ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

G. GEYMONAT

Sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari ellittiche

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 16, nº 3 (1962), p. 225-284

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_3_225_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUL PROBLEMA DI DIRICHLET PER LE EQUAZIONI LINEARI ELLITTICHE(*)

di G. GEYMONAT (a Pavia)

INTRODUZIONE

È noto che il problema di DIRICHLET non omogeneo per una equazione lineare alle derivate parziali di tipo ellittico di ordine $2m$ assegnata in un aperto Ω dello spazio euclideo R^n, limitato e sufficientemente regolare

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = \varphi_j & \text{su } \Gamma,\ j = 0, \dots, m-1 \ (\nu \text{ normale alla frontiera } \Gamma \text{ di } \Omega) \end{cases}$$

è stato ampiamente studiato da vari autori in questi ultimi anni.

Il presente lavoro porta un contributo allo studio del problema (I) negli spazi del tipo di SOBOLEV $W^{s,p}(\Omega)$, p reale > 1, s reale, $0 \leq s \leq m$. Esso si collega quindi con tutte le ricerche che si sono interessate di soluzioni di tipo «non variazionale» del problema, ed in particolare con i recenti lavori di LIONS-MAGENES [13], [14], [15], [16], [17], [18], (v. bibliografia finale). Il lavoro ha avuto origine dalla tesi di laurea da me discussa col prof. E. MAGENES nel luglio 1961 presso l'Università di Pavia; in essa mi ero proposto di riprendere e di estendere al caso $p > 1$ qualunque, ed $s = 0, 1, \dots, m-1$ il procedimento utilizzato da MAGENES in [17], per il caso $p = 2$ ed $s = m - 1$, ed in una conferenza tenuta a Nancy e a Strasburgo nell'aprile 1960 (non pubblicata), per il caso $p = 2$, $s = 0, 1, \dots, m-1$. Ma i successivi e recenti lavori di LIONS-MAGENES, [13], [14], [15], [16], mi hanno suggerito di considerare e di studiare il problema (I) anche dal

---

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca n. 12 del Comitato per la Matematica del C. N. R. per l'anno accademico 1961-62.

nuovo punto di vista introdotto da tali autori. In questo lavoro espongo appunto i risultati ottenuti con entrambi i metodi; a tale scopo il lavoro è articolato in due parti.

Nella parte I, in opportune ipotesi di unicità per p reale e > 1, per ogni s reale, $0 \leq s \leq m$, tale che $s + 1/p$ sia non intero, assegnato f in $K_s^{-m,p}(\Omega)$ (spazio di distribuzioni su Ω per la cui definizione v. n. 3.2) ed i dati φ_j in $W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, si dimostra (v. teor. 4.1) che esiste una ed una sola $u \in W^{m-s,p}(\Omega)$ che risolve il problema (I); inoltre tale soluzione dipende con continuità da f e φ_j. Il problema è anzitutto ricondotto al caso omogeneo ($\varphi_j = 0, j = 0, 1, \dots, m-1$) mediante la funzione ausiliaria v che si ottiene risolvendo con un teorema di LIONS-MAGENES preliminarmente il problema

$$\text{(II)} \qquad \begin{cases} Av = 0 & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial^j v}{\partial \nu^j} = \varphi_j & \text{su } \Gamma, j = 0, \dots, m-1 \end{cases}$$

Il caso omogeneo viene poi studiato partendo da un risultato già noto (AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [3], BROWDER [5], [6], LIONS-MAGENES [14], [16]) nelle classi $W^{m-r,p}(\Omega)$ (con r reale, $0 \leq r \leq m$, e sufficientemente regolare) ed applicando un procedimento di traspozione la cui idea è stata introdotta nei problemi ai limiti da VISHIK-SOBOLEV [27], ma che viene qui utilizzata nella forma di LIONS-MAGENES (v. ad es. [18]), in modo da ottenere in definitiva un risultato per il problema (I) in classi più ampie e nelle quali sia ancora possibile distinguere l'equazione $Au = f$ in Ω dalle condizioni al contorno $\dfrac{\partial^j u}{\partial \nu_j} = \varphi_j, j = 0, \dots, m-1$, dando ad esse un preciso significato mediante opportuni teoremi di *tracce*. Il risultato così ottenuto si differenzia da quelli di LIONS-MAGENES [14], [16] sopratutto per la maggior generalità lasciata al dato f.

Nella parte II ho invece esposto i risultati ottenuti originariamente nella mia tesi di laurea. Il problema è ricondotto anche ora al caso omogeneo mediante la costruzione di una opportuna funzione ausiliaria v che verifichi le condizioni ai limiti $\dfrac{\partial^j v}{\partial \nu^j} = \varphi_j, j = 0, \dots, m-1$, ma non necessariamente la $Av = 0$. La costruzione di tale v è ora fatta *direttamente* utilizzando e adottando opportunamente i procedimenti di teoria del potenziale di AGMON [1] e di MIRANDA [21], già usati anche da MAGENES in [17]. Il risultato ottenuto pur riferendosi al solo caso $n = 2$, si differenzia da quelli della parte I e sembra interessante perchè riguarda proprio il caso, in cui $s + 1/p$ è intero, che è in un certo senso eccezionale e per il quale con i metodi della parte I si possono ottenere solo risultati approssimati (v. teor. 4.2).

Rimandando al n. 6.4 per un confronto dei risultati mi sembra tuttavia di dover segnalare che utilizzando i risultati di entrambe le parti si ottiene in particolare un teorema (teor. 6.3) che generalizza o precisa precedenti risultati di CIMMINO [7], MAGENES [17], LIONS-MAGENES [16] ed altri autori; in tale teorema rientra ad esempio il classico problema di Dirichlet

$$\Delta u = 0 \qquad \text{in } \Omega$$

$$u = \varphi_0 \qquad \text{su } \Gamma$$

con φ_0 assegnata su Γ ed ivi di potenza p-esima sommabile.

PARTE I

n. 1. Preliminari

1.1 Indichiamo con Ω un insieme aperto e limitato, di classe C^{2m+1} (1) di frontiera Γ, dello spazio euclideo reale R^n $(n \geq 2)$ delle $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Introduciamo poi, seguendo il n. 3 di [13], una famiglia $\{\Omega_\tau\}$ di aperti di classe C^{2m+1}, di frontiera Γ_τ, dipendente dal parametro τ, $0 \leq \tau \leq \tau_0 < 1$ ed avente Ω come limite per $\tau \to 0$. In modo preciso si facciano le seguenti:

Ipotesi 1.1 i) $\{\Omega_\tau\}$, $0 \leq \tau \leq \tau_0 < 1$, *è una famiglia di aperti di classe* C^{2m+1}, *che invade* Ω *per* $\tau \to 0$;

ii) *detta* Γ_τ *la frontiera di* Ω_τ *esiste una famiglia di aperti* $\{\Theta_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$ *in* R^n *tali che* $\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{\mu} \Theta_i$, $\Gamma_\tau \subset \bigcup_{i=1}^{\mu} \Theta_i$;

iii) *per ogni* Θ_i, $i = 1, \dots, \mu$ *esiste un omeomorfismo* g_i *di* $\overline{\Theta}_i$ *su*

$$\overline{Q} = [-1, +1]^n,$$

$(t = (t_1, \dots, t_n)$ *è il punto generico di* $Q)$, *tale che:*

$$g_i(\Gamma \cap \Theta_i) = Q \cap \{t_n = 0\} \tag{1.1}$$

$$g_i(\Gamma_\tau \cap \Theta_i) = Q \cap \{t_n = -\tau\}; \tag{1.2}$$

IV) g_i *è* $2m+1$ *volte differenziabile con continuità, cioè le componenti di* g_i *hanno derivate di ordine* $2m+1$ *continue in* $\overline{\Theta}_i$, *ed è ivi a jacobiano* $\neq 0$;

V) *se* $\Theta_i \cap \Theta_j \neq \emptyset$, $i \neq j$, *esiste un omeomorfismo* J_{ij}, $2m+1$ *volte differenziabile con continuità e a jacobiano* > 0, *di* $g_i(\Theta_i \cap \Theta_j)$ *su* $g_j(\Theta_i \cap \Theta_j)$ *in modo che*

$$g_j(x) = J_{ij}(g_i(x)) \qquad \forall\, x \in \Theta_i \cap \Theta_j. \tag{1.3}$$

Siano $g_{i1}(x), g_{i2}(x), \dots, g_{in}(x)$ le componenti di $g_i(x)$, $i = 1, \dots, \mu$. Mediante il sistema $\{\Theta_i, g_i\}_{1 \leq i \leq \mu}$ risulta anche definito un omeomorfismo θ_τ di Γ_τ su Γ ponendo

$$\theta_\tau(x) = g_i^{-1}(g_{i1}(x), \dots, g_{in-1}(x), 0), \qquad \forall\, x \in \Gamma_\tau \cap \Theta_i. \tag{1.4}$$

---

(1) Viene qui seguita una nomenclatura abituale (v. ad es. MIRANDA [20]); Ω è dunque tale che Γ è una varietà $(n-1)$-dimensionale $2m+1$ volte differenziabile con continuità ed Ω sta da una stessa parte di Γ.

In virtù delle ipotesi 1.1 si ha:

PROP. 1.1 *θ_τ e l'inverso θ_τ^{-1} sono omeomorfismi rispettivamente di Γ_τ su Γ e di Γ su Γ_τ, $2m+1$ volte differenziabili con continuità, le loro derivate di ordine $\leq 2m+1$ essendo limitate da costanti indipendenti da τ.*

1.2. Nel presente lavoro utilizzeremo alcuni noti spazi di distribuzioni che vengono abitualmente indicati con $W^{s,p}(R^n)$, $W^{s,p}(\Omega)$ e $W^{s,p}(\Gamma)$ (2); rinviamo per le definizioni precise e per ogni altro riferimento (anche bibliografico) a LIONS-MAGENES [14], cap. I (si veda anche, specie per la bibliografia dei lavori sovietici sull'argomento, il rapporto di NIKOLSKIJ [23]). Si osservi che nel cap. I di [14], Ω è un aperto limitato di classe C^∞ mentre qui è solo di classe C^{2m+1}; tuttavia, poichè qui si considerano sempre spazi di distribuzioni su Γ di ordine finito $\leq 2m$, le considerazioni svolte nel cap. I di [14], che verranno qui utilizzate, si trasportano in modo immediato.

Per comodità del lettore, limitiamoci ad alcuni brevi richiami, iniziando con alcuni spazi di interpolazione introdotti da LIONS [11], [12]. Siano X_0 ed X_1 due spazi di BANACH con $X_0 \subset X_1$ l'iniezione di X_0 in X_1 essendo continua; siano α e p reali, $p > 1$, $0 < \frac{1}{p} + \alpha < 1$; si indica con $W(p, \alpha; X_0, X_1)$ lo spazio (delle classi) delle funzioni $t \to f(t)$ tali che $t^\alpha f(t) \in L^p(0, \infty; X_0)$, $t^\alpha \frac{df}{dt} \in L^p(0, \infty; X_1)$ (si ricordi che se E è uno spazio di BANACH, si suole indicare con $L^p(a, b; E)$ lo spazio delle classi di funzioni di potenza p-esima sommabile in $]a, b[$ a valori in E).

Introdotta la norma

$$(1.5) \qquad \|f\|_{W(p,\alpha;X_0,X_1)} = \max\left\{\left(\int_0^\infty t^{\alpha p} \|f(t)\|_{X_0}^p \, dt\right)^{1/p}, \left(\int_0^\infty t^{\alpha p} \left\|\frac{df}{dt}\right\|_{X_1}^p dt\right)^{1/p}\right\}$$

$W(p, \alpha; X_0, X_1)$ diviene uno spazio di BANACH e per ogni elemento f si può definire la « traccia » $f(0) \in X_1$.

Si indica con $T(p, \alpha; X_0, X_1)$ lo spazio (detto spazio di tracce) delle u

---

(2) Tali spazi vengono anche indicati a volte con le notazioni

$$W_p^s, H^{s,p} (H^s, \text{ se } p = 2), H_{s,L_p}, L_p^s, P^{p,s}, \ldots .$$

tali che $u = f(0)$ *per almeno un* $f \in W(p, \alpha; X_0, X_1)$; normalizzato ponendo

$$\| u \|_{T(p,\alpha;X_0,X_1)} = \inf_{f(0)=u} \| f \|_{W(p,\alpha;X_0,X_1)} \tag{1.6}$$

esso diviene uno spazio di BANACH, dotato della seguente proprietà:

TEOREMA 1.1 *Se* Y_0, Y_1 *è una seconda coppia di spazi di Banach con* $Y_0 \subset Y_1$ *(l'iniezione continua) e se* $\pi \in \mathcal{L}(X_0; Y_0)$ *e* $\pi \in \mathcal{L}(X_1; Y_1)$ *con* $\|\pi\|_{\mathcal{L}(X_i;Y_i)} \leq$ $\leq c_i \, (i = 0, 1)$, *allora* $\pi \in \mathcal{L}(T(p, \alpha; X_0, X_1); T(p, \alpha; Y_0, Y_1))$ (3) *e la norma di* π *in quest'ultimo spazio è maggiorata da* $c_0^{1-\theta} c_1^{\theta}$, $\theta = \dfrac{1}{p} + \alpha \in]0, 1[$.

Indicata con $k = (k_1, \dots, k_n)$ una qualunque n-pla di numeri interi ≥ 0 si pone $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, $D^k u = \dfrac{\partial^{|k|} u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$, $D^{(0, \dots, 0)} u = u$; $L^p(\Omega)$ è lo spazio delle classi di funzioni a valori complessi di potenza p-esima sommabile munito della norma abituale.

È noto che per s intero ≥ 0 e p reale > 1 si chiama spazio di SOBOLEV $W^{s,p}(\Omega)$ lo spazio delle classi di funzioni a valori complessi u, definite, in Ω tali che $D^k u \in L^p(\Omega)$, $|k| \leq s$, le derivazioni essendo intese nel senso delle distribuzioni su Ω, normato ponendo

$$\| u \|_{W^{s,p}(\Omega)} = \Big(\sum_{|k| \leq s} \| D^k u \|^p_{L^p(\Omega)} \Big)^{1/p}; \tag{1.7}$$

$W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$; tale definizione può essere generalizzata al caso di s reale positivo utilizzando gli spazi di tracce; precisamente si definirà per $0 < s < 1$:

$$W^{s,p}(\Omega) = T(p, \alpha; W^{1,p}(\Omega), W^{0,p}(\Omega)) \qquad \frac{1}{p} + \alpha = 1 - s.$$

$W^{s,p}(\Omega)$, $0 < s < 1$, può anche essere introdotto in un altro modo; si ha infatti il seguente

TEOR. 1.2. $W^{s,p}(\Omega)$, $0 < s < 1$, *coincide* (4) *con lo spazio delle* $u \in L^p(\Omega)$ *tali che*

$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+ps}} \, dx \, dy < +\infty,$$

---

(3) $\mathcal{L}(E; F)$ indica lo spazio delle applicazioni lineari e continue di E in F.

Nel corso del lavoro indicheremo con c, eventualmente munito di indici, costanti fra loro anche diverse.

(4) La coincidenza tra due spazi di BANACH E ed F andrà qui e nel seguito intesa nel senso che esiste un isomorfismo algebrico e topologico tra E ed F.

normalizzato da

$$\| u \|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega | u |^p \, dx + \int_\Omega \int_\Omega \frac{| u(x) - u(y) |^p}{| x - y |^{n+ps}} \, dx \, dy \right)^{1/p}.$$

Si definisce poi lo spazio $W^{s,p}(\Omega)$ con s *reale positivo qualunque*, $s = [s] + \sigma$, $[s]$ più grande intero $\leq s$, come lo spazio delle $u \in W^{[s],p}(\Omega)$ tali che $D^k u \in W^{\sigma,p}(\Omega)$ per $| k | = [s]$, normato da

$$\| u \|_{W^{s,p}(\Omega)} = \left(\| u \|^p_{W^{[s],p}(\Omega)} + \sum_{|k|=[s]} \| D^k u \|^p_{W^{\sigma,p}(\Omega)} \right)^{1/p}. \tag{1.8}$$

Si indica infine con $W_0^{s,p}(\Omega)$, $s \geq 0$, la chiusura in $W^{s,p}(\Omega)$ di $\mathcal{D}(\Omega)$ (spazio delle funzioni indefinitamente differenziabili a supporto compatto in Ω); si tratta di uno spazio normale di distribuzioni (5) su Ω il cui duale $(W_0^{s,p}(\Omega))$, (5 bis) è ancora uno spazio di distribuzioni su Ω. Si pone allora la definizione: per s reale negativo

$$W^{s,p}(\Omega) = (W_0^{-s,p'}(\Omega))' \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{1.9}$$

Per $W^{s,p}(R^n)$ si possono porre le stesse definizioni e si hanno gli stessi risultati che per $W^{s,p}(\Omega)$; l'unica differenza sta nel fatto che $W_0^{s,p}(R^n) = W^{s,p}(R^n)$, $s \geq 0$, poichè $\mathcal{D}(R^n)$ è deuso in $W^{s,p}(R^n)$, v. Prop. 1.2 di [14]; si hanno infine i seguenti risultati (v. Prop. 2.3, 2.4, 2.5 di [14]):

PROP. 1.2 $W^{s,p}(\Omega)$, $s \geq 0$, *coincide con l'insieme delle restrizioni a* Ω *delle* $u \in W^{s,p}(R^n)$.

PROP. 1.3. $C^{2m}(\overline{\Omega})$ (6) *è denso in* $W^{s,p}(\Omega)$, $0 \leq s \leq 2m$.

PROP. 1.4. *Per* s *intero* ≥ 0 *si ha*

$$T(p, \alpha; \; W^{s+1,p}(\Omega), \; W^{s,p}(\Omega)) = W^{s+1-\theta,p}(\Omega)$$

$$1 < p < +\infty, \; 0 < \theta < 1, \; \frac{1}{p} + \alpha = \theta.$$

---

(5) Uno spazio E di distribuzioni su Ω si dice normale se: 1) $\mathcal{D}(\Omega) \subset E \subset \mathcal{D}'(\Omega)$; 2) le iniezioni di E in $\mathcal{D}'(\Omega)$ e di $\mathcal{D}(\Omega)$ in E sono continue; 3) $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in E.

(5 bis) Se E è uno spazio di Banach con E' si indica il suo duale forte. Se p è un numero reale > 1, si indicherà sempre con p' il suo coniugato: $1/p + 1/p' = 1$.

(6) $C^{2m}(\overline{\Omega})$ è lo spazio delle funzioni $2m$ volte differenziabili con continuità in $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$.

Gli spazi $W^{s,p}(\Gamma)$, $-2m \leq s \leq 2m$, vengono definiti riportandoli agli spazi $W^{s,p}(R^{n-1})$ mediante « carte locali »: v. n. 2.5 di [14]; si hanno un teorema analogo al teorema 1.2, e le seguenti proprietà, v. Prop. 2.8, 2.11 di [14]:

PROP. 1.5. *$C^{2m}(\Gamma)$ (7) è denso in $W^{s,p}(\Gamma)$, s reale, $-2m \leq s \leq 2m$.*

PROP. 1.6. *Per s intero, $-2m \leq s \leq 2m-1$ si ha:*

$$T(p, \alpha;\ W^{s+1,p}(\Gamma),\ W^{s,p}(\Gamma)) = W^{s+1-\theta,p}(\Gamma)$$

$1 < p < +\infty$, $0 < \theta < 1$, $\dfrac{1}{p} + \alpha = \theta$.

Si ricordi infine il seguente teorema di tracce, ottenuto nella sua forma generale da USPENSKII [28] ed in casi particolari precedentemente da diversi altri autori: ARONSZAJN, PRODI, GAGLIARDO, ecc. (per la bibliografia vedasi ad es. il n. 5.1 di [14] e [23])

TEOR. 1.3. *Essendo $s \leq 2m$, sia $p = 2$ ed $s > 1/2$, ovvero $p \neq 2, p > 1$, $s > 1/p$ ed $s - 1/p$ non intero; allora, per $j = 0, 1, \ldots, [s - 1/p]^-$ (più grande intero ≥ 0 e strettamente inferiore ad $s - 1/p$), l'applicazione $u \longrightarrow \gamma_j u = \dfrac{\partial^j u}{\partial \nu^j}$ (ν normale interna a Γ; $\gamma_0 u = u$) di $C^{2m}(\overline{\Omega})$ su $C^{2m}(\Gamma)$ si prolunga per continuità in una applicazione lineare e continua ancora indicata $u \longrightarrow \gamma_j u$ di $W^{s,p}(\Omega)$ su $W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$.*

1.3. Riprendendo la trattazione di n. 1.1, in modo analogo a quanto visto per Ω e per Γ, si introducono gli spazi $C^{2m}(\Gamma_\tau)$, $W^{s,p}(\Omega_\tau)$, $W^{s,p}(\Gamma_\tau)$, s reale, $-2m \leq s \leq 2m$.

PROP. 1.7. *Per $\varphi \in C^{2m}(\Gamma_\tau)$ si definisca $\theta_\tau^* \varphi$ mediante la*

$$\theta_\tau^* \varphi(x) = \varphi(\theta_\tau^{-1}(x)); \tag{1.10}$$

allora $\theta_\tau^* \varphi$ è in $C^{2m}(\Gamma)$ e l'applicazione $\varphi \longrightarrow \theta_\tau^* \varphi$ si prolunga per continuità in una applicazione lineare e continua $u \longrightarrow \theta_\tau^* u$ di $W^{s,p}(\Gamma_\tau)$ in $W^{s,p}(\Gamma)$, per ogni s reale con $-2m \leq s \leq 2m$.

---

(7) $C^{2m}(\Gamma)$ è lo spazio delle funzioni $2m$ volte differenziabili con continuità su Γ.

Analogamente per $\psi \in C^{2m}(\Gamma)$ *si definisca* $(\theta_\tau^*)^{-1}\psi \in C^{2m}(\Gamma_\tau)$ *mediante la*

$$(\theta_\tau^*)^{-1}\psi(x) = \psi(\theta_\tau(x)); \tag{1.11}$$

l'applicazione $\psi \longrightarrow (\theta_\tau^*)^{-1}\psi$ *si prolunga per continuità in una applicazione lineare e continua* $u \longrightarrow (\theta_\tau^*)^{-1}u$ *di* $W^{s,p}(\Gamma)$ *in* $W^{s,p}(\Gamma_\tau)$, *per ogni* s *reale con* $-2m \leq s \leq 2m$. *Inoltre* θ_τ^* *è un isomorfismo il cui inverso è* $(\theta_\tau^*)^{-1}$ *e si ha infine*

$$\| \theta_\tau^* \|_{\mathcal{L}(W^{s,p}(\Gamma_\tau);\ W^{s,p}(\Gamma))} \leq c_2, \tag{1.12}$$

$$\| (\theta_\tau^*)^{-1} \|_{\mathcal{L}(W^{s,p}(\Gamma);\ W^{s,p}(\Gamma_\tau))} \leq c_3, \tag{1.13}$$

c_2 *e* c_3 *essendo costanti indipendenti da* τ.

Dim. — Per s intero ≥ 0, con $0 \leq s \leq 2m$, dalle ipotesi 1.1, dalla prop. 1.1., e dalla definizione di norma in $W^{s,p}(\Gamma)$ ed in $W^{s,p}(\Gamma_\tau)$ segue facilmente

$$\| \theta_\tau^* \varphi \|_{W^{s,p}(\Gamma)} \leq c_2 \| \varphi \|_{W^{s,p}(\Gamma_\tau)} \qquad \forall \varphi \in C^{2m}(\Gamma_\tau), \tag{1.14}$$

c_2 essendo indipendente da τ. Per la prop. 1.5, applicata a Γ_τ, la (1.14) si ottiene per prolungamento anche per ogni $u \in W^{s,p}(\Gamma_\tau)$, cioè

$$\theta_\tau^* \in \mathcal{L}(W^{s,p}(\Gamma_\tau);\ W^{s,p}(\Gamma))$$

e la norma di θ_τ^* in questo spazio è maggiorata da c_2 (indipendente da τ). Analogamente si può procedere per $(\theta_\tau^*)^{-1}$ e si vede che il prolungamento di $(\theta_\tau^*)^{-1}$ è l'inverso del prolungamento di θ_τ^*.

Per $u \in C^{2m}(\Gamma_\tau)$, $\psi \in C^{2m}(\Gamma)$ si ha poi

$$\langle \theta_\tau^* u, \psi \rangle = \int_\Gamma \theta_\tau^* u(x)\, \psi(x)\, d\sigma_x = \int_{\Gamma_\tau} u(x)\, (\theta_\tau^*)^{-1} \psi(x)\, J(x)\, d\sigma_x \tag{1.15}$$

dove $J(x)$, essendo Ω di classe C^{2m+1}, è una opportuna funzione $\in C^{2m}(\Gamma_\tau)$ e $\neq 0$ su tutto Γ_τ; e quindi si ha anche

$$\langle \theta_\tau^* u, \psi \rangle = \int_{\Gamma_\tau} u(x)\, \varphi(x)\, d\sigma_x \tag{1.16}$$

dove

$$\varphi(x) = (\theta_\tau^*)^{-1} \psi(x)\, J(x) \qquad \forall x \in \Gamma_\tau$$

e quindi $\varphi \in C^{2m}(\Gamma_\tau)$.

Di qui per la prop. 1.5, è lecito definire $\theta_\tau^* u$ per $u \in W^{s,p}(\Gamma_\tau)$ con s intero, $-2m \leq s < 0$, mediante la

$$\langle \theta_\tau^* u, \psi \rangle = \langle u, J(x)(\theta_\tau^*)^{-1} \psi \rangle \qquad \forall \psi \in C^{2m}(\Gamma)$$

e si ha che θ_τ^* è lineare e continua da $W^{s,p}(\Gamma_\tau)$ in $W^{s,p}(\Gamma)$.

Analogamente si può procedere per $(\theta_\tau^*)^{-1}$ e si vede che il prolungamento di $(\theta_\tau^*)^{-1}$ è l'inverso del prolungamento di θ_τ^*. Per dimostrare la proposizione nel caso di s reale è poi sufficiente applicare il teor. 1.1 e la prop. 1.6.

Sia ora $u \in W^{s,p}(\Omega)$, s reale con $0 \leq s \leq 2m$; allora è anche u, o più precisamente la restrizione di u ad Ω_τ, in $W^{s,p}(\Omega_\tau)$ e quindi sotto le ipotesi del teorema di tracce, teor. 1.3, si possono considerare le tracce su Γ_τ:

$$\gamma_{j,\tau} u = \frac{\partial^j u}{\partial \nu_\tau^j} \qquad (\nu_\tau \text{ normale interna a } \Gamma_\tau) \tag{1.17}$$

elementi di $W^{s-j-1/p,p}(\Gamma_\tau)$, $j = 0, 1, \dots, [s - 1/p]^-$.

In virtù della prop. 1.7, $\theta_\tau^*(\gamma_{j,\tau} u)$ è un elemento di $W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)$; per comodità si scriverà

$$\tilde{\gamma}_{j,\tau} u = \theta_\tau^* (\gamma_{j,\tau} u) \tag{1.18}$$

$$\tilde{\gamma}_\tau u = \{ \tilde{\gamma}_{0,\tau} u, \dots, \tilde{\gamma}_{[s-1/p]-,\tau} u \}. \tag{1.19}$$

Si ha allora la seguente proposizione:

PROP. 1.8. *Nelle ipotesi fatte su Ω e su Ω_τ nel* n. 1.1, *essendo $s \leq 2m$, sia $p = 2$ ed $s > 1/2$, ovvero $p \neq 2$, $p > 1$, $s > 1/p$ ed $s - 1/p$ non intero; allora si ha:*

$$\lim_{\tau \to 0} \| \tilde{\gamma}_{j,\tau} u - \gamma_j u \|_{W^{s-j-1/p,p}(\Gamma)} = 0, \qquad j = 0, \dots, [s - 1/p]^-. \tag{1.20}$$

La dimostrazione è sostanzialmente nota nel caso di s intero e discende facilmente dalla stessa dimostrazione del teor. 1.3; per s reale si può ottenere ad es. utilizzando i teoremi di interpolazione citati nel n. 1.2 e il teor. 9.1 di [13] (si osservi che questo teorema si estende immediatamente al caso che qui interessa di $p > 1$).

Ricordiamo infine la seguente

PROP. 1.9. *Sia p reale > 1, s reale $> 1/p$ e tale che $s - 1/p$ non sia intero; sia $[s - 1/p]^-$ il massimo intero ≥ 0 strettamente inferiore ad $s - 1/p$. Indicato con $W_\gamma^{s,p}(\Omega)$ il sottospazio delle u di $W^{s,p}(\Omega)$ tali che $\gamma_0 u = 0, \dots, \gamma_{[s-1/p]^-} u = 0$, si ha:*

$$W_\gamma^{s,p}(\Omega) = W_0^{s,p}(\Omega).$$

Tale proposizione, precedentemente nota per s intero > 0, è stata dimostrata da LIONS-MAGENES (v. Prop. 5.1 di [16]) nel caso generale.

n. 2. Ipotesi e risultati preliminari sul problema di Dirichlet non omogeneo per gli operatori lineari ellittici.

2.1. Sia Ω il dominio di frontiera Γ introdotto nel n. 1.1. Sia dato un operatore differenziale lineare d'ordine $2m$, che verrà scritto nella forma

$$Au = \sum_{|k|,|h| \leq m} (-1)^{|k|} D^k (a_{kh}(x) D^h u(x)) \tag{2.1}$$

i cui coefficienti $a_{kh}(x)$ sono funzioni a valori complessi assegnate in $\bar{\Omega}$ tali che

$$\begin{aligned} &a_{kh}(x) \in C^{\max\{|h|,|k|\}}(\bar{\Omega}) \\ &a_{kh}(x) \in C^{m+1}(\bar{\Omega}) \qquad \text{se } |h| = |k| = m. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Sia A *ellittico* in $\bar{\Omega}$, cioè per ogni $x \in \bar{\Omega}$ e ogni vettore reale $\xi \neq 0$ sia

$$\sum_{|h|=|k|=m} a_{hk}(x) \xi^{k+h} \neq 0; \tag{2.3}$$

se $n = 2$, sia A *propriamente ellittico in* $\bar{\Omega}$, cioè per ogni $x \in \bar{\Omega}$ e ogni coppia di vettori reali ξ e ξ' linearmente indipendenti il polinomio nella variabile complessa τ:

$$\sum_{|k|=|h|=m} a_{kh}(x) (\xi + \tau\xi')^{k+h} \tag{2.4}$$

abbia esattamente m radici con parte immaginaria positiva ed m con parte immaginaria negativa.

Siano poi

$$a(u, v) = \sum_{|k|,|h| \leq m} \int_\Omega a_{kh}(x) D^h u \, \overline{D^k v} \, dx \tag{2.5}$$

la forma sesquilineare associata ed A;

$$A^* v = \sum_{|k|,|h| \leq m} (-1)^{|k|} D^k (\overline{a_{hk}}(x) D^h v) \tag{2.6}$$

l'operatore aggiunto formale di A;

$$a^*(u, v) = \overline{a(v, u)} \tag{2.6}$$

la forma sesquilineare associata ad A^*.

2.2. Posto d'ora in avanti

$$(u, v) = \int_\Omega u \, \overline{v} \, dx \tag{2.8}$$

si hanno per $u, v \in C^{2m}(\overline{\Omega})$ le seguenti *formule di Green* (v. ad es. [13], [4], [24]):

$$(Au, v) = a(u, v) + \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma S_j u \, \overline{\gamma_j v} \, d\sigma \tag{2.9}$$

$$(A^* v, u) = a^*(v, u) + \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma T_j v \, \overline{\gamma_j u} \, d\sigma \tag{2.10}$$

$$(Au, v) - (u, A^* v) = \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma S_j u \, \overline{\gamma_j v} \, d\sigma - \sum_{j=0}^{m-1} \int_\Gamma \overline{T_j v} \, \gamma_j u \, d\sigma \tag{2.11}$$

dove $d\sigma$ indica l'elemento d'area su Γ ed S_j e T_j sono opportuni operatori differenziali di ordine $2m - j - 1$ tali che i sistemi

$$\{\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1}, S_{m-1}, \dots, S_0\} \text{ e } \{\gamma_0, \gamma_1, \dots \gamma_{m-1}, T_{m-1}, \dots, T_0\}$$

sono *sistemi normali e di Dirichlet* nel senso di [4], più precisamente:

$$S_j = b_j \gamma_{2m-j-1} + \sum_{k=2}^{2m-j} S_j^k \gamma_{2m-j-k} \tag{2.12}$$

$$T_j = b_j \gamma_{2m-j-1} + \sum_{k=2}^{2m-j} T_j^k \gamma_{2m-j-k} \tag{2.13}$$

dove b_j ed $1/b_j$ sono in $C^{m+1}(\Gamma)$, T_j^k ed S_j^k essendo opportuni operatori

tangenziali a Γ (nel senso ad es. di [10]) di ordine $\leq k-1$ a coefficienti almeno in $C^{j+1}(\Gamma)$.

Se si considerano due funzioni u e v derivabili con continuità $2m$ volte in $\overline{\Omega}_\tau$, allora si possono ripetere le stesse considerazioni ottenendo fra l'altro le formule:

$$a_\tau(u, v) = \sum_{|k|,|h|\leq m} \int_{\Omega_\tau} a_{kh}(x)\, D^k u\, \overline{D^k v}\, dx \tag{2.14}$$

$$a_\tau^*(u, v) = \overline{a_\tau(u, v)}$$

$$\int_{\Omega_\tau} A^* v\, \overline{u}\, dx = a_\tau^*(v, u) + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma_\tau} T_{j,\tau}\, v\, \overline{\gamma_{j,\tau}\, u}\, d\sigma \tag{2.15}$$

dove gli operatori differenziati $T_{j,\tau}$ hanno proprietà analoghe a quelle degli operatori T_j, più precisamente:

$$T_{j,\tau} = b_{j,\tau}\, \gamma_{2m-j-1,\tau} + \sum_{k=2}^{2m-j} T_{j,\tau}^k\, \gamma_{2m-j-k,\tau} \tag{2.16}$$

dove $b_{j,\tau}$ ed $1/b_{j,\tau}$ sono in $C^{m+1}(\Gamma_\tau)$, i $T_{j,\tau}^k$ essendo operatori differenziali tangenziali a Γ_τ di ordine $\leq k-1$, a coefficienti almeno in $C^{j+1}(\Gamma_\tau)$; i coefficienti di $T_{j,\tau}$ riportati su Γ mediante la prop. 1.7 dipendono inoltre da τ con continuità in $C^{j+1}(\Gamma)$ e risulta $b_{j,0} = b_j$.

2. 3. Supponiamo verificata la seguente:

Ipotesi 2.1 *Il problema*

$$Au = 0, \quad u \in W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{2m,p}(\Omega)$$

ammette solo la soluzione $u = 0$ *per un fissato* $p > 1$.

Vale allora, in virtù dei risultati di Agmon-Douglis-Nirenberg [3], Browder [5], [6], Lions Magenes [14], [15, Remarque 6.I], il seguente:

Teor. 2.1. *Nelle ipotesi di* 2.1 *su* Au *e di* 1.1 *su* Ω, *se l'ipotesi* 2.1 *è vera per un* p *fissato* > 1, *allora*:

a) *essa è vera per ogni altro* $p > 1$;

b) *è vera anche la proposizione analoga all'ipotesi* 2.1, *relativamente all'operatore* A^* *per ogni* $p > 1$;

c) *per ogni* p *reale* > 1 *e per ogni* s *reale con* $0 \leq s \leq m$ *tale che* $s - 1/p$ *sia non intero,* A *ed* A^* *sono isomorfismi di* $W_0^{m,p}(\Omega) \cap W^{m+s,p}(\Omega)$ *su* $W^{-m+s,p}(\Omega)$.

Il teorema è dunque applicabile ogni volta che si abbia un teorema di unicità per il problema di DIRICHLET in una qualunque classe $W^{2m,p}(\Omega)$ e sono note, in aggiunta alla ellitticità propria di A, condizioni integrali ed algebriche perchè l'ipotesi 2.1 sia vera per A o per l'operatore $A+\lambda$ con $\lambda > 0$ sufficientemente grande; per es.:

1⁰) A *è* $W_0^{m,2}(\Omega)$-*ellittico*, (LIONS [9]), cioè:

$$|\, a(u,u)\,| \geq c \,\|\, u \,\|^2_{W^{m,2}(\Omega)} \tag{2.20}$$

per ogni $u \in W_0^{m,2}(\Omega)$, c indipendente da u;

2⁰) A *è fortemente ellittico* (GÅRDING [8]), cioè:

$$\Re e \sum_{|h|=|k|=m} a_{kh}(x)\, \xi^{k+h} \geq c \,|\, \xi \,|^{2m} \tag{2.21}$$

per ogni $x \in \bar{\Omega}$ e ogni ξ reale $\neq 0$, con c costante;

3⁰) A *è semidefinito debolmente positivo* (AGMON - DOUGLIS - NIRENBERG [3]), cioè:

$$\Re e \sum_{|h|=|k|=m} a_{kh}(x)\, \xi^{k+h} \geq 0 \tag{2.22}$$

per ogni $x \in \bar{\Omega}$ e ξ reale.

Nella condizione 1⁰) l'ipotesi 2.1 è vera per A, nelle condizioni 2⁰) e 3⁰) per $A+\lambda$ con $\lambda > 0$ e sufficientemente grande.

Nel seguito del lavoro sarà allora presa come ipotesi la seguente

Ipotesi 2.2 *Ω ed i coefficienti a_{kh} sono regolari nel senso precisato in* 1.1 *e* 2.1; *l'operatore A è ellittico (propriamente, se $n=2$) in $\bar{\Omega}$; per almeno un p fissato >1 é valida l'ipotesi* 2.1.

n. 3. Preliminari al teorema di esistenza e di unicità.

3.1. Si vuole ora studiare il problema di DIRICHLET per l'operatore Au di ordine $2m$, verificante l'ipotesi 2.2:

$$\begin{cases} Au = f \\ \gamma_j u = \varphi_j \end{cases} \qquad j = 0, 1, \dots, m-1 \tag{3.1}$$

Con un procedimento abituale il problema (3.1) verrà riportato al caso omogeneo

$$\begin{cases} Aw = g \\ \gamma_j w = 0 \end{cases} \qquad j = 0, 1, \dots, m-1 \tag{3.2}$$

utilizzando all'uopo una funzione ausiliaria v costruita in modo che

$$\gamma_j v = \varphi_j, \qquad j = 0, \dots, m-1.$$

Qualora infatti si sapesse risolvere il problema (3.2) per $g = f - Av$, la funzione $u = v + w$ risolverebbe il problema non omogeneo (3.1).

Tutto ciò è detto naturalmente in modo formale; per una effettiva impostazione e risoluzione del problema andranno in ogni caso ben precisate le classi in cui si prendono i dati f, g, φ_j e quelle in cui si cercano v e le soluzioni u e w.

Studiamo dunque dapprima il problema omogeneo. Volendo risolverlo in ipotesi assai generali sul dato g partiremo dal teor. 2.1 ed applicheremo ad esso un procedimento di trasposizione, che si appoggia in sostanza su un'idea di VISHIK - SOBOLEV [27], ma che noi utilizzeremo così come è stato sviluppato nei lavori di LIONS - MAGENES (si veda per una esposizione generale il lavoro [18]).

3.2. Introduciamo innanzitutto una classe di spazi di BANACH (analoga a quella introdotta nel n. 4 di [18]) nei quali verrà posto il termine noto. In modo preciso si pone la seguente

DEF. 3.1. *Sia p' reale e > 1, m intero > 0, s reale, $0 \leq s \leq m$; si indica con $K_s^{m,p'}(\Omega)$ uno spazio di* BANACH *tale che*

1⁰) *$K_s^{m,p'}(\Omega)$ è uno spazio normale di distribuzioni;*

2⁰) *posto $\mathcal{V}_s = W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{m+s,p'}(\Omega)$ risulta*

$$\mathcal{V}_s \subset K_s^{m,p'}(\Omega) \subset W_0^{m,p'}(\Omega), \tag{3.3}$$

le iniezioni essendo continue.

Dalla definizione posta si ricava che $K_s^{m,p'}(\Omega)$ è denso in $W_0^{m,p'}(\Omega)$.

DEF. 3.2. *Per m intero > 0, s reale, $0 \leq s \leq m$, p reale e > 1; poniamo:*

$$K_s^{-m,p}(\Omega) = (K_s^{m,p'}(\Omega))' \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

$K_s^{-m,p}(\Omega)$ è uno spazio di distribuzioni su Ω e per esso valgono le inclusioni algebriche e topologiche:

$$W^{-m,p}(\Omega) \subset K_s^{-m,p}(\Omega) \subset (\mathcal{V}_s)'; \tag{3.4}$$

si osservi che $(\mathcal{V}_s)'$ non è uno spazio di distribuzioni su Ω, ma uno spazio

di distribuzioni su R^n a supporto compatto contenuto in $\bar{\Omega}$ (v. ad es. LIONS [9], MAGENES - STAMPACCHIA [19], SCHECHTER [25]).

Faremo inoltre la seguente ulteriore ipotesi:

Ipotesi 3.1. *$C^{2m}(\bar{\Omega})$ è denso in $K_s^{-m,p}(\Omega)$.*

Esempi di tali spazi verranno dati nel n. 5.

3.3. Si ha innanzitutto il seguente teorema relativo al problema omogeneo:

TEOR. 3.1. *Nell'ipotesi 2.2, sia p reale e >1, per ogni s reale, $0 \leq s \leq m$, tale che $s + 1/p$ sia non intero, l'equazione funzionale:*

$$\langle w, \overline{A^* \psi} \rangle = \langle g, \bar{\psi} \rangle \qquad \forall \psi \in \mathcal{V}_s \tag{3.5}$$

ammette una ed una sola soluzione $w \in W_0^{m-s,p}(\Omega)$ per ogni fissato $g \in K_s^{-m,p}(\Omega)$ e tale w dipende con continuità da g.

DIM. Dal teor. 2.1 *c*) si ha, poichè $s - 1/p' = s - 1 + 1/p$ è non intero, che A^* è un isomorfismo di $\mathcal{V}_s = W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{m+s,p'}(\Omega)$ su $W^{-m+s,p'}(\Omega)$; per dualità si ha allora per la (3.4) che l'equazione funzionale (3.5) è ben posta ed ammette, per ogni fissato $g \in K_s^{-m,p}(\Omega)$ una ed una sola soluzione $w \in W_0^{m-s,p}(\Omega)$ dipendente con continuità da g; si ottiene quindi anche la maggiorazione

$$\| w \|_{W^{m-s,p}(\Omega)} \leq c \, \| g \|_{K_s^{-m,p}(\Omega)} \tag{3.6}$$

con c costante indipendente da g.

Si osservi che dalla (3.5) si ottiene

$$Aw = g$$

nel senso delle distribuzioni su Ω.

Inoltre, posto $r^* = [m - s - 1/p]^-$ (massimo intero ≥ 0 strettamente inferiore ad $m - s - 1/p$), se è anche $0 \leq s < m - 1/p$, per il teorema di tracce 1.3 risulta

$$\gamma_j \, w = 0$$

in $W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j = 0, \ldots, r^*$.

Per $j > r^*$ o per $m - 1/p < s \leq m$ le condizioni al contorno sono espresse dalla (3.5) stessa in modo generalizzato; vedremo nei n. seguenti come si possa dare significato anche a tali condizioni. Ci serviremo per questo in modo essenziale dei ragionamenti e dei risultati di LIONS-MAGENES (v. in particolare [14], [16] e [18]).

OSSERVAZIONE. Si può anche studiare in modo analogo il problema « parzialmente omogeneo », individuato dall'equazione funzionale

$$\langle w, \overline{A^*\psi} \rangle = \langle g, \overline{\psi} \rangle + \sum_{j=r^*+1}^{m-1} \langle \varphi_j, \overline{T_j\psi} \rangle \qquad \forall \psi \in \mathcal{V}_s$$

con $g \in K_s^{-m,p}(\Omega)$, $\varphi_j \in W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j = r^* + 1, \dots, m - 1$.

Si ottiene ancora che, per p reale > 1, per s reale, $0 \leq s \leq m$, con $s + 1/p$ non intero, tale equazione funzionale ammette una ed una sola soluzione $w \in W_0^{m-s,p}(\Omega)$ e tale w dipende con continuità dai dati g e φ_j.

3.4. Supporremo ora $r^* < m - 1$, cioè s reale $> 1 - 1/p = 1/p'$.

LEMMA 3.1. *Sia p' reale > 1, s reale, $1/p' < s \leq m$, tale che $s - 1/p'$ sia non intero; si ponga $r = [m + s - 1/p']^-$ (massimo intero ≥ 0 e strettamente inferiore a $m + s - 1/p'$). Siano assegnate $\beta_j \in W^{j+1-m+s-1/p',p'}(\Gamma)$, $j = 2m - r - 1, \dots, m - 1$; esiste allora almeno una funzione $w \in W^{m+s,p'}(\Omega)$ tale che*

$$\gamma_j w = 0, \qquad j = 0, \dots, m - 1 \tag{3.7}$$

$$T_j w = \beta_j \qquad j = 2m - r - 1, \dots, m - 1 \tag{3.8}$$

l'applicazione $\{\beta_{2m-r-1}, \dots, \beta_{m-1}\} \to w$ essendo continua da

$$\prod_{j=2m-r-1}^{m-1} W^{j+1-m+s-1/p',p'}(\Gamma) \text{ in } W^{m+s,p'}(\Omega) \cap W_0^{m,p'}(\Omega).$$

Si osservi che $r = 2m - r^* - 2$ e quindi $2m - r - 1 = r^* + 1$; questo lemma non è che il lemma 5.1 di [16].

Si considerino ora alcuni nuovi spazi funzionali:

DEF. 3.3. *Sia s reale con $0 \leq s \leq m$, p reale > 1; si indica con $\mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)$ lo spazio delle $u \in W^{m-s,p}(\Omega)$ tali che $Au \in K_s^{-m,p}(\Omega)$, munito della norma*

$$\| u \|_{\mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)} = (\| u \|^p_{W^{m-s,p}(\Omega)} + \| Au \|^p_{K_s^{-m,p}(\Omega)})^{1/p}. \tag{3.9}$$

DEF. 3.4. *Si indica con* $\mathcal{W}_A^{k,p}(\Omega)$, *p reale* >1, *k reale*, $0 \leq k \leq m$, *lo spazio delle* $u \in W^{k,p}(\Omega)$ *e' tali che* $Au \in W^{-m,p}(\Omega)$ *munito della norma*

$$\| u \|_{\mathcal{W}_A^{k,p}(\Omega)} = (\| u \|^p_{W^{k,p}(\Omega)} + \| Au \|^p_{W^{-m,p}(\Omega)})^{1/p} \tag{3.10}$$

Lo spazio $\mathcal{W}_A^{k,p}(\Omega)$ è già stato introdotto e ampiamente studiato da LIONS-MAGENES in [14], [16].

PROP. 3.1 *Nelle ipotesi* 2.2 *e* 3.1 *per ogni p reale* >1, *per s reale*, $0 \leq s \leq m$, *tale che* $s + \dfrac{1}{p}$ *non sia intero*, $C^{2m}(\bar{\Omega})$ *è denso in* $\mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)$.

DIM. Sia $u \in \mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)$ e sia w la soluzione del problema di DIRICHLET data dal teor. 3.1 con $g = Au$, cioè w sia tale che

$$\langle w, \overline{A^* \psi} \rangle = \langle Au, \bar{\psi} \rangle \qquad \forall \psi \in \mathcal{V}_s \tag{3.11}$$

dove il primo $\langle , \rangle$ rappresenta la dualità fra $W_0^{m-s,p}(\Omega)$ e $W^{s-m,p'}(\Omega)$ ed il secondo $\langle , \rangle$ la dualità fra $K_s^{-m,p}(\Omega)$ e $K_s^{m,p'}(\Omega)$.

Si consideri ora, per l'ipotesi 3.1, una successione di funzioni $g_n \in C^{2m}(\bar{\Omega})$ tale che

$$\lim_{n \to \infty} \| g_n - Au \|_{K_s^{-m,p}(\Omega)} = 0 ; \tag{3.12}$$

si indichi poi con w_n la soluzione del problema di DIRICHLET

$$\begin{cases} Aw_n = g_n \\ \gamma_j w_n = 0, \end{cases} \qquad j = 0, \dots, m-1 ; \tag{3.13}$$

essa, come è noto, appartiene a $C^{2m}(\bar{\Omega})$ (v. [22], [3], ...).

Sempre per il teor. 3.1 applicato a

$$g = Au - g_n$$

risulta:

$$\| w - w_n \|_{W^{m-s,p}(\Omega)} \leq c' \| g - g_n \|_{K_s^{-m,p}(\Omega)} ; \tag{3.15}$$

ciò significa che la successione $\{w_n\} \subset C^{2m}(\bar{\Omega})$ è convergente in $W^{m-s,p}(\Omega)$, e per la (3.12) anche in $\mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)$, alla w.

Posto ora $v = u - w$, risulta

$$v \in W^{m-s,p}(\Omega),\ Av = 0$$

e quindi $v \in \mathcal{W}_A^{m-s,p}(\Omega)$; per la prop. 5.7 di LIONS MAGENES [16] $C^{2m}(\bar{\Omega})$ è denso in $\mathcal{W}_A^{m-s,p}(\Omega)$ e quindi esiste una successione $\{v_n\} \subset C^{2m}(\bar{\Omega})$ tale che per $n \to \infty$ $v_n \to v$ in $W^{m-s,p}(\Omega)$ ed $Av_n \to 0$ in $W^{-m,p}(\Omega)$

Quindi $v_n + w_n \in C^{2m}(\bar{\Omega})$ e tende ad u in $\mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)$ per $n \to \infty$.

Si osservi che questo lemma è analogo al lemma 5.1 di [18].

Posto ora

$$\mathcal{M}_{A,0}^{m-s,p}(\Omega) = \mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega) \cap W_0^{m-s,p}(\Omega) \tag{3.16}$$

nelle stesse ipotesi del lemma 3.2 e con ragionamento analogo si può dimostrare la seguente

PROP. 3.2 *Nelle ipotesi* 2.2 *e* 3.1 *per ogni* p *reale* > 1, *per* s *reale,* $0 \leq s \leq m$, *tale che* $s + 1/p$ *non sia intero* $C^{2m}(\bar{\Omega}) \cap W_0^{m-s,p}(\Omega)$ *è denso in* $\mathcal{M}_{A,0}^{m-s,p}(\Omega)$.

DIM. Sia $u \in \mathcal{M}_{A,0}^{m-s,p}(\Omega)$ e sia $w \in W_0^{m-s,p}(\Omega)$, la soluzione del problema di DIRICHLET data dal teor. 3.1 con $g = Au$; come nella prop. 3.1, si dimostra allora che per l'ipotesi 3.1 esiste una successione $\{g_n\} \subset C^{2m}(\bar{\Omega})$ convergente in $K_s^{-m,p}(\Omega)$ ad Au; tale successione individua una successione $\{w_n\} \subset C^{2m}(\bar{\Omega}) \cap W_0^{m,p}(\Omega)$ convergente in $\mathcal{M}_{A,0}^{m-s,p}(\Omega)$ alla w.

Posto poi $v = u - w$ risulta

$$v \in W_0^{m-s,p}(\Omega), \quad Av = 0, \text{ e quindi } v \in \mathcal{W}_A^{m-s,p}(\Omega)$$

ed in virtù del teor. 5.1 di [16] risulta anche

$$\gamma_j v = \gamma_j u \text{ in } W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma), \quad j = 0, \dots, m-1;$$

in particolare

$$\gamma_j v = 0 \text{ per } j = 0, \dots, r^*$$

e quindi

$$\| v \|_{\mathcal{W}_A^{m-s,p}(\Omega)} = \| v \|_{W_0^{m-s,p}(\Omega)} \leq c \sum_{j=r^*+1}^{m-1} \| \gamma_j v \|_{W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)} \tag{3.16 bis}$$

Si considerino ora le successioni $\{\psi_{n,j}\}$ con $\psi_{n,j} \in C^{2m}(\Gamma)$ e

$$\psi_{n,j} \to \gamma_j u \text{ in } W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma),\ j = r^* + 1, \dots, m-1;$$

e sia v_n la soluzione del problema di DIRICHLET

$$\begin{cases} Av_n = 0 & \\ \gamma_j v_n = 0 & j = 0, \dots, r^* \\ \gamma_j v_n = \psi_{n,j} & j = r^* + 1, \dots, m - 1. \end{cases}$$

Per i teoremi noti di regolarizzazione del problema di DIRICHLET (v. [22], [3], ...) si ha che $v_n \in C^{2m}(\bar{\Omega}) \cap W_0^{m-s,p}(\Omega)$ (si ricordi anche la prop. 1.9) e d'altra parte per la (3.16 bis) applicata a v_n si ha che $v_n \to v$ in $W_0^{m-s,p}(\Omega)$.

Quindi $v_n + w_n \in C^{2m}(\bar{\Omega}) \cap W_0^{m-s,p}(\Omega)$ e tende ad u in $\mathcal{M}_{A,0}^{m-s,p}(\Omega)$ per $n \to \infty$.

TEOR. 3.2. *Nelle ipotesi* 2.2 *e* 3.1, *per ogni* p *reale* $e > 1$, *sia* s *reale* $1 - 1/p < s \leq m$, *tale che* $s + 1/p$ *sia non intero. L'applicazione* $u \to \{\gamma_{2m-r-1} u, \dots, \gamma_{m-1} u\}$ *dove* $r = [m + s - 1/p']^-$, *definita per le* $u \in C^{2m}(\bar{\Omega}) \cap W_0^{m-s,p}(\Omega)$ *si prolunga per continuità in una applicazione lineare e continua indicata ancora con* $n \to \{\gamma_{2m-r-1} u, \dots, \gamma_{m-1} u\}$ *di* $\mathcal{M}_{A,0}^{m-s,p}(\Omega)$ *in* $\prod_{j=2m-r-1}^{m-1} W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)$.

La dimostrazione del teorema è analoga a quella di [16], teor. 5.1 (si veda anche [18], teor. 5.1), ma viene qui riportata per comodità del lettore.

Siano assegnate comunque $\beta_j \in W^{j+1-m+s-1/p',p'}(\Gamma) = W^{j-m+s+1/p,p'}(\Gamma)$, $j = 2m - r - 1, \dots, m - 1$, e sia $w \in W^{m+s,p'}(\Omega) \cap W_0^{m,p'}(\Omega)$ la funzione data dal lemma 3.1. Assegnato $u \in \mathcal{M}_{A,0}^{m-s,p}(\Omega)$ si consideri il funzionale

$$X_\beta^w = \langle u, \overline{A^* w} \rangle - \langle Au, \bar{w} \rangle \tag{3.17}$$

dove il primo $\langle , \rangle$ rappresenta la dualità fra $W_0^{m-s,p}(\Omega)$ e $W^{s-m,p'}(\Omega)$ ed il secondo $\langle , \rangle$ la dualità fra $K_s^{-m,p}(\Omega)$ e $K_s^{m,p'}(\Omega)$.

Tale funzionale non dipende da w: infatti se w_1 è un'altra funzione di $W^{m+s,p'}(\Omega) \cap W_0^{m,p'}(\Omega)$ che assegnati i β_j verifica il lemma 3.1, allora $\varkappa = w - w_1$ è tale che $\gamma_j \varkappa = 0, j = 0, \dots, m - 1$, $T_j \varkappa = 0$, $j = 2m - r - 1, \dots, m - 1$; il sistema

$$\{\gamma_0, \dots, \gamma_{m-1}, T_{m-1}, \dots, T_{2m-r-1}\}$$

è un sistema normale e di DIRICHLET di ordine $r = [m + s - 1/p']^-$ nel senso di ARONSZAJN - MILGRAM [4] e quindi per il lemma 2 di [4] e per la

prop. 1.9 risulta $\varkappa \in W_0^{m+s,p'}(\Omega)$. Si ricava allora che

$$\langle u, \overline{A^* \varkappa} \rangle - \langle Au, \overline{\varkappa} \rangle = 0 ; \tag{3.18}$$

infatti per $\eta \in C^{2m}(\Omega)$ e $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha

$$(\eta, A^* \psi) - (A\eta, \psi) = 0 \tag{3.19}$$

donde per continuità poichè $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $W^{m+s,p'}(\Omega)$ e $C^m(\overline{\Omega}) \cap W_0^{m-s,p'}(\Omega)$ è denso in $\mathcal{M}_{A,0}^{m-s,p}(\Omega)$ si ha la (3.18) e X_β^w non dipende da w; si scriverà perciò d'ora in avanti X_β.

Per il lemma 3.1, w dipende con continuità da $\{\beta_{2m-r-1}, \dots, \beta_{m-1}\}$, ed il funzionale semilineare

$$\{\beta_{2m-r-1}, \dots, \beta_{m-1}\} \longrightarrow X_\beta$$

è continuo su $\prod_{j=2m-r-1}^{m-1} W^{j-m+s+1/p',p'}(\Gamma)$ e quindi è della forma

$$X_\beta = \sum_{j=2m-r-1}^{m-1} \langle \tau_j u, \overline{\beta_j} \rangle$$

dove $\langle , \rangle$ rappresenta la dualità fra $W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)$ e $W^{j-m+s+1/p,'p'}(I)$ e le applicazioni $u \longrightarrow \tau_j u$ sono continue da $\mathcal{M}_{A,0}^{m-s,p}(\Omega)$ in $W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)$. Se si fa vedere che $\tau_j u = \gamma_j u$, l'asserto del teorema è allora dimostrato. È sufficiente verificare ciò per $u \in C^{2m}(\overline{\Omega}) \cap W_0^{m-s,p}(\Omega)$ che è denso in $\mathcal{M}_{A,0}^{m-s,p}(\Omega)$ e $w \in C^{2m}(\overline{\Omega}) \cap W_0^{m,p'}(\Omega)$ che è denso in $W^{m+s,p'}(\Omega) \cap W_0^{m,p'}(\Omega)$; ed allora dalla formula di GREEN si ha immediatamente, ricordando anche la prop. 1.9:

$$(u, A^* w) - (Au, w) = \sum_{j=2m-r-1}^{m-1} \langle \gamma_j u, \overline{T_j w} \rangle$$

$$= \sum_{j=2m-r-1}^{m-1} \langle \gamma_j u, \overline{\beta_j} \rangle \qquad \forall\, \beta_j \in C^{2m}(\Gamma)$$

e quindi l'asserto è dimostrato.

TEOR. 3.3. *Nelle ipotesi* 2.2 *e* 3.1, *per ogni* p *reale e* > 1, *sia* s *reale,* $1 - 1/p < s \leq m$, *tale che* $s + 1/p$ *sia non intero. L'applicazione* $u \longrightarrow \gamma u = \{\gamma_0 u, \dots, \gamma_{m-1} u\}$ *definita per* $u \in C^{2m}(\overline{\Omega})$ *si prolunga per continuità in una applicazione lineare e continua ancora indicata* $u \longrightarrow \gamma u$ *di* $\mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)$ *in* $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)$.

DIM. — Sia $u \in \mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)$; allora per il teorema di tracce, poichè $u \in W^{m-s,p}(\Omega)$ risulta che $\gamma_j u \in W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma), j = 0, \dots, r^* = [m - s - 1/p]^-$. Si consideri allora il problema

$$(3.20) \qquad \begin{cases} Aw = 0 & \\ \gamma_j w = \gamma_j u & j = 0, \dots r^* \\ \gamma_j w = 0 & j = r^* + 1, \dots, m - 1; \end{cases}$$

in virtù del teor. 5.2 di [16] esiste una ed una sola $w \in W^{m-s,p}(\Omega)$ che risolve il problema.

Posto $v = u - w$, si ha $v \in \mathcal{M}_A^{m-s,p}$ ed inoltre $v \in W_0^{m-s,p}(\Omega)$ e quindi $v \in \mathcal{M}_{A,0}^{m-s,p}(\Omega)$; per il teor. 3.2, ricordato che $r^* + 1 = 2m - r - 1$, esistono allora le tracce $\gamma_j v$ in $W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j = 2m - r - 1, \dots, m - 1$ e per la (3.20) è $\gamma_j u = \gamma_j v, j = 2m - r - 1, \dots, m - 1$. Ed allora, essendo $u = v + w$, esistono le tracce $\gamma_j u \in W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m - 1$ e l'applicazione $u \to \gamma u$ è lineare e continua da $\mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)$ in $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)$.

Si può anche estendere *la validità della formula di Green* (2.11), prolungandola per continuità, come è possibile ricordando anche la prop. 1.9 e le proprietà viste di $\mathcal{M}_{A,0}^{m-s,p}(\Omega)$; si ha allora

$$(3.21) \qquad \langle u, \overline{A^* v} \rangle - \langle Au, \overline{v} \rangle = \sum_{j=r^*+1}^{m-1} \langle \gamma_j u, \overline{T_j v} \rangle$$

per ogni $u \in \mathcal{M}_{A,0}^{-ms,p}(\Omega)$ e $v \in W_0^{m,p'}(\Omega) \cap W^{m+s,p'}(\Omega)$, dove il primo $\langle , \rangle$ rappresenta la dualità fra $W_0^{m-s,p}(\Omega)$ e $W^{-m+s,p'}(\Omega)$, il secondo $\langle , \rangle$ quella fra $K_s^{-m,p}(\Omega)$ e $K_s^{m,p'}(\Omega)$, il terzo $\langle , \rangle$ quella fra $W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)$ e $W^{-m+s+j+1-1/p',p'}(\Gamma)$.

3.5. Si può dare, in modo analogo a quanto fatto in 3.2 la definizione degli spazi $K_s^{m,p'}(\Omega_\tau)$, $K_s^{-m,p}(\Omega_\tau)$, $0 \le \tau \le \tau_0 < 1$, Ω_τ essendo gli aperti dell'ipotesi 1.1.

Si dimostrano poi facilmente i seguenti lemmi:

LEMMA 3.2. *Se $f \in K_s^{-m,p}(\Omega)$ allora $f_{\Omega_\tau} \in K_s^{-m,p}(\Omega_\tau)$, per $\tau \in [0, \tau_0]$ ed inoltre:*

$$(3.22) \qquad \| f_{\Omega_\tau} \|_{K_s^{-m,p}(\Omega_\tau)} \le \| f \|_{K_s^{-m,p}(\Omega)}.$$

LEMMA 3.3. *Nell'ipotesi* 2.2, *è* $(Au)_{\Omega_\tau} = A(u_{\Omega_\tau})$ *su* Ω_τ, $\tau \in [0, \tau_0]$.

Si possono dare in maniera ovvia anche le definizioni degli spazi $\mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega_\tau)$, $\mathcal{W}_A^{m-s,p}(\Omega_\tau)$, $\mathcal{M}_{A,0}^{m-s,p}(\Omega_\tau)$; si dimostra poi facilmente il seguente

LEMMA 3.4. *Nell'ipotesi* 2.2, *se* $u \in \mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)$ *allora, per* $\tau \in [0, \tau_0]$, $u_{\Omega_\tau} \in \mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega_\tau)$.

Si possono ora applicare ai domini Ω_τ, $\tau \in [0, \tau_0]$ le considerazioni svolte in 3.4, ed ottenere il seguente

TEOR. 3.4. *Nell'ipotesi* 2.2 *e* 3.1 *per ogni* p *reale* > 1, *sia* s *reale,* $1 - \frac{1}{p} < s \leq m$, *tale che,* $s + \frac{1}{p}$ *sia non iutero. L'applicazione,* $\tau \in [0, \tau_0]$:

$$u \longrightarrow \gamma_\tau u = \{\gamma_{0,\tau} u, \dots, \gamma_{m-1,\tau} u\}$$

è lineare e continua da $\mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega_\tau)$ *in* $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma_\tau)$.

3.6. Data una funzione $u \in \mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)$ si possono considerare nelle ipotesi viste:

i) le tracce nel senso di teor. 3.3 su Γ:

$$\gamma_j u \in W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma) \qquad j = 0, \dots, m-1;$$

ii) le tracce, nel senso di teor. 3.4, su Γ_τ:

$$\gamma_{j,\tau} u \in W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma_\tau), \qquad j = 0, \dots, m-1;$$

iii) le tracce, nel senso di teor. 3.3, su Γ_τ, «riportate», per la prop. 1.7, su Γ:

$$\tilde{\gamma}_{j,\tau} u = \theta_\tau^* (\gamma_{j,\tau} u) \in W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma), \qquad j = 0, \dots, m-1.$$

Si pone allora, in modo naturale, *il problema di sapere se, dato* $u \in \mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)$, *per* $\tau \to 0$, $\tilde{\gamma}_{j,\tau} u \to \gamma_j u$ *in* $W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$. La risposta è affermativa come ora vedremo con un teorema che generalizza i risultati di LIONS-MAGENES [13], n. 3.

3.7. Per dare una risposta al problema sono necessari alcuni lemmi.

Il seguente lemma è una estensione del lemma 3.1 ad Ω_τ e si ottiene con un semplice complemento al ragionamento che si usa per il lemma 3.1 nelle ipotesi fatte su Ω e su Ω_τ.

LEMMA 3.5. *Sia* $r = \left[m + s - \frac{1}{p'}\right]^-$ (*massimo intero* ≥ 0 *e strettamente inferiore a* $m + s - \frac{1}{p'}$), s *reale*, $1 - \frac{1}{p'} < s \leq m$, *tale che* $s + \frac{1}{p'}$ *sia non intero. Siano* $\beta_{j,\tau} \in W^{j+1-m+s-1/p',p'}(\Gamma_\tau)$, $j = 2m - r - 1,\ 2m - r, \dots, m - 1$; *esiste allora almeno una funzione* $w_\tau \in W^{m+s,p'}(\Omega)$ *tale che:*

$$\gamma_{j,\tau}\, w_\tau = 0 \qquad j = 0, \dots, m - 1 \tag{3.23}$$

$$T_{j,\tau}\, w_\tau = \beta_{j,\tau}, \qquad j = 2m - r - 1,\ 2m - r, \dots, m - 1, \tag{3.24}$$

l'applicazione $\{\beta_{2m-r-1,\tau}, \dots, \beta_{m-1,\tau}\} \to w_\tau$ *essendo continua da*

$$\prod_{j=2m-r-1}^{m-1} W^{j+1-m+s-1/p',p'}(\Gamma_\tau) \ \textit{in}\ W^{m+s,p'}(\Omega);$$

inoltre vale la diseguaglianza:

$$\| w_\tau \|_{W^{m+s,p'}(\Omega)} \leq c'' \left(\sum_{j=2m-r-1}^{m-1} \| \beta_{j,\tau} \|^{p'}_{W^{j+1-m+s-1/p',p'}(\Gamma_\tau)} \right)^{1/p'} \tag{3.25}$$

dove c'' *è una costante indipendente da* $\tau \in [0, \tau_1]$, *con* $0 < \tau_1 \leq \tau_0$ *e* τ_1 *sufficientemente piccolo.*

Sia dunque w_τ la funzione ottenuta mediante questo lemma, consideratane poi la restrizione $(w_\tau)_{\Omega_\tau}$ ad Ω_τ, è $(w_\tau)_{\Omega_\tau} \in W^{m+s,p'}(\Omega_\tau) \cap W_0^{m,p'}(\Omega_\tau)$ con

$$\| (w_\tau)_{\Omega_\tau} \|_{W^{m+s,p'}(\Omega_\tau)} \leq \| w_\tau \|_{W^{m+s,p'}(\Omega)}; \tag{3.26}$$

si ottiene allora dalla (3.25):

$$\| (w_\tau)_{\Omega_\tau} \|_{W^{m+s,p'}(\Omega_\tau)} \leq c'' \left(\sum_{j=2m-r-1}^{m-1} \| \beta_{j,\tau} \|^{p'}_{W^{j+1-m+s-1/p',p'}(\Gamma_\tau)} \right)^{1/p'} \tag{3.27}$$

con c'' costante indipendente da τ.

LEMMA 3.6. *Nelle ipotesi* 2.2 *e* 3.1 *sia* p *reale* > 1, *sia* s *reale*, $1 - \frac{1}{p} < s \leq m$, *tale che* $s + \frac{1}{p}$ *sia non intero. Allora l'operatore* $\tilde{\gamma}_\tau$ *varia, per*

$\tau \in [0, \tilde{\tau}]$, *in un insieme limitato di*:

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega); \prod_{j=0}^{m-1} W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)\right).$$

DIM. Per definizione e dalla prop. 1.7 si ha:

$$\|\tilde{\gamma}_\tau\|_{\mathcal{L}\left(\mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega); \prod_{j=0}^{m-1} W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)\right)} =$$

$$= \sup_{\|u\|_{\mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)}=1} \|\tilde{\gamma}_\tau u\|_{\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)}$$

$$\leq c_0 \sup_{\|u\|_{\mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)}=1} \left(\sum_{j=0}^{m-1} \|\gamma_{j,\tau} u\|^p_{W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma_\tau)}\right)^{1/p}$$

dove c_0 è una costante indipendente da τ.

Per dimostrare il lemma basta quindi maggiorare

$$\sum_{j=0}^{m-1} \|\gamma_{j,\tau} u\|^p_{W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma_\tau)}$$

per tutte le u tali che

$$\|u\|_{\mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)} = 1, \tag{3.28}$$

con una costante indipendentemente da τ.

Innanzi tutto per $j = 0, \dots, r^* = [m - s - 1/p]^-$ in virtù degli stessi ragionamenti che si usano per la dimostrazione del teor. 1.3 si ha che esiste un τ_2, $0 < \tau_2 \leq \tau_0$ ed una costante c_1, indipendente da τ, tali che sia per $\tau \in [0, \tau_2]$:

$$\|\gamma_{j,\tau} u\|_{W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma_\tau)} \leq c_1, \qquad j = 0, \dots, r^* \tag{3.29}$$

per tutte le u suddette.

Fissiamo poi una tale u e consideriamo per $\tau \in [0, \tau_2]$, il problema di DIRICHLET in Ω_τ:

$$\begin{cases} A w_\tau^* = 0 \\ \gamma_{j,\tau} w_\tau^* = \gamma_{j,\tau} u & j = 0, \dots, r^* \\ \gamma_{j,\tau} w_\tau^* = 0 & j = r^* + 1, \dots, m - 1; \end{cases}$$

tale problema ammette, per il già citato teor. 5.2 di [16], una ed una sola soluzione $w_\tau^* \in \mathcal{W}_A^{m-s,p}(\Omega_\tau) \subset \mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega_\tau)$; si ottiene allora tenuto anche

conto del teor. 5.2 di [16]:

$$\| w_\tau^* \|_{W^{m-s,p}(\Omega_\tau)} \leq c_2 \,. \tag{3.30}$$

Sia ora, per $\tau \in [0, \tau_2]$, $v_\tau = u_{\Omega_\tau} - w_\tau^*$, allora $v_\tau \in \mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega_\tau)$; esistono inoltre per il teorema 3.3 le tracce $\gamma_{j,\tau} v_\tau \in W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma_\tau)$ $j = 0, 1, \dots m-1$; siccome $\gamma_{j,\tau} v_\tau = 0$, $j = 0, 1, \dots, r^*$, si ha che $v_\tau \in W_0^{m-s,p}(\Omega_\tau)$ e da (3.30) e (3.28)

$$\| v_\tau \|_{W^{m-s,p}(\Omega_\tau)} \leq c_3$$

ed inoltre è, indipendentemente da τ:

$$\| A v_\tau \|_{K_s^{-m,p}(\Omega_\tau)} \leq 1. \tag{3.31}$$

Considerate le $\beta_{j,\tau}$ e corrispondentemente la w_τ del lemma 3.5, si può ora, in virtù del teor. 3.4 scrivere, per $\tau \in [0, \tau_2]$, la formula di GREEN (3.21) in Ω_τ:

$$\langle v_\tau, \overline{A^*(w_\tau)_{\Omega_\tau}} \rangle - \langle A v_\tau, \overline{(w_\tau)_{\Omega_\tau}} \rangle = \sum_{j=r^*+1}^{m-1} \langle \gamma_{j,\tau} v_\tau, \overline{\beta_{j,\tau}} \rangle \tag{3.32}$$

dove il primo $\langle , \rangle$ rappresenta la dualità fra $W_0^{m-s,p}(\Omega_\tau)$ e $W^{s-m,p'}(\Omega_\tau)$ il secondo $\langle , \rangle$ la dualità fra $K_s^{-m,p}(\Omega_\tau)$ e $K_s^{m,p'}(\Omega_\tau)$, il terzo $\langle , \rangle$ la dualità fra $W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma_\tau)$ e $W^{j+s-m+1-1/p',p'}(\Gamma_\tau)$.

Per le proprietà di w_τ e di v_τ si ha:

$$\begin{aligned} | \langle v_\tau, \overline{A^*(w_\tau)_{\Omega_\tau}} \rangle | &\leq \| v_\tau \|_{W_0^{m-s,p}(\Omega_\tau)} \| A^*(w_\tau)_{\Omega_\tau} \|_{W^{s-m,p'}(\Omega_\tau)} \\ &\leq c_4 \| A^* w_\tau \|_{W^{s-m,p'}(\Omega)} \end{aligned} \tag{3.33}$$

con c_4 indipendente da $\tau \in [0, \tau_2]$.

Poichè A^* è di ordine $2m$, per la prop. 11.1 di [14] (v. Remarque 6.1 di [15]) si può scrivere, per la w_τ del lemma 3.5,

$$\| A^* w_\tau \|_{W^{s-m,p'}(\Omega)} \leq c_5 \| w_\tau \|_{W^{m+s,p'}(\Omega)} \tag{3.34}$$

con c_5 indipendente da w_τ; si ricava allora dalla (3.34) e (3.25):

$$| \langle v_\tau, \overline{A^*(w_\tau)_{\Omega_\tau}} \rangle | \leq c_6 \left(\sum_{j=r^*+1}^{m-1} \| \beta_{j,\tau} \|^p_{W^{j+1-m+s-1/p,p'}(\Gamma_\tau)} \right)^{1/p'} \tag{3.35}$$

essendo $r^* + 1 = 2m - r - 1$, con c_6 costante indipendente da τ, per $\tau \in [0, \tilde{\tau}]$, ove $\tilde{\tau} = \min(\tau_1, \tau_2)$.

Si ha poi per $\tau \in [0, \tilde{\tau}]$, dalla (3.27) e (3.31):

$$(3.36) \qquad |\langle Av_\tau, \overline{(w_\tau)_{\Omega_\tau}}\rangle| \leq \| Av_\tau \|_{K_s^{-m,p}(\Omega_\tau)} \| (w_\tau)_{\Omega_\tau} \|_{K_s^{m,p'}(\Omega_\tau)}$$
$$\leq c'' \left(\sum_{j=r^*+1}^{m-1} \| \beta_{j,\tau} \|^{p'}_{W^{j+1-m+s-1/p',p'}(\Gamma_\tau)} \right)^{1/p'}$$

con c'' indipendente da $\tau \in [0, \tilde{\tau}]$.

Dalle (3.32), (3.35), (3.36) si ottiene pertanto

$$\sum_{j=r^*+1}^{m-1} |\langle \gamma_{j,\tau} v_\tau, \overline{\beta}_{j,\tau}\rangle| \leq c_7 \left(\sum_{j=r^*+1}^{m-1} \| \beta_{j,\tau} \|^{p'}_{W^{j+1-m+s-1/p',p'}(\Gamma_\tau)} \right)^{1/p'}$$

con c_7 indipendente da τ, e quindi

$$(3.37) \qquad \sum_{j=r^*+1}^{m-1} \| \gamma_{j,\tau} v_\tau \|^p_{W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma_\tau)} \leq c_8$$

con c_8 indipendente da τ.

Siccome $u_{\Omega_\tau} = v_\tau + w_\tau^*$ e $\gamma_{j,\tau}$ è un operatore lineare, dalle (3.29), (3.37) si ottiene, per tutte le u che verificano la (3.28):

$$\sum_{j=0}^{m-1} \| \gamma_{j,\tau} u \|^p_{W^{m-s-j-1/p\, p}(\Gamma_\tau)} \leq c_9$$

con c_9 indipendente da τ. Il lemma 3.7 è così dimostrato.

Il seguente teorema, infine, risponde in maniera esauriente al problema posto in 3.6.

Teor. 3.5. *Nelle ipotesi 2.2 e 3.1, sia p reale e > 1, s reale, $1 - 1/p < s \leq m$, tale che $s + 1/p$ sia non intero. Per ogni $u \in \mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)$, per $\tau \to 0$, $\tau \in [0, \tilde{\tau}]$, $\tilde{\gamma}_\tau u \to \gamma u$ in $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)$, cioè:*

$$(3.38) \qquad \lim_{\tau \to 0} \| \tilde{\gamma}_{j,\tau} u - \gamma_j u \|_{W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)} = 0, \qquad j = 0, \dots, m-1.$$

Dim. Sia $u \in \mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)$, per il lemma 3.2 esiste una successione $\{u_n\} \subset C^{2m}(\overline{\Omega})$ convergente ad u in $\mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)$, cioè tale che

$$(3.39) \qquad \lim_{n \to \infty} \| u_n - u \|_{\mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)} = 0.$$

Per il teor. 3.3 esistono le tracce su Γ, $\gamma_j u \in W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$, e per il teor. 3.4 esistono le tracce su Γ_τ « riportate » su Γ per la prop. 1.7, $\tilde{\gamma}_{j,\tau} u \in W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$; si può allora scrivere, per $j = 0, \dots, m-1$:

$$\| \tilde{\gamma}_{j,\tau} u - \gamma_j u \|_{W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)} \leq$$

$$\leq \| \tilde{\gamma}_{j,\tau} u - \tilde{\gamma}_{j,\tau} u_n \|_{W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)} +$$

$$+ \| \tilde{\gamma}_{j,\tau} u_n - \gamma_j u_n \|_{W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)} +$$

$$+ \| \gamma_j u_n - \gamma_j u \|_{W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)} .$$

Il primo ed il terzo termine del secondo membro, per il lemma 3.7 e per la (3.39) per $n \to \infty$ tendono ciascuno a zero e quindi fissato $\varepsilon > 0$ si può determinare un n_ε tale che per $n > n_\varepsilon$ sia

$$\| \tilde{\gamma}_{j,\tau} u - \tilde{\gamma}_{j,\tau} u_n \|_{W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)} < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\| \gamma_j u_n - \gamma_j u \|_{W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)} < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Il secondo termine del secondo membro, *per n fissato* tende a zero, per $\tau \to 0$, poichè $u_n \in C^{2m}(\bar{\Omega})$ e quindi fissato $\varepsilon > 0$ si può determinare un δ_ε tale che per $\tau \in [0, \delta_\varepsilon]$, sia:

$$\| \tilde{\gamma}_{j,\tau} u_n - \gamma_j u_n \|_{W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)} < \frac{\varepsilon}{3} ;$$

in conclusione per n fissato $> n_\varepsilon$ e per $\tau \in [0, \delta_\varepsilon]$ è

$$\| \tilde{\gamma}_{j,\tau} u - \gamma_j u \|_{W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)} < \varepsilon, \qquad j = 0, \dots, m-1,$$

ed il teorema è così dimostrato.

n. 4. Teorema di esistenza e di unicità.

4.1. TEOR. 4.1. *Nelle ipotesi* 2.2 *e* 3.1, *sia p reale > 1, sia s reale, $0 \leq s \leq m$, tale che $s + 1/p$ sia non intero. Fissati comunque $f \in K_s^{-m,p}(\Omega)$ e*

$\varphi_j \in W^{m-s-j-1/p,p}(\Omega), j = 0,1, \dots, m-1$ *esiste una ed una sola* $u \in \mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)$ *tale che:*

$$(4.1) \qquad \begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ \gamma_j u = \varphi_j & \text{su } \Gamma, j = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

ed u dipende con continuità dai dati f e φ_j*; inoltre si ha:*

$$(4.2) \qquad \lim_{\tau \to 0} \| \tilde{\gamma}_{j,\tau} u - \varphi_j \|_{W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)} = 0, \qquad j = 0, \dots, m-1.$$

DIM. Dai teoremi 3.1 e 3.2 nelle ipotesi fatte, il problema

$$\begin{cases} Aw = f & f \in K_s^{-m,p}(\Omega) \\ \gamma_j w = 0 & \text{in } W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma), j = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione $w \in \mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)$ e tale soluzione dipende con continuità da f; per quanto riguarda il modo di assumere i dati alla frontiera il teor. 3.5 dice poi che

$$\lim_{\tau \to 0} \tilde{\gamma}_{j,\tau} w = 0 \quad \text{in} \quad W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma), \qquad j = 0, 1, \dots, m-1.$$

Si consideri ora il problema di DIRICHLET

$$\begin{cases} Av = 0 & \text{in } \Omega \\ \gamma_j v = \varphi_j & \text{su } \Gamma, \qquad j = 0, \dots, m-1 \end{cases}$$

con $\varphi_j \in W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$; il teor. 5.2 di [16] nelle ipotesi fatte assicura l'esistenza e l'unicità di una soluzione $v \in \mathcal{V}_A^{m-s,p}(\Omega)$ dipendente con continuità dai dati φ_j; siccome $Av = 0$ allora $v \in \mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)$ e quindi per il teor. 3.5 i dati alla frontiera sono assunti nel senso che

$$\lim_{\tau \to 0} \tilde{\gamma}_{j,\tau} v = \varphi_j \quad \text{in} \quad W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma), \qquad j = 0, \dots, m-1.$$

Posto infine $u = v + w$ tale funzione soddisfa in $\mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)$ le (4.1); tale funzione è poi unica in $\mathcal{M}_A^{m-s,p}(\Omega)$ per il teor. 3.1. c. v. d.

OSSERVAZIONE. È opportuno osservare che, nei loro lavori, LIONS-MAGENES dal teor. 2.1 nel caso $s = m$ ottengono per trasposizione risultati nella classe $W^{0,p}(\Omega)$ e per interpolazione ottengono poi i

risultati nelle classi intermedie $W^{s,p}(\Omega)$, s reale compreso tra 0 e $2m$. Qui invece si parte dal teor. 2.1 nel caso $0 < s < m$ (e quindi da un risultato già ottenuto per trasposizione e successiva interpolazione da LIONS MAGENES) e si applica poi il solo procedimento di trasposizione.

4.2. Nel caso $s + 1/p$ intero si può osservare che $W^{m-s-\varepsilon-1/p,p}(\Gamma) \supset$ $\supset W^{m-s-1/p,p}(\Gamma)$ *per ogni* $\varepsilon > 0$ e che per ε sufficientemente piccolo, se $s + 1/p$ è intero $s + 1/p + \varepsilon$ è non intero; dallo stesso teorema 4.1 applicato al caso $s + \varepsilon$, si ottiene allora il seguente risultato «approssimato»:

TEOR. 4.2. *Nelle ipotesi* 2.2 *e* 3.1, *sia* p *reale* > 1, *sia* s *reale*, $0 < s < m$, *tale che* $s + 1/p$ *sia intero; allora fissati comunque* $f \in K_s^{-m,p}(\Omega)$ *e* $\varphi_j \in W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j=0, \dots, m-1$ *esiste una ed una sola* $u \in W^{m-s-\varepsilon,p}(\Omega)$ *per ogni* $\varepsilon > 0$, *tale che* $Au \in K_s^{-m,p}(\Omega)$, *e che:*

$$Au = f \qquad \textit{nel senso delle distribuzioni in } \Omega$$

$$\gamma_j u = \varphi_i; \quad \textit{in} \quad W^{m-s-j-1/p-\varepsilon,p}(\Gamma), \ \forall\, \varepsilon > 0, \ j = 0, \dots, m-1 \tag{4.1}$$

ed u *dipende con continuità, in* $W^{m-s-\varepsilon,p}(\Omega)$, *dai dati* f *e* φ_j; *e inoltre:*

$$\lim_{\tau \to 0} \| \tilde{\gamma}_{j,\tau} u - \varphi_j \|_{W^{m-s-j-1/p-\varepsilon,p}(\Gamma)} = 0, \qquad \forall\, \varepsilon > 0, \ j = 0, \dots, m-1. \tag{4.2}$$

OSSERVAZIONE. — Si osservi che le (4.1), (4.2) sono valide *per ogni* $\varepsilon > 0$ ma non è detto che lo siano per $\varepsilon = 0$ (cfr. nn. 6, 7).

n. 5. Un caso particolare di spazi $K_s^{m,p'}(\Omega)$.

5.1. Riprendendo la definizione data in 3.2 degli spazi del tipo $K_s^{m,p'}(\Omega)$ si presentano alcuni problemi interessanti.

Il primo problema è quello di dare degli esempi di tali spazi; si ha innanzi tutto l'esempio immediato dello spazio $W_0^{m,p'}(\Omega)$ che è evidentemente uno spazio del tipo $K_s^{m,p'}(\Omega)$; in questo caso però non si ottiene nessun risultato nuovo rispetto a quelli ottenuti da LIONS-MAGENES [14]. Daremo nei prossimi n. 5.2, 5.3 un ulteriore esempio. La costruzione di tale esempio si è presentata in modo naturale, come si vedrà nei successivi nn., nel caso di due dimensioni.

Un secondo problema aperto è quello di caratterizzare, se esiste, lo spazio «più piccolo», in un senso da precisare opportunamente, fra quelli che verificano la (3.3) in modo da ottenere come duale lo spazio «più grande» che verifichi inoltre ancora l'ipotesi 3.1.

5.2. Si ricordi che se E è uno spazio di BANACH si suole (v. [9], [26], ...) indicare con $L^p(0, \tau_0; E)$ lo spazio delle classi di funzioni $u(\tau)$ di potenza p esima sommabile in $]0, \tau_0[$ a valori in E, rispetto alla misura di LEBESGUE $d\tau$ su $]0, \tau_0[$; se $\| u \|_E$ è la norma in E, allora lo spazio $L^p(0, \tau_0; E)$ risulta esso pure di BANACH rispetto alla norma così definita:

$$\| u \|_{L^p(0,\tau_0;\, E)} = \left(\int_0^{\tau_0} \| u(\tau) \|_E^p \, d\tau \right)^{1/p}; \tag{5.1}$$

ciò detto, si porrà la seguente

DEF. 5.1. *Se k è intero positivo si indica con $W^{k,p}(0, \tau_0; E)$ lo spazio delle $u(\tau)$ tali che $D_\tau^j u(\tau) \in L^p(0, \tau_0; E)$, $j = 0, 1, \dots, k$, la derivazione essendo intesa nel senso delle distribuzioni vettoriali su $]0, \tau_0[$ a valori in E* (8); *in $W^{k,p}(0, \tau_0; E)$ viene introdotta la norma:*

$$\| u \|_{W^{k,p}(0,\tau_0;\, E)} = \left(\sum_{j=0}^{k} \| D_\tau^j u \|^p_{L^p(0,\tau_0;E)} \right)^{1/p}. \tag{5.2}$$

Talvolta si indicherà lo spazio $L^p(0, \tau_0; E)$ con $W^{0,p}(0, \tau_0; E)$.

Per note proprietà vale inoltre la

PROP. 5.1. *Se $u(\tau) \in W^{k,p}(0, \tau_0; E)$, k intero positivo, allora $u(\tau)$ coincide quasi-dappertutto in $[0, \tau_0]$ con una funzione che verrà ancora indicata con $u(\tau)$ e con la quale verrà identificata, continua in $[0, \tau_0]$, a valori in E insieme con le sue derivate $D_\tau^j u(\tau)$ per $j = 1, \dots, k-1$; hanno quindi senso $u(0), D_\tau^1 u(0), \dots, D_\tau^{k-1} u(0)$ come elementi di E.*

Si pone allora la

DEF. 5.2. *Per k intero positivo si indica con $W_0^{k,p}(0, \tau_0; E)$ il sottospazio di $W^{k,p}(0, \tau_0; E)$ chiusura in $W^{k,p}(0, \tau_0; E)$ dello spazio $\mathcal{D}(0, \tau_0; E)$ delle funzioni indefinitamente differenziabili ed a supporto compatto in $]0, \tau_0[$ a valori in E.*

Esso coincide con il sottospazio di $W^{k,p}(0, \tau_0; E)$ costituito dalle u per cui è $u(0) = D_\tau^1 u(0) = \dots = D_\tau^{k-1} u(0) = 0$. Si conviene anche di porre $W_0^{0,p}(0, \tau_0; E) = L^p(0, \tau_0; E) = W^{0,p}(0, \tau_0; E)$.

---

(8) Si veda SCHWARTZ [26].

Si ha poi la

DEF. 5.3. *Per k intero < 0, $1 < p < +\infty$*

$$W^{k,p'}(0, \tau_0 ; E) = (W_0^{-k,p}(0, \tau_0 ; E'))', \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \tag{5.3}$$

dove E' è il duale di E.

Per le $u \in W^{k,p'}(0, \tau_0 ; E)$ con $k < 0$, si ha inoltre il teorema di rappresentazione:

$$u = \sum_{|h| \leq k} D^h f_h \qquad \text{con} \qquad f_h \in L^{p'}(0, \tau_0 ; E).$$

5.3. Sia β una *fissata* funzione appartenente a $C^{2m}(\overline{\Omega})$ a supporto in $\complement\, \Omega\tau_0$ ed uguale ad 1 in $\overline{\Omega} - \overline{\Omega}_{\overline{\tau}}$ con un *fissato* $\overline{\tau} \in]0, \tau_0[$.

Si consideri lo spazio lineare $\mathcal{A}_s^{m,p'}(\Omega)$, m intero > 0, s reale, $0 \leq s \leq m$, delle u tali che

$$u \in W^{m,p'}(\Omega) \qquad (\beta u)_\tau \in W^{m,p'}(0, \tau_0 ; W^{s,p'}(\Gamma)) \text{ (9)} \tag{5.4}$$

ove la norma è così definita:

$$\| u \|_{\mathcal{A}_s^{m,p'}(\Omega)} = (\| u \|^{p'}_{W^{m,p'}(\Omega)} + \| (\beta u)_\tau \|^{p'}_{W^{m,p'}(0, \tau_0 ; W^{s,p'}(\Gamma))})^{1/p'} ; \tag{5.5}$$

si hanno ovviamente le inclusioni

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{A}_s^{m,p'}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

Si pone allora la seguente

DEF. 5.4. *$A_s^{m,p'}(\Omega)$, m intero > 0, s reale, $0 \leq s \leq m$, è la chiusura di $\mathcal{D}(\Omega)$ in $\mathcal{A}_s^{m,p'}(\Omega)$.*

$A_s^{m,p'}(\Omega)$ è uno spazio del tipo $K_s^{m,p'}(\Omega)$ infatti esso è ovviamente uno spazio normale di distribuzioni ed inoltre sono verificate le inclusioni (3.3).

Osserviamo che il prodotto topologico di $W^{m,p'}(\Omega)$ e $W^{m,p'}(0, \tau_0 ; W^{s,p'}(\Gamma))$ è uno spazio di BANACH riflessivo poichè tali sono i due fattori e che $A_s^{m,p'}(\Omega)$, come varietà lineare chiusa di uno spazio di BANACH riflessivo, è, per la norma indotta, uno spazio di BANACH riflessivo; si ha cioè

(9) Con $(\beta u)_\tau$ si intende di indicare la funzione $\vartheta_\tau^* (\beta u)_{\Gamma_\tau}$.

PROP. 5.2. $A_s^{m,p'}(\Omega)$, *m intero* > 0, *s reale*, $0 \leq s \leq m$, *è uno spazio di* BANACH *riflessivo.*

Segue allora con ragionamento noto che il duale di $A_s^{m,p'}(\Omega)$, che indicheremo con $A_s^{-m,p}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, è uno spazio normale di distribuzioni e dunque in particolare che $A_s^{-m,p}(\Omega)$ verifica l'ipotesi 3.1.

OSSERVAZIONE. Lo spazio $A_s^{m,p'}(\Omega)$, m intero > 0, s reale, $0 \leq s \leq m$, dipende ovviamente dalla funzione β *fissata* (e dal valore $\bar{\tau}$). Tale dipendenza non è tuttavia essenziale; se infatti si sostituisce a β un'altra funzione *fissata* purchè ancora appartenente a $C^{2m}(\bar{\Omega})$, a supporto in $\complement\, \Omega_{\tau_0}$ ed uguale a 1, in $\bar{\Omega} - \bar{\Omega}_{\tau^*}$ con τ^* fissato in $]\, 0, \tau_0\, [$ si ottiene uno spazio isomorfo algebricamente e con una norma equivalente.

PARTE II:

n. 6. Un caso particolare risolto con un altro metodo.

Come è stato detto nella prefazione, in questa parte II, riprenderemo il problema non omogeneo di DIRICHLET, *nel caso particolare in cui sia* $n = 2$ *e sia* Ω *di classe* C^{2m+2}.

Nella parte I tale problema viene ricondotto al caso omogeneo mediante la funzione ausiliaria che è costruita risolvendo, con il teor. 5.2 di LIONS MAGENES [16] il problema

$$\begin{cases} Av = 0 & \text{in } \Omega \\ \gamma_j v = \varphi_j & \text{su } \Gamma,\ j = 0, \dots, m-1; \end{cases}$$

qui invece verrà data una costruzione diretta di una funzione ausiliaria utilizzando risultati e metodi di AGMON [1] MIRANDA [21] e MAGENES [17] e conferenza di Nancy e Strasburgo. Il problema omogeneo al quale ci si riduce viene poi risolto utilizzando i risultati della parte I nel caso omogeneo e precisamente il teor. 3.1.

6.1. Supposto che valga l'ipotesi 2.2 e che Ω sia di classe C^{2m+2} siano assegnate su Γ m distribuzioni $\varphi_j \in W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$, p reale > 1, $s + 1/p$ intero con $1 \leq s + 1/p \leq m$. Si vuole costruire una funzione $v(x_1, x_2) \in C^{2m}(\Omega) \cap W^{m-s-1/p,p}(\Omega)$ (10) verificante le condizioni:

$$\lim_{\tau \to 0} \| \tilde{\gamma}_{j,\tau} v - \varphi_j \|_{W^{m-s-j-1/p,p}(\Gamma)} = 0, \qquad j = 0, \dots, m-1 \tag{6.1}$$

$$\| (Av)_\tau \|_{W^{-s-1/p+1,p}(\Gamma)} = O(|\tau|^{-m}) \text{ (11)}. \tag{6.2}$$

Ponendo per comodità $s + 1/p = m - r$ con r intero, $0 \leq r \leq m-1$, si vuole allora, nell'ipotesi 2.2, costruire, date m distribuzioni $\varphi_j \in W^{r-j,p}(\Gamma)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, una funzione $v(x_1, x_2) \in C^{2m}(\Omega) \cap W^{r,p}(\Omega)$ tale che

$$\lim_{\tau \to 0} \| \tilde{\gamma}_{j,\tau} v - \varphi_j \|_{W^{r-j,p}(\Gamma)} = 0, \qquad j = 0, \dots, m-1. \tag{6.3}$$

$$\| (Av)_\tau \|_{W^{-m+1+r,p}(\Gamma)} = O(|\tau|^{-m}). \tag{6.4}$$

---

(10) $C^{2m}(\Omega)$ è lo spazio delle funzioni $2m$ volte differenziabili con continuità in Ω.

(11) Con $(Av)_\tau$ si intende di indicare la funzione $\vartheta_\tau^* (Av)_{\Gamma_\tau}$. O è il simbolo di Landau.

A tale scopo, considerata la famiglia di aperti $\{\Theta_i\}_{1\leq i\leq \mu}$ dell'ipotesi 1.1, si ponga

$$O_i = \Theta_i \cap \Omega, \qquad i = 1, \dots, \mu,$$

$$\Gamma_i = \Theta_i \cap \Gamma, \qquad i = 1, \dots, \mu;$$

allora l'omeomorfismo g_i fa corrispondere ad $\overline{O}_i$ il rettangolo

$$\overline{Q}_- = \{t_1, t_2 ; t_1 \in [-1, +1], t_2 \in [-1, 0]\}$$

ed a $\overline{\Gamma}_i$, l'intervallo

$$\overline{J} = [-1, +1].$$

Si ha in questo modo che $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\mu} \Gamma_i$ ed il sistema $\{\Gamma_i\}_{1\leq i\leq \mu}$ costituisce un ricoprimento di Γ mediante insiemi aperti relativamente a Γ.

Si consideri poi una famiglia di funzioni $\alpha_i \in C^{2m}(\Theta_i)$, $i = 1, \dots, \mu$ tali che:

1°) ogni α_i abbia supporto compatto contenuto in $O_i \cup \Gamma_i$;

2°) la famiglia $\{(\alpha_i)_\Gamma\}_{1\leq i\leq \mu}$ (12) costituisca una partizione dell'unità su Γ relativamente al sistema $\{\Gamma_i\}_{1\leq i\leq \mu}$, cioè

$$\sum_{i=1}^{\mu} (\alpha_i)_\Gamma = 1 ;$$

3°) la trasformata di α_i mediante g_i sia costante rispetto a t_2 in $\overline{Q}_-$ per t_2 sufficientemente piccolo, per es. $-1/2 \leq t_2 \leq 0$.

Si vede facilmente che tale costruzione è possibile.

Seguendo ora il ragionamento del n. 2.5 di [14], ed usando per comodità gli stessi simboli (si ricordi (2)), si consideri per ogni funzione $\varphi \in C^{2m}(\Gamma)$, fissato i, il prodotto $(\alpha_i)_\Gamma \varphi$ e lo si trasformi mediante l'omeomorfismo g_i^{-1}, precisamente si ponga:

$$\begin{cases} \Phi_i \varphi(t_1) = ((\alpha_i)_\Gamma \varphi)(g_i^{-1}(t_1)) & \text{per } t_1 \in J \\ \Phi_i \varphi(t_1) = 0 & \text{per } t_1 \in R^1 - J. \end{cases}$$

L'applicazione $\varphi \longrightarrow \Phi_i \varphi$, $i = 1, \dots, \mu$, di $C^{2m}(\Gamma)$ in $C^{2m}(R^1)$ si può poi (si veda sempre, LIONS-MAGENES [14] n. 2.5) prolungare per continuità in una applicazione lineare e continua ancora indicata $\varphi \longrightarrow \Phi_i \varphi$, $i = 1, \dots, \mu$, di $W^{r,p}(\Gamma)$ in $W^{r,p}(R^1)$, r intero $-2m \leq r \leq 2m$.

---

(12) Con $(\alpha_i)_\Gamma$ si indica la restrizione a Γ della funzione α_i, $i = 1, \dots, \mu$.

Da tutto ciò, segue che le m distribuzioni $\varphi_j \in W^{r-j,p}(\Gamma)$ $j = 0, \dots, m-1$, r intero, $0 \leq r \leq m-1$, assegnate su Γ si trasformano mediante gli omeomorfismi g_i in $m \cdot \mu$ distribuzioni $\Phi_i \varphi_j(t_1)$, $j = 0, \dots, m-1$, $i = 1, \dots, \mu$ dalla variabile t_1 appartenenti rispettivamente a $W^{r-j,p}(R^1)$ ed a supporto contenuto in J.

L'operatore Au, dato dalla (2.1) si trasforma mediante gli omeomorfismi g_i in un operatore differenziale lineare di ordine $2m$ a coefficienti definiti su $\overline{Q}$ e ancora ivi propriamente ellittico:

$$\mathcal{A}v = \sum_{j=0}^{2m} a_{2m-j}(t_1, t_2) D_{t_2}^j D_{t_1}^{2m-j} v + Bv. \tag{6.5}$$

dove v è la trasformata di u e Bv è un operatore lineare di ordine $\leq 2m-1$ a coefficienti almeno continui in $\overline{Q}_-$ e i coefficienti $a_{2m-j}(t_1, t_2)$ di (6.5), appartengono per le (2.2) a $C^1(\overline{Q}_-)$.

Si introduca ora l'operatore

$$\mathcal{A}_0 v = \sum_{j=0}^{2m} a_{2m-j}(t_1, 0) D_{t_2}^j D_{t_1}^{2m-j} v \tag{6.6}$$

e, per ogni fissato i, si considerino le m distribuzioni $\Phi_i \varphi_j(t_1) \in W^{r-j,p}(R^1)$, $j = 0, \dots, m-1$ ed a supporto in J.

Si supponga verificato il seguente teorema, di cui verrà data la dimostrazione nel successivo n. 7:

TEOREMA 6.1. *Considerato nel piano* (t_1, t_2) *l'operatore di ordine* $2m$ *uniformemente e propriamente ellittico* (per la def. v. n. 7.1)

$$\mathcal{A}v = \sum_{j=0}^{2m} a_{2m-j}(t_1) D_{t_2}^j D_{t_1}^{2m-j} v(t_1, t_2) \tag{6.7}$$

con coefficienti $a_{2m-j}(t_1)$ *funzioni a valori complessi della sola variabile* t_1 *appartenenti a* $C^1(R^1)$ *e limitati in* R^1, *assegnate* m *distribuzioni* $\psi_j(t_1) \in W^{r-j,p}(R^1)$, $j = 0, \dots, m-1$ *ed a supporto compatto contenuto in un intervallo aperto* J *di* R^1, *allora esiste almeno una funzione* $v(t_1, t_2)$ *la quale*

i) risulti indefinitamente differenziabile nel semipiano $t_2 < 0$;

ii) per ogni intervallo chiuso e limitato $I = \{s' \leq t_1 \leq s''\} \subset R^1$ *verifichi le condizioni:*

$$\lim_{t_2 \to 0^-} \| D_{t_2}^j v - \psi_j \|_{W^{r-j,p}(I)} = 0, \qquad j = 0, \dots, m-1, \tag{6.8}$$

$$\| D^q v \|_{W^{-m+r+1,p}(I)} = O(|t_2|^{-l}), \qquad |q| = m-1+l, \; l = 1, 2, \dots, \tag{6.9}$$

$$\| \mathcal{A}v \|_{W^{-m+r,+1,p}(I)} = O(|t_2|^{-m}); \tag{6.10}$$

iii) appartenga a $W^{r,p}(B)$ *dove* B *è un aperto limitato fissato qualunque del semipiano* $t_2 < 0$.

Si prolunghino ora per continuità i coefficienti dell'operatore $\mathcal{A}_0$ in modo che indicato con $\mathcal{A}$ l'operatore così prolungato siano verificate le condizioni del teor. 6.1 ; per tale teorema si può allora costruire nel semipiano $t_2 \leq 0$ una funzione $v_i(t_1, t_2)$ indefinitamente differenziabile per $t_2 < 0$, la cui restrizione a $\overline{Q}_-$ appartiene a $W^{r,p}(Q_-)$, e verifica, prendendo come intervallo I, l'intervallo $J = [-1, +1]$:

$$\lim_{t_2 \to 0^-} \| D_{t_2}^j v_i - \Phi_i \varphi_j \|_{W^{r-j,p}(J)} = 0, \qquad j = 0, \dots, m-1. \tag{6.11}$$

Tenendo poi conto che in $\overline{Q}_-$ è $\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 + (\mathcal{A} - \mathcal{A}_0)$ si ha anche dalle (6.9) e (6.10):

$$\| \mathcal{A} v_i \|_{W^{-m+r+1,p}(J)} = O(\, | t_2 |^{-m}). \tag{6.12}$$

Sia infine $w_i(x_1, x_2)$, $i = 1, \dots, \mu$ la famiglia di funzioni definite in O_i e trasformate mediante g_i^{-1} della restrizione di $v_i(t_1, t_2)$ a Q_-; per proprietà note si ha che $w_i(x_1, x_2) \in W^{r,p}(O_i)$. Considerata la funzione

$$v = \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_i w_i$$

definita per $(x_1, x_2) \in \bigcup_{i=1}^{\mu} O_i$ la si prolunghi a tutto Ω ponendola uguale a zero; essa appartiene a $W^{r,p}(\Omega) \cap C^{2m}(\Omega)$ ed inoltre tenuto conto di (6.11), (6.12) verifica le (6.3), (6.4).

6.2. Dimostriamo ora che $Av \in A_{m-r-1}^{-m,p}(\Omega)$.

Si dimostra innanzitutto che $(Av)_\tau \in W^{-m,p}(0, \tau_0 ; W^{-m+r+1,p}(\Gamma))$. Infatti siccome $(Av)_\tau$ è una funzione vettoriale continua nell'intervallo $]0, \tau_0]$, a valori nello spazio di BANACH $W^{-m+r,1,p}(\Gamma)$, essa ammette in $]0, \tau_0]$ una primitiva di cui essa è la derivata in ogni punto.

Si ha inoltre dalla (6.4)

$$\left\| \int_\tau^{\tau_0} (Av)_t \, dt \right\|_{W^{-m+r+1,p}(\Gamma)} \leq$$

$$\leq \int_\tau^{\tau_0} \| (Av)_t \|_{W^{-m+r+1,p}(\Gamma)} \, dt \leq c' \, | \tau |^{-(m-1)}, \qquad \tau \in]0, \tau_0].$$

Posto allora

$$g(\tau) = \int_\tau^{\tau_0} dt_m \int_{t_m}^{\tau_0} dt_{m-1} \dots \int_{t_2}^{\tau_0} (Av)_{t_1} \, dt_1$$

si ha iterando il ragionamento sopra fatto

$$\int_0^{\tau_0} \| g(\tau) \|^p_{W^{-m+r+1,p}(\Gamma)} \, d\tau < +\infty$$

cioè $g \in W^{0,p}(0, \tau_0 ; W^{-m+r+1,p}(\Gamma))$.

Si consideri ora il funzionale

$$\langle (Av)_\tau , \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(0, \tau_0 , W^{m-r-1,p'}(\Gamma)) ;$$

tale funzionale risulta integrando m volte rispetto a τ:

$$| \langle (Av)_\tau , \varphi \rangle | = | \langle g, D^m_\tau \varphi \rangle | \leq$$

$$\leq \| g \|_{W^{0,p}(0,\tau_0 ; W^{-m+r+1,p}(\Gamma))} \| D^m_\tau \varphi \|_{W^{0,p'}(0,\tau_0 ; W^{m-r-1,p'}(\Gamma))} \leq$$

$$\leq c \| \varphi \|_{W^{m,p'}(0,\tau_0 ; W^{m-r-1,p'}(\Gamma))}$$

e quindi, come volevasi, $(Av)_\tau \in W^{-m,p}(0, \tau_0 ; W^{-m+r+1,p}(\Gamma))$.

Si consideri poi il funzionale

$$\langle Av, \varphi \rangle \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) ;$$

si ottiene allora, ricordando anche la definizione (2.1) di A e il n. 5.3:

$$| \langle Av, \varphi \rangle | \leq | \langle Av, \beta\varphi \rangle | + | \langle Av, (1-\beta)\varphi \rangle | \leq$$

$$\leq c \| (Av)_\tau \|_{W^{-m,p}(0,\tau_0 ; W^{-m+r+1,p}(\Gamma))} \cdot \| (\beta\varphi)_\tau \|_{W^{m,p'}_0(0,\tau_0 ; W^{m-r-1,p'}(\Gamma))} +$$

$$+ \left| \int_{\Omega_\tau} \left[\sum_{|k|,|h| \leq m} (-1)^{|k|} D^k (a_{kh}(x_1 , x_2) D^h v(x_1 , x_2)) \right] (1-\beta)\varphi \, dx_1 \, dx_2 \right| \leq$$

$$\leq c_1 \| (\beta\varphi)_\tau \|_{W^{m,p'}_0(0,\tau_0 ; W^{m-r-1,p'}(\Gamma))} +$$

$$+ \left| \int_{\Omega_\tau} \sum_{|k|,|h| \leq m} a_{kh}(x_1 , x_2) D^h v(x_1 , x_2) [D^k (1-\beta)\varphi] \, dx_1 \, dx_2 \right| \leq$$

$$\leq c_1 \| (\beta\varphi)_\tau \|_{W^{m,p'}_0(0,\tau_0 ; W^{m-r-1,p'}(\Gamma))} +$$

$$+ c_2 \| v \|_{W^{m,p}(\Omega_\tau^-)} \cdot \| (1-\beta)\varphi \|_{W^{m,p'}(\Omega_\tau^-)} \leq$$

$$\leq c_1 \| (\beta\varphi)_\tau \|_{W_0^{m,p'}(0,\tau_0;W^{m-r-1,p'}(\Gamma))} + c_3 \| \varphi \|_{W^{m,p'}(\Omega)},$$

dove c_1 e c_3 sono indipendenti da φ. Resta così dimostrato che $Av \in A_{m-r-1}^{-m,p}(\Omega)$.

6.3. Siamo così in grado di dimostrare il seguente teorema di esistenza e di unicità per il problema di DIRICHLET.

TEOR. 6.2. *Nell'ipotesi* 2.2, *sia* $n = 2$, Ω *di classe* C^{2m+2} *e* p *reale* >1; *allora fissato* r *intero con* $0 \leq r \leq m-1$, *per ogni* $f \in A_{m-r-1}^{-m,p}(\Omega)$ *e* $\varphi_j \in W^{r-j,p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$, *esiste una ed una sola funzione* u *tale che* $u \in W^{r,p}(\Omega)$, $u_{\Omega_\tau} \in \mathcal{M}_A^{r+1,p}(\Omega_\tau)$ *per* $0 < \tau \leq \tau_0/2$, *e che*

$$Au = f \qquad \textit{nel senso delle distribuzioni su } \Omega \tag{6.15}$$

e inoltre che

$$\lim_{\tau\to 0} \| \tilde{\gamma}_{j,\tau} u - \varphi_j \|_{W^{r-j,p}(\Gamma)} = 0, \qquad j = 0, \dots, m-1. \tag{6.16}$$

OSSERVAZIONE. Il problema di DIRICHLET $Au = f$, $\gamma_j u = \varphi_j$, $j=0,\dots, m-1$ viene dunque risolto nel senso della (6.15) e (6.16); e si osservi che in realtà è lecito parlare per $\tau>0$ di $\tilde{\gamma}_{j,\tau} u$ nella (6.16) poichè se $u_{\Omega_\tau} \in \mathcal{M}_A^{r+1,p}(\Omega_\tau)$ per $\tau > 0$ allora in virtù del teor. 3.4 esistono le $\gamma_{j,\tau} u$ e appartengono a $W^{r+1-j-1/p,p}(\Gamma_\tau)$ e quindi esistono le $\gamma_{j,\tau} u$ ed appartengono a $W^{r+1-j-1/p,p}(\Gamma)$ e a maggior ragione dunque a $W^{r-j,p}(\Gamma)$.

DIM. DEL TEOR. 6.2. Dimostriamo anzitutto l'unicità. Se u_1 ed u_2 fossero due soluzioni del problema, $w = u_1 - u_2$ verificherebbe anzitutto la $Aw = 0$ e quindi per i risultati di regolarizzazione all'interno delle soluzioni delle equazioni ellittiche (AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [3] e BROWDER [5], [6]) w apparterrebbe a $C^{2m}(\Omega)$. Inoltre sarebbe

$$\lim_{\tau\to 0} \| \tilde{\gamma}_{j,\tau} w \|_{W^{r-j,p}(\Gamma)} = 0, \qquad j = 0, 1, \dots, m-1. \tag{6.17}$$

Sia ora ψ una qualunque funzione dello spazio $C_\gamma^{2m}(\overline{\Omega})$ (spazio delle $u \in C^{2m}(\overline{\Omega})$ tali che $\gamma_0 u = \dots = \gamma_{m-1} u = 0$). Per l'ipotesi fatta che Ω sia di classe C^{2m+2} si può per ogni τ di $[0, \tau_0/2]$ costruire una funzione $\psi_\tau \in C^{2m}(\overline{\Omega}_\tau)$ e nulla su Γ_τ insieme alle sue derivate secondo la normale a Γ_τ fino all'ordine $m-1$ (13) e tale che per $\tau \to 0$ *biconverga* uniformemente in Ω alla ψ insieme a tutte le sue derivate fino all'ordine $2m$, cioè fissato $\varepsilon > 0$ esiste un τ_ε con $0 < \tau_\varepsilon < \tau_0/2$ tale che per $\tau \in]0, \tau_\varepsilon[$ sia

$$| D^k \psi(x) - D^k \psi_\tau(x) | < \varepsilon, \qquad \forall x \in \Omega_\tau, \quad | k | \leq 2m.$$

Applicando allora la formula di GREEN in Ω_τ a ψ_τ ed a w si ha:

$$\int_{\Omega_\tau} w \, \overline{A^* \psi_\tau} \, dx_1 \, dx_2 = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{\Gamma_\tau} \gamma_{j,\tau} w \, \overline{T_{j,\tau} \psi_\tau} \, ds. \tag{6.18}$$

Dalla (6.18) passando al limite per $\tau \to 0$, tenuto anche conto che $w \in W^{r,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ e che valgono le (6.17) si ottiene la

$$(w, A^* \psi) = 0 \qquad \forall \psi \in C_\gamma^{2m}(\overline{\Omega})$$

e quindi, poichè $C_\gamma^{2m}(\overline{\Omega})$ è denso in $W^{2m,p'}(\Omega) \cap W_0^{m,p'}(\Omega)$, applicando il teor. 2.1 nel caso $s = m$, si ha $w = 0$.

Dimostriamo ora l'esistenza. Dati f e φ_j costruiamo anzitutto la funzione ausiliaria v corrispondente ai φ_j mediante la costruzione del n. 6.1 e risolviamo poi, col teor. 3.1 nel caso $s = m - r - 1$ e $g = f - Av$, il problema $Aw = f - Av$, $\gamma_j w = 0$, $j = 0, \dots, m-1$.

E infine poniamo $u = v + w$. Ricordando le proprietà di v e inoltre che $w \in W^{r+1,p}(\Omega)$ e che per il teor. 3.5 $\tilde{\gamma}_{j,\tau} w \to 0$ in $W^{r+1-j-1/p,p}(\Gamma)$ e quindi in $W^{r-j,p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$, si ottiene subito che u verifica la tesi del teorema.

6.4. È interessante confrontare il risultato ora ottenuto con il teor. 4.2. Si vedrà così che i due risultati sono differenti e l'uno serve a completare l'altro.

Si supponga pure $f = 0$. Posto allora $r = m - s - 1/p$, il teor. 4.2. afferma che assegnati $\varphi_j \in W^{r-j,p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$, esiste, una ed una sola $u_1 \in W^{r+1/p-\varepsilon,p}(\Omega)$ per ogni $\varepsilon > 0$, tale che $Au_1 = 0$ nel senso delle

(13) Si veda un metodo di costruzione di tale funzione in MAGENES [17] nn. 1 e 2.

distribuzioni in Ω e che

$$\gamma_j u_1 = \varphi_j \qquad \text{in} \quad W^{r-j-\varepsilon,p}(\Gamma), \qquad j = 0, \dots, m-1,$$

ed inoltre

$$\lim_{\tau \to 0} \| \tilde{\gamma}_{j,\tau} u - \varphi_j \|_{W^{r-j-\varepsilon,p}(\Gamma)} = 0, \qquad j = 0, \dots, m-1 \tag{6.19}$$

Invece il teor. 6.2 afferma che nelle stesse ipotesi sui dati esiste una ed una sola $u \in W^{r,p}(\Omega)$ tale che valgano le (6.17); dunque il teor. 4.2 dà la soluzione del problema in uno spazio più ristretto di quello del teor 6.2; per quanto riguarda il modo di assumere i dati φ_j il teor. 6 2 dice invece con la (6.17) di più che il teor. 4.2, il quale assicura solo la (6.19).

I due risultati si completano a vicenda in quanto, come ora si farà vedere, le due soluzioni coincidono. Infatti $w = u - u_1$ è tale che $w \in W^{r,p}(\Omega)$ e inoltre $Aw = 0$; dunque per i risultati di regolarizzazione interna (v. AGMON-DOUGLIS-NIRENBERG [3], BROWDER [5], [6]) $w \in C^{2m}(\overline{\Omega_\tau})$ e quindi esistono le tracce $\gamma_{j,\tau} w$ su Γ_τ (nel senso ordinario) per le quali risulta dalle (6.17), (6.19) $\tilde{\gamma}_{j,\tau} w \to 0$, per $\tau \to 0$, in $W^{r-j-\varepsilon,p}(\Gamma)$, $j = 0, \dots, m-1$; con lo stesso ragionamento fatto per dimostrare l'unicità nel teor. 6.2 si ottiene allora

$$(w, A^* \psi) = 0 \qquad \forall\, \psi \in C_\gamma^{2m}(\overline{\Omega})$$

e dunque $w = 0$.

Unendo i teor. 4.2 e 6.2 si può allora ottenere il seguente

TEOR. 6.3. *Nell'ipotesi 2.2 sia $n = 2$, Ω di classe C^{2m+2} e p reale > 1; allora fissato un intero r, con $0 \leq r \leq m-1$, per ogni $f \in A^{-m,p}_{m-r-1}(\Omega)$ per $\varphi_j \in W^{r-j,p}(\Gamma)$, $j = 0, 1, \dots, m-1$, esiste, una ed una sola $u \in W^{r+1/p-\varepsilon,p}(\Omega)$ per ogni $\varepsilon > 0$, tale che $u_{\Omega_\tau} \in \mathcal{M}_A^{r+1,p}(\Omega_\tau)$ per $0 < \tau \leq \tau_0/2$ e che*

$$Au = f \qquad \textit{nel senso delle distribuzioni in } \Omega$$

ed inoltre

$$\lim_{\tau \to 0} \| \tilde{\gamma}_{j,\tau} u - \varphi_j \|_{W^{r-j,p}(\Gamma)} = 0, \qquad j = 0, \dots, m-1.$$

È opportuno rilevare l'interesse del risultato ottenuto col teor. 6.3 poichè vengono così generalizzati, o precisati maggiormente, i risultati precedenti dovuti a CIMMINO [7] per le equazioni del secondo ordine (per il problema $\Delta u = 0$, $\gamma_0 u = g_0$, $g_0 \in L^p(\Gamma)$ nel caso in cui Ω sia un cerchio, si veda anche ZYGMUND [29] cap. XIV), e per le equazioni di ordine superiore a MAGENES [17] e a LIONS-MAGENES [14, teor. 12.2].

n. 7. Verifica del teorema 6.1.

7.1. Posto, per comodità, $t_1 = s$, $t_2 = t$, si consideri nel piano (t, s) l'operatore di ordine $2m$

$$\mathcal{A} = \sum_{j=0}^{2m} a_{2m-j}(s)\, D_t^j\, D_s^{2m-j} \quad (14) \tag{7.1}$$

con i coefficienti $a_{2m-j}(s)$ funzioni a valori complessi della sola variabile s, appartenenti a $C^1(R^1)$ e limitati in R^1.

Si supponga che

a) l'operatore sia *uniformemente ellittico*, cioè per ogni vettore reale $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ ed ogni s di R^1 si abbia

$$\left| \sum_{j=0}^{2m} a_{2m-j}(s)\, \xi_1^j\, \xi_2^{2m-j} \right| \geq \alpha\, |\xi|^{2m} \tag{7.2}$$

α essendo un numero strettamente positivo;

b) l'operatore sia *propriamente ellittico*, cioè gli zeri del polinomio in z, a coefficienti funzioni di s,

$$A(z, 1, s) = \sum_{k=0}^{2m} a_{2m-k}(s)\, z^k$$

siano sempre m con parte immaginaria positiva ed m con parte immaginaria negativa.

Si ricava allora (si veda ad es. [21], nota (11)) che gli zeri con parte immaginaria negativa $z_1(s), \dots, z_m(s)$ non escono, al variare di s su R^1, da una regione delimitata da una curva γ semplice e chiusa fissa appartenente al semipiano $Im\, z < 0$.

Sia

$$M(z, s) = (z - z_1(s))(z - z_2(s)) \dots (z - z_m(s)) = \sum_{k=0}^{m} b_{m-k}(s)\, z^k \tag{7.4}$$

cosicchè $A(z, 1, s) = a_{2m}(s)\, M(z, s)\, \overline{M(z, s)}$; si ponga poi:

$$M_{m-j-1}(z, s) = \sum_{k=j+1}^{m} b_{m-k}(s)\, z^{k-j-1} \qquad j = 0, \dots, m-1 \tag{7.5}$$

---

(14) Si usano le seguenti notazioni: $D_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $D_s = \dfrac{\partial}{\partial s}$, $D_t^h\, D_s^k = \dfrac{\partial^{h+k}}{\partial t^h\, \partial s^k}$.

I coefficienti di $M(z, s)$ e degli $M_{m-j-1}(z, s)$ $(j = 0, \dots, m-1)$ per l'osservazione fatta sugli zeri di $A(z, 1, s)$ e per il modo con il quale sono stati definiti detti polinomi, sono funzioni di s appartenenti a $C^1(R^1)$ e limitati in R^1. Si ha anche che, per z variabile su γ ed s in R^1, $|M(z, s)|$ è maggiore di una costante positiva.

7.2. Tutto ciò premesso, fissato r intero con $0 \leq r \leq m-1$, siano $\psi_j(s)$, $j = 0, 1, \dots, m-1, m$ distribuzioni appartenenti rispettivamente a $W^{r-j,p}(R^1)$ ed a supporto compatto contenuto in un intervallo aperto J di R^1. Si hanno allora due casi:

$$\alpha)\ 0 \leq j \leq r,$$

$$\beta)\ r < j \leq m-1.$$

Nel caso $\beta)$ risulta

$$\psi_j(s) = \sum_{k=0}^{j-r} D_s^k f_{j,k}(s) \tag{7.6}$$

con $f_{jk}(s) \in L^p(R^1)$ a supporto contenuto in J.

Per dimostrare il teorema 6.1 si vuole *costruire una funzione $v(t, s)$ la quale*: i) *risulti indefinitamente differenziabile nel semipiano $t < 0$*;

ii) *per ogni intervallo chiuso e limitato $I = [s', s''] \subset R^1$ verifichi le condizioni*:

$$\lim_{t \to 0^-} \| D_t^j v - \psi_j \|_{W^{r-j,p}(I)} = 0 \qquad j = 0, \dots, m-1, \tag{7.7}$$

$$\| D^q v \|_{W^{-m+r+1,p}(I)} = O(|t|^{-l}), \tag{7.8}$$

$$|q| = m - 1 + l,$$

$$l = 1, 2, \dots,$$

$$\| \mathcal{A} v \|_{W^{-m+r+1,p}(I)} = O(|t|^{-m}); \tag{7.9}$$

iii) *appartenga a $W^{r,p}(B)$, dove B è un aperto limitato fissato qualunque del semipiano $t < 0$.*

Si ponga per $t < 0$ ed $s \in R^1$:

$$v(t, s) = \sum_{j=0}^{r} v_j(t, s) + \sum_{j=r+1}^{m-1} \sum_{k=0}^{j-r} v_{j,k}(t, s); \tag{7.10}$$

dove :

$$v_j(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j^{(r-j)}(\sigma)\, K_j(t, \sigma, s-\sigma)\, d\sigma, \qquad 0 \leq j \leq r, \tag{7.11}$$

$$v_{j,k}(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{j,k}(\sigma)\, K_{j,k}(t, \sigma, s-\sigma)\, d\sigma, \qquad r < j \leq m-1, \quad 0 \leq k \leq j-r, \tag{7.12}$$

nelle quali se $r = 1, 2, \ldots, m-1$, allora è

$$K_j(t, \sigma, s-\sigma) = \tag{7.13}$$

$$= Re\left\{\frac{1}{2\pi^2}\int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, \sigma)}{M(z, \sigma)(r-1)!}(tz+s-\sigma)^{r-1}\, lg\,(tz+s-\sigma)\, dz\right\},$$

$$K_{j,k}(t, \sigma, s-\sigma) = \tag{7.14}$$

$$= Re\left\{\frac{1}{2\pi^2}\int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, \sigma)}{M(z, \sigma)(j-k-1)!}(tz+s-\sigma)^{j-k-1}\, lg\,(tz+s-\sigma)\, dz\right\},$$

e se $r = 0$, allora è

$$K_0(t, \sigma, s-\sigma) = \tag{7.13 bis}$$

$$= Re\left\{\frac{1}{2\pi^2}\int_{+\gamma} \frac{M_{m-1}(z, \sigma)}{M(z, \sigma)(tz+s-\sigma)}\, d\sigma\right\},$$

$$K_{j,k}(t, \sigma, s-\sigma) = \tag{7.14 bis}$$

$$Re\left\{\frac{1}{2\pi^2}\int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, \sigma)}{M(z, \sigma)(j-k-1)!}(tz+s-\sigma)^{j-k-1}\, lg\,(tz+s-\sigma)\, dz\right\} \qquad k = 0, \ldots, j-1$$

$$K_{j,j}(t, \sigma, s-\sigma) = \tag{7.14 ter}$$

$$= Re\left\{\frac{1}{2\pi^2}\int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, \sigma)}{M(z, \sigma)(tz+s-\sigma)}\, dz\right\},$$

γ essendo la fissata curva semplice e chiusa del semipiano $Im\, z < 0$ considerata nel n. 7.1 e la determinazione del logaritmo essendo presa, in

(7.13), (7.14) e (7.14 bis), in modo che

$$0 \leq Im\, lg\,(tz + s - \sigma) \leq \pi.$$

Si osservi che, nel caso $r = m - 1$, venendo a mancare le (7.12) (7.14) (7.14 bis) e (7. 14 ter), a parte la densità, la funzione $v(t, s)$ coincide con la funzione introdotta da MIRANDA nel n. 7 di [21] ed utilizzata anche da MAGENES nel n. 4 di [17].

Ovviamente $v(t, s)$ è indefinitamente differenziabile per $t < 0$.

Dimostriamo ora che $v(t, s)$ verifica anche le condizioni ii) e iii); utilizzeremo perciò, completandoli ove sia necessario, i ragionamenti e i risultati di AGMON [1], MIRANDA [21], MAGENES [17].

7.3. Per verificare la condizione ii) e cioè le (7.7) (7.8) e (7.9) si distinguono i due casi $0 \leq j \leq r$ ed $r < j \leq m - 1$.

Verifica della condizione ii) nel caso $0 \leq j \leq r$. Per dimostrare la (7.7), si dimostra che risulta:

$$\lim_{t \to 0^-} D_t^h D_s^{l-h} v_j(t, s) = \tag{7.15}$$

$$= \begin{cases} 0 \quad \text{per} \quad 0 \leq l < j, \qquad 0 \leq h \leq l, \\ \delta_{j,h}\, \psi_j^{(l-j)}(s) \quad \text{per} \quad j \leq l \leq r - 1, \quad 0 \leq h \leq l, \quad (^{14\ \text{bis}}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \leq l \leq r - 1\ , \end{cases}$$

uniformemente al variare di s in ogni intervallo fissato $I = [s', s'']$; inoltre si dimostra che

$$\lim_{t \to 0^-} \| D_t^h D_s^{l-h} v_j(t, s) - \delta_{jh}\, \psi_j^{(l-j)}(s) \|_{L^p(I)} = 0, \quad 0 \leq h \leq l, \quad l = r\ , \tag{7.16}$$

$$\lim_{t \to 0^-} \| D_t^h D_s^{l-h} v_j(t, s) - \delta_{jh}\, \psi_j^{(l-j)}(s) \|_{W^{r-l,p}(I)} = 0, \quad 0 \leq h \leq l, r + 1 \leq l \leq m - 1\ , \tag{7.17}$$

per ogni intervallo fissato $I = [s', s'']$.

La (7.15) si dimostra con gli stessi ragionamenti di AGMON [1] e di MIRANDA [21] (si vedano più precisamente le (7.5) di [21] e le (4.8) di [17])

(14 bis) $\delta_{i,h}$ è il simbolo di Kronecker,

dopo avervi sostituito $m-1$ con r ed avendo cura di lasciare la parte reale sotto il segno di integrale giacchè ora le ψ_j sono a valori complessi.

Per verificare la (7.16), derivando la (7.11) e ricordando che $l=r$ e $0 \leq h \leq r$, si ottiene:

$$(7.18) \qquad D_t^h D_s^{r-h} v_j(t,s) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j^{(r-j)}(\sigma)\, d\sigma\, Re \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z,\sigma)\, z^h}{M(z,\sigma)\,(tz+s-\sigma)}\, dz \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j^{(r-j)}(s+t\eta)\, H_{jh}(\eta, s+t\eta)\, d\eta$$

dove

$$(7.19) \qquad H_{j,h}(\eta,\sigma) = -\, Re \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z,\sigma)\, z^h}{M(z,\sigma)\,(z-\eta)}\, dz \right\}.$$

Si ha da [21] (formule (6.16) e (6.17), vedi anche (4.10) di [17]):

$$(7.20) \qquad H_{j,h}(\eta,\sigma) = O\left(\frac{1}{1+\eta^2}\right),$$

indipendentemente da σ, e da [21] (formula (6.21), vedi anche (4.11) di [17]):

$$(7.21) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} H_{j,h}(\eta,\sigma)\, d\eta = \delta_{j,h},$$

per ogni σ fissato.

Si ottiene quindi, posto per semplicità $\psi_j^{(r-j)} = \psi$, $H_{j,h} = H$:

$$(7.22) \qquad \int_{s'}^{s''} \left| D_t^h D_s^{r-h} v_j(t,s) - \delta_{j,h}\, \psi_j^{(r-j)}(s) \right|^p ds =$$

$$= \int_{s'}^{s''} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [\psi(s+t\eta) - \psi(s)]\, H(\eta, s+t\eta)\, d\eta + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{+\infty} [H(\eta, s+t\eta) - H(\eta, s)]\, \psi(s)\, d\eta \right|^p ds \leq$$

$$\leq c \int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} | \psi(s+t\eta) - \psi(s) | \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \right\}^p ds +$$

$$+ c' \int_{s'}^{s''} | \psi(s) |^p | F(t, s) |^p ds,$$

dove:

$$F(t, s) = \int_{-\infty}^{+\infty} [H(\eta, s+t\eta) - H(\eta, s)] d\eta, \tag{7.23}$$

c e c' essendo numeri positivi indipendenti da ψ.

Per studiare il primo integrale dell'ultimo membro della (7.22) osserviamo che è possibile trovare una successione $\{\psi_n(s)\}$ di funzioni continue in R^1 ed a supporto contenuto in J convergente in media di ordine p in J a $\psi(s)$.

Si ha allora:

$$\int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} | \psi(s+t\eta) - \psi(s) | \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \right\}^p ds \leq \tag{7.24}$$

$$\leq 3^{p-1} \int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} | \psi(s+t\eta) - \psi_n(s+t\eta) | \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \right\}^p ds +$$

$$+ 3^{p-1} \int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} | \psi_n(s+t\eta) - \psi_n(s) | \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \right\}^p ds +$$

$$+ 3^{p-1} \int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} | \psi_n(s) - \psi(s) | \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \right\}^p ds$$

Il primo integrale del secondo membro diventa:

$$\int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} | \psi(s+t\eta) - \psi_n(s+t\eta) | \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \right\}^p ds \leq \tag{7.25}$$

$$\leq \int_{s'}^{s''} ds \left(\int_{-\infty}^{+\infty} | \psi(s+t\eta) - \psi_n(s+t\eta) |^p \, d\eta \right)^{p/p}$$

$$\cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{1}{1+\eta^2} \right|^{p'} d\eta \right)^{p/p'} \leq$$

$$\leq c_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\eta \int_{s'}^{s''} | \psi(s+t\eta) - \psi_n(s+t\eta) |^p \, ds$$

con c_1 indipendente da ψ e da n; esso tende quindi a zero per $n \to \infty$, indipendentemente da t.

Quanto al secondo integrale del secondo membro della (7.24), per n fissato si ha che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} | \psi_n(s+t\eta) - \psi_n(s) | \frac{1}{1+\eta^2} \, d\eta$$

tende a zero per $t \to 0^-$, uniformemente al variare di s in $[s', s'']$, in virtù della continuità di ψ_n.

Il terzo integrale del secondo membro della (3.24) per $n \to \infty$ tende a zero, indipendentemente da t, perchè:

$$\int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} | \psi_n(s) - \psi(s) | \frac{1}{1+\eta^2} \, d\eta \right\}^p ds = \tag{7.25}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\eta^2} \, d\eta \right)^p \int_{s'}^{s''} | \psi_n(s) - \psi(s) |^p \, ds.$$

Preso $\varepsilon > 0$ è quindi possibile determinare un intero $n_\varepsilon > 0$ tale che per $n > n_\varepsilon$ il primo ed il terzo integrale del secondo membro della (7.24) siano $< \varepsilon$, d'altra parte per n fissato, esiste un δ_ε tale che per $t \in]\delta_\varepsilon, 0[$, il secondo integrale del secondo membro della (7.24) sia $< \varepsilon$; in definitiva il primo membro della (7.24) risulta $< 3^p \varepsilon$ e quindi tende a zero per $t \to 0^-$.

Quanto al secondo integrale dell'ultimo membro della (7.22), si ha, per la (7.20), seguendo il n. 4 di [17]:

$$H(\eta, s+t\eta) - H(\eta, s) = O\left(\frac{1}{1+\eta^2} \right), \tag{7.27}$$

ed inoltre

$$\lim_{t\to 0^-} [H(\eta, s + t\eta) - H(\eta, s)] = 0 \tag{7.28}$$

per ogni s di $[s', s'']$ ed ogni η di $]-\infty, +\infty[$.

Si può allora passare al limite sotto il segno di integrale nella (7.23) ed ottenere

$$\lim_{t\to 0^-} F(t, s) = 0\,; \tag{7.29}$$

dalla (7.27) si ha ancora

$$|F(t, s)| \leq c_2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\eta^2}\, d\eta \right) = c_3 \tag{7.30}$$

per ogni s di $[s', s'']$ ed ogni t con c_2 e c_3 indipendenti da ψ.

Si ottiene in definitiva che

$$\lim_{t\to 0^-} \int_{s'}^{s''} |\psi(s)|^p \, |F(t, s)|^p \, ds = 0\,; \tag{7.31}$$

il primo membro della (7.22) tende quindi a zero per $t \to 0^-$ e di qui si deduce la (7.16).

Per verificare la (7.17), ricordando che $W^{r-l,p}(I)$ è il duale di $W_0^{l-r,p'}(I)$, bisogna dimostrare che, *per ogni* $g(s) \in \mathcal{D}(I)$, risulta

$$\begin{aligned} &|\langle D_t^h D_s^{l-h} v_j(t, s) - \delta_{jh}\, \psi_j^{(l-j)}(s), g(s)\rangle| \leq \\ &\leq \varepsilon(t)\, \| g(s) \|_{W^{l-r,p'}(I)}, \end{aligned} \tag{7.32}$$

dove $\varepsilon(t)$ è infinitesimo con t ed indipendente da g.

Ricordando le (7.18), (7.19), (7.20), (7.21), (7.23) si ottiene

$$\begin{aligned} &|\langle D_t^h D_s^{l-h} v_j(t, s) - \delta_{j,h}\, \psi_j^{(l-j)}(s), g(s)\rangle| = \\ &= |\langle D_t^h D_s^{(l-r)+(r-h)} v_j(t, s) - \delta_{j,h}\, \psi_j^{(l-r)+(r-j)}(s), g(s)\rangle| = \end{aligned} \tag{7.33}$$

$$= | \langle D_t^h D_s^{r-h} v_j(t, s) - \delta_{j,h} \psi_j^{(r-j)}(s), g^{(l-r)}(s) \rangle | \leq$$

$$\leq c_4 \int_{s'}^{s''} | g^{(l-r)}(s) | \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} | \psi_j^{(r-j)}(s + t\eta) - \psi_j^{(r-j)}(s) | \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \right\} ds +$$

$$+ c_4' \left| \int_{s'}^{s''} g^{(l-r)}(s) \psi_j^{(r-j)}(s) F(t, s) ds \right|,$$

dove c_4 e c_4' sono numeri positivi indipendenti da g.

Applicando la disuguaglianza di HÖLDER al primo integrale del secondo membro della (7.33) si ottiene, posto $\psi_j^{(r-j)} = \psi$:

$$\int_{s'}^{s''} | g^{(l-r)}(s) | \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(s + t\eta) - \psi(s) | \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \right\} ds \leq \tag{7.34}$$

$$\leq \left(\int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} | \psi(s + t\eta) - \psi(s) | \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \right\}^p ds \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{s'}^{s''} | g^{(l-r)}(s) |^{p'} ds \right)^{1/p'} \leq$$

$$\leq \| g(s) \|_{W^{l-r,p'}(I)} \left(\int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} | \psi(s + t\eta) - \psi(s) | \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \right\}^p ds \right)^{1/p};$$

siccome si è sopra dimostrato che il primo integrale dell'ultimo membro della (7.22) tende a zero per $t \to 0^-$ si ha:

$$\left(\int_{s'}^{s''} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} | \psi(s + t\eta) - \psi(s) | \frac{1}{1+\eta^2} d\eta \right\}^p ds \right)^{1/p} \leq \varepsilon_1(t) \tag{7.35}$$

dove $\varepsilon_1(t)$ è infinitesimo con t.

Applicando ora la diseguaglianza di HÖLDER al secondo integrale del secondo membro della (7.33) e ricordando la (7.31) si ottiene:

$$(7.36) \qquad \left| \int_{s'}^{s''} g^{(l-r)}(s)\, \psi(s)\, F(t,s)\, ds \right| \leq$$

$$\leq \left(\int_{s'}^{s''} |\psi(s)|^p \, |F(t,s)|^p \, ds \right)^{1/p} \cdot \left(\int_{s'}^{s'} |g^{(l-r)}(s)|^{p'} ds \right)^{1/p'} \leq$$

$$\leq \varepsilon_2(t) \, \| g \|_{W^{l-r,p'}(I)},$$

dove $\varepsilon_2(t)$ è infinitesimo con t e indipendente da g per quanto sopra si è dimostrato; e quindi la (7.32) è dimostrata; è verificata così in modo completo la (7.7) nel caso $0 \leq j \leq r$.

Per dimostrare la (7.8), nel caso $0 \leq j \leq r$, verifichiamo che, *per ogni* $g(s) \in \mathcal{D}(I)$, è:

$$(7.37) \qquad |\langle D^{m-1+l} v_j(t,s), g(s) \rangle| \leq \frac{c_5}{|t|^l} \| g(s) \|_{W^{m-r-1,p'}(I)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

con c_5 indipendente da g.

Per le proprietà di $M_{m-j-1}(z,\sigma)$ e di $|M(z,\sigma)|$, si ottiene al variare di $s + t\eta$ in R^1:

$$(7.38) \qquad Re \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, s+t\eta)\, z^h}{M(z, s+t\eta)\,(z-\eta)^{l+1}} dz \right\} = O\left(\frac{1}{1 + |\eta|^{l+1}} \right);$$

risulta in questo modo che:

$$(7.39) \qquad |\langle D^{m-1+l} v_j(t,s), g(s) \rangle| =$$

$$= |\langle D_t^h D_s^{(m-1-r)+(l+r-h)} v_j(t,s), g(s) \rangle| =$$

$$= |\langle D_t^h D_s^{l+r-h} v_j(t,s); g^{(m-1-r)}(s) \rangle| \leq$$

$$\leq \frac{c_6}{|t|^l} \int_{s'}^{s''} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_j^{(r-j)}(s+t\eta)| \frac{1}{1+|\eta|^{l+1}} |g^{(m-1-r)}(s)| \, d\eta \, ds \leq$$

$$\leq \frac{c_6}{|t|^l} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+|\eta|^{l+1}} d\eta \left(\int_{s'}^{s''} |g^{(m-1-r)}(s)|^{p'} ds \right)^{1/p'} \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{s'}^{s''} |\psi_j^{(r-j)}(s+t\eta)|^p ds \right)^{1/p} \leq$$

$$\leq \frac{c_5}{|t|^l} \| g(s) \|_{W^{m-1-r,p'}(I)},$$

con c_6 e c_5 indipendenti da g; è così verificata la (7.8) nel caso $0 \leq j \leq r$.

Per dimostrare la (7.9), nel caso $0 \leq j \leq r$, verifichiamo che, *per ogni* $g(s) \in \mathcal{D}(I)$, si ottiene:

$$(7.40) \qquad |\langle \mathcal{A} v_j(t,s), g(s) \rangle| \leq \frac{c_7}{|t|^m} \| g(s) \|_{W^{m-r-1,p'}(I)}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

con c_7 indipendente da g.

Si osservi preliminarmente che

$$(7.41) \qquad \mathcal{A} v_j(t,s) = \sum_{p=0}^{2m} a_{2m-l}(s) D_t^l D_s^{2m-l} v_j(t,s) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^{(r-j)}(\sigma) \sum_{p=0}^{2m} a_{2m-1}(s) \cdot$$

$$\cdot Re \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z,\sigma) z^l (2m-r)! (-1)^{2m-r}}{M(z,\sigma)(tz+s-\sigma)^{2m+1-r}} dz \right\} d\sigma,$$

e che, per la (7.3) e per la formula integrale di CAUCHY (vedi [21] pag. 285 ed anche [17] pag. 273), si ha:

$$(7.42) \qquad \sum_{l=0}^{2m} a_{2m-l}(s+t\eta) \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, s+t\eta) z^l}{M(z, s+t\eta)(z-\eta)^{m+2}} dz = 0$$

Integrando ora per parti $(m-1-r)$, volte, ricordando che $g(s)$ ha supporto contenuto in I, si ottiene dalla (7.41):

$$(7.43) \qquad | \langle \mathcal{A}\, v_j(t,s), g(s) \rangle | =$$

$$= \left| \int_{s'}^{s''} g(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j^{(r-j)}(\sigma)\, d\sigma \sum_{l=0}^{2m} a_{2m-l}(s) \cdot \right.$$

$$\left. \cdot Re \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z,\sigma)\, z^l\, (2m-r)!\, (-1)^{2m-r}\, dz}{M(z,\sigma)\,(tz+s-\sigma)^{(m-1-r)+(m+2)}} \right\} ds \right| =$$

$$= \left| - \int_{s'}^{s''} g'(s) \int_{s'}^{s} \sum_{l=0}^{2m} a_{2m-l}(u) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j^{(r-j)}(\sigma)\, d\sigma \cdot \right.$$

$$\left. \cdot Re \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z,\sigma)\, z^l\, (2m-r)!\, (-1)^{2m-r}\, dz}{M(z,\sigma)\,(tz+u-\sigma)^{(m-1-r)+(m+2)}} \right\} du\, ds \right| =$$

$$= \left| \int_{s'}^{s''} g'(s) \left\{ \left[\sum_{l=0}^{2m} a_{2m-l}(u) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j^{(r-j)}(\sigma)\, d\sigma \cdot \right. \right. \right.$$

$$\left. \cdot Re \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z,\sigma)\, z^l\, (2m-r-1)!\, (-1)^{2m-r-1}}{M(z,\sigma)\,(tz+u-\sigma)^{(m-2-r)+(m+2)}}\, dz \right\} \right]_{s'}^{s} +$$

$$- \int_{s'}^{s} \sum_{l=0}^{2m} a'_{2m-l}(u_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j^{(r-j)}(\sigma)\, d\sigma \cdot$$

$$\left. \left. \cdot Re \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z,\sigma)\, z^l\, (2m-r-1)!\, (-1)^{2m-r-1}\, dz}{M(z,\sigma)\,(tz+u_1-\sigma)^{(m-2-r)+(m+2)}} \right\} du_1 \right\} ds \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{s'}^{s''} g'(s) \sum_{l=0}^{2m} a_{2m-l}(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j^{(r-j)}(\sigma)\, d\sigma. \right.$$

$$\left. \cdot Re \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z,\sigma)\, z^l\, (2m-r-1)!\, (-1)^{2m-r-1}\, dz}{M(z,\sigma)\,(tz+s-\sigma)^{(m-2-r)+(m+2)}} \right\} ds \right| +$$

$$+\left|\int_{s'}^{s''} g'(s)\sum_{l=0}^{2m} a_{2m-l}(s')\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_j^{(r-j)}(\sigma)\,d\sigma.\right.$$

$$\cdot\, Re\left\{\frac{1}{2\pi^2}\int_{+\gamma}\frac{M_{m-j-1}(z,\sigma)\,z^l\,(2m-r-1)!\,(-1)^{2m-r-1}\,dz}{M(z,\sigma)\,(tz+s'-\sigma)^{(m-2-r)+(m+2)}}\right\}ds\,\Bigg|+$$

$$+\left|\int_{s'}^{s''} g'(s)\int_{s'}^{s}\sum_{l=0}^{2m} a'_{2m-l}(u_1)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_j^{(r-j)}(\sigma)\,d\sigma\,.\right.$$

$$\cdot\, Re\left\{\frac{1}{2\pi^2}\int_{+\gamma}\frac{M_{m-j-1}(z,\sigma)\,z^j\,(2m-1-r)!\,(-1)^{2m-1-r}\,dz}{M(z,\sigma)\,(tz+u_1-\sigma)^{(m-2-r)+(m+2)}}\right\}du_1\,ds\,\Bigg|\leq$$

$$\leq\left|\int_{s'}^{s''} g''(s)\int_{s'}^{s}\sum_{l=0}^{2m} a_{2m-l}(u)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_j^{(r-j)}(\sigma)\,d\sigma.\right.$$

$$\cdot\, Re\left\{\frac{1}{2\pi^2}\int_{+\gamma}\frac{M_{m-j-1}(z,\sigma)\,z^l\,(2m-r-1)!\,(-1)^{2m-r-1}\,dz}{M(z,\sigma)\,(tz+u-\sigma)^{(m-2-r)+(m+2)}}\right\}du\,ds\,\Bigg|+$$

$$+\left|\int_{s'}^{s''} g''(s)\int_{s'}^{s}du_2\int_{s'}^{u_2}\sum_{l=0}^{2m} a'_{2m-l}(u_1)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_j^{(r-j)}(\sigma)\,d\sigma\,\cdot\right.$$

$$\cdot\, Re\left\{\frac{1}{2\pi^2}\int_{+\gamma}\frac{M_{m-j-1}(z,\sigma)\,z^l\,(2m-1-r)!\,(-1)^{2m-r-1}\,dz}{M(z,\sigma)\,(tz+u_1-\sigma)^{(m-2-r)+(m+2)}}\right\}du_1\,ds\,\Bigg|\leq$$

$$\leq\left|\int_{s'}^{s''} g''(s)\sum_{l=0}^{2m} a_{2m-l}(s)\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_j^{(r-j)}(\sigma)\,d\sigma.\right.$$

$$\cdot\, Re\left\{\frac{1}{2\pi^2}\int_{+\gamma}\frac{M_{m-j-1}(z,\sigma)\,z^l\,(2m-r-2)!\,(-1)^{2m-r-2}\,dz}{M(z,\sigma)\,(tz+s-\sigma)^{(m-r-3)+(m+2)}}\right\}ds\,\Bigg|+$$

$$+\left|\int_{s'}^{s''} g''(s)\sum_{l=0}^{2m} a_{2m-l}(s')\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_j^{(r-j)}(\sigma)\,d\sigma\,.\right.$$

$$\cdot\, Re\left\{\frac{1}{2\pi^2}\int_{+\gamma}\frac{M_{m-j-1}(z,\sigma)\,z^l\,(2m-r-2)!\,(-1)^{2m-r-2}\,dz}{M(z,\sigma)\,(tz+s'-\sigma)^{(m-r-3)+(m+2)}}\right\}ds\,\Bigg|+$$

$$+ \left| \int_{s'}^{s''} g''(s) \int_{s'}^{s} \sum_{l=0}^{2m} a'_{2m-l}(u_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j^{(r-j)}(\sigma)\, d\sigma. \right.$$

$$\cdot\, Re \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z,\sigma)\, z^l\, (2m-2-r)!\, (-1)^{2m-r-2}\, dz}{M(z,\sigma)\,(tz+u_1-\sigma)^{(m-r-3)+(m+2)}} \right\} du_1\, ds \,\Big| +$$

$$+ \left| \int_{s'}^{s''} g''(s) \int_{s'}^{s} du_2 \int_{s'}^{u_2} \sum_{l=0}^{2m} a'_{2m-l}(u_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j^{(r-j)}(\sigma)\, d\sigma. \right.$$

$$\cdot\, Re \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z,\sigma)\, z^l\, (2m-1-r)!\, (-1)^{2u-r-1}\, dz}{M(z,\sigma)\,(tz+u_1-\sigma)^{(m-2-r)+(m+2)}} \right\} du_1\, ds \,\Big| \leq \dots$$

$$\dots \leq \left| \int_{s'}^{s''} g^{(m-1-r)}(s) \sum_{l=0}^{2m} a_{2m-l}(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j^{(r-j)}(\sigma) d\sigma. \right.$$

$$\cdot\, Re \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z,\sigma)\, z^l\, m!\, (-1)^m\, dz}{M(z,\sigma)\,(tz+s-\sigma)^{(m+2)}} \right\} ds \,\Big| +$$

$$+ \sum_{h=1}^{m-1-r} \left| \int_{s'}^{s''} g^{(m-1-r)}(s) \int_{s'}^{s} du_h \int_{s'}^{u_h} du_{h-1} \dots \int_{s'}^{u_2} \sum_{l=0}^{2m} a'_{2m-l}(u_1) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j^{(r-j)}(\sigma) d\sigma \cdot \right.$$

$$\cdot\, Re \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z,\sigma)\, z^l\, (m+1-h)!\, (-1)^{m+1-h}\, dz}{M(z,\sigma)\,(tz+u_1-\sigma)^{m+1-h}} \right\} du_1\, ds \,\Big|$$

Tenendo conto (v. formula (2.10) di AGMON [1]), che per ogni fissato $s \in R^1$ si ha:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z,s)}{M(z,s)}\, z^h\, dz = \delta_{jh}, \qquad 0 \leq j,\, h \leq m-1, \tag{7.44}$$

sostituendo $\sigma = s + t\eta$, ricordando la (7.42), si ottiene, poichè i coefficienti di $M_{m-j-1}(z,s)$ sono di classe $C^1(R^1)$ e limitati

$$|\langle \mathcal{A}\, v_j(t,s), g(s) \rangle| \leq \tag{7.45}$$

$$\leq \frac{c_8}{|t|^{m+1}} \left| \int_{s'}^{s''} g^{(m-1-r)}(s) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_j^{(r-j)}(s+t\eta) \sum_{l=0}^{2m} [a_{2m-l}(s) + \right.$$

$$- a_{2m-l}(s + t\eta)] \; Re \left\{ \frac{1}{2\pi^2} \int_{+\gamma} \frac{M_{m-j-1}(z, s + t_2)}{M(z, s + t\eta)(z - \eta)^{m+2}} dz \right\} d\eta \, ds \Bigg| +$$

$$+ \sum_{h=1}^{m-1-r} \frac{1}{2\pi^2} \int_{s'}^{s''} | g^{(m-1-r)}(s) | \int_{-\infty}^{+\infty} | \psi_j^{(r-j)}(\sigma) | \, .$$

$$\cdot \left\{ \int_0^L \frac{| M_{m-j-1}(z(\bar{s}), \sigma) |}{| M(z(\bar{s}), \sigma) |} \sum_{l=0}^{2m} \int_{s'}^{s} du_h \ldots \int_{s'}^{u_2} \frac{| a'_{2m-l}(u_1) | \, | z(\bar{s}) |^l}{| tz(\bar{s}) + u_1 - \sigma |^{m+h+1}} du_1 \, d\bar{s} \right\} d\sigma \, ds \leq$$

$$\leq \frac{c_9 |t|}{|t|^{m+1}} \int_{s'}^{s''} | g^{(m-1-r)}(s) | \int_{-\infty}^{+\infty} | \psi_j^{(r-j)}(s + t\eta) | \frac{1}{1 + |\eta|^{m+2}} d\eta \, ds +$$

$$+ \sum_{h=1}^{m-1-r} c_{10} \int_{s'}^{s''} | g^{(m-1-r)}(s) | \, ds \int_{-\infty}^{+\infty} | \psi_j^{(r-j)}(\sigma) | \, d\sigma.$$

$$\cdot \int_0^L \int_{s'}^{s} du_h \ldots \int_{s'}^{u_2} \frac{du_1}{| tz(\bar{s}) + u_1 - \sigma |^{m+1+h}} d\bar{s} \leq$$

$$\leq \frac{c_{11}}{|t|^m} \left(\int_{s'}^{s''} | g^{(m-1-r)}(s) |^{p'} ds \right)^{1/p'} \cdot \left(\int_{s'}^{s''} \int_{-\infty}^{+\infty} | \psi_j^{(r-j)}(s + t\eta) |^p \, ds \, d\eta \right)^{1/p} +$$

$$+ c_{12} \int_{s'}^{s''} | g^{(m-1-r)}(s) | \, ds \int_{-\infty}^{+\infty} | \psi_j^{(r-j)}(\sigma) | \, d\sigma \int_0^L \frac{d\bar{s}}{| tz(\bar{s}) + s - \sigma |^{m+1}} \leq$$

$$\leq \frac{c_{13}}{|t|^m} \| g(s) \|_{W^{m-1-r, p'}(I)} +$$

$$+ \frac{c_{14}}{|t|^m} \int_{s'}^{s''} | g^{(m-1-r)}(s) | \int_{-\infty}^{+\infty} | \psi_j^{(r-j)}(s + t\eta) | \cdot \frac{1}{1 + |\eta|^{m+1}} d\eta \, ds \leq$$

$$\leq \frac{c_7}{|t|^m} \| g(s) \|_{W^{m-1-r,p'}(I)},$$

dove si è indicata la ascissa curvilinea su γ con $\bar{s}, \bar{s} \in [0, L]$, L essendo la lunghezza di γ, dove inoltre tutte le costanti sono indipendenti da g; si è così dimostrata la (7.9) e quindi la condizione ii) nel caso $0 \leq j \leq r$.

7.4. *Verifica della condizione* ii) *nel caso* $r < j \leq m - 1$. Per verificare la (7.7) si dimostrano le:

$$\lim_{t \to 0^-} D_t^h D_s^{l-h} v_{j,h}(t, s) = 0, \qquad \begin{array}{l} 0 \leq l \leq j - k - 1, \\ 0 \leq h \leq l, \end{array} \tag{7.46}$$

uniformemente in I;

$$\lim_{t \to 0^-} \| D_t^h D_s^{l-h} v_{j,k}(t, s) - \delta_{jh} f_{j,k}(s) \|_{L^p(I)} = 0, \qquad l = j - k,\ 0 \leq h \leq l, \tag{7.47}$$

$$\lim_{t \to 0^-} \| D_t^h D_s^{l-h} v_{j,k}(t, s) - \delta_{jh} D^{l-(j-k)} f_{j,k}(s) \|_{W^{j-k-l,p}(I)} = 0, \qquad j - k + 1 \leq l \leq m - 1,\ 0 \leq h \leq l, \tag{7.48}$$

per ogni intervallo fissato I.

Le (7.46), (7.47), (7.48) si dimostrano ripetendo le stesse considerazioni fatte per dimostrare le (7.15), (7.16), (7.17).

Per verificare la (7.8) nel caso $r < j \leq m - 1$, si consideri *per ogni* $g(s) \in \mathcal{D}(I)$, la

$$| \langle D^{m-1+l} v_{j,k}(t, s), g(s) \rangle | ; \tag{7.49}$$

si ottiene, con dimostrazione analoga a quella fatta per la (7.37):

$$| \langle D^{m-1+l} v_{j,k}(t, s), g(s) \rangle | \leq \tag{7.50}$$

$$\leq \frac{c_{15}}{|t|^l} \| g(s) \|_{W^{m+k-j-1,p'}(I)},$$

con c_{15} indipendente da g, cioè:

$$\| D^{m-1+l} v_{j,k} \|_{W^{-m+1+j-k,p}(I)} = O(|t|^{-l}) \tag{7.51}$$

e quindi, a maggior ragione la (7.8).

Considerata, *per ogni* $g(s) \in \mathcal{D}(I)$, l'espressione

$$|\langle \mathcal{A} v_{j,k}(t, s), g(s) \rangle| , \tag{7.52}$$

si ottiene, con considerazioni analoghe a quelle fatte per dimostrare la (7.40):

$$|\langle \mathcal{A} v_{j,k}(t, s), g(s) \rangle| \leq \frac{c_{16}}{|t|^m} \| g(s) \|_{W^{m+k-j-1,p'}(I)} , \tag{7.53}$$

con c_{16} indipendente da g, cioè:

$$\| \mathcal{A} v_{j,k} \|_{W^{-m+1+j-k,p}(I)} = O(|t|^{-m}) \tag{7.54}$$

ed, a maggior ragione, la (7.9).

È così verificata la condizione *ii*) nel caso $r < j \leq m - 1$, e quindi in modo completo.

7.5. Per provare che $v(t, s) \in W^{r,p}(B)$ in ogni aperto limitato B del semipiano $t < 0$, si consideri la (7.7) per la generica derivata di ordine $0 \leq h \leq r$, cioè la

$$\lim_{t \to 0^-} \| D_t^h v - \psi_h \|_{W^{r-h,p}(I)} = 0, \tag{7.55}$$

Siccome per $t < 0$ la $v(t, s)$ è indefinitamente differenziabile, la (7.55) dice allora che

$$\int_I | D_t^h v(t, s) |^p \, ds$$

è funzione continua di t per $t \in [\delta, 0]$ e quindi integrabile in $[\delta, 0]$. Dal teorema di FUBINI-TONELLI si ottiene allora che $v(t, s) \in W^{r,p}(I \times [\delta, 0])$ e quindi, tenuto conto anche della *i*), la condizione *iii*) è verificata.

Il teor. 6.1 è così completamente dimostrato.

OSS. 7.1. Si osservi di più che dalla *i*), dalle (7.15) e dalle (7.46) la funzione $v(t, s)$ risulta, per $r \geq 1$, di classe $C^{r-1}(B)$.

BIBLIOGRAFIA

1. S. AGMON, *Multiple layer potentials and the Dirichlet problem for higher order elliptic equations in the plane,* I., Comm. Pure Appl. Math., 10 (1957), pp. 179-239.
2. S. AGMON, *The L_p approach to the Dirichlet problem* I. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 13 (1959). pp. 405-448.
3. S. AGMON, A. DOUGLIS, L. NIRENBERG, *Estimates near the boundary ...*, Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959). pp. 623-727.
4. N. ARONZAJN, A. N. MILGRAM, *Differential operators on Riemannian manifolds,* Rend. Circ. Matem. Palermo, 2 (1952) pp. 1-61.
5. F. E. BROWDER, *Estimates and existence theorems for elliptic boundary value problems.* Proc. Nat. Acad. Sc. U· S. A 45 (1959), pp. 365-372.
6. F. E. BROWDER, *A priori estimates for solutions of elliptic boundary-value problems,* Indagationes Math XXII (1960), pp. 145-169.
7. G. CIMMINO, *Nuovo tipo di condizioni al contorno e nuovo metodo di trattazioni per il problema generalizzato di Dirichlet,* Rend. Circ. Mat. Palermo, 61 (1937), pp. 177-224.
8. L. GÅRDING, *Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations,* Math. Scand., I (1953), pp. 237-255.
9. J. L. LIONS, *Problèmes aux limites en théorie des distributions,* Acta Math., 94 (1955), pp. 13-153.
10. J. L. LIONS, *Sur les problèmes aux limites du type de dérivée oblique,* Annals of Math. 64 (1956), pp. 206-239.
11. J. L. LIONS, *Un théorème de traces ; applications,* C. R. Acad. Sci., Paris, t. 249 (1959), pp. 2259-2261.
12. J. L. LIONS, *Sur les espaces d'interpolation, dualité.* Math. Scand. t. 9 (1961), pp. 147-177.
13. J. L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes* (II), Ann. Inst. Fourier 11 (1961), pp. 137-178.
14. J. L. LIONS, E. MAGENES, *Problemi ai limiti non omogenei* (III), Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, XV (1961), p. 39-101.
15. J. L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes* (IV), Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa XV (1961), pp. 311-326.
16. J. L. LIONS, E. MAGENES, *Problemi ai limiti non omogenei* (V), Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, XVI (1962), pp. 1-44.
17. E. MAGENES, *Sul problema di Dirichlet per le equazioni lineari ellittiche a due variabili* Ann. Mat. pura ed Appl. IV, 48 (1959), pp. 257-279.
18. E. MAGENES, *Sur les problèmes aux limites ...* Colloque Intern. du C.N.R.S. sur les équations aux dérivées partielles. Paris, juin 1962.
19. E. MAGENES, G. STAMPACCHIA, *I problemi al contorno per le equazioni differenziali di tipo ellittico,* Annali Scuola Norm. Sup. Pisa, III, 12 (1958), pp. 247-357.
20. C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico,* Springer Verlag, 1955.
21. C. MIRANDA, *Teorema del massimo modulo o teorema di esistenza e di unicità per il problema di Dirichlet relativo alle equaziani ellittiche in due variabili,* Ann. Mat. pura Appl., 46 (1958), pp. 265-312.
22. L. NIRENBERG, *Remarks on strongly elliptic partial differential equations,* Comm. Pure Appl. Math., 8 (1955), pp. 647-675.

23. S. M. NIKOLSKIJ, *Sui teoremi di immersione, prolungamento ed approssimazione per le funzioni di più variabili*, (in russo) Ouspeki Mat. Nauk , t. XVI, n. 5 (101) (1961), pp. 63-114.

24. M. SCHECHTER, *General boundary value problems for elliptic partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., 12 (1959), pp. 457-486.

25. M. SCHECHTER, *A general approach to boundary problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 66 (1960) pp. 495-500.

26. L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions à valeurs vectorielles* (I), (II), Ann. Inst. Fourier, t. VII (1957), pp. 1-139, t. VIII (1958), pp. 1-209.

27. S. L. SOBOLEV, I. M. VISHIK, *Nuova forma generale dei problemi ai limiti* (in russo) Doklady Akad. Nauk., t. 111 (1956), pp. 521-523.

28. S. V. USPENSKII, *Proprietà delle classi W_p^r con una derivata frazionaria su varietà differenziabili*, (in russo) Doklady Akad. Nauk. t. 132 (1960) pp. 60-62.

29. A. ZYGMUND. *Trigonometrical Series*, I *e* II, Cambridge 1959.