } R$, implica che $\exp y = \{x\}$ per qualche x , e quindi per $x = F(y_0)$, C. V. D..

INDICE ALFABETICO DELLE DEFINIZIONI E DEI SIMBOLI

A-lineare (topologia).	2
ammessa (successione)	2
ammessa (topologia).	2
ammesso (monomio).	2
Artin-Hasse (funzione di).	22
bivettore	15
biv R .	16
Biv R .	18
C_p	2
componenti di un bivettore	15
componenti di un covettore	11
componenti fantasma	12, 13
cov A .	12
covettore	11
esponenziale (serie)	20
$\exp$	21
$F(z)$	22
gruppaie non archimedeae (topologia)	2
I	1
I_p	1
k	14, 19
K	19
K'	19
$\log$	21

logaritmica (serie)	20
MC	1
p	1
prodotto di bivettori	18
prodotto di vettori per covettori	14
pseudovalutazione	3
Q	1
Q'	16
Q' -polinomio	16
quasi completamento	7
quasi completo	7
R (per i bivettori)	15, 16, 19
simultaneamente ammesse (successioni)	2
simultaneamente ammessi (bivettori)	16
somma di bivettori	16
somma di covettori	11
speciali (bivettori)	16
$S(r)$	2
t	12
topologia in $\text{biv } R$	16
topologia in $\text{cov } A$	13
U'	13
U_n	16
v	19
vect k	14
π	12, 13
Φ	10
φ_i	10
ψ_i	6
$\{ \}$	17