

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

GIOVANNI AQUARO

**Convergenza localmente quasi-uniforme ed estensione di
Hewitt di uno spazio completamente regolare**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 16,
n° 3 (1962), p. 207-212

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1962_3_16_3_207_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONVERGENZA LOCALMENTE QUASI-UNIFORME ED ESTENSIONE DI HEWITT DI UNO SPAZIO COMPLETAMENTE REGOLARE

Nota (*) di GIOVANNI AQUARO

INTRODUZIONE. — In tutto il seguito, E denota uno spazio topologico ed M denota uno spazio metrico con distanza d .

Nella presente nota si indica un criterio, che non sembra sia stato segnalato altrove, per la continuità della applicazione limite di una successione (semplicemente) convergente di applicazioni continue di E in M .

Se ne deduce la convergenza sulla estensione $v(E)$ di HEWITT di E , supposto completamente regolare (cioè uniformizzabile di Hausdorff), di una successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di applicazioni continue di $v(E)$ in M verso una applicazione continua f di $v(E)$ in M , quando la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ delle restrizioni delle $\bar{f}_n$ ad E converga in E verso la restrizione f di $\bar{f}$ ad E .

Con $\mathbb{N}$ si denota l'insieme degli interi naturali (compreso lo zero).

1. — Conviene premettere un lemma.

LEMMA 1. — *Supponiamo che $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sia una successione di applicazioni continue di E in M e supponiamo che tale successione converga in E verso l'applicazione f di E in M . Supponiamo, inoltre, che esista una applicazione g di E in M tale che per ogni numero reale positivo ε e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si possa assegnare una funzione a valori in $\mathbb{N}$ $\varphi_{\varepsilon n}$ che sia localmente limitata⁽¹⁾ in E e sia tale che per ogni $x \in E$ risulti:*

$$n \leq \varphi_{\varepsilon n}(x), \quad d(f_{\varphi_{\varepsilon n}(x)}(x), g(x)) < \varepsilon.$$

Allora risulta $f = g$ e g , ed in conseguenza f , risulta continua.

(*) Lavoro eseguito nel GRUPPO DI RICERCA n. 9 del Comitato Nazionale per la Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche, per l'anno 1961-62.

(¹) Cioè per ogni $x \in E$ esiste un intorno V di x sul quale $\varphi_{\varepsilon n}$ sia limitata.

DIM. Sia ε reale positivo e sia $x_0 \in E$. Poichè risulta $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ esiste uno $\nu \in \mathbb{N}$ tale che da $n \in \mathbb{N}$ e $\nu \leq n$ consegue $d(f_n(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Esiste una funzione $\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}$ a valori in $\mathbb{N}$ la quale è localmente limitata ed è tale che, per ogni $x \in E$ sia $\nu \leq \varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)$, $d(f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)}(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Poichè $\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}$ è localmente limitata esiste un intorno U di x_0 sul quale $\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}$ è limitata e supponiamo che sia $\zeta \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x) \leq \zeta$ per ogni $x \in U$. Poichè ogni f_n è continua esiste un intorno V di x_0 tale che per ogni $k = 0, 1, \dots, \zeta$, sia $d(f_k(x), f_k(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Sia $x \in U \cap V$.

Per quanto sopra si ha $d(f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)}(x), g(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$ per la definizione di $\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}$, $d(f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)}(x), f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$ poichè $x \in V$, e, da ultimo, essendo $\nu \leq \varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)$, si ha $d(f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)}(x_0), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$ per la definizione di ν .

Consegue

$$\begin{aligned} d(g(x), f(x_0)) &\leq d(g(x), f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)}(x)) + d(f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)}(x), f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)}(x_0)) + \\ &+ d(f_{\varphi_{\frac{\varepsilon}{3}, \nu}(x)}(x_0), f(x_0)) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Concludendo, in primo luogo è $d(g(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$ donde, per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$, $g(x_0) = f(x_0)$; successivamente risulta $d(g(x), g(x_0)) < \varepsilon$ per ogni $x \in U \cap V$ e quindi g , insieme ad f , è continua

Ciò stabilito premettiamo una definizione:

DEF. 1. — Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di applicazioni di E in M , si dice che $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge localmente quasi-uniformemente verso la applicazione f di E in M se, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ e per ogni, $\nu \in \mathbb{N}$, esiste una funzione $\varphi_{\varepsilon \nu}$ su E a valori in $\mathbb{N}$, localmente limitata⁽²⁾ su E e tale che, per ogni $x \in E$, sia $\nu \leq \varphi_{\varepsilon \nu}(x)$ e $d(f_{\varphi_{\varepsilon \nu}(x)}(x), f(x)) < \varepsilon$.

⁽²⁾ Cfr. nota ⁽¹⁾.

Dopo ciò è agevole stabilire la caratterizzazione preannunciata nell'INTRODUZIONE.

PROP. 1. — Supponiamo che $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sia una successione convergente di applicazioni di E in M e f sia il suo limite. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:

a) — f è continua,

b) — per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ e per ogni $\nu \in \mathbb{N}$ esistono una funzione $\varphi_{\varepsilon, \nu}$ su E a valori in $\mathbb{N}$ ed un ricoprimento aperto numerabile, localmente finito ed $\mathcal{U}$ -riducibile⁽³⁾ $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di E tale che $\varphi_{\varepsilon, \nu}$ sia limitata su ciascun G_n e, per ogni $x \in E$ sia $\nu \leq \varphi_{\varepsilon, \nu}(x)$, $d(f_{\varphi_{\varepsilon, \nu}(x)}(x), f(x)) < \varepsilon$.

c) — la successione $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge localmente quasi-uniformemente verso f su E (def. 1).

DIM. a) implica b). Sia vera la a) e supponiamo che ε sia un numero reale > 0 e che sia $\nu \in \mathbb{N}$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia g_k la funzione reale, ovviamente continua in E , definita ponendo $g_k(x) = d(f_{\nu+k}(x), f(x))$ per ogni $x \in E$ e poniamo

$$F_k = g_k^{-1}(] - \infty, \varepsilon/2]), \quad U_k = g_k^{-1}(] - \infty, \varepsilon[).$$

Ovviamente F_k è chiuso, U_k è aperto ed F_k è $\mathcal{U}$ -contenuto⁽³⁾ in U_k (si tenga presente che la retta numerica è uno spazio normale e quindi che $] - \infty, \varepsilon/2]$ è $\mathcal{U}$ -contenuto in $] - \infty, \varepsilon[$ ed inoltre che g_k è continua).

Sia $x \in E$.

Risultando $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $\nu \leq n$ e tale che $d(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon/2$. Posto $k = n - \nu$, consegue $g_k(x) \leq \varepsilon/2$ e quindi $x \in F_k$: dunque $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento (chiuso) di E . In conseguenza $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ -riducibile di E e $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è una sua $\mathcal{U}$ -riduzione⁽³⁾.

Inoltre, per il sopradetto n si ha $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$: denotiamo con $\varphi_{\varepsilon, \nu}(x)$ il più piccolo degli $n \in \mathbb{N}$ tali che $\nu \leq n$ e $d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Pertanto la applicazione $\varphi_{\varepsilon, \nu}: E \rightarrow \mathbb{N}$ gode della proprietà $\nu \leq \varphi_{\varepsilon, \nu}(x)$ per ogni $x \in E$.

Sia $k \in \mathbb{N}$ e $x \in U_k$: risulta $d(f_{\nu+k}(x), f(x)) = g_k(x) < \varepsilon$ e quindi si ha $\varphi_{\varepsilon, \nu}(x) \leq \nu + k$. Dunque, la restrizione di $\varphi_{\varepsilon, \nu}$ ad U_k è limitata.

In forza della def. 6, § 3 e del lemma 10, § 2 di [1] risulta l'esistenza di un ricoprimento aperto, numerabile, localmente finito ed $\mathcal{U}$ -riducibile $(G_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di E tale che, per ogni $k \in \mathbb{N}$, sia $G_k \subset U_k$,

b) implica c). Consegue dalla def. 1.

c) implica a). Consegue dal lemma 1 per $f = g$.

⁽³⁾ Le definizioni di insieme chiuso $\mathcal{U}$ -contenuto in un insieme aperto, di ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ -riducibile e di $\mathcal{U}$ -riduzione trovansi in [1] § 3, def. 2, 5 e 6.

2. — Il risultato stabilito consente di ottenere la seguente prop. 2 relativa alla convergenza sulla estensione di HEWITT dopo aver premesso l'ulteriore lemma:

LEMMA 2. — *Supponiamo che X sia una parte ovunque densa dello spazio uniformizzabile separato E tale che, posto $\omega = \text{card } \mathbf{N}$, la ω -struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(X)$ su $X^{(4)}$ sia identica alla struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(E)_X$ indotta su X dalla ω -struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(E)$ su E . Allora se $(G_n)_{n \in \mathbf{N}}$ è un ricoprimento aperto numerabile localmente finito ed $\mathcal{U}$ -riducibile del sottospazio (uniformizzabile e separato) X , esiste un ricoprimento aperto numerabile localmente finito ed $\mathcal{U}$ -riducibile $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dell'intero E tale che $(U_n \cap X)_{n \in \mathbf{N}}$ sia un raffinamento di $(G_n)_{n \in \mathbf{N}}$.*

DIM. Sia W un'adiacenza di X per $\mathcal{A}_\omega(X)$ tale che $W(x)_{x \in E}$ sia un raffinamento di $(G_n)_{n \in \mathbf{N}}$, la cui esistenza è assicurata ⁽⁴⁾ dal teor. 1, d), § 2 di [1].

Poichè è $\mathcal{A}_\omega(X) = \mathcal{A}_\omega(E)_X$ esiste un'adiacenza V di E per $\mathcal{A}_\omega(E)$ la cui traccia $V \cap (X \times X)$ su $X \times X$ sia W . Sia W^* un'adiacenza aperta e simmetrica di E per $\mathcal{A}_\omega(E)$ tale che $W^* \circ W^* \subset V$. Sia $x \in E$ e sia $y \in W^*(x) \cap X$. Per ogni $z \in W^*(x) \cap X$, stante la simmetria di W^* , si ha $(y, z) \in W^* \circ W^* \subset V$ nonchè $(y, z) \in X \times X$ e per ciò $(y, z) \in W$ e poi $z \in W(y)$. Supposto che $n \in \mathbf{N}$ sia tale che $W(y) \subset G_n$, esistente perchè $(W(x))_{x \in X}$ è un raffinamento di $(G_n)_{n \in \mathbf{N}}$, consegue $z \in G_n$ e quindi, per l'arbitrarietà di z in $W^*(x) \cap X$, risulta $W^*(x) \cap X \subset G_n$.

Ma, d'altra parte, poichè W^* è un'adiacenza di E per $\mathcal{A}_\omega(E)$, esiste un ricoprimento aperto, localmente finito, numerabile ed $\mathcal{U}$ -riducibile $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ di E tale che:

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} (U_n \times U_n) \subset W^*.$$

Sia $x \in U_q$ con $q \in \mathbf{N}$. Consegue $U_q \subset \bigcup_{p \in \mathbf{N}_x^*} U_p \subset W^*(x)$, dove $\mathbf{N}_x^*$ è l'insieme degli $n \in \mathbf{N}$ tali che $x \in U_n$: assunto un $n \in \mathbf{N}$ tale che $W^*(x) \cap X \subset G_n$, come sopra, risulta $U_p \cap X \subset G_n$.

Così dimostrato il lemma 2, si può procedere a stabilire la proposizione che è obbiettivo del presente n. 2.

PROP. 2. — *Supponiamo che X sia una parte ovunque densa dello spazio uniformizzabile separato E tale che, posto $\omega = \text{card } (\mathbf{N})$, la ω -struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(X)$ su $X^{(4)}$ sia identica alla struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(E)_X$ indotta su X dalla ω -struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(E)$ su E . Supponiamo inoltre che $\bar{f}$ e $(\bar{f}_n)_{n \in \mathbf{N}}$*

⁽⁴⁾ Cfr. [1], § 3, def. 4.

⁽⁵⁾ Cfr. nota ⁽³⁾.

siano un'applicazione e , rispettivamente, una successione di applicazioni di E in M , tutte continue su E e tali che, denotate con f e, rispettivamente, f_n per ogni $n \in \mathbb{N}$ le restrizioni di $\bar{f}$ e di $\bar{f}_n$ ad X , sia $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$. Allora, si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = \bar{f}$.

DIM. Ragionando per assurdo, supponiamo che esista un $x_0 \in E$ tale che $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ non converga verso $f(x_0)$. Dunque, esistono un numero reale positivo ε ed una successione strettamente crescente $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di interi non negativi (cioè di elementi di $\mathbb{N}$) tale che

$$(1) \quad d(\bar{f}_{n_k}(x_0), \bar{f}(x_0)) \geq \varepsilon.$$

In X la successione $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ converge verso la f al pari della $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dalla quale essa è estratta. Pertanto, in forza della equivalenza di a) e b) nella prop. 1, esistono una funzione φ su X a valori in $\mathbb{N}$, ed un ricoprimento aperto numerabile, localmente finito, $\mathcal{U}$ -riducibile $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ del sottospazio X , tali che φ sia limitata sopra ciascun G_n e per ogni $x \in X$ sia:

$$(2) \quad d(f_{n_{\varphi(x)}}(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Per il lemma 1, esiste un ricoprimento numerabile, localmente finito ed $\mathcal{U}$ -riducibile $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di E tale che $(U_n \cap X)_{n \in \mathbb{N}}$ sia un raffinamento di $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (in X).

Esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $x_0 \in U_n$ ed esiste un $p \in \mathbb{N}$ tale che $U_n \cap X \subset G_p$: la φ abbia $\varrho \in \mathbb{N}$ come suo massimo su G_p . Per ogni $k = 0, 1, \dots, \varrho$ sia V_k l'insieme degli $x \in E$ tali che $d(\bar{f}_{n_k}(x), \bar{f}(x)) > \varepsilon$: stante la continuità ϱ di $\bar{f}$ e di ciascuna delle $\bar{f}_k$ ($k = 0, 1, \dots, \varrho$), ogni V_k è aperto e, posto $V = \bigcap_{k=0}^{\varrho} V_k$, V è un intorno di x_0 a causa di (1).

Poichè X è ovunque denso in E e poichè $V \cap U_n$ è un intorno di x_0 , risulta $(V \cap U_n) \cap X \neq \emptyset$. Sia $x \in (V \cap U_n) \cap X$ (ovviamente $\subset V \cap G_p$).

Risulta $x \in G_p$ e quindi è $\varphi(x) \leq \varrho$ e $x \in V \subset V_{\varphi(x)}$ e poi $d(\bar{f}(x), \bar{f}_{n_{\varphi(x)}}(x)) \geq \varepsilon$ mentre, per la (2), si ha $d(\bar{f}(x), \bar{f}_{n_{\varphi(x)}}(x)) = d(f(x), f_{n_{\varphi(x)}}(x)) < \varepsilon$ il che è contraddittorio.

Dunque $(\bar{f}(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ deve convergere verso $\bar{f}(x_0)$ e da ciò $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = \bar{f}$.

La prop. 2 è così dimostrata.

Conserviamo l'ipotesi che E sia uniformizzabile e separato (cioè, completamente regolare). Tale spazio può considerarsi (ingettivamente) immerso, come parte ovunque densa, nel suo completamento di HEWITT $v(E)$ con la condizione che, detta $\mathcal{A}_\omega(v(E))_E$ la struttura uniforme indotta su E dalla ω -struttura uniforme $\mathcal{A}_\omega(v(E))$ di $v(E)$, sia $\mathcal{A}_\omega(v(E))_E = \mathcal{A}_\omega(E)$ ed inoltre

$v(E)$ sia completo per $\mathcal{A}_\omega(v(E))$ (cioè sia un Q -spazio secondo HEWITT; cfr. [2], § 2, prop. 2). Con ciò la prop. 2 dà luogo al

COROLLARIO. — Se $\bar{f}$ e $(\bar{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sono un'applicazione e, rispettivamente, una successione di applicazioni, tutte continue, della estensione di HEWITT $v(E)$ nello spazio metrico M e se la successione $(\bar{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ delle restrizioni delle $\bar{f}_n$ ad E converge, in E , verso la restrizione f di $\bar{f}$ ad E , allora in tutto $v(E)$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = \bar{f}$.

3. — Ferme restando le ipotesi per E e $v(E)$ del corollario alla prop. 2, supponiamo che E sia un P -spazio cioè supponiamo che l'intersezione di ogni successione di insiemi aperti di E sia ancora un insieme aperto. È noto che ciò accade se e solo se ogni successione convergente di funzioni reali continue ha come limite necessariamente una funzione continua.

Sia $(\bar{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali continue convergente in $v(E)$ verso una funzione $\bar{f}$. Dimostriamo che se, come si è ammesso E è un P -spazio, la $\bar{f}$ è continua e quindi anche $v(E)$ è un P -spazio.

Invero siano f_n e f le restrizioni di $\bar{f}_n$ e, rispett., di $\bar{f}$ ad E .

Poichè E è P -spazio, come sopra si è detto, f risulta continua in E e quindi, per una proprietà di $v(E)$, esiste una funzione reale continua g su $v(E)$ la cui restrizione ad E è f . Per il corollario alla prop. 2. in cui M si faccia coincidere con la retta numerica, si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = g$ e quindi $\bar{f} = g$.

La $\bar{f}$ è continua e quindi $v(E)$ è un P -spazio.

Il risultato indicato è noto per altra via.

Che, reciprocamente, se $v(E)$ è un P -spazio anche E lo sia, è banale.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AQUARO, G.: *Ricovrimenti aperti e strutture uniformi sopra uno spazio topologico*; Annali di Mat. pura ed appl. (IV), tomo XLVII (1959) pp. 319-390.
- [2] » : *Completamenti di spazi uniformi*; Annali di Mat. pura ed appl. (IV), vol. LVI, pp. 87-98.