ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

G. SORANI

Homologie des q-paires de Runge

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 17, nº 4 (1963), p. 319-332

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1963_3_17_4_319_0>

HOMOLOGIE DES q-PAIRES DE RUNGE (*)

par G. SORANI (Roma)

On sait [1] que, X étant une variété holomorphiquement complète (c'est à dire une variété de Stein), on a $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i > n$.

A. Andreotti et R. Narasimhan [3] ont envisagé les paires de Runge, (X, Y), de variétés holomorphiquement complètes et ont prouvé que les groupes d'homologie relative à coefficients entiers $H_i(X \bmod Y, \mathbb{Z})$ sont nuls pour $i > n$. Ce résultat a été obtenu en utilisant la théorie de Morse et ne dépend pas du théorème démontré en [1].

Nous avons précédemment généralisé [8] aux variétés q-convexes et q-complètes le résultat de [1]: si X est une variété q-complète on a $H_i(X, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i > n + q - 1$.

Notre but ici est d'étendre aux variétés q-complètes la notion de paire de Runge et de démontrer que les q-paires de Runge de variétés q-complètes, que nous allons définir, jouissent de propriétés topologiques analogues à celles des paires de Runge de variétés holomorphiquement complètes. Nous y parviendrons en utilisant le théorème démontré en [8].

Ensuite nous démontrerons la propriété topologique suivante des variétés q-complètes: *soit X une variété q-complète par rapport à une fonction différentiable φ fortement q-plurisousharmonique sur X; les ensembles $B_c = \{x \in X \mid \varphi(x) < c, c \in \mathbb{R}\}$ sont q-Runge dans X.* Pour $q = 1$ ce théorème a été démontré par Doquier et Grauert [6] et par Narasimhan [7] si X est un espace de Stein; pour un domaine $X \subset \mathbb{C}^n$, ce théorème est déjà dans Behnke et Stein [4].

Pervenuto alla Redazione il 15 Aprile 1963.

(*) Lavoro eseguito nel gruppo di Ricerca n. 35 del C. M C. N. R. (anno accademico 1962-63).

1. q-paires de Runge.

Soient :

X une variété complexe (1) de dimension complexe n,
Ω^k le faisceau des germes de formes différentielles, à valeurs complexes, de degré k, holomorphes sur X,
$\mathcal{O} = \Omega^0$ le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X,
$A^{k,r}$ le faisceau des germes de formes différentielles, à valeurs complexes, de type (k, r), C^∞ sur X,
$\bar\partial : A^{k,r} \longrightarrow A^{k,r+1}$ l'opérateur de différentiation extérieure par rapport aux variables conjuguées.

De la suite exacte de faisceaux et homomorphismes :

$$0 \longrightarrow \Omega^k \longrightarrow A^{k,0} \xrightarrow{\bar\partial} A^{k,1} \xrightarrow{\bar\partial} \dots \xrightarrow{\bar\partial} A^{k,n} \longrightarrow 0,$$

on obtient la suite non exacte :

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \Omega^k) \longrightarrow \Gamma(X, A^{k,0}) \longrightarrow \Gamma(X, A^{k,1}) \longrightarrow \dots \longrightarrow \Gamma(X, A^{k,n}) \longrightarrow 0.$$

Pour $0 \leq r \leq n$ nous posons :

$$Z^{k,r}(X) = \operatorname{Ker}(\Gamma(X, A^{k,r}) \xrightarrow{\bar\partial} \Gamma(X, A^{k,r+1})).$$

L'espace $Z^{k,r}(X)$, muni de la topologie de la convergence compacte des coefficients de formes différentielles et de toutes leurs dérivées est un espace de Fréchet (2).

Soit Y un ouvert contenu dans X, nous donnons la définition suivante :

Définition. *On dit que (X, Y) est une q-paire de Runge si l'image de l'homomorphisme de restriction :*

$$r : Z^{k,q-1}(X) \longrightarrow Z^{k,q-1}(Y)$$

est dense dans $Z^{k,q-1}(Y)$ pour $0 \leq k \leq n$.

---

(1) Toute variété est supposée de dimension pure et à base dénombrable.

(2) Un espace de Fréchet est un espace vectoriel topologique sur $\mathbb{C}$, localement convexe, métrisable et complet.

Si X et $Y \subset X$ sont des variétés q-complètes [3] on peut envisager une q-paire de Runge de variétés q-complètes ; on dira aussi que Y est q-Runge dans X.

Dans le n. 7 nous montrerons (théorème 3) que la définition précédente généralise, de façon tout à fait naturelle, la définition ordinaire de paire de Runge de variétés de Stein.

Dans cet article nous prouverons (théorème 2) que *si* (X, Y) *est une q-paire de Runge de variétés q-complètes alors* $H_i(X \bmod Y, \mathbb{Z}) = 0$ *pour* $i > n + q - 1$. Pour $q = 1$ (cas des variétés de Stein) A. Andreotti et R. Narasimhan [3] ont en outre prouvé que $H_n(X \bmod Y, \mathbb{Z})$ est sans torsion et en plus libre si Y est relativement compact dans X, à bord différentiable.

Nous exprimons notre reconnaissance à M. Aldo Andreotti pour les conseils reçus pendant la rédaction de cet article, et pour son aide constante.

2. Quelques propriétés des variétés q-complètes.

Une variété complexe X est dite q-complète s'il existe une fonction différentiable $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ fortement q-plurisousharmonique [4] sur X telle que les ensembles $\{x \in X \mid \varphi(x) < \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$ soient relativement compacts dans X. Une variété 1-complète est une variété holomorphiquement complète (cfr. [2]).

Nous rappelons ici quelques propriétés des variétés q-complètes qui sont utilisées dans la suite de ce travail.

P_1 — (A. Andreotti et H. Grauert [2] page 250) *Soit X une variété q-complète, $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X ; on a* :

$$H^r(X, \mathcal{F}) = 0 \ \textit{pour} \ r \geq q .$$

Dans cet article il suffit d'envisager le cas où $\mathcal{F} = \Omega^k \, (0 \leq k \leq n)$.

P_2 — ([8] page 304) *Soit X une variété q-complète ; on a* :

$$H_i(X, \mathbb{Z}) = 0 \qquad \textit{pour} \qquad i > n + q - 1,$$

$$H_{n+q-1}(X, \mathbb{Z}) \qquad \textit{libre.}$$

(3) Pour la définition de variété q-complète cfr. le n. 2 suivant; pour les notions relatives aux espaces q-convexes et q-complets cfr. [2].

(4) Une fonction φ à valeurs réelles, C^∞ sur X, est dite *fortement q-plurisousharmonique* si la forme hermitienne :

$$\mathcal{L}(\varphi)_x = \Sigma \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^\alpha \, \partial \overline{z^\beta}}\right)_x u^\alpha \, \overline{u^\beta}$$

a $n - q + 1$ valeurs propres > 0, en tout point $x \in X$.

On obtient facilement la démonstration de ce théorème en utilisant la théorie des points critiques de M. Morse; en [8] nous avons prouvé un théorème plus général qui fournit un résultat analogue pour les variétés q-convexes. Pour ce qui concerne ce travail, relativement à la seconde affirmation du théorème, il suffit de constater que $H_{n+q-1}(X, \mathbb{Z})$ est sans torsion.

3. Formes différentielles sur les variétés q-complètes.

Nous allons prouver ici le théorème suivant:

Théorème 1. *Soit X une variété q-complète. Toute forme différentielle, C^∞ sur X, de degré $n+q-1$, d-fermée* ($d=\partial+\bar\partial$) *est cohomologue à une forme de type* $(n, q-1)$, *$\bar\partial$-fermée (et donc d-fermée).*

Preuve. Soit:

$$\alpha=\alpha^{n,q-1}+\alpha^{n-1,q}+\ldots+\alpha^{q,n-1}+\alpha^{q-1,n} \tag{3,1}$$

une forme différentielle C^∞ sur X, de degré $n+q-1$, d-fermée.

A cause de la bigraduation, la condition $d\alpha=0$ équivaut aux conditions suivantes:

$$\left\{\begin{array}{lll} \bar\partial\alpha^{n,q-1} & +\,\partial\alpha^{n-1,q} & =0 \\ \bar\partial\alpha^{n-1,q} & +\,\partial\alpha^{n-2,q+1} & =0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \bar\partial\alpha^{q+1,n-2} & +\,\partial\alpha^{q,n-1} & =0 \\ \bar\partial\alpha^{q,n-1} & +\,\partial\alpha^{q-1,n} & =0. \end{array}\right. \tag{3,2}$$

En vertu du théorème de Dolbeault $H^{q-1,n}(X)\approx H^n(X, \Omega^{q-1})$; compte tenu de P_1, $H^n(X, \Omega^{q-1})=0$; il s'ensuit que la forme $\bar\partial$-fermée $\alpha^{q-1,n}$ est aussi $\bar\partial$-exacte; on a donc $\alpha^{q-1,n}=\bar\partial\beta_1^{q-1,n-1}$. On peut alors écrire (3,1):

$$\alpha=\alpha^{n,q-1}+\alpha^{n-1,q}+\ldots+\alpha^{q,n-1}+\bar\partial\beta_1^{q-1,n-1}.$$

La dernière des égalités (3,2) devient alors:

$$\bar\partial\,(\alpha^{q,n-1}-\partial\beta_1^{q-1,n-1})=0,$$

et, comme (vu P_1) $H^{n-1}(X, \Omega^q) = 0$, la forme $\alpha^{q,n-1} - \partial\beta_1^{q-1,n-1}$ est $\bar\partial$-exacte; c'est à dire que $\alpha^{q,n-1} - \partial\beta_1^{q-1,n-1} = \bar\partial\beta_2^{q,n-2}$. On peut alors écrire (3,1):

$$\alpha = \alpha^{n,q-1} + \alpha^{n-1,q} + \dots + \alpha^{q+1,n-2} + \bar\partial\beta_2^{q,n-2} + \partial\beta_1^{q-1,n-1} + \bar\partial\beta_1^{q-1,n-1}.$$

Ainsi de suite on arrive à la décomposition suivante:

$$\alpha = \alpha^{n,q-1} + \bar\partial\beta_{n-q+1}^{n-1,q-1} + d\beta_{n-q}^{n-2,q} + \dots + d\beta_2^{q,n-2} + d\beta_1^{q-1,n-1}, \tag{3,3}$$

d'où l'on tire que $d\alpha = 0$ peut s'écrire:

$$(\partial + \bar\partial)(\alpha^{n,q-1} + \bar\partial\beta_{n-q+1}^{n-1,q-1}) = 0;$$

ce qui entraine:

$$\bar\partial(\alpha^{n,q-1} - \partial\beta_{n-q+1}^{n-1,q-1}) = 0. \tag{3,4}$$

Si l'on ajoute et l'on soustrait $\partial\beta_{n-q+1}^{n-1,q-1}$ au second terme de (3,3) on obtient:

$$\alpha = \alpha^{n,q-1} - \partial\beta_{n-q+1}^{n-1,q-1} + d\beta_{n-q+1}^{n-1,q-1} + \dots + d\beta_2^{q,n-2} + d\beta_1^{q-1,n-1},$$

ce qui montre l'égalité des classes de de Rham $\{\alpha\} = \{\alpha^{n,q-1} - \partial\beta_{n-q+1}^{n-1,q-1}\}$ et donc, vu (3,4), on a la preuve du théorème.

4. Homologie des q-paires de Runge.

Nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Soit (X, Y) une q-paire de Runge de variétés q complètes; alors:*

$$H_i(X \bmod Y, \mathbb{Z}) = 0 \qquad \textit{pour} \qquad i > n + q - 1. \tag{4,1}$$

Preuve. Comme $Y \subset X$ on a la suite exacte:

$$\begin{aligned} \dots \to H_{n+q+1}(Y, \mathbb{Z}) \to H_{n+q+1}(X, \mathbb{Z}) \to H_{n+q+1}(X \bmod Y, \mathbb{Z}) \to \\ \to H_{n+q}(Y, \mathbb{Z}) \to H_{n+q}(X, \mathbb{Z}) \to H_{n+q}(X \bmod Y, \mathbb{Z}) \to \\ \to H_{n+q-1}(Y, \mathbb{Z}) \to \dots; \end{aligned} \tag{4,2}$$

compte tenu de P_2, on a $H_i(X \bmod Y, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i > n + q$; il nous reste donc à montrer que $H_{n+q}(X \bmod Y, \mathbb{Z}) = 0$.

Nous démontrerons d'abord que :

$$H_{n+q}(X \bmod Y, \mathbb{C}) = 0. \tag{4,3}$$

Ecrivons de nouveau (4,2) pour l'homologie à coefficients complexes ; compte tenu de P_2 (5) on obtient la suite exacte :

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow H_{n+q}(X \bmod Y, \mathbb{C}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_{n+q-1}(Y, \mathbb{C}) \longrightarrow H_{n+q-1}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow \ldots .$$

Ceci montre que (4,3) est satisfaite si et seulement si l'homomorphisme :

$$\varrho : \; H_{n+q-1}(Y, \mathbb{C}) \longrightarrow H_{n+q-1}(X, \mathbb{C})$$

est injectif.

Nous démontrerons d'abord trois lemmes.

5. Soient A, B deux espaces de Fréchet; A', B' leurs duals topologiques. Soit :

$$i : \; A \longrightarrow B$$

un homomorphisme et soit :

$$i^* : \; B' \longrightarrow A'$$

l'homomorphisme transposé de i ; on a le lemme suivant :

LEMME 1. *Si l'image de l'homomorphisme $i : A \longrightarrow B$ est dense dans B alors l'homomorphisme $i^* : B' \longrightarrow A'$ est injectif.*

Preuve. Soit $\beta \in B'$; il suffit de montrer que si $\beta(iA) = 0$ alors $\beta = 0$. Supposons $\beta(iA) = 0$; par hypothèse iA est dense dans B ; alors β est une fonctionnelle linéaire continue qui est nulle sur un ensemble partout dense dans B, donc elle est nulle dans tout B et ceci prouve le lemme.

LEMME 2. *Pour $k \geq 0$, $H^k(X, \mathbb{C})$ est un espace de Fréchet.*

Preuve. L'espace $Z^k(X, \mathbb{C}) = \{\varphi^k \mid d\varphi^k = 0\}$, muni de la topologie de la convergence compacte des coefficients de formes différentielles et de toutes leurs dérivées, est un espace de Fréchet en tant que sous-espace fermé de l'espace de Fréchet $C^k(X, \mathbb{C})$ des formes différentielles de degré k, C^∞ sur X.

---

(5) La validité de la proposition P_2 pour l'homologie à coefficients complexes a été prouvée en [8].

L'espace $B^k(X, \mathbb{C}) = \{\varphi^k \mid \varphi^k = d\varphi^{k-1}\} \subset Z^k(X, \mathbb{C})$ est fermé dans $Z^k(X, \mathbb{C})$. En effet on a, en indiquant par $z_k \in Z_k$ les cycles de dimension k de X, $B^k(X, \mathbb{C}) = \bigcap_{z_k \in Z_k} B^k_{z_k}$ où $B^k_{z_k} = \left\{\varphi^k \,\middle|\, \int_{z_k} \varphi^k = 0\right\}$.

Tout $B^k_{z_k}$ est fermé en tant que lieu des zéros de la fonctionnelle linéaire continue $l(\varphi^k) = \int_{z_k} \varphi^k$ et donc leur intersection est fermée.

Alors $H^k(X, \mathbb{C})$, étant isomorphe au quotient d'un espace de Fréchet pour un sous-espace fermé, est un espace de Fréchet.

LEMME 3. *Pour* $k \geq 0$, $(H^k(X, \mathbb{C}))'$ *dual topologique de* $H^k(X, \mathbb{C})$ *est isomorphe à* $H_k(X, \mathbb{C})$.

Preuve. Le dual topologique de $H^k(X, \mathbb{C})$ est l'espace $(H^k(X, \mathbb{C}))' = \mathcal{L}(H^k(X, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ des formes linéaires continues sur $H^k(X, \mathbb{C})$.

Soit $\mathcal{U} = \{U_i\}$ un recouvrement ouvert convexoïde [6] de X et soient $C^k(\mathcal{U}, \mathbb{C})$, $Z^k(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ les groupes de cochaînes et de cocycles différentiables de X définis sur les simplexes petits d'ordre $\mathcal{U}$. On a :

$$H^k(\mathcal{U}, \mathbb{C}) = Z^k(\mathcal{U}, \mathbb{C})/\delta C^{k-1}(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \approx H^k(X, \mathbb{C}). \tag{5,1}$$

Soient $H_k(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ les groupes d'homologie du complexe de chaînes de simplexes différentiables petits d'ordre $\mathcal{U}$. On a :

$$H_k(\mathcal{U}, \mathbb{C}) \approx H_k(X, \mathbb{C}). \tag{5,2}$$

a) En vertu du théorème de de Rham :

$$R^k(X, \mathbb{C}) = Z^k(X, \mathbb{C})/B^k(X, \mathbb{C}) \approx H^k(\mathcal{U}, \mathbb{C}), \tag{5,3}$$

l'isomorphisme étant induit par l'application qui à toute forme différentielle fermée φ^k associe la cochaîne $c^k \in C^k(\mathcal{U}, \mathbb{C})$:

$$c^k = \int_{\sigma_k} \varphi^k$$

avec σ_k contenu dans un $U_i \in \mathcal{U}$ (comme on vérifie directement).

---

(6) Toute intersection de U_i est un ouvert convexe

b) Si $\alpha \in H^k(X, \mathbb{C})$ et $a \in H_k(X, \mathbb{C})$ la forme linéaire $\langle \alpha, a \rangle = \alpha(a)$ est définie. Compte tenu de (5,1), (5,2), (5,3) on a :

$$\langle \alpha, a \rangle = \int_{c_k} \varphi^k$$

avec $\varphi^k \in R^k(X, \mathbb{C})$, $c_k \in H_k(\mathcal{U}, \mathbb{C})$.

De plus la forme linéaire $\langle \alpha, a \rangle$ sur $H^k(X, \mathbb{C}) \times H_k(X, \mathbb{C})$ est non dégénérée.

Il s'ensuit que :

$$H_k(X, \mathbb{C}) \approx \operatorname{Hom}(H^k(X, \mathbb{C}), \mathbb{C})$$

et que, en vertu de *a*), tout $\alpha \in \operatorname{Hom}(H^k(X, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ est du type $\alpha = \int_{c_k} \varphi^k$ pour un $c_k \in H_k(\mathcal{U}, \mathbb{C})$ convenable.

Mais alors α est continue et donc :

$$\operatorname{Hom}(R^k(X, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \approx \mathcal{L}(R^k(X, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \approx \mathcal{L}(H^k(X, \mathbb{C}), \mathbb{C}) \approx H_k(X, \mathbb{C})$$

et ceci prouve le lemme.

6. Preuve du théorème 2.

L'espace $H_k(Y, \mathbb{C})$ est isomorphe au dual topologique de $H^k(Y, \mathbb{C})$ et l'espace $H_k(X, \mathbb{C})$ est isomorphe au dual topologique de $H^k(X, \mathbb{C})$. Comme l'application naturelle :

$$\varrho \;:\; H_k(Y, \mathbb{C}) \longrightarrow H_k(X, \mathbb{C})$$

est la transposée de l'homomorphisme de restriction :

$$\varrho^* \;:\; H^k(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^k(Y, \mathbb{C}),$$

en vertu du lemme 1, (4, 3) sera prouvée si nous démontrons que, pour $k = n + q - 1$, l'image de l'homomorphisme ϱ^* est dense dans $H^k(Y, \mathbb{C})$.

Nous allons donc montrer que l'image de l'homomorphisme ϱ^* : $H^{n+q-1}(X, \mathbb{C}) \longrightarrow H^{n+q-1}(Y, \mathbb{C})$ est dense dans $H^{n+q-1}(Y, \mathbb{C})$.

Soit $h_Y^{n+q-1} \in H^{n+q-1}(Y, \mathbb{C})$; en vertu du théorème de de Rham h_Y^{n+q-1} se représente par une forme φ_Y^{n+q-1} d-fermée ; vu le théorème 1 on peut choisir, pour représenter h_Y^{n+q-1}, une forme $\varphi_Y^{n,\,q-1}$ $\bar{\partial}$-fermée ; une telle forme est même d-fermée.

Comme (X, Y) est une q-paire de Runge l'image de l'homomorphisme $r : Z^{n,q-1}(X) \longrightarrow Z^{n,q-1}(Y)$ est dense dans $Z^{n,q-1}(Y)$. Il existe donc une suite de formes $\{\varphi_{X,t}^{n,q-1}\}$ telle que la suite de leurs images par l'homomorphisme induit par ϱ^* a pour limite $\varphi_Y^{n,q-1}$. Les formes $\varphi_{X,t}^{n,q-1}$ sont d-fermées; donc elles définissent des classes $h_X^{n+q-1} \in H^{n+q-1}(X, \mathbb{C})$ dont les images par ϱ^* ont pour limite h_Y^{n+q-1}. On a donc prouvé que:

$$H_{n+q}(X \bmod Y, \mathbb{C}) = 0. \tag{4,3}$$

Envisageons de nouveau (4,2). On observe que, en vertu de la proposition P_2, l'application:

$$i : H_{n+q}(X \bmod Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n+q-1}(Y, \mathbb{Z})$$

est injective.

De (4,3) il s'ensuit que $H_{n+q}(X \bmod Y, \mathbb{Z})$ est un groupe de torsion, la seconde affirmation de P_2 dit que $H_{n+q-1}(Y, \mathbb{Z})$ est sans torsion; alors, comme l'application i est injective, on a $H_{n+q}(X \bmod Y, \mathbb{Z}) = 0$ ce qui donne la preuve du théorème.

7. Sur la définition de q-paire de Runge.

Soit X un espace complexe, $Y \subset X$, ouvert. Soit $\mathcal{H}(X)$ $[\mathcal{H}(Y)]$ l'espace des fonctions holomorphes sur X $[Y]$ muni de la topologie de la convergence compacte. On dit que (X, Y) est une paire de Runge si l'image de l'homomorphisme de restriction:

$$r : \mathcal{H}(X) \longrightarrow \mathcal{H}(Y)$$

est dense dans $\mathcal{H}(Y)$.

Nous démontrerons le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *(X, Y) est une paire de Runge de variétés de Stein si et seulement si (X, Y) est une 1-paire de Runge (de variétés 1-complètes).*

Preuve. Nous remarquons d'abord que, si $q = 1$, X, Y sont des variétés de Stein, de plus $Z^{k,0}(X) = \Gamma(X, \Omega^k)$ et $Z^{k,0}(Y) = \Gamma(Y, \Omega^k)$, $(0 \le k \le n)$.

On a $\mathcal{H}(X) = \Gamma(X, \mathcal{O})$ et $\mathcal{H}(Y) = \Gamma(Y, \mathcal{O})$; ces espaces sont munis de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact (théorème de Weierstrass).

Soit (X, Y) une 1-paire de Runge ; par hypothèse l'image de l'homomorphisme $Z^{k,0}(X) \longrightarrow Z^{k,0}(Y)$ est dense dans $Z^{k,0}(Y)$; en faisant $k = 0$ il s'ensuit que (X, Y) est une paire de Runge.

La proposition inverse du théorème découle du lemme suivant :

Lemme 4. *Soient X et $Y \subset X$, des variétés de Stein et soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X. Si l'image de l'homomorphisme :*

$$\varrho : \Gamma(X, \mathcal{O}) \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O})$$

est dense dans $\Gamma(Y, \mathcal{O})$, alors l'image de l'homomorphisme :

$$\varrho' : \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{F})$$

est dense dans $\Gamma(Y, \mathcal{F})$ [7].

Preuve. Soient Π_X et $\Pi_Y \subset \Pi_X$ deux polyèdres analytiques [8] dans X et Y. Envisageons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(X, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\varrho} & \Gamma(Y, \mathcal{O}) \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \Gamma(\Pi_X, \mathcal{O}) & \xrightarrow{\sigma} & \Gamma(\Pi_Y, \mathcal{O}) \end{array} \tag{7,1}$$

où les images des homomorphismes α, β sont denses dans $\Gamma(\Pi_X, \mathcal{O})$, $\Gamma(\Pi_Y, \mathcal{O})$ en vertu du théorème de Oka-Weil et l'image de ϱ est dense dans $\Gamma(Y, \mathcal{O})$ par hypothèse.

Soit $f \in \Gamma(\Pi_Y, \mathcal{O})$; il existe une suite $\{g_n\}$, $g_n \in \Gamma(Y, \mathcal{O})$, telle que $\{\beta(g_n)\} \longrightarrow f$. Il existe une suite $\{h_{n\nu}\}$, $h_{n\nu} \in \Gamma(X, \mathcal{O})$, telle que $\{\varrho(h_{n\nu})\} \longrightarrow g_n$; alors la suite $\{\beta\varrho(h_{n\nu})\} \longrightarrow f$.

Comme le diagramme (7,1) est commutatif, la suite $\{\sigma\alpha(h_{n\nu})\} \longrightarrow f$, et ceci montre que l'image par σ de $\alpha(h_{n\nu})$ tend vers f, c'est à dire que l'image de l'homomorphisme σ est dense dans $\Gamma(\Pi_Y, \mathcal{O})$.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau analytique cohérent sur X, soit $\mathcal{O}^p$ la somme directe de p exemplaires du faisceau $\mathcal{O}$. Comme Π_X est holomorphiquement

---

[7] On sait que chaque espace $\Gamma(X, \mathcal{F})$ est muni de façon naturelle d'une structure d'espace de Fréchet.

[8] Un ouvert $\Pi \subset\subset X$ est dit un polyèdre analytique s'il existe un voisinage U de $\overline{\Pi}$ dans X et un nombre fini de fonctions holomorphes f_i $(1 \leq i \leq k)$, tels que $\overline{\Pi} = \{ x \in U \mid |f_i(x)| \leq 1 \}$.

complet et relativement compact dans X, en vertu du théoreme A de Cartan-Serre [5], il existe sur tout Π_X une résolution de $\mathcal{F}$ du type :

$$\mathcal{O}^p \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

Envisageons à présent le diagramme suivant:

$$(7,2) \qquad \begin{array}{ccc} \Gamma(\Pi_X, \mathcal{O}^p) & \xrightarrow{\beta_1} & \Gamma(\Pi_X, \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \\ \downarrow r_1 & & \downarrow r \\ \Gamma(\Pi_Y, \mathcal{O}^p) & \xrightarrow{\beta_2} & \Gamma(\Pi_Y, \mathcal{F}) \longrightarrow 0 \end{array}$$

où, d'après le théorème B de Cartan-Serre [5], les lignes sont exactes car Π_X est holomorphiquement complet.

Comme l'homomorphisme σ de (7,1) a une image dense dans $\Gamma(\Pi_Y, \mathcal{O})$, l'homorphisme r_1 a une image dense dans $\Gamma(\Pi_Y, \mathcal{O}^p)$. Alors le diagramme (7,2) montre que l'image de l'homomorphisme:

$$(7,3) \qquad r : \Gamma(\Pi_X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(\Pi_Y, \mathcal{F})$$

est dense dans $\Gamma(\Pi_Y, \mathcal{F})$.

Envisageons maintenent l'homomorphisme:

$$\varrho_1 : \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(\Pi_X, \mathcal{F});$$

en vertu du théorème de Oka-Weil généralisé aux faisceaux cohérents, l'image de ϱ_1 est dense dans $\Gamma(\Pi_X, \mathcal{F})$. Alors d'après (7,3) l'image de l'homomorphisme :

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(\Pi_Y, \mathcal{F})$$

est dense dans $\Gamma(\Pi_Y, \mathcal{F})$.

Comme pour tout compact $K \subset Y$ on peut trouver un polyèdre analytique $\Pi_Y \supset K$, il s'ensuit que l'image de l'homomorphisme :

$$\varrho' : \Gamma(X, \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{F})$$

est dense dans $\Gamma(Y, \mathcal{F})$ et ceci prouve le lemme.

Pour $\mathcal{F} = \Omega^k$ on obtient la preuve du théorème.

8. Une propriété topologique des variétés q-complètes.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 4. *Soit X une variété q-complète par rapport à une fonction C^∞, φ fortement q-plurisousharmonique sur X. Les ensembles $B_c = \{x \in X \mid \varphi(x) < c,\ c \in \mathbb{R}\}$ sont q-Runge dans X.*

La preuve de ce théorème découle des lemmes suivants :

Lemme 5. *Soit D un ouvert dans $\mathbb{C}^n$ et φ une fonction C^∞ fortement q-plurisousharmonique sur D. Soit $z_0 \in D$ et soit :*

$$Y = \{z \in D \mid \varphi(z) < \varphi(z_0)\}.$$

Si U^* est un voisinage d'holomorphie de z_0 suffisamment petit dans D, pour tout voisinage d'holomorphie de z_0, $U \subset\subset U^*$, qui soit de Runge dans U^*, l'application :

$$r : Z^{k,l}(U) \longrightarrow Z^{k,l}(U \cap Y)$$

a une image dense dans $Z^{k,l}(U \cap Y)$ pour $l \geq q - 1$.

La preuve se tire de la proposition 11 de [2] en remplaçant le faisceau $\mathcal{O}$ par le faisceau $\Omega^k \approx \mathcal{O}^{\binom{n}{k}}$.

Soient A, V deux ouverts relativement compacts dans X, tels que $A = B_c \cup V$ soit q-complet (cfr. [2] pag. 237), $(\overline{B_c - B_c \cap V}) \cap (\overline{V - B_c \cap V}) = \emptyset$.

Lemme 6. *L'image de l'application :*

$$Z^{k,l}(A) \longrightarrow Z^{k,l}(B_c)$$

est dense dans $Z^{k,l}(B_c)$ pour $l \geq q - 1$.

Preuve. [9] i) Dans les conditions de l'énoncé on a la suite de Mayer-Vietoris :

$$\ldots \longrightarrow H^{k,l}(A) \longrightarrow H^{k,l}(B_c) \oplus H^{k,l}(V) \longrightarrow H^{k,l}(B_c \cap V) \xrightarrow{j^*}$$

$$\longrightarrow H^{k,l+1}(A) \longrightarrow \ldots\ .$$

---

[9] La démonstration de ce lemme, sauf pour le point i) est copiée de celle de la proposition 19 de [2]; il n'y a qu'à remplacer les cocycles de Čech par les formes différentielles.

Définissons une application :

$$j : Z^{k,l}(B_c \cap V) \longrightarrow Z^{k,l+1}(A).$$

Soit $\gamma \in Z^{k,l}(B_c \cap V)$ et soit ϱ une fonction différentiable sur V, $0 \leq \varrho \leq 1$, telle que :

$\varrho = 1$ sur un voisinage dans A de la fermeture dans A de $V - B_c \cap V$,
$\varrho = 0$ sur un voisinage de $\partial V \cap B_c$.

Posons :

$$\alpha_1 = \begin{cases} \varrho\gamma \text{ sur } B_c \cap V \\ 0 \text{ sur } B_c - B_c \cap V, \end{cases} \qquad , \qquad \alpha_2 = \begin{cases} (\varrho - 1)\,\gamma \text{ sur } B_c \cap V \\ 0 \qquad \text{sur } V - B_c \cap V \end{cases}$$

on a $\alpha_1 - \alpha_2 = \gamma$ sur $B_c \cap V$.

On définit :

$$j(\gamma) = \bar{\partial}\alpha_1 - \bar{\partial}\alpha_2 \qquad \text{sur } A\,;$$

on aura $\bar{\partial}\alpha_1 - \bar{\partial}\alpha_2 = \bar{\partial}\gamma = 0$ sur $B_c \cap V$, $\bar{\partial} j(\gamma) = 0$ sur A, donc $j(\gamma) \in Z^{k,l+1}(A)$.

On vérifie que l'application j induit l'homomorphisme j^* de la suite de Mayer-Vietoris ; de plus j est une application linéaire continue d'espaces de Fréchet.

ii) Comme l'espace des formes exactes $B^{k,l+1}(A)$ est égal à $Z^{k,l+1}(A)$, (cfr. [2] pag. 250), l'image réciproque par j de $B^{k,l+1}$ est égale à $Z^{k,l}(B_c \cap V)$.

Définissons l'application :

$$r : Z^{k,l}(B_c) \oplus Z^{k,l}(V) \longrightarrow Z^{k,l}(B_c \cap V)$$

par

$$r(\gamma_1 \oplus \gamma_2) = \gamma_1|_{B_c \cap V} - \gamma_2|_{B_c \cap V}\,.$$

A cause de l'exactitude de la suite de Mayer-Vietoris, cette application est bien définie et surjective. De plus, c'est une application continue d'espaces de Fréchet donc c'est un homomorphisme topologique.

iii) On choisit V de manière à satisfaire aux conditions demandées pour l'ouvert U dans le lemme 5. Soit $\xi \in Z^{k,l}(B_c)$, $r(\xi) = \xi|_{B_c \cap V}$. En vertu du lemme 5, si $l \geq q - 1$, on peut trouver une suite de formes $\eta_n \in Z^{k,l}(V)$ telle que $r(\eta_n) \longrightarrow r(\xi)$. Donc $r(\xi) - r(\eta_n) \longrightarrow 0$.

Comme $r(\xi)$ et $r(\eta_n)$ sont dans $Z^{k,l}(B_c \cap V) = j^{-1}(B^{k,l+1}(A))$, en vertu du théorème de Banach, on peut trouver deux formes:

$$\gamma_1(n) \in Z^{k,l}(B_c) \quad \text{et} \quad \gamma_2(n) \in Z^{k,l}(V)$$

telles que

$$\gamma_1(n) \rightarrow 0, \qquad \gamma_2(n) \rightarrow 0$$

$$r(\gamma_1(n) \oplus \gamma_2(n)) = r(\xi) - r(\eta_n).$$

Comme

$$r[(\xi - \gamma_1(n)) \oplus (\eta_n - \gamma_2(n))] = 0$$

la forme

$$\xi_1(n) = \begin{cases} \xi - \gamma_1(n) & \text{sur} \quad B_c \\ \eta_n - \gamma_2(n) & \text{sur} \quad V \end{cases}$$

est $\bar{\partial}$-fermée sur A, donc $\xi_1(n) \in Z^{k,l}(A)$. Il est clair que l'image de $\xi_1(n)$ dans $Z^{k,l}(B_c)$ converge vers ξ et ceci prouve le lemme.

Pour obtenir la preuve du théorème il suffit d'appliquer le résultat précédent un nombre fini de fois.

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANDREOTTI A. et FRANKEL T., *The Lefschetz theorem on hyperplane sections.* Annals of Math 69 (1959) pag. 713-717.

[2] ANDREOTTI A. et GRAUERT H., *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes.* Bull. Soc. Math. de France T. 90 (1962) pag. 193-259.

[3] ANDREOTTI A. et NARASIMHAN R., *A topological property of Runge Pairs* Annals of Math. 76 (1962) pag. 499-509.

[4] BEHNKE H· et STEIN K., *Approximation analytischer Functionen in vorgegebenen Gebieten des Raumes von n komplexen Veränderlichen.* Nachr. Ges. der Wissenschaften zu. Göttingen (1939) pag. 195-202.

[5] CARTAN H., Séminaire E. N. S. 1951/52.

[6] DOQUIER F. et GRAUERT H., *Levisches Problem und Rungescher Satz fur Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten.* Math. Annalen 140 (1960) pag. 94-123.

[7] NARASIMHAN R., *The Levi problem for complex spaces.* Math Annalen 142 (1961) pag. 355-365.

[8] SORANI G., *Omologia degli spazi q-pseudoconvessi.* Ann. Scuola Normale Sup. Pisa Vol. XVI (1962) pag. 299-304.

Istituto di Matematica
Università di Roma