ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

M. BERGER

Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 15, nº 3 (1961), p. 179-246

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1961_3_15_3_179_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LES VARIETES RIEMANNIENNES HOMOGENES NORMALES SIMPLEMENT CONNEXES A COURBURE STRICTEMENT POSITIVE

M. BERGER

1. Introduction.

Les variétés riemanniennes complètes, simplement connexes, à courbure négative ou nulle sont connues depuis fort longtemps : elles doivent être homéomorphes à l'espace euclidien. Par contre, dans l'étude de la topologie des variétés différentiables que l'on peut munir d'une structure riemannienne à courbure strictement positive, le seul résultat général connu est que le premier groupe d'homotopie d'une telle variété est fini. D'autre part, les seuls exemples connus de variétés différentiables simplement connexes pouvant être munies d'une structure riemannienne à courbure strictement positive étaient : les sphères, les espaces projectifs complexes, les espaces projectifs quaternioniens, le plan projectif des octaves de Cayley (ces espaces constituent exactement la classe des espaces riemanniens symétriques compacts de rang un : [6]).

Dans cette situation, on pouvait essayer, dans le problème de la détermination des variétés riemanniennes à courbure strictement positive, d'ajouter une restriction ramenant ce problème à un problème algébrique résoluble. C'est ce qui est fait dans le présent article, la condition ajoutée étant, pour la structure riemannienne considérée, celle d'être homogène normale (et simplement connexe). Dans cette introduction, nous précisons le problème étudié, les résultats obtenus et la marche suivie pour ceci.

Soit V une variété riemannienne à courbure strictement positive, admettant un groupe transitif d'isométries G'. Comme V est homogène, elle est complète, et comme elle est à courbure strictement positive, elle est alors compacte. Si V est de plus simplement connexe, on sait que l'on peut alors l'écrire $V = G/H$ où G est un groupe de Lie compact et H un

sous-groupe fermé de G. Pour pouvoir relier la courbure de $V = G/H$ à la structure de groupe de G nous ferons l'hypothèse supplémentaire suivante : la connexion canoniquement associée à la structure riemanienne de V est la connexion de Cartan de G/H (on dira, dans ce cas, que la structure riemanienne homogène de V est normale). Pour une telle connexion, Nomizu a donné une formule explicite pour son tenseur de courbure, qui entraîne la conséquence suivante : si $\mathbf{G}$ (resp. $\mathbf{H}$) désigne l'algèbre de Lie de G (resp. H) et $\mathbf{G} = \mathbf{H} + M$ une décomposition orthogonale, alors $V = G/H$ est à courbure positive si et seulement si M est tel que $[x, y] \neq 0$ pour tous les couples (x, y) de vecteurs linéairement indépendants de M ($[\ ,\ ]$ désigne le crochet dans $\mathbf{G}$).

On est donc ramené au problème algébrique suivant : trouver tous les couples $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$, formés de l'algèbre de Lie $\mathbf{G}$ d'un groupe compact de Lie G et de la sous-algèbre $\mathbf{H}$ d'un sous-groupe fermé H de G, qui sont tels que $[x, y] \neq 0$ quels que soient les deux vecteurs linéairement indépendants x, y de M (où M est l'orthogonal de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{G}$). *Le résultat obtenu est que, à deux exceptions près, l'ensemble des couples* $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ *vérifiant cette propriété est tel que les variétés G/H correspondantes sont homéomorphes aux espaces riemanniens symétriques compacts de rang un* (théorème 35.1). Certains couples distincts $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$, $(\mathbf{G}', \mathbf{H}')$ peuvent fournir la même variété simplement connexe mais, en général, les structures riemanniennes homogènes normales correspondantes ne sont pas isométriques ; c'est ainsi que l'on obtient sur les sphères de dimensions impaires des structures riemanniennes homogènes normales mais qui ne sont pas à courbure constante et dont les géodésiques ne sont pas fermées, ayant en général une adhérence de dimension deux (pour cette première raison, le résultat annoncé dans [1], p. 287, était erroné).

Les deux exceptions peuvent s'écrire $V_1 = Sp(2)/SU(2)$, $V_2 = SU(5)/Sp(2) \times T$ (avec les notations classiques pour les groupes de Lie et des inclusions précisées dans les n°s 39 et 41). La première V_1 de ces variétés a même cohomologie réelle que la sphère S_7 mais possède de la 2 — et de la 5 — torsion. La deuxième variété V_2 est de dimension 13 et a un deuxième nombre de Betti réel égal à un. *Ainsi, il existe des variétés riemanniennes* (homogènes normales) *qui sont à courbure strictement positive mais qui ne sont pas homéomorphes à un espace riemannien symétrique compact de rang un* (pour cette deuxième raison, le résultat annoncé dans [1], p. 287 était erroné).

Esquissons maintenant la marche suivie. Dans une première partie, après avoir rappelé les définitions et les résultats de départ, on donne quelques résultats auxiliaires utiles pour la détermination en vue. On voit d'abord facilement (proposition 6.1) que le rang de $\mathbf{H}$ ne peut être que, soit égal à celui de $\mathbf{G}$, soit égal à celui de $\mathbf{G}$ moins un. Dans le premier cas, il existe

une sous-algèbre de Cartan $\mathbf{T}$ de $\mathbf{G}$ qui est contenue dans $\mathbf{H}$; la décomposition de $\mathbf{G}$ en plans propres pour la représentation adjointe de $\mathbf{T}$ est alors compatible avec la décomposition orthogonale $\mathbf{G} = \mathbf{H} + M$, ce qui permet d'exprimer la condition sur M à l'aide des racines de $\mathbf{G}$ qui correspondent aux plans propres de M (condition 10.1). On peut d'ailleurs caractériser ce cas comme celui où $\dim V = \dim M$ est paire.

Dans le deuxième cas, les plans propres de $\mathbf{G}$, pour la représentation adjointe d'une sous-algèbre de Cartan $\mathbf{T}$ de $\mathbf{H}$, ne sont plus en général des plans propres pour une sous-algèbre de Cartan $\mathbf{S}$ de $\mathbf{G}$ (telle que $\mathbf{S} \supset \mathbf{T}$). On donne alors dans les n°s 8 et 9 quelques propositions relatives à cette situation. Ce cas est caractérisé comme étant celui où $\dim V$ est impaire.

La deuxième partie est la détermination explicite des couples $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ prospectés tels que rang $\mathbf{G} =$ rang $\mathbf{H}$. Cette détermination est assez courte (n°s 10 à 16) et la liste est donnée dans la proposition 17.1. On utilise cependant pour cette détermination la condition 10.3 qui traduit le fait que le couple $(\mathbf{A}_2, \mathbf{T})$ constitué de l'algèbre de Lie simple compacte $\mathbf{A}_2$ de dimension huit et d'une de ses sous-algèbres de Cartan $\mathbf{T}$, n'est pas un couple convenable (n^0 36).

La troisième partie est la détermination des couples $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ prospectés tels que rang $\mathbf{G} =$ rang $\mathbf{H} + 1$. On étudie d'abord le cas où rang $\mathbf{G} = 2$ dans les n°s 19 à 24. Des résultats obtenus dans ce cas, on peut alors déduire une méthode permettant la détermination en vue lorsque le rang de $\mathbf{G}$ est quelconque ; on donne les résultats obtenus dans la proposition 35.1. Les résultats correspondant aux espaces homogènes (et pour toutes dimensions) sont donnés dans les propositions 17.2, 35.2 et dans le théorème 35.1.

Dans une quatrième partie, on a d'abord rejeté les calculs assez longs permettant de décider si certains couples $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$, que l'on ne peut exclure rapidement par des considérations simples de racines, conviennent ou non. D'autre part, on résoud dans cette quatrième partie quelques questions qui se posent naturellement au cours des parties deux et trois. En premier lieu, les raisonnements de topologie algébrique permettant de montrer que les deux variétés exceptionnelles rencontrées ne sont pas homéomorphes à un espace riemannien symétrique compact de rang un. Puis on y démontre que les tores maximaux de l'espace homogène associé au couple $(\mathbf{A}_2, \mathbf{T})$ sont conjugués dans l'exponentielle de la représentation adjointe de $\mathbf{T}$ dans M ce qui est, à notre connaissance, le premier résultat de ce genre dans un espace riemannien homogène non symétrique. Enfin, l'on démontre que si l'on ajoute à une structure riemannienne homogène normale la condition que toutes ses géodésiques soient fermées (au lieu d'imposer à la courbure

d'être strictement positive) alors seules les variétés riemanniennes symétriques compactes de rang un répondent à la question.

M. M. Zisman a bien voulu accepter de relire en détail le manuscrit de cet article. Il m'a fait alors de nombreuses corrections et suggestions ; je suis heureux de pouvoir lui exprimer ici mes très vifs remerciements.

PREMIÈRE PARTIE : GÉNÉRALITÉS.

2. Espaces homogènes de groupes de Lie compacts.

Dans toute la suite (G, H) désignera un couple formé d'un groupe de Lie compact G et d'un sous-groupe fermé H de G ; par $\mathbf{G}$ (resp. $\mathbf{H}$) on désignera l'algèbre de Lie de G (resp. H) et par $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ le couple ainsi associé au couple (G, H). Une fois pour toutes, on choisira une structure riemannienne invariante à gauche et à droite sur G, ce qui est toujours possible puisque G est compact. La restriction de cette structure riemannienne à l'espace tangent de l'élément neutre de G est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbf{G}$ que l'on notera $\langle\ ,\ \rangle$ et qualifiera de *produit scalaire* ; la forme quadratique associée est définie positive, on notera $\|\ \|$ la norme associée. L'invariance à gauche et à droite de la structure riemannienne de G entraîne que le produit scalaire de $\mathbf{G}$ est invariant par l'exponentielle de la représentation adjointe de $\mathbf{G}$, représentation constituée par les applications $\mathrm{ad}(x)$ de $\mathbf{G}$ dans elle-même : $\mathrm{ad}(x)\, y = [x, y]$, où $[\ ,\ ]$ désigne le crochet dans $\mathbf{G}$. C'est à dire que, si on note $\exp(\mathrm{ad}(g))$ une telle exponentielle, on aura : $\frac{d}{dt}(\exp(\mathrm{ad}(tg))\, x)_{t=0} = [g, x]$. L'invariance du produit scalaire se traduit par :

$$\langle [x, y], z \rangle = \langle x, [y, z] \rangle \text{ quels que soient } x, y, z \in \mathbf{G}. \tag{2.1}$$

Dans toute la suite $\mathbf{G} = \mathbf{H} + M$ désignera toujours une décomposition orthogonale associée au couple $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$, c'est à dire que M est l'orthogonal dans $\mathbf{G}$ du sous espace vectoriel $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$, pour le produit scalaire fixé une fois pour toutes ci-dessus. Si $x \in \mathbf{G}$, on notera x_H (resp. x_M) sa projection sur $\mathbf{H}$ (resp. M) parallèlement à M (resp. $\mathbf{H}$). Si A, B sont deux parties quelconques de $\mathbf{G}$, on posera $[A, B] = \{[a, b] \mid a \in A \text{ et } b \in B\}$, $A_H = \{a_H \mid a \in A\}$ et $A_M = \{a_M \mid a \in A\}$. Puisque $\mathbf{H}$ est une sous algèbre, on aura en utilisant la condition (2.1) :

$$[\mathbf{H}, \mathbf{H}] \subset \mathbf{H}, \quad [\mathbf{H}, M] \subset M \tag{2.2}$$

ce qui équivalent à dire que la représentation adjointe de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{G}$ respecte la décomposition $\mathbf{G} = \mathbf{H} + M$.

Soit V la variété différentiable que constitue l'ensemble G/H des classes à gauche modulo H de G. De la structure riemannienne biinvariante de G on déduit canoniquement une structure riemannienne homogène sur V de la façon suivante: si $\pi: G \to G/H$ est la projection canonique, la restriction à M de sa différentielle $d\pi$ est un isomorphisme $\sigma: M \to T_{p_0}$ de l'espace vectoriel M sur l'espace tangent T_{p_0} à V au point p_0 constitué par la classe à gauche $p_0 = H$. On prendra comme produit scalaire sur T_{p_0} celui défini, en utilisant la même notation $\langle\ ,\ \rangle$, par: $\langle \sigma(x), \sigma(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ quels que soient $x, y \in M$. On définit alors la structure riemannienne de V en transportant le produit scalaire défini sur T_{p_0} en tous les points de V par l'action de G, ce qui est possible parce que la représentation adjointe de H dans M laisse invariante le produit scalaire utilisé sur M et que, par $d\pi$, cette représentation devient le groupe linéaire d'isotropie de G/H. D'après [11], théorème 13.2, la connexion riemannienne, associée canoniquement à la structure riemannienne que l'on vient de définir sur V, coïncide avec la connexion de Cartan de G/H (définition: [9], p. 57; connexion appelée de première espèce dans [11], p. 47).

3. Structures riemanniennes homogènes normales à courbure strictement positive.

Dans cet article, nous considérons seulement les variétés riemanniennes homogènes à groupe de Lie compact, telles que la connexion canoniquement associée à la structure riemannienne de $V = G/H$ coïncide avec la connexion de Cartan de G/H; on dira dans ce cas que la structure riemannienne homogène de V est *normale*.

Rappelons que la courbure d'une variété riemannienne V, de dimension supérieure ou égale à deux, dans le sous-espace μ à deux dimensions de l'espace tangent T_p à V au point p, si μ est engendré par deux éléments linéairement indépendants u, v de T_p, est, par définition, le scalaire:

$$\varrho(\mu) = \varrho(u, v) = -\frac{\langle R(u, v)\, u, v\rangle}{\|u\|^2\, \|v\|^2 - \langle u, v\rangle^2} \tag{3.1}$$

où $R(u, v)$ désigne la forme bilinéaire antisymétrique en u, v définie sur T_p et à valeurs dans les endomorphismes de T_p, que définit le tenseur de courbure de V. La variété riemannienne V est dite *à courbure stricte-*

ment positive si $\varrho(u, v) > 0$ quels que soient $u, v \in T_p$ et quel que soit $p \in V$. On sait ([1], théorème 2) que si V est à courbure strictement positive et complète, alors V est compacte. On rappelle aussi que si une variété riemannienne V est compacte et simplement connexe, et admet un groupe transitif d'isométries, elle admet aussi un groupe *compact* d'isométries ([10], p. 226). Comme une variété riemannienne homogène est complète, il résulte de ce qui précède qu'une variété riemannienne homogène simplement connexe et à courbure strictement positive est un espace homogène G/H où (G, H) est un couple formé d'un groupe de Lie compact G et d'un sous-groupe fermé H de G (classiquement, le groupe H est de Lie). *Dans toute la suite de cet article* on supposera que la structure riemannienne homogène considérée est *normale.* On peut alors calculer la courbure $\varrho(u, v)$ dans $V = G/H$ en p_0 à l'aide de la décomposition orthogonale $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + M$ (n° 2) et de l'isométrie entre M et T_{p_0}. On a en effet la :

PROPOSITION 3.1. *Pour une structure riemannienne homogène normale sur l'espace homogène G/H (G groupe de Lie compact), on a :*

(3.2) $\varrho(\sigma(x), \sigma(y)) = (1/4) \| [x, y]_M \|^2 + \| [x, y]_H \|^2$, *quels que soient* $x, y \in M$.

La formule (3.2) résulte directement de la formule de définition (3.1), de la formule (9.6) de [11], p. 47 et de la formule (2.1) ci-dessus.

COROLLAIRE 3.1. $\varrho(\sigma(x), \sigma(y)) = 0$ *est équivalent à* $[x, y] = 0$.

REMARQUE : la proposition 3.1 implique que tout espace homogène riemannien normal G/H (G de Lie compact) est à courbure positive ou nulle ; on trouvera des démonstrations géométriques de ce fait dans dans [7] et [12].

COROLLAIRE 3.2. *Le couple (G, H) fournit un espace homogène riemannien normal G/H qui est à courbure strictement positive si et seulement si la décomposition orthogonale $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} + M$ du couple associé $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H})$ vérifie :*

(3.3) $[x, y] \neq 0$ *quels que soient* $x, y \in M$ *linéairement indépendants.*

Rappelons aussi le :

THÉORÈME 3.1 (Nomizu, [11], p. 47). *Si G/H est un espace homogène riemannien normal, le sous-ensemble* $\exp(Rg)\, p_0$ *de G/H (où R désigne le corps des nombres réels) est une géodésique quel que soit $g \in M$.*

A priori, le groupe G peut ne pas être *effectif* sur $V = G/H$, c'est a dire qu'il peut exister des éléments de G qui induisent sur V l'isométrie

identique de V. Ce n'est pas une restriction de supposer G effectif, puisque dans le cas contraire on remplacerait G par son quotient par son sous-groupe normal formé des éléments de G qui induisent l'identité sur V. Sur le couple $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$, pour que G soit effectif, il faut que la condition suivante soit satisfaite :

$$x \in \mathbf{H} \text{ et } [x, M] = 0 \text{ entraînent } x = 0. \tag{3.4}$$

Il est clair que le sous-ensemble A de $\mathbf{H}$ défini par $A = \{x \in \mathbf{H} \mid [x, M] = 0\}$ est un idéal de $\mathbf{H}$ et un idéal de $\mathbf{G}$.

DÉFINITION 3.1. *Une algèbre de Lie réelle* $\mathbf{G}$ *sera dite* quasi-compacte *si elle est l'algèbre de Lie d'un groupe compact.*

DÉFINITION 3.2. *Un couple* $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ *formé d'une algèbre de Lie réelle* $\mathbf{G}$ *et d'une sous-algèbre* $\mathbf{H}$ *de* $\mathbf{G}$ *sera dit* admissible *si :* 1) $\mathbf{G}$ *est quasi-compacte;* (2) *le couple* $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ *vérifie la condition* (3.3) *et la condition* (3.4) ; 3) dim $M \geq 2$.

Ce qui précède montre que si une variété riemannienne V est homogène normale, simplement connexe et à courbure strictement positive, on peut l'écrire $V = G/H$, le couple associé $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ étant admissible. Le premier but de cet article est donc de déterminer les couples admissibles (la liste est donnée dans les propositions 17. 1 et 35.1). Pour tous les couples admissibles trouvés nous verrons qu'ils donnent naissance à une variété riemannienne homogène, normale, simplement connexe, bien déterminée (a fortiori, il se pourrait que, $\mathbf{H}$ étant une sous-algèbre quelconque de $\mathbf{G}$, le sous groupe de G engendré par $\mathbf{H}$ ne soit pas fermé dans G). Plus précisément, il est bien évident que ce que nous déterminerons, ce sera les classes de couples admissibles isomorphes :

DÉFINITION 3.3. *Deux couples* $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ *et* $(\mathbf{G}', \mathbf{H}')$ *seront dits isomorphes s'il existe un isomorphisme* ξ *de l'algèbre de Lie* $\mathbf{G}$ *sur l'algèbre de Lie* $\mathbf{G}'$ *tel que* $\xi(\mathbf{H}) = \mathbf{H}'$.

Si G et G' sont deux groupes de Lie simplement connexes, d'algebres de Lie respectives $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}'$, comme on sait que ξ donne naissance à un isomorphisme entre G et G', dans le cas où les sous groupes de G et G' engendrés respectivement par $\mathbf{H}$ et $\mathbf{H}'$ seront fermés, les espaces homogènes G/H et G'/H' seront donc homéomorphes. Si de plus l'isomorphisme ξ de la définition 3.3 respecte les produits scalaires définis sur $\mathbf{G}$ et $\mathbf{G}'$, alors les structures riemanniennes homogènes normales correspondantes de G/H et G'/H' seront isométriques.

DÉFINITION 3.4 *Un couple* $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ *sera dit* symétrique *s'il existe un automorphisme involutif de* $\mathbf{G}$ *dont* $\mathbf{H}$ *est la sous-algèbre des points fixes.*

Dans ce cas, si de plus le produit scalaire est invariant par l'automorphisme involutif considéré, on aura la relation classique :

$$[M, M] \subset \mathbf{H}. \tag{3.5}$$

Ce sera toujours le cas si le produit scalaire sur $\mathbf{G}$ est unique à un facteur près (cas où $\mathbf{G}$ est simple) car ce produit scalaire est alors proportionnel à la forme de Killing de $\mathbf{G}$ et cette dernière est invariante par tout automorphisme de $\mathbf{G}$. Rappelons que les couples symétriques $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ avec $\mathbf{G}$ quasi-compacte ont été déterminés par E. Cartan dans [6].

Nous aurons encore besoin du résultat suivant :

PROPOSITION 3.2. *Soit (G, H) un couple d'un groupe de Lie G et d'un sous-groupe fermé H de G et soit $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ le couple correspondant de leurs algèbres de Lie. Soit $(\mathbf{G}', \mathbf{H}')$ un couple d'une sous-algèbre $\mathbf{G}'$ de $\mathbf{G}$ et d'une sous algèbre $\mathbf{H}'$ de $\mathbf{G}'$ tel que : 1) le sous-groupe G' de G engendré par $\mathbf{G}'$ est compact ; 2) il existe un supplémentaire M' de $\mathbf{H}'$ dans $\mathbf{G}'$ qui est en même temps un supplémentaire de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{G}$; 3) $\mathbf{H}' = \mathbf{G}' \cap \mathbf{H}$. Dans ces conditions, le sous-groupe H' de G' engendré par $\mathbf{H}'$ est fermé dans G' et l'espace homogène G'/H' est homéomorphe à l'espace homogène G/H. Si de plus, la représentation adjointe de H' dans M' est irréductible, alors (à un scalaire près) la structure riemannienne homogène normale de G'/H' est isométrique à celle de G/H.*

Puisque G' est compact, alors $G' \cap H$ est fermé puisque H est fermé. Pour leurs algèbres de Lie, on a bien : $\mathbf{G}' \cap \mathbf{H} = \mathbf{G}' \cap \mathbf{H} = \mathbf{H}'$. Et H' est égal à $G' \cap H$ donc fermé. Soit maintenant $V = G/H$; il existe un voisinage X de p_0 dans V sur lequel G' est transitif (G' opérant dans G/H comme sous-groupe de G) comme le montre la considération du sous ensemble de G' engendré par les éléments de $\mathbf{G}'$ qui appartiennent au supplémentaire figurant dans l'hypothèse 2) de la proposition. Introduisons le sous-ensemble $A = G'(p_0)$ de V constitué par les images sous G' du point p_0. Comme G' est compact, A est donc un fermé de V. Nous allons voir que c'est aussi un ouvert de V, ce qui montrera que $A = V$ donc que G' est transitif sur V, d'où, puisque $H' = G' \cap H$, le fait que $A = G'/H' = V = G/H$. Mais A est un ouvert de V parce que G' transitif sur le voisinage X de p_0 entraîne que G' est transitif sur le voisinage $g'(X)$ de $p' = g'(p_0)$ montrant ainsi que tout point p' de A est tel qu'il existe un ouvert $g'(X)$ tel que $g'(X) \ni p'$ et $g'(X) \subset A$. L'assertion relative aux structures riemanniennes est une conséquence directe de ce qu'un groupe linéaire irréductible ne peut laisser deux produits scalaires invariants sans qu'ils soient proportionnels.

4. Algèbres quasi-compactes et leurs sous-algèbres.

Par algèbre de Lie $\mathbf{L}$ *somme directe* d'idéaux $\mathbf{L}_i (i = 1, 2, \dots, n)$ de $\mathbf{L}$, on entendra toujours que $\mathbf{L}$ est, en tant qu'espace vectoriel, somme directe de ses sous-espaces vectoriels $\mathbf{L}_i$ et que $[\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j] = 0$ quels que soient $i \neq j$. La notation utilisée sera toujours le signe $\oplus$ et $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \oplus \dots \oplus \mathbf{L}_n$.

Une algèbre de Lie quasi-compacte $\mathbf{L}$ est somme directe d'idéaux, orthogonaux deux à deux, qui sont des algèbres de Lie simples ou isomorphes à l'algèbre de Lie à une dimension $\mathbf{R}$ (par algèbre de Lie simple, on entend une algèbre de Lie sans idéaux non triviaux et non commutative). La démonstration se fait ainsi : comme $\mathbf{L}$ est l'algèbre de Lie d'un groupe compact L, il existe sur $\mathbf{L}$ un produit scalaire invariant par la représentation adjointe de $\mathbf{L}$ dans $\mathbf{L}$; la formule (2.1) est donc applicable. Si $\mathbf{A}$ est un idéal de $\mathbf{L}$, il en résulte que l'orthogonal $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{L}$ est encore un idéal de $\mathbf{L}$ parce que $[\mathbf{A}, \mathbf{L}] \subset \mathbf{A}$ et la formule (2.1) entraînent : $\langle \mathbf{B}, [\mathbf{A}, \mathbf{L}] \rangle = \langle [\mathbf{B}, \mathbf{L}], \mathbf{A} \rangle = 0$ donc $[\mathbf{B}, \mathbf{L}] \subset \mathbf{B}$. Le fait annoncé en résulte de suite par récurrence.

Une sous-algèbre quelconque $\mathbf{H}$ d'une algèbre de Lie quasi-compacte est aussi quasi-compacte (ceci, que le sous-groupe de G engendré par $\mathbf{H}$ soit fermé ou non dans G). En effet, la représentation adjointe de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{G}$ laisse invariante $\mathbf{H}$, d'où l'existence sur $\mathbf{H}$ d'un produit scalaire invariant par la représentation adjointe de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{H}$, ce qui est le seul fait utilisé pour ce que l'on a rappelé ci-dessus. Ainsi, une algèbre de Lie quasi-compacte ou une quelconque de ses sous-algèbres est somme directe d'idéaux simples ou isomorphes à $\mathbf{R}$, ces idéaux de plus admettant chacun un produit scalaire invariant par leur représentation adjointe. Et ces idéaux simples (et évidemment $\mathbf{R}$) sont quasi-compactes parce que ce sont des algèbres de Lie *compactes* au sens de [13], exposé 11, définition 3 (puisque leur produit scalaire est proportionnel à la forme de Killing) donc leur groupe adjoint est compact et la définition 3.1 est satisfaite pour chacun de ces idéaux ; le passage au produit direct des groupes correspondants démontre la définition 3.1 pour l'algèbre de Lie somme directe étudiée.

Rappelons que les algèbres de Lie simples (réelles) quasi-compactes sont connues car, étant compactes comme au vient de le voir, ce sont donc des formes réelles compactes d'algèbres de Lie simples complexes et ces formes compactes sont bien définies ([13], exposé 11). Nous noterons une telle forme réelle compacte par la même notation que sa complexifiée, mais en lettre grasse (de même que, dans tout cet article, on notera les algèbres de Lie par des lettres grasses). *En conclusion, toute*

algèbre de Lie quasi-compacte (et toute sous-algèbre d'une telle algèbre) est somme directe d'idéaux pris parmi la liste suivante :

$$\mathbf{A}_n\ (n \geq 1),\quad \mathbf{B}_n\ (n \geq 3),\quad \mathbf{C}_n\ (n \geq 2),\quad \mathbf{D}_n\ (n \geq 4),\tag{4.1}$$
$$\mathbf{E}_n\ (n = 6, 7, 8),\quad \mathbf{F}_4,\quad \mathbf{G}_2,\quad \mathbf{R},$$

et réciproquement, toute somme directe, d'idéaux pris parmi la liste (4.1) est quasi-compacte.

Nous aurons aussi besoin dans la suite de préciser dans quels cas une décomposition en somme directe d'idéaux de la liste (4.1) est possible de plusieurs façons essentiellement distinctes. La réponse est donnée par la :

PROPOSITION 4.1. *Soit* $\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L}_i \oplus \ldots \oplus \mathbf{L}_n$ *une décomposition de* $\mathbf{L}$ *en somme directe d'idéaux, orthogonaux deux à deux, de la liste* (4.1). *Supposons qu'il existe un idéal* $\mathbf{P}$ *de* $\mathbf{L}$ *qui n'est pas somme d'idéaux, orthogonaux deux à deux, tous pris parmi les* $\mathbf{L}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; *soit* P_i *la projection de* $\mathbf{P}$ *sur* $\mathbf{L}_i$. *Alors, si* i *est tel que* $P_i \neq 0$ *et* $\mathbf{L}_i \not\subset \mathbf{P}$, *on a :* $\mathbf{L}_i$ *est isomorphe à* $\mathbf{R}$.

Sans perdre la généralité, on peut évidemment supposer que tous les i sont tels que $P_i \neq 0$ et $\mathbf{L}_i \not\subset \mathbf{P}$. On a la relation $[P_i, \mathbf{L}_i] \subset \mathbf{P} \cap \mathbf{L}_i$ quel que soit i; en effet, si $x_i \in P_i$, c'est qu'il existe $x \in \mathbf{P}$ avec $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_j + \ldots + x_n$ et $x_j \in \mathbf{L}_j$ pour tout j. Des relations $[\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_j] = 0$ quels que soient $i \neq j$, on tire : $[x_i, \mathbf{L}_i] = [x, \mathbf{L}_i]$ d'où : $[P_i, \mathbf{L}_i] \subset [\mathbf{P}, \mathbf{L}_i]$; mais comme $\mathbf{P}$ et $\mathbf{L}_i$ sont des idéaux, on a : $[\mathbf{P}, \mathbf{L}_i] \subset \mathbf{P}$ et $[\mathbf{P}, \mathbf{L}_i] \subset \mathbf{L}_i$, ce qui démontre la relation affirmée.

Comme $\mathbf{L}_i$ est pris parmi la liste (4.1), il est sans idéaux non triviaux donc soit $\mathbf{P} \cap \mathbf{L}_i = 0$, soit $\mathbf{P} \cap \mathbf{L}_i = \mathbf{L}_i$; ce deuxième cas est à exclure car on a supposé que $\mathbf{L}_i \not\subset \mathbf{P}$. On a donc $[P_i, \mathbf{L}_i] = 0$, ce qui prouve que P_i est un idéal de $\mathbf{L}_i$, quel que soit i. Mais comme $\mathbf{L}_i$ est sans idéaux non triviaux, on a : soit $P_i = 0$, soit $P_i = \mathbf{L}_i$. Mais on a supposé $P_i \neq 0$, donc $P_i = \mathbf{L}_i$, d'où, pour tout i : $[\mathbf{L}_i, \mathbf{L}_i] = 0$, ce qui prouve que $\mathbf{L}_i$ est abélien donc que $\mathbf{L}_i$ est isomorphe à $\mathbf{R}$.

5. *T*-racines.

Soit $\mathbf{G}$ une algèbre de Lie quasi-compacte et $\mathbf{T}$ une sous-algèbre abélienne de $\mathbf{G}$ (i. e. telle que $[\mathbf{T}, \mathbf{T}] = 0$). Il est classique que la représentation adjointe de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{G}$, parce qu'elle est abélienne d'une part et antisymétrique d'autre part d'après la formule (2.1), laisse stable une décomposition orthogonale de $\mathbf{G}$ en sous-espaces irréductibles de dimension

un ou deux. L'ensemble de ceux de ces sous espaces qui sont de dimension un constitue le centralisateur $\mathbf{C}(\mathbf{T})$ de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{G}$, c'est à dire la sous-algèbre $\mathbf{C}(\mathbf{T})$ de $\mathbf{G}$ définie par : $\mathbf{C}(\mathbf{T}) = \{x \in \mathbf{G} \mid [x, \mathbf{T}] = 0\}$. Pour toute base orthonormée $\{x, x'\}$ d'un sous-espace propre de dimension deux, on a :

$$(5.1) \qquad [t, x] = \alpha(t)\, x' \text{ et } [t, x'] = -\alpha(t)\, x, \text{ quel que soit } t \in \mathbf{T}$$

où $\alpha : t \to \alpha(t)$ est une forme linéaire non nulle sur $\mathbf{T}$, *que nous appellerons une* T-racine *de* $\mathbf{G}$. Réciproquement, étant donnée une forme linéaire α sur $\mathbf{T}$, *on dira que c'est une* T-racine de $\mathbf{G}$ si elle est non nulle et s'il existe au moins un couple orthonormé (x, x') qui vérifie (5.1). *On dira alors que le couple* (x, x') *appartient à la* T-*racine* α, *ce qu'on notera* $(x, x') \in \alpha$. *L'ensemble des* T-*racines de* $\mathbf{G}$ *sera noté* $r_T(G)$. On pourra écrire $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{T}) + \Sigma_{\alpha \in r_T(G)}\, G^\alpha$, *en désignant par* G^α *le sous-espace vectoriel de* $\mathbf{G}$ *constitué par l'ensemble des* (x, x') *tels que* $(x, x') \in \alpha$. La dimension de G^α est toujours paire ; remarquer aussi que $\alpha \in r_T(G)$ entraîne $-\alpha \in r_T(G)$ car si $(x, x') \in \alpha$, on a $(x', x) \in (-\alpha)$; d'où aussi $G^{-\alpha} = G^\alpha$. Un calcul direct fournit la :

PROPOSITION 5.1 *Soient* α, β *deux* T-*racines quelconques de* $\mathbf{G}$ *et* $(x, x') \in \alpha$, $(y, y') \in \beta$. *Alors on a :* $([x, y] - [x', y'], [x', y] + [x, y']) \in (\alpha + \beta)$ *et* $([x, y] + [x', y'], [x', y] - [x, y']) \in (\alpha - \beta)$.

COROLLAIRE 5.1 *Quelles que soient* $\alpha, \beta \in r_T(G)$, *on a :*

$$[G^\alpha, G^\beta] \subset G^{\alpha+\beta} + G^{\alpha-\beta}.$$

Ce corolaire se déduit de la proposition 5.1 par addition.

COROLLAIRE 5.2. *Si* $\alpha + \beta \notin r_T(G)$ *et* $\alpha - \beta \notin r_T(G)$, *on a* $[G^\alpha, G^\beta] = 0$.

En prenant $(x, x') \in \alpha$ avec $\alpha \in r_T(G)$ et $z \in \mathbf{C}(\mathbf{T})$, le même calcul que celui de la proposition (5.1) fournit le :

COROLLAIRE 5.3. *Si* $(x, x') \in \alpha$ *et* $z \in \mathbf{C}(\mathbf{T})$, *alors :* $([z, x], [z, x']) \in \alpha$.

PROPOSITION 5.2. *Soit* $(x, x') \in \alpha$ *avec* $\alpha \in r_T(G)$. *Alors* $[x, x'] \in \mathbf{C}(\mathbf{T})$ *et, plus précisément* $[x, x']$ *est différent de zéro et orthogonal, dans* $\mathbf{C}(\mathbf{T})$, *à l'hyperplan* $\mathbf{T}^\alpha$ *de* $\mathbf{T}$ *défini par* $\mathbf{T}^\alpha = \{t \in \mathbf{T} \mid \alpha(t) = 0\}$.

Un calcul comme celui de la proposition 5.1 montre de suite que $[x, x'] \in \mathbf{C}(\mathbf{T})$. Ensuite, en utilisant la formule (2.1) : $\langle t, [x, x'] \rangle = \langle [t, x], x' \rangle = \langle \alpha(t)\, x', x' \rangle = \alpha(t)\, \|x'\|^2 = \alpha(t)$, d'où l'on déduit la proposition.

Puisque $\mathbf{G}$ est de dimension finie, étant donné un $\alpha \in r_T(G)$, il existe un entier positif $k \geq 1$ tel que $k\alpha \in r_T(G)$ et $h\alpha \notin r_T(G)$ pour tout entier $h > k$. Soit $\mathbf{C}(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \oplus \mathbf{X}$ et $\mathbf{T} = \mathbf{T}^\alpha \oplus \mathbf{V}^\alpha$ deux décompositions orthogonales; $\mathbf{X}$ est une sous-algèbre de $\mathbf{G}$ parce que c'est l'orthogonal dans $\mathbf{C}(\mathbf{T})$ de l'idéal $\mathbf{T}$ de $\mathbf{C}(\mathbf{T})$. Appelons $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha$ la sous-algèbre de $\mathbf{G}$ engendrée, au sens des algèbres de Lie, par $\mathbf{X}$ et G^α; d'après ce qu'on vient de voir, les propositions 5.1, 5.2, les corollaires 5.1 et 5.3, on a:

$$\widehat{\mathbf{G}}^\alpha \subset \mathbf{X} + \mathbf{V}^\alpha + G^\alpha + G^{2\alpha} + \ldots + G^{k\alpha}.$$

6. Rangs.

Soit maintenant $\mathbf{S}$ une sous-algèbre de l'algèbre de Lie quasi-compacte $\mathbf{G}$, qui soit *abélienne et maximale,* c'est à dire telle que $[\mathbf{T}, \mathbf{T}] \subset \mathbf{T}$ et $\mathbf{C}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$; une telle sous-algèbre de $\mathbf{G}$ est appelée une sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{G}$. On sait que toutes les sous-algèbres de Cartan de $\mathbf{G}$ sont conjuguées entre elles par le groupe linéaire dont l'algèbre de Lie est la représentation adjointe de $\mathbf{G}$ dans $\mathbf{G}$ ([8]). Les sous-algèbres de Cartan ont donc en particulier toutes même dimension: cette dimension commune est appelée le *rang* de $\mathbf{G}$ (ce rang est d'ailleurs l'indice qui figure dans la liste (4 1)). Le rang d'une somme directe d'idéaux quasi-compacts est égal à la somme des rangs des idéaux la composant.

Une S-racine de $\mathbf{G}$ est simplement appelée une *racine* de $\mathbf{G}$ (cf. [13], exposé 9, p. 3); l'ensemble des racines de $\mathbf{G}$ sera noté $r(G) = r_S(G)$. Rappelons que, quel que soit $\alpha \in r(G)$, on a $\dim G^\alpha = 2$ (cf. [4]), ce qui entraîne ici que $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha = \mathbf{V}^\alpha + G^\alpha$; et que si $\alpha, \beta \in r(G)$ avec $\beta = k\alpha$, alors nécessairement $k = \pm 1$ (cf. [4]). Dans le cas $\mathbf{S} = \mathbf{T}$, on peut préciser le corollaire 5.1 sous la forme:

$$[G^\alpha, G^\beta] = G^{\alpha+\beta} + G^{\alpha-\beta} \text{ (avec } \beta \neq \pm\alpha). \tag{6.1}$$

(pour le voir, utiliser la proposition 2 de l'exposé 10 de [13]).

PROPOSITION 6.1 *Si le couple* $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ *est admissible, alors: soit* rang $\mathbf{G}$ = rang $\mathbf{H}$, *soit* rang $\mathbf{G}$ = rang $\mathbf{H} + 1$.

Soit $\mathbf{T}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{H}$ et $\mathbf{S}$ une sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{G}$ telle que $\mathbf{S} \supset \mathbf{T}$. Des relations (2.2), on déduit que $[x, \mathbf{T}] = 0$ entraîne $[x_H, \mathbf{T}] = [x_M, \mathbf{T}] = 0$; mais comme $\mathbf{T}$ est abélienne maximale dans $\mathbf{H}$, on a donc $x_H \in \mathbf{T}$. Si donc $\mathbf{S} = \mathbf{T} + \mathbf{T}'$ désigne une décomposition orthogonale, on aura d'après ce qui précède: $\mathbf{T}' \subset M$. D'où l'égalité: rang $\mathbf{G}$ =

$\dim \mathbf{S} = \dim \mathbf{T} + \dim \mathbf{T}' = \operatorname{rang} \mathbf{H} + \dim \mathbf{T}'$. Puisque $[\mathbf{T}', \mathbf{T}'] = 0$ on ne peut satisfaire la condition (3.3) que si $\dim \mathbf{T}' \leq 1$, ce qui démontre la proposition.

Vue la proposition 6.1, on sépare la détermination des classes de couples admissibles isomorphes en deux morceaux : le premier est celui des cas où $\operatorname{rang} \mathbf{G} = \operatorname{rang} \mathbf{H}$ (deuxième partie, n°s 10 à 16, résultats dans la proposition 17.1). Le deuxième est celui des cas où $\operatorname{rang} \mathbf{G} = \operatorname{rang} \mathbf{H} + 1$ (troisième partie, n°s 18 à 34, résultats dans la proposition 35.1) Une façon de caractériser les deux cas possibles est la :

PROPOSITION 6.2. *Pour que* $\operatorname{rang} \mathbf{G} = \operatorname{rang} \mathbf{H}$ (*resp.* $\operatorname{rang} \mathbf{G} = \operatorname{rang} \mathbf{H} + 1$), *il faut et il suffit que la dimension de M soit paire* (*resp. impaire*).

D'après ce qu'on vient de voir, on a : $\dim \mathbf{H} = \dim \mathbf{T} + 2h$ et $\dim \mathbf{G} = \dim \mathbf{S} + 2g$, avec g, h entiers. D'où : $\dim M = \dim \mathbf{G} - \dim \mathbf{H} = \dim \mathbf{S} - \dim \mathbf{T} + 2(g - h)$, ce qu'il fallait démontrer.

Rappelons encore (cf. [4]) que si $\mathbf{G}$ est la somme directe d'idéaux orthogonaux deux à deux : $\mathbf{G} = \mathbf{L}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{L}_n$, alors toute sous-algèbre de Cartan $\mathbf{T}$ de $\mathbf{G}$ est telle que $\mathbf{T} = \mathbf{T} \cap \mathbf{L}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{T} \cap \mathbf{L}_n$, les $\mathbf{T} \cap \mathbf{L}_i$ étant, de plus, des sous-algèbres de Cartan de $\mathbf{L}_i$ pour tout i. On en déduit que l'on a une partition de $r(G)$ en $r(G) = r(L_1) \cup \ldots \cup r(L_n)$. De plus, une racine $\alpha \in r(L_i)$ est telle que $\alpha(\mathbf{T} \cap \mathbf{L}_j) = 0$ quel que soit $j \neq i$.

Dans le n^0 7, nous donnons quelques généralités sur le cas $\operatorname{rang} \mathbf{G} = \operatorname{rang} \mathbf{H}$ et dans les n°s 8 et 9, des généralités sur le cas $\operatorname{rang} \mathbf{G} = \operatorname{rang} \mathbf{H} + 1$.

7. Généralités sur le cas $\operatorname{rang} \mathbf{G} = \operatorname{rang} \mathbf{H}$.

Dans tout ce n^0 et dans toute la deuxième partie, dans le cas où $\operatorname{rang} \mathbf{G} = \operatorname{rang} \mathbf{H}$, nous fixerons une fois pour toutes une sous-algèbre de Cartan $\mathbf{T}$ commune à $\mathbf{G}$ et à $\mathbf{H}$. D'après le n^0 6 : $\mathbf{G} = \mathbf{T} + \Sigma_{\alpha \in r(G)} G^\alpha$, avec $\dim G^\alpha = 2$ quel que soit $\alpha \in r(G)$. Des formules (2.2), on déduit $[\mathbf{T}, \mathbf{H}] \subset \mathbf{H}$ et $[\mathbf{T}, M] \subset M$; d'où le fait que si $(y, y') \in \alpha$, le couple (y_H, y'_H) et le couple (y_M, y'_M), après les avoir orthonormés quand ils ne sont pas nuls, appartiennent encore tous les deux à la racine α. En effet, on a : $[t, y] = \alpha(t) y'$, d'où : $[t, y_H + y_M] = [t, y_H] + [t, y_M] = \alpha(t) y'_H + \alpha(t) y'_M$. Comme $\mathbf{H} + M$ est une somme directe, on a donc : $[t, y_H] = \alpha(t) y'_H$ et $[t, y_M] = \alpha(t) y'_M$ (et les relations analogues). De $\dim G^\alpha = 2$ il résulte donc la :

PROPOSITION 7.1. *Quel que soit $\alpha \in r(G)$, soit $G^\alpha \subset \mathbf{H}$, soit $G^\alpha \subset M$.*

On aura donc une partition $r(G) = r(H) \cup r(M)$, où l'on a posé : $r(H) = \{\alpha \in r(G) \mid G^\alpha \subset \mathbf{H}\}$, $r(M) = \{\alpha \in r(G) \mid G^\alpha \subset M\}$.

PROPOSITION 7.2 *Si le couple* $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ *est admissible et tel que* rang $\mathbf{G} =$ rang $\mathbf{H}$ *alors l'algèbre de Lie* $\mathbf{G}$ *est simple.*

Supposons $\mathbf{G}$ non simple ; comme $\mathbf{G}$ est quasi-compacte, on peut donc l'écrire $\mathbf{G} = \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2$ avec $[\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] = 0$, $\langle \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2 \rangle = 0$, $\mathbf{L}_1 \neq 0$, $\mathbf{L}_2 \neq 0$. Et l'on a, d'après le n° 6, la partition $r(G) = r(L_1) \cup r(L_2)$ ainsi que la relation $\mathbf{T} = \mathbf{T} \cap \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{T} \cap \mathbf{L}_2$. Cette formule implique que, si l'on pose : $\mathbf{H}_1 = \mathbf{L}_1 \cap \mathbf{H}$ et $\mathbf{H}_2 = \mathbf{H} \cap \mathbf{L}_2$, alors rang $\mathbf{H}_1 =$ rang $\mathbf{L}_1$ et rang $\mathbf{H}_2 =$ rang $\mathbf{L}_2$. Comme $r(G) = r(H) \cup r(M)$ est une partition, on aura, si $M_1 = \mathbf{L}_1 \cap M$ et $M_2 = \mathbf{L}_2 \cap M$: $M = M_1 + M_2$; et $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2$. Mais $[\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] = 0$ entraîne $[M_1, M_2] = 0$; la condition (3.3) implique alors, soit $M_1 = 0$, soit $M_2 = 0$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que c'est M_2 qui est nul et que l'on a donc $\mathbf{L}_2 \subset \mathbf{H}$. Mais alors $[\mathbf{L}_2, M] = [\mathbf{L}_2, M_1] \subset [\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] = 0$, ce qui contredit (3.4).

8. Généralités sur le cas rang $\mathbf{G} =$ rang $\mathbf{H} + 1$.

Dans les n°s 8 et 9 et dans toute la troisième partie, c'est à dire dans le cas où rang $\mathbf{G} =$ rang $\mathbf{H} + 1$, nous fixerons une fois pour toutes une sous-algèbre de Cartan $\mathbf{T}$ de $\mathbf{H}$ et une sous-algèbre de Cartan $\mathbf{S}$ de $\mathbf{G}$ telle que $\mathbf{S} \supset \mathbf{T}$. Soit $\mathbf{S} = \mathbf{T} \oplus \mathbf{T}'$ une décomposition orthogonale ; on a dim $\mathbf{T}' = 1$ par hypothèse. Dans toute la suite, on choisira une fois pour toutes un $x \in \mathbf{G}$ tel que $\| x \| = 1$ et que l'espace vectoriel engendré par x soit $\mathbf{T}'$. D'après le n° 6, on a $x \in M$. Du centralisateur $\mathbf{C}(\mathbf{T})$, on peut affirmer :

PROPOSITION 8.1. *Soit* dim $\mathbf{C}(\mathbf{T}) =$ dim $\mathbf{T} + 1$, *soit* dim $\mathbf{C}(\mathbf{T}) =$ dim $\mathbf{T} + 3$.

Si $\mathbf{C}(\mathbf{T}) = \mathbf{S}$, la proposition est démontrée. Sinon, remarquons d'abord que $\mathbf{S}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{C}(\mathbf{T})$. Puisque $\mathbf{S} \neq \mathbf{C}(\mathbf{T})$, c'est qu'il existe au moins une racine α de $\mathbf{C}(\mathbf{T})$ (racine selon $\mathbf{S}$) et un plan propre G^α correspondant. Mais, par définition de $\mathbf{C}(\mathbf{T})$, on doit avoir $[G^\alpha, \mathbf{T}] = 0$, c'est à dire, d'après la condition (5.1) : $\alpha(\mathbf{T}) = 0$. La racine α s'annule donc sur un hyperplan de $\mathbf{S}$. Deux telles racines sont donc proportionnelles ; on a rappelé au n° 6 que celà entraîne que ces deux racines sont égales ou opposées, donc c'est que $\mathbf{C}(\mathbf{T})$ possède exactement une racine et son opposée, et $\mathbf{C}(\mathbf{T}) = \mathbf{S} + G^\alpha$, avec dim $G^\alpha = 2$, ce qu'il fallait démontrer.

Dans toute la suite, lorsque rang $\mathbf{G} =$ rang $\mathbf{H} + 1$ et lorsque l'on aura dim $\mathbf{C}(\mathbf{T}) =$ dim $\mathbf{T} + 3$, on désignera toujours par (x', x'') un couple appartenant à *la* racine de $\mathbf{C}(\mathbf{T})$. On dira que "x', x'' existent" (resp. "x', x'' n'existent pas") pour dire que dim $\mathbf{C}(\mathbf{T}) =$ dim $\mathbf{T} + 3$ (resp. dim $\mathbf{C}(\mathbf{T}) =$ dim $\mathbf{T} + 1$). On aura donc : $\mathbf{C}(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \oplus \mathbf{X}$, avec $\mathbf{X}$ engendré, en tant qu'espace vectoriel, par x, x' x'' (on écrira x', x'' même s'ils n'existent pas, auquel cas

$\mathbf{X}$ est engendré par x seul). Remarquons que $\mathbf{X}$ est une sous-algèbre de $\mathbf{G}$ qui est isomorphe à l'algèbre simple à trois dimensions $\mathbf{A}_1$ lorsque x', x'' existent; en effet, sinon, c'est que $\mathbf{X}$ serait abélienne, contredisant le fait que $\mathbf{S}$ est abélienne maximale.

Introduisons le sous-espace vectoriel suivant P de $\mathbf{G}$: $P = \mathbf{X} + [\mathbf{H}, x]$; c'est un sous-espace vectoriel de M, comme on le voit facilement par un raisonnement analogue à la démonstration de la proposition 6.1. De plus, la décomposition orthogonale $\mathbf{G} = \mathbf{H} + P + N$ (*qui définit* N) est stable par la représentation adjointe de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{G}$; en effet, de (2.2), on déduit $[\mathbf{H}, \mathbf{T}] \subset \mathbf{H}$ et de Jacobi et de $[\mathbf{T}, x] = 0$ on tire $[\mathbf{T}, [\mathbf{H}, x]] \subset [x, [\mathbf{T}, \mathbf{H}]] \subset [x, \mathbf{H}]$ d'où $[\mathbf{T}, P] \subset P$ puisque $[\mathbf{T}, \mathbf{X}] = 0$. Il en résulte alors que $[\mathbf{T}, N] \subset N$ puisque l'on a (2.1) et que la décomposition $\mathbf{G} = \mathbf{H} + P + N$ est orthogonale. Soit maintenant $\alpha \in r_T(G)$, l'espace G^α correspondant et ses projections G^α_H, G^α_P, G^α_N sur $\mathbf{H}$, P, N respectivement. De ce que la représentation adjointe de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{G}$ respecte la décomposition orthogonale $\mathbf{G} = \mathbf{H} + P + N$ et par le même raisonnement qu'au début du n^0 7, on déduit les relations:

$$G^\alpha_H \subset G^\alpha,\ G^\alpha_P \subset G^\alpha,\ G^\alpha_N \subset G^\alpha,\ G^\alpha = G^\alpha_H + G^\alpha_P + G^\alpha_N. \tag{8.1}$$

De plus, les espaces G^α_P et G^α_N sont de dimensions paires, tandis que G^α_H est de dimension zéro ou deux; ce fait tient à ce que α, étant une T-racine de $\mathbf{G}$, est une racine de $\mathbf{H}$ parce que $\mathbf{T}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{H}$ (cf. n^0 6).

9. Les sous-algèbres $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha$.

Au n^0 5, pour une T-racine α de $\mathbf{G}$, on a introduit la sous-algèbre $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha$ de $\mathbf{G}$ qui est engendrée, en tant qu'algèbre de Lie, par $\mathbf{X}$ et G^α et vu qu'elle était telle que $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha \subset \mathbf{V}^\alpha + \mathbf{X} + G^\alpha + G^{2\alpha} + \ldots + G^{k\alpha}$ et $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha \supset \mathbf{V}^\alpha + \mathbf{X} + G^\alpha$ (k entier positif convenable). Dans ce n^0 9, nous allons étudier quelques propriétés de ces sous-algèbres, plus précisément étudier les couples $(\widehat{\mathbf{G}}^\alpha, \widehat{\mathbf{H}}^\alpha)$, où l'on pose $\widehat{\mathbf{H}}^\alpha = \widehat{\mathbf{G}}^\alpha \cap \mathbf{H}$.

PROPOSITION 9.1. *Soit* $\alpha \in r_T(G)$ *telle que* $G^\alpha_H \neq 0$. *Alors*: $\dim \widehat{\mathbf{H}}^\alpha = 3$ *et* $\operatorname{rang} \widehat{G}^\alpha = 2$.

Soit $(h, h') \in \alpha$ avec $h, h' \in G^\alpha_H$; donc $h, h' \in \mathbf{H}$. D'après le corollaire 5.3, on a $[h, h'] \neq 0$ et $[h, h']$ est orthogonal à $\mathbf{T}^\alpha$ et $[h, h'] \in \mathbf{C}[\mathbf{T}]$. Mais comme $[h, h'] \in \mathbf{H}$, on a donc $[h, h'] \in \mathbf{C}(\mathbf{T}) \cap \mathbf{H} = \mathbf{T}$ donc, puisque l'orthogonal de $\mathbf{T}^\alpha$ dans $\mathbf{T}$ est $\mathbf{V}^\alpha$ par définition, on a $[h, h'] \in \mathbf{V}^\alpha$. D'après

le n° 8 : dim $G_H^\alpha = 2$; d'où : $\widehat{\mathbf{H}}^\alpha = \mathbf{V}^\alpha + G_H^\alpha$ et dim $\widehat{\mathbf{H}}^\alpha = 3$. Cherchons maintenant une sous-algèbre de Cartan de $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha$ qui contienne $\mathbf{V}^\alpha$; un élément $z \in \widehat{\mathbf{G}}^\alpha$ tel que $[z, \mathbf{V}^\alpha] = 0$ ne peut pas avoir une projection non nulle sur $G^\alpha + G^{2\alpha} + \dots + G^{k\alpha}$, puisque $\alpha(\mathbf{V}^\alpha) \neq 0$. Donc $z \in \mathbf{V}^\alpha \oplus \mathbf{X}$, ce qui entraîne qu'une sous-algèbre de Cartan de $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha$ qui contient $\mathbf{V}^\alpha$ est contenue dans $\mathbf{V}^\alpha \oplus \mathbf{X}$. Or $\mathbf{V}^\alpha \oplus \mathbf{X}$ est une sous-algèbre de rang deux de $\mathbf{G}$ puisque $\mathbf{V}^\alpha$ est isomorphe à $\mathbf{R}$ et que l'on a vu au n° 8 que $\mathbf{X}$ est isomorphe soit à $\mathbf{R}$ soit à $\mathbf{A}_1$. La somme directe $\mathbf{V}^\alpha \oplus \mathbf{X}$ est donc bien de rang $1 + 1 = 2$.

PROPOSITION 9.2. *Soit $\alpha \in r_T(G)$ telle que $G_P^\alpha \neq 0$. Alors* : 1) $G_H^\alpha \neq 0$; 2) $G^{k\alpha} \subset N$ *pour tout entier* $k > 1$.

D'après le corollaire 5.3, si $(y, y') \in \alpha$, on a $([x, y], [x, y']) \in \alpha$. Par hypothèse, il existe $h \in H$ et $(y, y') \in \alpha$ tel que $y = [h, x]$. On a $[x, y]_H \neq 0$, car d'après (2.1) : $\langle h, [x, y] \rangle = \langle h, [x, [h, x]] \rangle = \langle [h, x], [h, x] \rangle = \| [h, x] \|^2 \neq 0$; d'ou $G_H^\alpha \neq 0$. Soit maintenant $k > 1$; d'après (8.1) : $G^{k\alpha} = G_H^{k\alpha} + G_P^{k\alpha} + G_N^{k\alpha}$. D'après le n° 6, comme α est une racine de $\mathbf{H}$, jamais $k\alpha$ ne sera une racine de H, donc $G_H^{k\alpha} = 0$. Mais on a alors aussi $G_P^{k\alpha} = 0$, car sinon en appliquant le 1) que l'on vient de démontrer, on en déduirait $G_H^{k\alpha} \neq 0$. On a donc $G_H^{k\alpha} = G_P^{k\alpha} = 0$, d'où $G^{k\alpha} = G_N^{k\alpha} \subset N$.

Le point essentiel est maintenant de relier les racines de $\mathbf{G}$ aux T-racines de $\mathbf{G}$. Dans un sens, supposons que λ soit une racine de $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha$ (α étant telle que $G_H^\alpha \neq 0$) pour la sous-algèbre de Cartan $\mathbf{S}^\alpha = \mathbf{V}^\alpha \oplus \mathbf{T}'$ ($\mathbf{T}'$ est, rappelons-le, l'espace vectoriel engendré par x) ; alors λ est une racine de $\mathbf{G}$ pour la sous algèbre de Cartan $\mathbf{S}$. En effet, on a : $[\mathbf{T}^\alpha, (\widehat{G}^\alpha)^\lambda] \subset [\mathbf{T}^\alpha, \widehat{\mathbf{G}}^\alpha] = 0$ par définition de $\mathbf{T}^\alpha$, et $(\widehat{G}^\alpha)^\lambda$ est stable par $\mathbf{S}^\alpha$ par hypothèse. C'est donc que $(\widehat{G}^\alpha)^\lambda$ est stable par $\mathbf{S} = \mathbf{V}^\alpha + \mathbf{T}^\alpha + \mathbf{T}' = \mathbf{S}^\alpha + \mathbf{T}^\alpha$, ce qui est dire que λ est une racine de $\mathbf{G}$, et justifie la convention d'écriture : $(\widehat{\mathbf{G}}^\alpha)^\lambda = G^\lambda$ que nous emploierons désormais. Dans l'autre sens soit $\lambda \in r(G)$ une racine de $\mathbf{G}$ pour la sous-algèbre de Cartan $\mathbf{S}$; alors la restriction $\alpha = \overline{\lambda}$ de λ à $\mathbf{T}$ (on notera toujours par une barre une telle restriction) est évidemment une T racine de $\mathbf{G}$ et l'on a $G^\lambda \subset G^\alpha$. On la proposition évidente :

PROPOSITION 9.3. *Soit $\lambda \in r(G)$ telle que $G^\lambda \subset \widehat{\mathbf{G}}^\alpha$. Alors on a nécessairement $\overline{\lambda} = h\alpha$, avec $h = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm k$. Si $h = 0$, c'est que x', x'' existent et l'on a $G^\lambda \subset \mathbf{X}$.*

PROPOSITION 9.4. *Soit $\lambda \in r(G)$ telle que $G_P^\lambda \neq 0$, et posons $\overline{\lambda} = \alpha$ ($\alpha \neq 0$). On a alors* : 1) dim $G^\alpha \geq 4$; 2) *il existe au moins une racine $\mu \in r(G)$ telle que $\overline{\lambda} = \overline{\mu} = \alpha$ et $\mu \neq \pm \lambda$* ; 3) $\lambda(x) \neq 0$.

On a $G_P^\alpha \supset G_P^\lambda$, $G_H^\alpha \supset G_H^\lambda$ et d'après (8.1): $G^\alpha = G_H^\alpha + G_P^\alpha + G_N^\alpha$. Donc $G_P^\alpha \neq 0$ et dim $G_P^\alpha \geq 2$ (fin du n° 8). D'après la proposition 9.2, on $G_H^\alpha \neq 0$, donc de même dim $G_H^\alpha \geq 2$, d'où dim $G^\alpha \geq 2 + 2 = 4$. Comme dim $G^\alpha \geq 4$, les racines de $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha$ selon $\mathbf{S}^\alpha$ (donc des racines de G comme on l'a vu) dont la restriction à $\mathbf{T}$ est égale à α sont au moins au nombre de deux distinctes et non opposées ; il existe donc bien μ satisfaisant la conclusion 2) à démontrer. Supposons maintenant $\lambda(x) = 0$, soit $[x, G^\lambda] = 0$. Mais tout $y \in G$ s'écrit $y = h + [h', x] + n$ avec $h, h' \in \mathbf{H}$ et $n \in N$. On doit donc avoir $[x, y] = [h, x] + [n, x] + [x, [h', x]]$; la démonstration de la proposition 9.2 a montré que $[x, [h', x]]$ a une composante selon $\mathbf{H}$ qui est non nulle si $[h', x] \neq 0$, ce qui est ici certainement le cas puisque $G_P^\lambda \neq 0$ par hypothèse. Mais d'autre part: $[h, x] \in M$ et $[x, n] \in M$ parce que, d'après (2.1): $[x, N] \subset M$ puisque $\langle [x, N], \mathbf{H} \rangle = \langle N, [x, \mathbf{H}] \rangle \subset \langle N, P \rangle = 0$; donc on aboutit à une contradiction.

Un rôle important sera joué par les racines $\lambda \in r(G)$ telles que $G_P^\lambda \neq 0$ et $\overline{\lambda} \neq 0$, c'est pourquoi nous donnerons la:

DÉFINITION 9.1. *Une racine $\lambda \in r(G)$ sera dite* tordue *si elle est telle que $G_P^\lambda \neq 0$ et $\lambda \neq 0$; l'ensemble des racines tordues de $r(G)$ sera noté $r(G)_{\text{tord}}$. L'écriture $(\lambda, \mu) \in r(G)_{\text{tord}}$ signifiera que l'on a $\lambda, \mu \in r(G)_{\text{tord}}$ avec $\overline{\lambda} = \overline{\mu}$ et $\mu \neq \pm \lambda$. On posera encore: $r(G)_H = \{\lambda \in r(G) \mid G^\lambda \subset \mathbf{H}\}$ et $r(G)_N = \{\mu \in (G) \mid G^\mu \subset N\}$.*

A priori $r(G)_{\text{tord}} \cup r(G)_H \cup r(G)_N$ n'est pas une partition de $r(G)$; nous verrons dans la troisième partie que c'est cependant certainement le cas pour un couple admissible (corollaire 24.1).

PROPOSITION 9.5. *Soit $\alpha \in r_T(G)$ et $h \in G_H^\alpha$. Alors h est nécessairement de la forme $h = \Sigma_\lambda k_\lambda y_\lambda$ où: 1) λ parcourt l'ensemble des racines de G qui sont telles que $\overline{\lambda} = \alpha$; 2) y_λ est tel qu'il existe y'_λ avec $(y_\lambda, y'_\lambda) \in \lambda$; 3) $k_\lambda \geq 0$ quel que soit λ ; 4) $\Sigma_\lambda k_\lambda^2 \lambda(x) = 0$.*

Tout élément h de $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha$, qui est orthogonal à $\mathbf{S}$, est somme de ses projections h_λ sur les différents plans propres de $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha$ pour $\mathbf{S}^\alpha$, plans propres qui correspondent, on l'a vu, aux $\lambda \in r(G)$ tels que $G^\lambda \subset \widehat{\mathbf{G}}^\alpha$, ou encore tels que $\overline{\lambda} = \alpha$; dans un tel plan propre, on peut toujours choisir un couple $(y_\lambda, y'_\lambda) \in \lambda$ tel que $h_\lambda = k_\lambda y_\lambda$ avec $k_\lambda \geq 0$. Exprimons maintenant que $\mathbf{V}^\alpha$ et h engendrent la sous-algèbre à trois dimensions $\widehat{\mathbf{H}}^\alpha$ de $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha$ (proposition 9.1). On a: $[\mathbf{V}^\alpha, h] = \Sigma_\lambda k_\lambda \alpha(\mathbf{V}^\alpha) y'_\lambda = \alpha(\mathbf{V}^\alpha)(\Sigma_\lambda k_\lambda y'_\lambda)$, puis: $[\mathbf{V}^\alpha, [\mathbf{V}^\alpha, h]] = -\alpha^2(\mathbf{V}^\alpha) h$. Exprimons que $[h, [\mathbf{V}^\alpha, h]] \subset \mathbf{V}^\alpha$ sous la forme: $\langle [h, \mathbf{V}^\alpha, h]], x \rangle = 0$, ce qui s'écrit, d'après (2.1): $\langle [\mathbf{V}^\alpha, h], [x, h] \rangle = \alpha(\mathbf{V}^\alpha) \langle \Sigma_\lambda k_\lambda y'_\lambda, \Sigma_\lambda \lambda(x) k_\lambda y'_\lambda \rangle = \alpha(\mathbf{V}^\alpha)(\Sigma_\lambda k_\lambda^2 \lambda(x)) = 0$.

COROLLAIRE 9.5. *S'il existe exactement deux racines λ et μ, distinctes et non opposées, telles que $\bar{\lambda} = \bar{\mu} = \alpha$, les élements de norme un de G^{α}_{H} sont bien déterminés, à un automorphisme intérieur près de $\mathbf{G}$, par la seule donnée de G^{λ} et G^{μ}.*

En effet, si $h = k_{\lambda} y_{\lambda} + k_{\mu} y_{\mu}$, on aura $k_{\lambda}^2 \lambda(x) + k_{\mu}^2 \mu(x) = 0$ ce qui, joint à $k_{\lambda}^2 + k_{\mu}^2 = 1$, $k_{\lambda} \geq 0$, $k_{\mu} \geq 0$, détermine uniquement k_{λ} et k_{μ}. Il reste donc seulement à voir que le choix de y_{λ} et y_{μ} (éléments de norme un de G^{λ} et G^{μ} respectivement) ne dépend que d'un automorphisme intérieur de $\mathbf{G}$, ce qui se voit en faisant agir sur G^{λ} et G^{μ} l'exponentielle de la représentation adjointe de $\mathbf{T}$ qui induit dans G^{λ} et G^{μ} des rotations dont les angles peuvent être imposés parce que λ et μ sont distinctes et non opposées.

PROPOSITION 9.6. *Soient λ, μ telles que $(\lambda, \mu) \in r(G)_{\text{tord}}$. Supposons de plus que :* 1) *$\nu \in r(G)$ et $\bar{\nu} = \bar{\lambda}$ entraîne $\nu = \pm \lambda$ ou $\nu = \pm \mu$;* 2) *$\lambda + \mu \notin r(G)$. Alors $\lambda - \mu \notin r(G)$.*

D'après la proposition 9.5 et l'hypothèse 1), on peut écrire $h \in G^{\alpha}_{H}$ sous la forme $h = k y_{\lambda} + k' y_{\mu}$, avec $(y_{\lambda}, y'_{\lambda}) \in \lambda$ et $(y_{\mu}, y'_{\mu}) \in \mu$. On aura $[\mathbf{V}^{\alpha}, h] = \alpha(\mathbf{V}^{\alpha})(k y'_{\lambda} + k' y'_{\mu})$, on peut donc prendre $h' = k y'_{\lambda} + k' y'_{\mu}$. Exprimons que $[h, h'] \in \mathbf{V}^{\alpha}$; on a : $[h, h'] = k^2 [y_{\lambda}, y'_{\lambda}] + k'^2 [y_{\mu}, y'_{\mu}] + k h ([y_{\lambda}, y'_{\mu}] + [y_{\mu}, y'_{\lambda}])$. D'après la proposition 5.2 : $[y_{\lambda}, y'_{\lambda}] \in \mathbf{S}$ et $[y_{\mu}, y'_{\mu}] \in \mathbf{S}$. Donc on doit avoir $[y_{\lambda}, y'_{\mu}] + [y_{\mu}, y'_{\lambda}] \in \mathbf{S}$. De l'hypothèse $\lambda + \mu \notin r(G)$ et de la proposition 5.1 (comme $G^{\lambda+\mu} = 0$ et $G^{\lambda-\mu} \cap \mathbf{S} = 0$), on déduit que $[y_{\lambda}, y'_{\mu}] + [y_{\mu}, y'_{\lambda}] = 0$ ainsi que $[y_{\lambda}, y'_{\mu}] - [y_{\mu}, y'_{\lambda}] = 0$ d'où, d'après la formule (6.1) : $G^{\lambda-\mu} = 0$.

PROPOSITION 9.7. *La condition nécessaire et suffisante pour que x', x'' existent est qu'il existe $\lambda \in r(G)$ telle que $\bar{\lambda} = 0$,* c'est à dire telle que $\lambda(\mathbf{T}) = 0$. *Si $r(G)_{\text{tord}}$ n'est pas vide et si x', x'' n'existent pas, alors quels que soient $(\lambda, \mu) \in r(G)_{\text{tord}}$, on a $\lambda - \mu \notin r(G)$.*

La première affirmation est une simple reformulation de la proposition 8.1 ; la deuxième provient de ce que $\bar{\lambda} = \bar{\mu}$ est équivalent à $(\lambda - \mu)(\mathbf{T}) = 0$.

PROPOSITION 9.8. *Soit $(\lambda, \mu) \in r(G)_{\text{tord}}$ tel que :* 1) *$\lambda \pm \mu \notin r(G)$;* 2) *x', x'' n'existent pas ;* 3) *$\| \lambda \| = \| \mu \|$. Notons $\mathbf{B}$ la sous-algèbre de $\mathbf{G}$ engendrée, au sens des algèbres de Lie, par $G^{\lambda} + G^{\mu}$, en sorte que $\mathbf{B} \cap \mathbf{H} = \mathbf{V}^{\alpha} + \widehat{\mathbf{H}}^{\alpha}$ $(\alpha = \bar{\lambda})$ et $\mathbf{B} = (\mathbf{B} \cap \mathbf{H}) + (\mathbf{X} + [\mathbf{X}, \widehat{\mathbf{H}}^{\alpha}])$. Alors le couple $(\mathbf{B}, \mathbf{B} \cap \mathbf{H})$ est symétrique et l'on a les relations :*

$$[\mathbf{X}, [\mathbf{X}, \widehat{\mathbf{H}}^{\alpha}]] \subset \widehat{\mathbf{H}}^{\alpha}, \qquad [[\mathbf{X}, \widehat{\mathbf{H}}^{\alpha}], [\mathbf{X}, \widehat{\mathbf{H}}^{\alpha}]] \subset \widehat{\mathbf{H}}^{\alpha}. \tag{9.1}$$

D'après le corollaire 5.1 : $[G^\lambda, G^\mu] = 0$, donc $\mathbf{B}$ est isomorphe à la somme directe $\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_1$ (où $\mathbf{A}_1$ est l'algèbre à trois dimensions de la liste (4.1)); et $\mathbf{B} \cap \mathbf{H}$ est aussi isomorphe à $\mathbf{A}_1$. Or un couple isomorphe au couple $(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_1)$ est toujours symétrique, parce que le corollaire 9.5 montre que la sous-algèbre $\mathbf{A}_1$ est déterminée à un isomorphisme intérieur près et que d'autre part on connait le cas symétrique. En général, le complément orthogonal $M^a = \mathbf{X} + [\mathbf{X}, \widehat{\mathbf{H}}^a]$ ne vérifie pas la formule (3.5); pour qu'il en soit ainsi, il suffit que l'automorphisme involutif qui échange les deux idéaux isomorphes à $\mathbf{A}_1$ composant $\mathbf{B}$ respecte le produit scalaire (n° 3), donc il suffit bien que $\| \lambda \| = \| \mu \|$, ce qui démontre la proposition. On peut retrouver cette proposition en appliquant la proposition 9.5 : $\mathbf{B} \cap \mathbf{H}$ sera engendrée par $k_\lambda y_\lambda + k_\mu y_\mu$ et $k_\lambda y'_\lambda + k_\mu y'_\mu$ avec $k_\lambda^2 \lambda(x) + k_\mu^2 \mu(x) = 0$ En identifiant $\mathbf{S}$ et son dual à l'aide du produit scalaire, en aura : $\lambda = \lambda_x + \lambda_T$, $\mu = \mu_x + \mu_T$ avec $\lambda_T = \overline{\lambda}$ et $\mu_T = \overline{\mu}$, d'où $\lambda_T = \mu_T$. De $\| \lambda \| = \| \mu \|$, on déduit donc $\lambda_x^2 = \mu_x^2$ d'ou $\lambda_x = -\mu_x$ puisque $\lambda \neq \mu$, mais $\lambda_x = \lambda(x), \mu_x = \mu(x)$, donc $k_\lambda = \pm k_\mu$, et on pourra prendre $k_\lambda = k_\mu = 1$ sans restreindre la généralité, $\mathbf{B} \cap \mathbf{H}$ sera engendrée par $y_\lambda + y_\mu$ et $y'_\lambda + y'_\mu$. Ce qui prouve que $\mathbf{B} \cap \mathbf{H}$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{B}$ fixes par l'automorphisme involutif de $\mathbf{B}$ défini par $y_\lambda \to y_\mu$, $y'_\lambda \to y'_\mu$. Le couple $(\mathbf{B}, \mathbf{B} \cap \mathbf{H})$ est donc symétrique; de plus, le fait que $\lambda(x) = -\mu(x)$ montre que le complément orthogonal $\mathbf{X} + [\mathbf{X}, \widehat{\mathbf{H}}^a]$ est l'ensemble des éléments de $\mathbf{B}$ qui sont changés en leur opposé par l'automorphisme involutif; les relations (9.1) sont alors classiques.

PROPOSITION 9.9. *Soit* $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ *une couple admissible tel que* : 1) rang $\mathbf{G}$ = = rang $\mathbf{H} + 1$; 2) $r(G)_{\text{tord}} \cup r(G)_H \cup r(G)_N$ *est une partition de* $r(G)$; 3) *quels que soient* $(\lambda, \mu) \in r(G)_{\text{tord}}$, *on a* $\lambda \pm \mu \notin r(G)$ *et* $\| \lambda \| = \| \mu \|$; 4) x', x'' *n'existent pas.*

Alors : 1) *le sous-espace vectoriel* $\mathbf{K} = \mathbf{H} + P$ *de* $\mathbf{G}$ *est une sous-algèbre de* $\mathbf{G}$; 2) *le couple* $(\mathbf{K}, \mathbf{H})$ *est symétrique.*

Remarquons d'abord que P est l'espace vectoriel engendré par x et $[\mathbf{H}, x]$. Nous allons démontrer les trois relations :

$$(\mathbf{X}, [\mathbf{X}, \mathbf{H}]] \subset \mathbf{H} \tag{9.2}$$

$$[[\mathbf{X}, \mathbf{H}], [\mathbf{X}, \mathbf{H}]] \subset \mathbf{H} \tag{9.3}$$

$$[\mathbf{H}, [\mathbf{H}, \mathbf{X}]] \subset \mathbf{X} + [\mathbf{X}, \mathbf{H}] \tag{9.4}$$

qui entraîneront en particulier les conséquences 1) et 2) de la proposition à démontrer. D'après l'hypothèse 2), l'ensemble des racines de $\mathbf{H}$ selon $\mathbf{T}$ est constitué par l'ensemble des restrictions $\overline{\lambda}$ à $\mathbf{T}$ des λ parcourant $r(G)_{\text{tord}}$ et

par l'ensemble $r(G)_H$. Si $\lambda \in r(G)_{\text{tord}}$, on posera $H^\lambda = G^\lambda_H$ et l'on aura donc:

$$\mathbf{H} = \mathbf{T} + \Sigma_{\lambda \in r(G)_{\text{tord}}} H^\lambda + \Sigma_{\xi \in r(G)_H} G^\xi .$$

Mais $[G^\xi, x] = 0$ pour tout $\xi \in r(G)_H$, car $\xi(x) = 0$ par définition de $r(G)_H$ et $r(G)_{\text{tord}}$, puisque sinon on aurait $[G^\xi, x] \subset G^\xi_P \neq 0$. On a donc:

$$[\mathbf{X}, \mathbf{H}] = \Sigma_{\lambda \in r(G)_{\text{tord}}} [\mathbf{X}, H^\lambda]. \tag{9.5}$$

D'où

$$[\mathbf{X}, [\mathbf{X}, \mathbf{H}]] = \Sigma_{\lambda \in r(G)_{\text{tord}}} [\mathbf{X}, [\mathbf{X}, \mathbf{H}^\lambda]],$$

ce qui, d'après la relation (9.1), démontre la relation (9.2).

De l'identité de Jacobi, on déduit la relation suivante:

$$[[a, b], [a, c]] = (1/2)([[[b, c], a], a] + [[a, [a, c]], b] + [c\,[a, [a, b]]]). \tag{9.6}$$

On a donc, d'après (9.6):

$$[[\mathbf{X}, H^\lambda], [\mathbf{X}, H^\mu]] \subset [[\mathbf{X}, [\mathbf{X}, H^\lambda]], H^\mu] + [H^\lambda, [\mathbf{X}, [\mathbf{X}, H^\mu]]] + [\mathbf{X}, [\mathbf{X}, [H^\lambda, H^\mu]]]. \tag{9.7}$$

D'après (9.5), on a:

$$[[\mathbf{X}, \mathbf{H}], [\mathbf{X}, \mathbf{H}]] = \Sigma_{\lambda, \mu \in r(G)_{\text{tord}}} [[\mathbf{X}, H^\lambda], [\mathbf{X}, H^\mu]].$$

De cette expression, de (9.7), de (2.2) et de (9.2), on déduit bien ((9.3).

Pour démontrer (9.4), remarquons d'abord que, d'après (9.5):

$$[\mathbf{H}, [\mathbf{X}, \mathbf{H}]] = \Sigma_{\lambda \in r(G)_{\text{tord}}} [\mathbf{T}, [\mathbf{X}, H^\lambda]] + \ldots \tag{9.8}$$

$$\ldots + \Sigma_{\xi \in r(G)_H, \lambda \in r(G)_{\text{tord}}} [H^\xi, [\mathbf{X}, H^\lambda]] + \Sigma_{\lambda, \mu \in r(G)_{\text{tord}}} [H^\lambda, [\mathbf{X}, H^\mu]].$$

Comme

$$[\mathbf{T}, \mathbf{X}] = 0, [\mathbf{X}, H^\xi] = 0, \text{ on a } [\mathbf{T}, [\mathbf{X}, H^\lambda]] \subset [\mathbf{X}, [\mathbf{T}, H^\lambda]] \subset [\mathbf{X}, H^\lambda] \subset [\mathbf{X}, \mathbf{H}]$$

et $[H^\xi, [\mathbf{X}, H^\lambda]] \subset [\mathbf{X}, [H^\lambda, H^\xi]] \subset [\mathbf{X}, \mathbf{H}]$; donc les deux premiers termes de (9.8) sont inclus dans $[\mathbf{X}, \mathbf{H}]$. On a aussi: $[H^\lambda, [\mathbf{X}, H^\lambda]] \subset \mathbf{X} + [\mathbf{X}, \mathbf{H}]$. Il reste seulement à montrer que $[H^\lambda, [\mathbf{X}, H^\mu]] \subset \mathbf{X} + [\mathbf{X}, \mathbf{H}]$ pour $\lambda \neq \mu$ et $\lambda, \mu \in r\, G_{\text{tord}}$. Pour le voir, posons: $[H^\lambda, [\mathbf{X}, H^\mu]] = U + V$ avec $U \subset \mathbf{K}$ et

$V \subset N$. On a $U \subset P$ d'après (2.1). Mais :

$$[\mathbf{X}, [H^\lambda, [\mathbf{X}, H^\mu]]] \subset [[\mathbf{X}, H^\lambda], [\mathbf{X}, H^\mu]] + [H^\lambda, [\mathbf{X}, [\mathbf{X}, H^\mu]]] \subset \mathbf{H}$$

d'après (2.2), (9.1), (9.3). Donc : $[\mathbf{X}, U + V] \subset \mathbf{H}$. Mais, de la définition de N et de (2.1) on déduit (voir démonstration de la proposition 9.3) : $[\mathbf{X}, N] \subset M$, d'où $[\mathbf{X}, V] = 0$. Mais $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ est admissible, donc la condition (3.3) entraîne $V = 0$ parce que $\mathbf{X} \subset M$ et $V \subset N \subset M$; d'où (9.4)

DEUXIÈME PARTIE : LES COUPLES ADMISSIBLES TELS QUE rang $\mathbf{G}$ = rang $\mathbf{H}$.

10. Marche suivie.

On procédera comme suit : on a vu au n° 7, proposition 7.1, que l'on a une partition $r(G) = r(H) \cup r(M)$. La condition (3.3) et le corollaire 5.2 impliquent donc la condition :

(10.1) quels que soient $\alpha, \beta \in r(M)$ alors $\alpha + \beta \in r(G)$ ou $\alpha - \beta \in r(G)$.

D'après la proposition 7.2, il suffit d'étudier les sous-algèbres $\mathbf{H}$ de chacune des sous-algèbres simples de la liste (4.1), qui sont telles que le couple $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$, avec rang $\mathbf{G}$ = rang $\mathbf{H}$, vérifie (10.1). On aura aussi besoin d'utiliser le fait que $r(H)$ correspond à une sous-algèbre $\mathbf{H}$ de $\mathbf{G}$ sous la forme de la condition :

(10.2) soient $\alpha, \beta \in r(H)$; si $\alpha \pm \beta \in r(G)$, alors $\alpha \pm \beta \in r(H)$.

Cette condition résulte directement de la formule (6.1) et de la formule $[\mathbf{H}, \mathbf{H}] \subset \mathbf{H}$.

Remarquons maintenant que la faiblesse du « ou » dans la condition (10.1) compliquera notre tâche (ce qui ne serait pas le cas dans une algèbre complexe !). Pour pouvoir achever la détermination en vue, nous aurons besoin de la condition (10.3) ci dessous qui est relative à un triple (α, β, γ) de racines de $r(M)$, et qui correspond au cas le plus simple pour lequel la condition (10.1) ne permet pas de décider si un tel couple est admissible ou non, à savoir le cas où $\mathbf{G} = \mathbf{A}_2$ (l'algèbre simple de dimension 8 de la

liste (4.1)) et où $\mathbf{H}$ est une sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{A}_2$. Ce cas particulier est étudié dans la quatrième partie (n° 36) ; le corollaire 36.1 fournit la condition :

(10.3) il n'existe pas $\alpha, \beta, \gamma \in r(M)$ tels que : $\alpha + \beta + \gamma = 0$.
$$\alpha - \beta \notin r(G),\ \beta - \gamma \notin r(G),\ \gamma - \alpha \notin r(G).$$

Comme nous allons le voir dans les n°s 11 à 16, les conditions (10.1), (10.2), (10.3) suffisent pour déterminer tous les couples $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ qui sont admissibles et tels que rang $\mathbf{G}$ = rang $\mathbf{H}$.

Remarquons que les conditions (10.1), (10.2), (10.3) sur les éléments de $r(G)$ sont *affines*, c'est à dire ne font pas intervenir le produit scalaire invariant par la représentation adjointe de $\mathbf{G}$; cette remarque est essentielle, parce que la forme explicite que nous utiliserons pour $r(G)$ lorsque $\mathbf{G}$ sera isomorphe à une des algèbres simples exceptionnelles $\mathbf{E}_n$ utilisera une base de la sous-algèbre de Cartan $\mathbf{T}$ de $\mathbf{G}$ qui ne sera pas orthonormée.

11. $\mathbf{G} = \mathbf{A}_n$ $(n \geq 1)$.

D'après [13], exposé 13, p. 8, on peut prendre $r(\mathbf{A}_n) = \{e_i - e_j\}$ $(i \neq j ;\ i, j = 1, 2, \dots, n+1)$ où $\{e_i\}$ $(i = 1, 2, \dots, n+1)$ est une base du dual d'un espace vectoriel de dimension $n+1$ dans lequel $\mathbf{T}$ est l'hyperplan annullant la forme $e_1 + e_2 + \dots + e_{n+1}$. Sans perdre la généralité, on peut supposer (quitte à changer d'indices) que $e_1 - e_2 \in r(M)$. D'après (10.3), on voit que $r(M)$ ne peut contenir à la fois $e_1 - e_3$ et $e_2 - e_3$; moyennant un changement d'indices, on peut donc supposer que $e_2 - e_3 \in r(H)$. D'autre part, d'après (10.1), on voit que $e_i - e_j \in r(H)$ pour $i \neq j$ et $i, j = 3, 4, \dots, n+1$. Mais (10.2) entraîne alors que $r(H) \supset (e_2 - e_3) + (e_3 - e_i) = e_2 - e_i$, pour $i \geq 3$. En conclusion, on voit que $e_i - e_j \in r(H)$ pour $i \neq j$ et $i, j = 2, 3, \dots, n+1$, ce qui prouve que $\mathbf{H}$ contient la sous-algèbre $\mathbf{A}_{n-1}$ de $\mathbf{A}_n$ qui est engendrée par les éléments correspondants aux racines $e_i - e_j$ $(i \neq j ;\ i, j = 2, 3, \dots, n+1)$. D'autre part, ce système de racines est visiblement maximal pour une sous-algèbre d'après (10.2) ; on a donc $\mathbf{H} = \mathbf{A}_{n-1}$ ou $\mathbf{H} = \mathbf{A}_{n-1} \oplus \mathbf{R}$, où $\mathbf{R}$ désigne le centralisateur de $\mathbf{A}_{n-1}$ dans $\mathbf{A}_n$, tel que $\langle \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{R} \rangle = 0$. Le premier cas $\mathbf{H} = \mathbf{A}_{n-1}$ est à exclure parce que rang $\mathbf{A}_{n-1} = n - 1$ et rang $\mathbf{A}_n = n$.

Seul un couple isomorphe au couple $(\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_{n-1} \oplus \mathbf{R})$ peut donc être admissible ; ce dernier couple est effectivement admissible, car on sait que

c'est celui dont le couple de groupes de Lie associé est, avec les notations classiques : $(SU(n+1), U(n))$ et que l'espace normal homogène correspondant est à courbure strictement positive, puisque c'est un espace symétrique de rang un, à savoir l'espace projectif complexe $P_n(C)$ (voir [6], p. 446).

12. $\mathbf{G} = \mathbf{B}_n$ $(n \geq 3)$ ou $\mathbf{D}_n$ $(n \geq 4)$.

Supposons d'abord $\mathbf{G} = \mathbf{B}_n$; on peut prendre $r(\mathbf{B}_n) = \{\pm e_i\} \cup \{\pm e_i \pm e_j\}$ $(i \neq j\,;\ i, j = 1, 2, \ldots n)$ où $\{e_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ est une base du dual de $\mathbf{T}$ ([13], exposé 13, p. 8). A un changement de signe ou d'indices près, deux cas seulement sont possibles : $e_1 + e_2 \in r(M)$ ou $e_1 \in r(M)$ (et alors $\pm e_i \pm e_j \in r(H)$ pour tous i et j).

Premier cas : $e_1 + e_2 \in r(M)$. La condition (10.1) entraîne alors : $\pm e_i$, $\pm e_i \pm e_j \in (H)$ pour $i, j \geq 3$ ainsi que $e_1 - e_2 \in r(H)$. La condition (10.3) montre que $r(M)$ ne peut contenir $e_1 + e_3$ et $e_2 - e_3$; sans perdre la généralité, on peut supposer que $e_2 - e_3 \in r(H)$. En appliquant plusieurs fois (10.2), on trouve : $(e_2 - e_3) + e_3 = e_2 \in r(H)$, $r(H) \supset (e_1 - e_2) + (e_2 - e_3) = e_1 - e_3$, $r(H) \supset (e_1 - e_3) + e_3 = e_1$ d'où $r(H) \supset e_1 + e_2$ qui est une contradiction. Ce cas est donc toujours impossible.

Deuxième cas : $e_1 \in r(M)$ et $\pm e_i \pm e_j \in r(H)$ quels que soient $i \neq j$. Le système de racines $\{\pm e_i \pm e_j\}$ $(i \neq j\,;\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$ est maximal pour une sous-algèbre de $\mathbf{B}_n$ et est celui de la sous-algèbre $\mathbf{D}_n \subset \mathbf{B}_n$ qui correspond à l'inclusion classique canonique des groupes : $SO(2n) \subset SO(2n+1)$. Un couple admissible est donc nécessairement isomorphe au couple $(\mathbf{B}_n, \mathbf{D}_n)$ (avec, pour $n = 3$: $\mathbf{D}_3 = \mathbf{A}_3$) ; ce dernier couple est effectivement admissible car il est symétrique, il correspond à l'espace riemannien symétrique compact de rang un $SO(2n+1)/SO(2n)$, qui est la sphère S_{2n}, munie de sa métrique à courbure constante ([6], p. 450).

Supposons maintenant que $\mathbf{G} = \mathbf{D}_n$; prenons pour système de racines le système $\{\pm e_i \pm e_j\}$ que l'on vient de rencontrer ci-dessus ; seul le premier cas $e_1 + e_2 \in r(M)$ est évidemment possible et nous allons voir qu'il est impossible. La démonstration ci-dessus ne convient pas parce qu'elle fait usage des racines $\pm e_i$; ici nous utiliserons le fait que $n \geq 4$; on a alors d'après (10.2) :

$$r(H) \supset (e_2 - e_3) + (e_3 \pm e_i) = e_2 \pm e_i \ (i \geq 4),$$

puis

$$r(H) \supset (e_1 - e_2) + (e_2 \pm e_i) = e_1 \pm e_i \ (i \geq 4),$$

et enfin :

$$(e_1 - e_i) + (e_2 + e_i) = e_1 + e_2 \in r(H),$$

contredisant $e_1 + e_2 \in r(M)$. Ainsi, il n'existe aucun couple admissible $(\mathbf{D}_n, \mathbf{H})$ avec rang $\mathbf{H} = n$ $(n \geq 4)$.

13. $\mathbf{G} = \mathbf{C}_n$ $(n \geq 2)$.

Une base du dual de $\mathbf{T}$ étant $\{ e_i \}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$, on peut prendre, d'après [13], exposé 13, p. 8 : $r(\mathbf{C}_n) = \{ \pm 2e_i \} \cup \{ \pm e_i \pm e_j \}$ $(i \neq j ; i, j : 1, 2, \dots, n)$. A un changement de signe et d'indices près, deux cas seulement sont possibles :

Premier cas : $2e_1 \in r(M)$ et $\pm e_i \pm e_j \in r(H)$ quels que soient i, j. Mais ce cas est impossible, puisqu'alors ((10.2)) : $r(H) \supset (e_1 + e_2) + (e_1 - e_2) = 2e_1$. On est donc nécessairement dans le :

Deuxième cas : $e_1 + e_2 \in r(M)$. Supposons d'abord $n = 2$; alors $r(H) \supset \pm 2e_2$ d'après (10.1) et on pourra écrire $\mathbf{H} \supset \mathbf{C}_1 = \mathbf{A}_1$, où $\mathbf{C}_1$ est la sous-algèbre de rang un de $\mathbf{C}_2$ engendrée par les éléments correspondants aux racines $\pm 2e_2$. Supposons maintenant $n \geq 3$; d'après (10.1), on a $\pm e_i \pm e_j$, $\pm 2e_i \in r(H)$ pour $i, j \geq 3$. D'après la condition (10.3), on ne peut pas avoir $e_1 - e_3$ et $e_1 + e_3$ dans $r(M)$, donc on peut supposer que, par exemple : $e_2 + e_3 \in r(H)$. D'après (10.2), successivement :

$$r(H) \supset (e_2 + e_3) + (\pm e_i - e_3) = e_2 \pm e_i (i \geq 3),\ r(H) \supset (e_2 + e_i) + (e_2 - e_i) = 2e_2 ;$$

on a donc $\pm 2e_i$, $\pm e_i \pm e_j \in r(H)$ pour $i, j \geq 2$, donc on peut écrire que $\mathbf{H} \supset \mathbf{C}_{n-1}$, où $\mathbf{C}_{n-1}$ est la sous-algèbre de $\mathbf{C}_n$ engendrée par les éléments correspondants aux racines énumérées ci-dessus ; cette inclusion correspond à l'inclusion canonique de groupes classiques : $Sp(n-1) \subset Sp(n)$. Le système de racines $\{ \pm 2e_i \} \cup \{ \pm e_i \pm e_j \}$ $(i \neq j ;\ i, j = 2, 3, \dots, n)$ n'est pas maximal, on peut lui rajouter $\{ \pm 2e_1 \}$, ce qui en fait alors visiblement un système maximal. Trois cas seulement sont donc possibles : $\mathbf{H} = \mathbf{C}_{n-1}$, $\mathbf{H} = \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{R}$, $\mathbf{H} = \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{A}_1$, où $\mathbf{A}_1$ est la sous-algèbre engendrée par les racines $\pm 2e_1$ et $\mathbf{R}$ l'orthogonal de $\mathbf{T}$ dans la sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{C}_{n-1}$ qui est contenue dans $\mathbf{T}$. Le premier cas est à éliminer pour des raisons de rang. Le couple $(\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{A}_1)$ est effectivement admissible car il est symétrique, c'est celui qui correspond à l'espace riemannien symétrique compact de rang un $Sp(n)/Sp(n-1) \times Sp(1)$, qui est l'espace projectif quaternionien $P_{n-1}(K)$ ([6], p. 465).

Le couple $(\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{R})$ est aussi admissible, nous le démontrerons dans la quatrième partie : corollaire 38.1. Nous verrons au n° 38 que l'espace homogène correspondant est homéomorphe à l'espace projectif complexe de dimension complexe $2n - 1$ mais que la structure riemannienne ainsi définie n'est pas isométrique à celle de cet espace projectif complexe lorsqu'il est considéré comme l'espace symétrique $SU(2n)/U(2n-1)$.

14. $\mathbf{G} = \mathbf{E}_n$ $(n = 6, 7, 8)$.

Nous allons voir que dans ce cas aucun couple ne peut être admissible. Soit d'abord $\mathbf{G} = \mathbf{E}_6$; on peut prendre le système de racines suivant ([5], p. 299):

$$r(E_6) = \{ e_i - e_j \} \cup \{ \pm (e_i + e_j + e_k) \} \cup \{ \pm (e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6) \}$$

où $\{e_i\}$ $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ est une base (qui n'est pas orthonormée) du dual de $\mathbf{T}$, et où i, j, k sont distincts et allant de 1 à 6. Les cas possibles: 1) $e_1 - e_2 \in r(M)$; 2) $e_1 + e_2 + e_3 \in r(M)$ avec $e_i - e_j \in r(H)$ pour tous i, j; 3) $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 \in r(M)$ avec $e_i - e_j$, $\pm (e_i + e_j + e_k) \in r(H)$ pour tous i, j, k. Ce dernier cas est impossible d'après (10.2), car:

$$r(H) \supset (e_1 + e_2 + e_3) + (e_4 + e_5 + e_6) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6 ,$$

une contradiction. Le cas 2) est impossible parce que (10.1) montre que $e_1 + e_4 + e_5 \in r(H)$ d'où $r(H) \supset (e_1 + e_4 + e_5) + (e_2 - e_5) + (e_3 - e_4) = e_1 + e_2 + e_3$ contredisant l'hypothèse $e_1 + e_2 + e_3 \in r(M)$. Enfin, le premier cas est impossible; le raisonnement fait au n° 11 pour $\mathbf{A}_n$ montre en effet que $e_i - e_j \in r(H)$ pour $i, j \geq 2$. La condition (10.1) montre que

$$e_1 + e_2 + e_3 \in r(H), \qquad e_3 + e_4 + e_5 \in r(H)$$

d'où l'on déduit grâce à (10.2):

$$e_1 + e_3 + e_4 = (e_1 + e_2 + e_3) + (e_4 - e_2) \in r(H)$$

et

$$e_2 + e_3 + e_4 = (e_3 + e_4 + e_5) + (e_2 - e_5) \in r(H);$$

enfin

$$r(H) \supset (e_1 + e_3 + e_4) - (e_2 + e_3 + e_4) = e_1 - e_2$$

contredisant $e_1 - e_2 \in r(M)$.

Soit maintenant $\mathbf{G} = \mathbf{E}_7$; d'après [5], p. 314, on peut prendre pour système de racines:

$$r(E_7) = \{ e_i - e_j \} \cup \{ \pm (e_i + e_j + e_k + e_h) \}$$

$(i, j\ k, h$ tous distincts et allant de 1 à 8) où $\{e_i\}$ $(i = 1, \ldots, 8)$ est une base (non orthonormée) du dual d'un espace vectoriel de dimension 8 dans lequel $\mathbf{T}$ est l'hyperplan annulant la forme linéaire $e_1 + \ldots + e_8$. Le premier cas

possible est celui où $e_1 - e_2 \in r(M)$; la méthode du n° 11 montre qu'alors $e_i - e_j \in r(H)$ pour tous les i, j distincts de 2 à 8. D'après (10.1):

$$e_1 + e_2 + e_5 + e_6, \quad e_3 + e_4 + e_5 + e_6 \in r(H).$$

D'après (10.2):

$$r(H) \supset (e_3 + e_4 + e_5 + e_6) + (e_2 - e_3) = e_2 + e_4 + e_5 + e_6$$

et

$$r(H) \supset (e_1 + e_2 + e_5 + e_6) + (e_4 - e_2) = e_1 + e_4 + e_5 + e_6$$

d'où la contradiction :

$$r(H) \supset (e_1 + e_4 + e_5 + e_6) - (e_2 + e_4 + e_5 + e_6) = e_1 - e_2 .$$

Le deuxième cas est celui où $e_1 + e_2 + e_3 + e_4 \in r(M)$ avec $e_i - e_j \in r(H)$ pour tous les i, j distincts. D'après (10.1):

$$e_1 + e_2 + e_5 + e_6 \in r(H)$$

donc, d'après (10.2), la contradiction :

$$r(H) \supset (e_1 + e_2 + e_5 + e_6) + (e_3 - e_5) + (e_4 - e_6) = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 .$$

Soit enfin $\mathbf{G} = \mathbf{E}_8$. D'après [5], p. 329, on peut prendre pour système de racines : $r(E_8) = \{e_i - e_j\} \cup \{\pm(e_i + e_j + e_k)\}$ (i, j, k tous distincts et de 1 à 9), où $\{e_i\}$ ($i = 1, \ldots, 9$) est une base (qui n'est pas orthonormée) du dual d'un espace vectoriel de dimension 9 dans lequel $\mathbf{T}$ est l'hyperplan annulant la forme $e_1 + \ldots + e_9$. Le premier cas sera celui où $e_i - e_j \in r(M)$; le raisonnement du n° 11 entraîne ici encore que $e_i - e_j \in r(H)$ pour i, j distincts de 2 à 9. D'après (10.1):

$$e_3 + e_4 + e_5, \qquad e_1 + e_2 + e_4 \in r(H).$$

D'apres (10.2):

$$r(H) \supset (e_1 + e_2 + e_4) - (e_3 + e_4 + e_5) + (e_3 - e_2) + (e_5 - e_2) = e_1 - e_2$$

qui est une contradiction. Le deuxième cas est clui où $e_1 + e_2 + e_3 \in r(M)$ avec $e_i - e_j \in r(H)$ pour tous i, j distincts. D'après (10.1):

$$e_3 + e_4 + e_6 \in r(H);.$$

d'où, d'après (10.2):

$$r(H) \supset (e_3 + e_4 + e_5) + (e_1 - e_4) + (e_2 - e_5) = e_1 + e_2 + e_3,$$

contradiction.

15. $\mathbf{G} = \mathbf{F}_4$.

On prendra le système de racines suivant ([13], exposé 13, p. 8): $r(F_4) = \{\pm e_i\} \cup \{\pm e_i \pm e_j\} \cup \{(1/2)(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)\}$ $(i \neq j;$ $i, j = 1, 2, 3, 4)$ où $\{e_i\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ est une base orthonormée du dual de $\mathbf{T}$. D'après le raisonnement du n° 12, on a toujours ici $\pm e_i \pm e_j \in r(H)$ pour tous i, j distincts. Deux cas sont alors possibles:

Premier cas: $(1/2)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \in r(M)$ et $\pm e_i \in r(H)$ pour tout i. On a alors $\mathbf{H} \supset \mathbf{B}_4$, le système de racines de $\mathbf{B}_4$ étant celui du n° 12 et étant visiblement maximal pour une sous algèbre de $\mathbf{F}_4$. Le seul couple possible est donc $(\mathbf{F}_4, \mathbf{B}_4)$. Ce couple est admissible, car il est symétrique c'est celui de l'espace F_4/Spin (9), qui est compact, symétrique, de rang un. C'est le plan projectif des octaves de Cayley ([6], p. 466).

Deuxième cas: $e_1 \in r(M)$. D'après (10.3), soit $(1/2)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \in r(H)$ soit $(1/2)(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \in r(H)$, mais de plus, l'une de ces deux racines appartient à $r(M)$ car sinon leur somme, qui est e_1, appartiendrait à $r(H)$. Moyennant un changement de signe, on peut supposer que l'on a $(1/2)(-e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \in r(H)$. De (10.2) et (10.1), on déduit que $r(H)$ contient tous les $(1/2)(\pm e_1 \pm e_2 \pm e_3 \pm e_4)$ où figurent un nombre impair de signes plus. Introduisons alors la transformation orthogonale du dual de $\mathbf{T}$ qui est définie par $e_i \to (1/2)(-e_i + e_j + e_k + e_h)$ (où i, j, k, h désigne une permutation de 1, 2, 3, 4). Cette transformation définit donc ([13], exposé 16, cinq premières lignes de la page 4) un automorphisme de $\mathbf{F}_4$; on voit que cet automorphisme transforme le système de racines que doit contenir $r(H)$ en le suivant: $\{\pm e_i\} \cup \{\pm e_i \pm e_j\}$ $(i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3, 4)$. On est donc ramené au premier cas.

16. $\mathbf{G} = \mathbf{G}_2$.

On prendra ([13], exposé 13, p. 8) pour système de racines: $r(G_2) = \{e_i - e_j\} \cup \{\pm (1/3)(2e_i - e_j - e_k)\}$ $(i, j, k$ tous distincts, de 1 à 3), où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une base orthonormée du dual d'un espace vectoriel de dimension trois dans lequel $\mathbf{T}$ est l'hyperplan annulateur de la forme $e_1 + e_2 + e_3$. Au changement d'indices près, les seuls cas possibles sont:

Premier cas : $e_1 - e_2 \in r(M)$. D'après (10.1): $(1/3)(2e_3 - e_1 - e_2) \in r(H)$. D'après (10.3), $e_1 - e_3$ ou $e_2 - e_3$ appartient à $r(H)$. On peut, à un changement d'indices près, supposer que $e_2 - e_3 \in r(H)$. On en déduit, en appliquant (10.2), que :

$$r(H) \supset (e_2 - e_3) + (1/3)(2e_3 - e_1 - e_2) = (1/3)(2e_2 - e_1 - e_3),$$

$$r(H) \supset (1/3)(2e_3 - e_1 - e_2) + (1/3)(2e_2 - e_1 - e_3) = -(1/3)(2e_1 - e_2 - e_3),$$

enfin

$$r(H) \supset (1/3)(2e_1 - e_2 - e_3) - (1/3)(2e_2 - e_1 - e_3) = e_1 - e_2,$$

qui est une contradiction.

Deuxième cas : $(1/3)(2e_3 - e_1 - e_2) \in r(M)$ et $e_i - e_j \in r(H)$ pour tous les i, j distincts. On a donc dans ce cas : $\mathbf{H} \supset \mathbf{A}_2$, où $\mathbf{A}_2$ est la sous-algèbre de $\mathbf{G}_2$ dont les racines sont les $e_i - e_j$ (i, j) distincts). Comme un tel système est visiblement maximal, le seul couple éventuellement possible est $(\mathbf{G}_2, \mathbf{A}_2)$. Nous allons voir que ce couple est admissible et que l'espace homogène normal simplement connexe correspondant $G_2/SU(3)$ est isométrique à la sphère S_6, munie de sa métrique à courbure constante.

Que $G_2/SU(3)$ soit homéomorphe à S_6 se démontre à l'aide de la proposition 3.2. En prenant $S_6 = SO(7)/SO(6) = G/H$, $\mathbf{G} = \mathbf{B}_3$, $\mathbf{H} = \mathbf{D}_3 = \mathbf{A}_3$, on aura $\mathbf{B}_3 = \mathbf{D}_3 + M$ avec (les systèmes de racines étant ceux rencontrés dans les n^{os} précédents) : $\mathbf{D}_3 = \mathbf{T} + \Sigma_{i<j}\, G^{e_i + e_j} + \Sigma_{i<j}\, G^{e_i - e_j}$. Pour les notations de la proposition 3.2, on aura : $\mathbf{G}' = \mathbf{G}_2$ et $\mathbf{H}' = \mathbf{D}_3 \cap \mathbf{G}_2 = \mathbf{A}_2$ comme on le voit facilement. On sait que le groupe G_2 engendré par $\mathbf{G}_2$ dans $SO(7)$ est fermé. Et si $\mathbf{G}' = \mathbf{H}' + M'$, on aura :

$$M' = G^{(1/3)(2e_1 - e_2 - e_3)} + G^{(1/3)(2e_2 - e_3 - e_1)} + G^{(1/3)(2e_3 - e_1 - e_2)}.$$

Mais M' est bien un supplémentaire de $\mathbf{D}_3$ dans $\mathbf{B}_3$ car (voir troisième partie, n^0 29) $G^{(1/3)(2e_i - e_j - e_k)} \subset G^{e_i} + G^{e_j + e_k}$, avec de plus :

$$G^{(1/3)(2e_i - e_j - e_k)} \cap G^{e_j + e_k} = 0\,;$$

les conditions de la proposition 3.2 sont donc satisfaites. Que G'/H' soit isométrique à G/H résulte aussi de la proposition 3.2 parce que la représentation adjointe de H' dans M' est irréductible puisqu'elle est transitive (transitivité classique, qui se voit d'ailleurs ici directement).

17. Conclusions de la deuxième partie.

On peut résumer la recherche des n°s 11 à 16 en la :

PROPOSITION 17.1. *Un couple admissible* $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ *tel que* rang $\mathbf{G} =$ rang $\mathbf{H}$ *est isomorphe à l'un des couples suivants :* $(\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_{n-1} \oplus \mathbf{R})$ $(n \geq 1)$, $(\mathbf{B}_n, \mathbf{D}_n)$ $(n \geq 3)$, $(\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{A}_1)$ $(n \geq 2)$, $(\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{R})$ $(n \geq 2)$, $(\mathbf{F}_4, \mathbf{B}_4)$, $(\mathbf{G}_2, \mathbf{A}_2)$ (*les inclusions de sous-algèbres étant celles précisées dans le texte et avec* $\mathbf{A}_0 = 0$, $\mathbf{C}_1 = \mathbf{A}_1$, $\mathbf{D}_3 = \mathbf{A}_3$).

De ce qu'on a vu dans le texte et de la quatrième partie, il résulte qu'il correspond à chacun des couples ci-dessus de la proposition 17.1 un espace homogène normal simplement connexe G/H avec G simplement connexe ; un tel espace est donc de plus unique à un isomorphisme près (voir n^0 3). On peut énoncer la :

PROPOSITION 17.2. *Soit V un espace homogène riemannien normal simplement connexe et à courbure strictement positive, de dimension paire. Alors V est homéomorphe à un espace riemannien symétrique compact de rang un (donc homéomorphe à l'un des espaces suivants : sphères, projectifs complexes, projectifs quaternioniens, plan projectif des octaves de Cayley). De plus V est isométrique à l'un de ces espaces, sauf lorsque V est homéomorphe à un espace projectif complexe de dimension complexe impaire, espace sur lequel, outre la métrique canonique d'espace riemannien symétrique, existe une métrique homogène normale, non symétrique (pour des précisions sur cette métrique, voir quatrième partie, corollaire* 42.1).

L'assertion concernant la parité de la dimension remplacant la condition d'égalité des rangs résulte de la proposition 6.2.

TROISIÈME PARTIE :

LES COUPLES ADMISSIBLES TELS QUE rang $\mathbf{G} =$ rang $\mathbf{H} + 1$.

18. Marche suivie.

Lorsque rang $\mathbf{G} =$ rang $\mathbf{H} + 1$, la détermination des couples admissibles est beaucoup plus longue que dans le cas rang $\mathbf{G} =$ rang $\mathbf{H}$. Les notations seront celles déjà fixées dans la première partie, n°s 8 et 9. Comme annoncé alors, nous utiliserons d'abord la condition (3.3) pour restreindre les possibilités pour les sous-algèbres $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha$; on obtiendra les propositions 24.1 et 24.3. Le proposition 24.2 permet de déterminer les couples pour lesquels x', x'' existent (langage introduit au n^0 8), ce qui est fait dans les n°s 25.

Les propositions 24.1 et 24.3 permettent de déterminer les couples pour lesquels x', x'' n'existent pas ; on a donné dans le n° 26 la liste des propriétés utilisées pour celà, reformulées de façon plus maniable (conditions 26.1 à 26.7). Dans le n° 35, on donne les conclusions obtenues, relatives aussi bien aux couples admissibles qu'aux espaces homogènes normaux simplement connexes correspondants. Remarquons ici que les conditions utilisées sur les racines ne suffisent pas toujours pour savoir si un couple est effectivement admissible ou non ; dans la quatrième partie on été rejetés les calculs permettant de lever ces indéterminations.

19. Les couples $(\widehat{\mathbf{G}}^\alpha, \widehat{\mathbf{H}}^\alpha)$; généralités.

Les notations sont celles des n°s 8 et 9 et $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ est un couple admissible tel que $\operatorname{rang} \mathbf{G} = \operatorname{rang} \mathbf{H} + 1$. Soit $\alpha \in r_T(G)$ et le couple correspondant $(\widehat{\mathbf{G}}^\alpha, \widehat{\mathbf{H}}^\alpha)$ défini au n° 9. *Le couple* $(\widehat{\mathbf{G}}^\alpha, \widehat{\mathbf{H}}^\alpha)$ *vérifie toujours* (3.3). En effet, on a vu que $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha \subset \mathbf{V}^\alpha + \mathbf{X} + G^\alpha + G^{2\alpha} + \ldots + G^{k\alpha}$; si donc $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha = \widehat{\mathbf{H}}^\alpha + M^\alpha$ est une décomposition orthogonale, comme on a vu que $\widehat{\mathbf{H}}^\alpha = \mathbf{V}^\alpha + G_H^\alpha$ et que, d'après la proposition 9.2 et les relations (8.1), on a $G^{h\alpha} \subset M$ et $G^\alpha = G_H^\alpha + G_M^\alpha$, on voit que $M^\alpha \subset M$; comme M satisfait (3.3) par hypothèse, a fortiori M^α. *Dans les* n°s 19 à 24 *nous supposerons essentiellement* α telle que $G_H^\alpha \neq 0$.

D'après le n° 4, la sous-algèbre $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha$ est quasi-compacte et d'après la proposition 9.1, elle est de rang égal à deux. La liste (4.1) montre donc, puisque $G_H^\alpha \neq 0$ entraîne $\dim \widehat{\mathbf{G}}^\alpha \geq 4$, que $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha$ est isomorphe à l'une des algèbres suivantes : $\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{R}$, $\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{C}_2$, $\mathbf{G}_2$. Dans les n°s 20 à 24 nous allons passer en revue ces différents types d'algèbre pour $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha$, en recherchant les couples $(\widehat{\mathbf{G}}^\alpha, \widehat{\mathbf{H}}^\alpha)$ vérifiant (3.3). Pratiquement, on partira du système des racines de $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha$ et l'on recherchera les droites de $\mathbf{V}^\alpha$ de $\mathbf{S}^\alpha$ qui sont possibles, c'est à dire celles vérifiant les propositions 9.3 et 9.4.

20. $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha = \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_1$ ou $\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{R}$.

Soit d'abord $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha = \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{R}$; comme $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha$ est de rang deux, que $G_H^\alpha \neq 0$ et $G^\alpha = G_H^\alpha + G_P^\alpha + G_N^\alpha$, on a pour des raisons de dimension : $G_P^\alpha = G_N^\alpha = 0$ d'où $[G_H, x] = 0$ et $[\widehat{\mathbf{H}}^\alpha, x] = 0$; et x', x'' n'existent pas, pour raison de dimension.

Soit maintenant $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha = \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_1$. On prendra une sous-algèbre de Cartan $\mathbf{S}^\alpha = \{(x_1, x_2)\}$ avec une base orthonormée correspondant à la somme

directe, c'est à dire que l'on aura pour racines λ, μ engendrant les deux idéaux composant $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha$, la base duale de la base $\{(1, 0), (0, 1)\}$. On cherche $\mathbf{V}^\alpha$ sous la forme $\mathbf{V}^\alpha = \{(at, bt)\}$ où t parcourt les réels. Les restrictions de λ, μ à $\mathbf{V}^\alpha$ doivent être telles que l'une est multiple de l'autre. Le premier cas est celui où, par exemple: $\bar{\mu} = 0$, soit $\mathbf{V}^\alpha = \{(t, 0)\}$. On a alors $\lambda(x) = 0$ et x', x'' existent. Dans ce cas, on a:

$$[G^\alpha, x] = [G^\lambda, x] = [G^\lambda, x'] = [G^\lambda, x''] = 0.$$

Dans le cas $\lambda(x)\,\mu(x) \neq 0$, la proposition 9.4 montre que $\bar{\lambda} = \pm\bar{\mu}$ avec $(\lambda, \pm\mu) \in r(G)_{\text{tord}}$; et, pour raison de dimension: $G^\alpha_N = 0$. On peut préciser comment $\widehat{\mathbf{H}}^\alpha$ est incluse dans $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha$, mais nous n'en aurons pas besoin ici (voir n° 38, démonstration de la proposition 38.2).

21. $\widehat{\mathbf{G}}^\alpha = \mathbf{A}_2$.

Nous allons voir que celà est toujours impossible. Prenons, comme au n° 11:

$$\mathbf{S}^\alpha = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\},\ r(\mathbf{A}_2) = \{e_i - e_j\}\ \ (i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3)$$

où $\{e_i\}$ $(i = 1, 2, 3)$ est la base duale de $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$. Posons $\mathbf{V}^\alpha = \{(at, bt, ct)\}$ $(a + b + c = 0)$ où t parcourt les réels. Les restrictions à $\mathbf{V}^\alpha$ des racines de $\mathbf{A}_2$ sont: $\pm(a - b)\,t$, $\pm(b - c)\,t$, $\pm(c - a)\,t$. D'après la proposition 9.3, ces restrictions doivent être multiples entiers de l'une d'entre elles; on vérifie sans difficulté que, a un changement d'ordre de a, b, c près, les seuls cas possibles sont (cette recherche des cas possibles et celles analogues des n°s 22 et 23 peuvent être visualisées sur le diagramme de l'algèbre de Lie considérée, en remarquant que la direction de x est parallèle à celle de la droite joignant les extrémités des vecteurs racines λ, μ et que donc la direction de $\mathbf{V}^\alpha$ est perpendiculaire à cette droite; de plus, cette droite doit être le plus près possible de l'origine):

Premier cas: $a - b = b - c$. Comme $a + b + c = 0$, ceci entraîne que $\mathbf{V}^\alpha = \{(t, 0, -t)\}$, $\alpha = (a - b)\,t = at$, $x = (1/\sqrt{6})\,(1, -2, 1)$. Mais la restriction de la racine $e_1 - e_3$ à $\mathbf{V}^\alpha$ est $2\,at = 2\alpha$, donc (proposition 9.2): $G^{2\alpha} \subset N$. Mais on a $(e_1 - e_3)(x) = 0$ donc $[G^{2\alpha}, x] = 0$ ce qui contredit la condition (3.3).

Deuxieme cas: $a - b = c - b$. D'où $a = c$ et $\mathbf{V}^\alpha = \{(t, -2t, t)\}$. Mais alors $(e_1 - e_2, e_3 - e_2) \in r(G)_{\text{tord}}$ et $(e_1 - e_2) + (e_3 - e_2) \notin r(A_2)$; les conditions de la proposition 9.6 sont satisfaites; on doit donc avoir, d'après cette proposition:

$$(e_1 - e_2) - (e_3 - e_2) = e_1 - e_3 \notin r(A_2),$$

qui est une contradiction.

22. $\widehat{\mathbf{G}}^a = \mathbf{C}_2$.

On prendra $\mathbf{S}^a = \{(x_1, x_2)\}$, $\mathbf{V}^a = \{(at, bt)\}$, $r(C_2) = \{\pm e_i \pm e_j\}$ $(i, j = 1, 2)$ où $\{e_1, e_2\}$ est une base duale de la base $\{(1, 0), (0, 1)\}$. Les restrictions à $\mathbf{V}^a$ sont les : $\pm 2\,at$, $\pm 2\,bt$, $\pm (a+b)\,t$, $\pm (a-b)\,t$. A un changement de signe et la transposition de a en b près, on vérifie que les seuls cas où ces restrictions sont multiples entiers de l'une d'entre elles sont :

Premier cas : $2a = a + b$. Soit donc $a = b$ et $\mathbf{V}^a = \{t, t)\}$. Les trois racines $\lambda = 2e_1$, $\mu = 2e_2$, $\nu = e_1 + e_2$ ont même restriction à $\mathbf{V}^a$, à savoir $2\,at$. Nous allons voir que les couples correspondant $(\widehat{\mathbf{G}}^a, \widehat{\mathbf{H}}^a)$ ne sont jamais admissibles. D'après la proposition 9.5, la sous-algèbre $\widehat{\mathbf{H}}^a$ est engendrée par deux éléments h, h' nécessairement de la forme :

$$h = k(y_\lambda + y_\mu) + k'\,y_\nu\,,\ h' = k(y'_\lambda + y'_\mu) + k'\,y'_\nu \text{ avec } (y_\lambda, y'_\lambda) \in 2e_1\,,$$

$$(y_\mu, y'_\mu) \in 2e_2\,,\ (y_\nu, y'_\nu) \in e_1 + e_2\,,$$

car on a ici :

$$\lambda(x) = -\mu(x),\ \nu(x) = 0.$$

Utilisons pour $\mathbf{C}_2$ la representation linéaire fidèle du n° 39 ; on voit que, k et k' étant fixés, on a $\widehat{\mathbf{H}}^a = \{\alpha(u+v) + \beta(k(p+q) + k'\,s \mid \alpha$ réel, β complexe$\}$. Si $\widehat{\mathbf{G}}^a = \widehat{\mathbf{H}}^a + M^a$ est une décomposition orthogonale, on aura donc :

$$M^a = \{a(u-v) + er + cp + dq + fs \mid \text{a réel, } c, d, e, f$$
$$\text{complexes tels que } k(c+d) + 2k'f = 0\}.$$

Un calcul direct de crochet de matrices montre que $[p - q, s] = 0$; et on sait que $[p, q] = 0$ d'après le corollaire 5.2. On a donc $[p-q, k'(p+q) - ks] = 0$, avec $p - q \in M$ et $k'(p+q) - ks \in M$, ce qui contredit la condition (3.3). Ainsi le premier cas ne peut jamais se produire.

Deuxième cas : $2a = b - a$, d'ou $b = 3a$ et $\mathbf{V}^a = \{(t, 3t)\}$, $x = (\sqrt{3}/2, -(1/2))$. On a $\alpha = 2\,at$, et on vérifie que les autres restrictions lui sont bien multiples entiers. On verra au n° 39 que ce cas donne un couple $(\widehat{\mathbf{G}}^a, \widehat{\mathbf{H}}^a)$ admissible noté $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A}_1)$; on a ici $G^a_N = 0$, car seules les racines $2e_1$ et $e_2 - e_1$ ont pour restriction à $\mathbf{V}^a$ $2at = \alpha$, d'où $\dim G^a = 4$ avec $\dim G^a_H \geq 2$ et $\dim G^a_P \geq 2$, donc $G^a_N = 0$ d'après les formules (8.1) pour des raisons de dimension. Quant aux autres racines, leurs plans propres sont dans N d'après la proposition 9.2.

23. $\widehat{\mathbf{G}}^{\alpha} = \mathbf{G}_2$.

Nous allons voir que ce cas ne peut jamais se produire. On prendra : $\mathbf{S}^{\alpha} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, $\mathbf{V}^{\alpha} = \{(at, bt, ct)\}$ $(a + b + c = 0)$ et (voir n° 16) : $r(G_2) = \{e_i - e_j\} \cup \{(1/3)(2e_i - e_j - e_k)\}$ $(i, j\, k$ distincts, de 1 à 3). On vérifie que, à une permutation près de a, b, c, seulsles cas suivants sont possibles :

Premier cas : $(1/3)(2b - a - c) = a - b$. D'où : $a = 2b$, $c = -3b$ et $\alpha = bt$. La restriction de $\pi = (1/3)(2e_1 - e_2 - e_3)$ (resp. $\varrho = e_2 - e_3$) à $\mathbf{V}^{\alpha}$ est donc $2\,bt = 2\alpha$ (resp. $4\,bt = 4\alpha$), d'où (proposition 9.2) :

$G^{\pi} \subset N$ et $G^{\varrho} \subset N$. Mais $\pi + \varrho \notin r(G_2)$ et $\pi - \varrho \notin r(G_2)$ donc (corollaire 5.2) :

$[G^{\pi}, G^{\varrho}] = 0$, contredisant la condition (3.3).

Deuxième cas : $(1/3)(2b - a - c) = (1/3)(2a - b - c)$. D'où :

$$a = b,\ c = -2a,\ \alpha = at \text{ et } x = (1/\sqrt{2}, -(1/\sqrt{2}), 0).$$

La restriction de $\pi = (1/3)(e_1 + e_2 - 2e_3)$ à $\mathbf{V}^{\alpha}$ est $2\,at = 2\alpha$, donc (proposition 9.2) :

$$G^{\pi} \subset N. \text{ Mais } \pi(x) = (1/3)(e_1 + e_2 - 2e_3)(x) = 0$$

d'où $[G^{\pi}, x] = 0$, ce qui contredit (3.3).

Troisième cas : $(1/3)(a + c - 2b) = (1/3)(2c - a - b)$. D'où :

$$a = 0, b = -c,\ \alpha = bt \text{ et } x = (1/\sqrt{6})(-2, 1, 1).$$

La restriction de $\pi = e_2 - e_3$ à $\mathbf{V}^{\alpha}$ est $2\,bt = 2\alpha$ donc $G^{\pi} \subset N$; mais comme $\pi(x) = (e_2 - e_3)(x) = 0$, on aurait $[G^{\pi}, x] = 0$ contredisant ainsi (3.3).

24. Les couples $(\widehat{\mathbf{G}}^{\alpha}, \widehat{\mathbf{H}}^{\alpha})$: conclusions.

Les hypothèses et notations des n^os^ suivants 24 à 34 seront toujours celles des n°s 8 et 9 et des précédents. De plus, *on supposera dans les* n°s 24 à 34 *essentiellement que* $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ *est admissible.* Soit $\lambda \in r(G)$ et $\alpha = \overline{\lambda}$ sa restriction à $\mathbf{T}$; on peut obtenir des restrictions sur λ grâce à l'introduction de la sous-algèbre correspondante $\widehat{\mathbf{G}}^{\alpha}$ et les résultats que l'on vient d'obtenir dans les n°s 20 à 23. On obtient ainsi les :

PROPOSITION 24.1. *Soit $\lambda \in r(G)$ telle que $G_H^\lambda \neq 0$. Alors $G_N^\lambda = 0$.*

Si l'on pose $\alpha = \lambda$, on a donc $G_H^\alpha \supset G_H^\lambda \neq 0$; mais les résultats des n°s 20 à 23 montrent que cette hypothèse entraîne, dans tous les cas possibles :

$$G_N^\alpha = 0 \text{ ; d'où : } G_N^\lambda \subset G_N^\alpha = 0.$$

COROLLAIRE 24.1. *Soit $\lambda \in r(G)$ telle que $\lambda \notin r(G)_{\text{tord}}$. Alors : soit $\lambda \in r(G)_H$, soit $\lambda \in r(G)_N$. Autrement dit : $r(G)_H \cup r(G)_{\text{tord}} \cup r(G)_N$ est une partition de $r(G)$.*

En effet, on vient de voir que $G_H^\lambda \neq 0$ entraîne $G_N^\lambda = 0$. Si de plus $\lambda \notin r(G)_{\text{tord}}$, c'est que $G_P^\lambda = 0$ par définition ; on a donc dans ce cas $G^\lambda = G_H^\lambda \subset \mathbf{H}$, soit $\lambda \in r(G)_H$. Si enfin $G_H^\lambda = 0$, alors $G_P^\lambda = 0$ d'après la proposition 9.2, d'où $G^\lambda = G_N^\lambda \subset N$, soit $\lambda \in r(G)_N$.

PROPOSITION 24.2. *Si $r(G)_{\text{tord}} \neq \varnothing$, alors x', x'' n'existent pas.*

En effet, les n°s 20 à 23 montrent que le seul cas possible où x', x'' existent est celui du n^0 20 lorsque $\lambda(x) = 0$ donc alors $\lambda \notin r(G)_{\text{tord}}$; mais si x', x'' existent, ceci doit avoir lieu pour toutes les racines parcourant $r(G)$, donc alors $r(G)_{\text{tord}} = \varnothing$.

COROLLAIRE 24.2. *Si x', x'' existent alors $r(G)_{\text{tord}} = \varnothing$ et $[\mathbf{H}, \mathbf{X}] = 0$; l'espace vectoriel $K = \mathbf{H} \oplus \mathbf{X}$ de $\mathbf{G}$ est une sous-algèbre de $\mathbf{G}$ qui est somme directe de ses deux idéaux $\mathbf{H}$ et $\mathbf{X}$, avec $\mathbf{X}$ isomorphe à $\mathbf{A}_1$. Si x', x'' n'existent pas mais si $r(G)_{\text{tord}} = \varnothing$, on a encore $K = \mathbf{X} \oplus \mathbf{H}$ sous-algèbre de $\mathbf{G}$, somme directe de ses deux idéaux $\mathbf{H}$ et $\mathbf{X}$, avec ici $\mathbf{X}$ isomorphe à $\mathbf{R}$.*

D'après le corollaire 24.1 : $\mathbf{H} = \mathbf{T} + \Sigma_{\lambda \in r(G)_H} G^\lambda$, avec $[G^\lambda, x] = 0$ pour tout $\lambda \in r(G)_H$ comme on vient de le voir ; on a de plus $[G^\lambda, x'] = [G^\lambda, x''] = 0$ d'après le n^0 20, donc $[G^\lambda, \mathbf{X}] = 0$ d'où $[\mathbf{H}, \mathbf{X}] = 0$. On a vu au n^0 8 que, lorsque x', x'' existent, on avait $\mathbf{X}$ isomorphe à $\mathbf{A}_1$. La deuxième partie du corollaire est évidente.

PROPOSITION 24.3. *Soit $(\lambda, \mu) \in r(G)_{\text{tord}}$. Alors : 1) $\lambda - \mu \notin r(G)$; 2) si $\lambda + \mu \in r(G)$, c'est que $G^\lambda + G^\mu$ engendre dans G une sous-algèbre isomorphe à $\mathbf{C}_2$.*

D'après le corollaire 24.2, on est d'abord sûr que x', x'' n'existent pas ; donc $\lambda - \mu \notin r(G)$ d'après la proposition 9.7. Si $\lambda + \mu \in r(G)$, le seul cas non éliminé qui est tel parmi les n°s 20 à 23 est le deuxième cas du n^0 22.

25. Les couples admissibles $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ tels que rang $\mathbf{G}$ = rang $\mathbf{H} + 1$ et $r(\mathbf{G})_{\text{tord}} = \varnothing$.

Dans ce n^0, nous allons déterminer tous les couples admissibles tels que rang $\mathbf{G}$ = rang $\mathbf{H} + 1$ et $r(G)_{\text{tord}} = \varnothing$, hypothèses que nous ne re-

péterons plus donc ce n°. Le corollaire 24.2 introduit la sous-algèbre $\mathbf{K} = \mathbf{H} \oplus \mathbf{X}$ de $\mathbf{G}$ qui est une somme directe de deux idéaux $\mathbf{H}$, $\mathbf{X}$ orthogonaux de $\mathbf{K}$, et $\mathbf{X}$ étant isomorphe, soit à $\mathbf{R}$, soit à $\mathbf{A}_1$. Il est bien évident donc que rang $\mathbf{G} =$ rang $\mathbf{K}$. Considérons le couple $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$; la décomposition $\mathbf{G} = \mathbf{K} + N$ en est une décomposition orthogonale, par ce que $\mathbf{G} = \mathbf{H} + P + N$ avec $P = \mathbf{X} + [\mathbf{H}, x]$, mais ici $[\mathbf{H}, x] = 0$ donc $\mathbf{G} = \mathbf{H} + \mathbf{X} + N$. Puisque $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ vérifie (3.3), a fortiori $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ vérifiera (3.3) puisque $N \subset M$. Mais on n'est pas sûr que $[\mathbf{G}, \mathbf{K}]$ vérifie (3.4); nous distinguerons donc deux cas :

Premier cas: $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ *vérifie* (3.4).

C'est donc que le couple $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$, par définition, est admissible si dim $N \geq 2$. Si dim $N < 2$, comme dim N est paire, c'est que $N = 0$, que $\mathbf{G} = \mathbf{K}$, $M = \mathbf{X}$ mais alors $[\mathbf{H}, \mathbf{X}] = 0$ contredit (3.4). Donc le couple $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ est toujours admissible ici; comme rang $\mathbf{G} =$ rang $\mathbf{K}$, nous connaissons tous ces couples, ils sont indiqués dans la proposition 17.1. Il ne faut retenir de la liste de la proposition 17.1 que les couples pour lesquels la sous-algèbre $\mathbf{K}$ contient un idéal isomorphe, soit à $\mathbf{R}$, soit à $\mathbf{A}_1$, c'est à dire les couples: $(\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_{n-1} \oplus \mathbf{R})$ $(n \geq 1)$, $(\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{A}_1)$ $(n \geq 2)$, $(\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{R})$ $(n \geq 2)$. Dans ces couples, le choix de $\mathbf{H}$ et $\mathbf{X}$ est précis, sauf dans le trois couples: $(\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{R})$, $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_1)$, $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{R})$. Examinons d'abord ces trois cas particuliers: dans le premier couple, on ne peut pas prendre $\mathbf{X} = \mathbf{A}_1$ et $\mathbf{H} = \mathbf{R}$, pas plus qu'on ne peut le faire dans le troisième couple. En effet, le complément orthogonal N contiendrait alors le complément orthogonal de $(\mathbf{A}_2, \mathbf{S})$ (resp. $(\mathbf{C}_2, \mathbf{S})$) (où $\mathbf{S}$ désigne une sous-algèbre de Cartan) or ces compléments orthogonaux ne vérifient pas (3.3): pour $(\mathbf{A}_2, \mathbf{S})$, c'est la proposition 36.1, pour $(\mathbf{C}_2, \mathbf{S})$, c'est le fait que $2e_1$ et $2e_2$ vérifient $2e_1 \pm 2e_2 \notin r(C_2)$ (corollaire 5.2) Il reste le couple $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_1)$, mais comme les deux idéaux isomorphes à $\mathbf{A}_1$ sont échangeables, celà est sans importance. Ainsi, ayant ôté le morceau $\mathbf{X}$, il ne reste que deux couples $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$, à savoir: $(\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_{n-1})$ $(n \geq 1)$, $(\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_{n-1})$, $(n \geq 2)$. Ces couples sont effectivement admissibles comme nous le verrons dans la quatrième partie: propositions 37.2 et 38.1; les espaces homogènes correspondants sont toujours homéomorphes à des sphères, mais nous verrons que les structures riemanniennes normales correspondantes ne sont pas à courbure constante: corollaire 42.1.

Deuxième cas: $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ *ne vérifie pas* (3.4).

Introduisons l'idéal $\mathbf{A}$ de $\mathbf{K}$ et de $\mathbf{G}$ défini par: $\mathbf{A} = \{u \in \mathbf{K} \mid [u, N] = 0\}$. (voir n° 3). Remarquons d'abord que:

$$\mathbf{A} \cap \mathbf{X} = 0 \text{ et } \mathbf{A} \cap \mathbf{H} = 0. \tag{25.1}$$

En effet: $\mathbf{A} \cap \mathbf{X} \neq 0$ contredirait (3.3) pour $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$, tandis que $\mathbf{A} \cap \mathbf{H} \neq 0$ contredirait (3.4) pour le coupe $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$.

Maintenant remarquons que $\mathbf{A}$ est un idéal non trivial de la somme directe $\mathbf{K} = \mathbf{H} \oplus \mathbf{X}$; décomposons $\mathbf{H}$ en somme directe d'idéaux deux à deux orthogonaux : $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{H}_n$, pris parmi la liste (4.1). Comme $\mathbf{X}$ est isomorphe à $\mathbf{R}$ ou à $\mathbf{A}_1$, c'est que $\mathbf{X}$ figure aussi parmi la liste (4.1). D'après (25.1), la projections de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{X}$ n'est pas nulle et $\mathbf{X}$ n'est pas contenu dans $\mathbf{A}$, on peut donc appliquer la proposition 4.1 d'où l'on déduit que : quitte à changer d'indices, il existe $i \geq 1$ tel que $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \ldots, \mathbf{H}_i$ sont isomorphes à $\mathbf{R}$; et, évidemment, $\mathbf{X}$ est isomorphe à $\mathbf{R}$. En premier lieu x', x'' n'existent donc pas; ensuite, $\mathbf{A}$ est abélienne; on va en déduire que $\dim \mathbf{A} = 1$. En effet, comme $\mathbf{A}$ est abélienne, elle est contenue dans toute sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{S}$ de $\mathbf{K}$; dans $\mathbf{S}$, on a $\mathbf{T} = \mathbf{S} \cap \mathbf{H}$ par construction et $\mathbf{T}$ est un hyperplan de $\mathbf{S}$. Si on avait $\dim \mathbf{A} \geq 2$, la formule d'algèbre linéaire classique entraînerait $\dim (\mathbf{T} \cap \mathbf{A}) \geq 1$, contredisant ainsi (25.1).

Posons $\mathbf{G} = \mathbf{G}' \oplus \mathbf{A}$ et $\mathbf{K} = \mathbf{K}' \oplus \mathbf{A}$ (décompositions orthogonales, $\mathbf{A}$ isomorphe à $\mathbf{R}$). On aura $\mathbf{G}' = \mathbf{K}' + N$, puisque $\mathbf{G} = \mathbf{K} + N$ *et le couple* $(\mathbf{G}', \mathbf{K}')$ *est admissible.* Parce que N est son complément orthogonal et que (3.4) est satisfaite par construction même de $\mathbf{A}$, à l'exception du cas $\dim N = 0$ c'est à dire $\mathbf{G} = \mathbf{K}$ qui contredit (3.4) pour $(\mathbf{G}, \mathbf{H}) = (\mathbf{H} \oplus \mathbf{X}, \mathbf{H})$ alors. Posons $\mathbf{U} = \mathbf{H}_1 \oplus \mathbf{H}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{H}_i$ en sorte que $\mathbf{U}$ est un idéal abélien de $\mathbf{H}$ et définissons $\mathbf{B}$ par la décomposition orthogonale $\mathbf{X} \oplus \mathbf{U} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$, écriture qui a un sens d'après la proposition 4.1. On voit que $\mathbf{B}$ est un idéal de $\mathbf{K}'$, idéal qui est abélien et de dimension supérieure ou égale à un. Le couple admissible $(\mathbf{G}', \mathbf{K}')$ est tel que $\operatorname{rang} \mathbf{G}' = \operatorname{rang} \mathbf{K}'$ et figure donc dans la proposition 17.1; il doit de plus être tel que $\mathbf{K}'$ contienne un idéal abélien non trivial. Les seuls couples pouvant éventuellement convenir sont : $(\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_{n-1} \oplus \mathbf{R})$ $(n \geq 1)$, $(\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{R})$ $(n \geq 2)$. D'où des couples $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ de la forme : $(\mathbf{A}_n \oplus \mathbf{A}, \mathbf{A}_{n-1} \oplus \mathbf{U})$ $(n \geq 1)$, $(\mathbf{C}_n \oplus \mathbf{A}, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{U})$ $(n \geq 2)$, le morceau $\mathbf{U}$ de $\mathbf{H}$, qui est à une dimension puisque $\dim \mathbf{B} = 1$, devant être pris dans le morceau abélien $\mathbf{A} \oplus \mathbf{R}$ de $\mathbf{G}$ (où $\mathbf{R}$ est celui figurant dans les couples $(\mathbf{G}', \mathbf{K}')$ de départ)). On verra dans les n°s 37 et 38 que ces couples dépendent du paramètre ξ indiquant comment la droite $\mathbf{U}$ est située dans le plan $\mathbf{A} \oplus \mathbf{R}$ et sont tous admissibles; on les note $(\mathbf{A}_n \oplus \mathbf{R}, \mathbf{A}_{n-1} \oplus \mathbf{R})_\xi$ $(n \geq 1)$, $(\mathbf{C}_n \oplus \mathbf{R}, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{R})_\xi$ $(n \geq 2)$. Les espaces homogènes correspondants sont toujours homéomorphes à des sphères mais les structures riemanniennes homogènes normales correspondantes ne sont pas à courbure constante (corollaire 42.1).

26. Généralités sur les couples admissibles (G, H) tels que rang G = rang H + 1 et $r(G)_{\text{tord}} \neq \varnothing$.

Dans toute la suite de cette troisième partie, les hypothèses seront maintenant les suivantes : rang $\mathbf{G} = \text{rang}\,\mathbf{H} + 1$ et $r(G)_{\text{tord}} \neq \varnothing$. D'après la proposition 24.2 on est sûr alors que x', x'' n'existent pas ; on ne le redira pas. D'après la proposition 9.4, il existe au moins un couple (λ, μ) tel $(\lambda, \mu) \in r(G)_{\text{tord}}$.

La détermination des couples admissibles satisfaisant ces conditions est basée sur les propriétés que doit satisfaire un couple (λ, μ) tel que $(\lambda, \mu) \in r(G)_{\text{tord}}$. Ces propriétés ont été rencontrées dans les n°s 8, 9, 24 ; pour la commodité du lecteur, nous les regroupons ici avec un n^0: (26.1) à (26.7) ; *il s'agit essentiellement d'un couple* $(\lambda, \mu) \in r(G)_{\text{tord}}$.

(26.1) quel que soit le nombre réel k : $k(\lambda - \mu) \notin r(G)$.

(26.2) si $\lambda + \mu \in r(G)$, alors $G^\lambda + G^\mu$ engendre une sous-algèbre isomorphe à $\mathbf{C}_2$.

(26.3) si $(\lambda', \mu') \in r(G)_{\text{tord}}$, alors $\lambda' - \mu'$ est proportionnelle à $\lambda - \mu$.

(26.4) $r(G)_H \cup r(G)_{\text{tord}} \cup r(G)_N$ est une partition de $r(G)$.

(26.5) $r(G)_H = \{\pi \in r(G) \mid \pi(x) = 0\}$, $r(G)_N = \{\pi \in r(G), \pi \notin r(G)_{\text{tord}} \mid \pi(x) \neq 0\}$.

(26.6) si $\pi, \varrho \in r(G)_N$, alors $\pi + \varrho \in r(G)$ ou $\pi - \varrho \in r(G)$.

(26.7) si, quel que soit $(\lambda, \mu) \in r(G)_{\text{tord}}$, on a $\lambda + \mu \notin r(G)$ et $\|\lambda\| = \|\mu\|$, alors $\mathbf{K} = \mathbf{H} + \mathbf{X} + [\mathbf{H}, x]$ est une sous-algèbre de $\mathbf{G}$, de rang égal à celui de $\mathbf{G}$ et le couple $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ vérifie (3.3). Le couple $(\mathbf{K}, \mathbf{H})$ est symétrique.

La condition (26.1) provient de la proposition 9.7, parce que la restriction de $k(\lambda - \mu)$ à $\mathbf{T}$ est nulle, puisque $\bar{\lambda} = \bar{\mu}$. La condition (26.2) est la proposition (24.3). La condition (26.3) exprime que les deux formes linéaires sur $\mathbf{S}$: $\lambda - \mu$ et $\lambda' - \mu'$, devant s'annuler sur le même hyperplan $\mathbf{T}$ de $\mathbf{S}$, sont nécessairement proportionnelles. La condition (26.4) est le corollaire 24.1. La condition (26.5) est une autre formulation de (26.4), vus la définition de $r(G)_{\text{tord}}$ et le fait que la condition (3.3) entraîne que $\pi(x) = 0$ implique $\pi \notin r(G)_N$ (car sinon $[G^\pi, x] = 0$ contredisant (3.3)). La condition (26.6) est la condition (10.1). La condition (26.7) est la proposition (9.9).

La marche suivie est celle-ci : dans le n^0 27, on étudie d'abord le cas où $\mathbf{G}$ n'est pas simple. Dans les n^{os} suivants, on passe en revue les algèbres de la liste (4.1) ; pour chaque type, on cherche d'abord un couple $(\lambda, \mu) \in r(G)_{\text{tord}}$ satisfaisant les condition (26.1) et (26.2). On fixe alors ce

couple et on recherche alors tous les autres couples possibles (λ', μ'), ce qui donne le sous ensemble $r(G)_{\text{tord}}$ de $r(G)$ (on applique pour celà (26.3)). On cherche alors à déterminer $r(G)_N$ afin de pouvoir appliquer (26.6) comme dans la deuxième partie. Mais ceci n'est possible aisément que si x est connu ; dans le cas où l'on travaille avec une base orthormée de la sous algèbre de Cartan $\mathbf{S}$, en utilisant l'isomorphisme entre $\mathbf{S}$ et son dual que définit le produit scalaire, on voit que x est défini en direction comme étant parallèle à $\lambda - \mu$. C'est la méthode employée pour toutes les algèbres simples de la liste (4.1) à l'exception de $\mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8$ (pour ces dernières, on court-circuite la méthode précédente qui serait trop pénible à l'aide de la condition (26.7) ; ceci est nécessaire, comme on l'a vu à la fin du n° 10, parce que les systèmes de racines de $\mathbf{E}_6, \mathbf{E}_7, \mathbf{E}_8$ sont beaucoup plus agréables écrits dans des bases non orthonormées). Quand $r(G)_N$ sera connu, on verra les couples pour lesquels (26.6) est satisfaite ; il restera à déterminer ceux qui sont effectivement admissibles : les calculs correspondant ont été rejetés dans la quatrième partie.

27. G non simple.

Par hypothèse : $\mathbf{G} = \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2$ où $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ sont deux idéaux non triviaux de $\mathbf{G}$ tels que $\langle \mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2 \rangle = [\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] = 0$. D'après le n° 6, on a une partition $r(G) = r(L_1) \cup r(L_2)$. Pour le couple $(\lambda, \mu) \in r(G)_{\text{tord}}$, deux cas seulement sont donc possibles (à la transposition de 1 en 2 près) :

Premier cas : $\lambda, \mu \in r(L_1)$.

Nous allons montrer que ce cas ne peut jamais se produire. On a vu au n° 6 que la sous algèbre de Cartan $\mathbf{S}$ de $\mathbf{G}$ s'écrit $\mathbf{S} = \mathbf{S} \cap \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{S} \cap \mathbf{L}_2$, où $\mathbf{S} \cap \mathbf{L}_1$ (resp. $\mathbf{S} \cap \mathbf{L}_2$) est une sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{L}_1$ (resp. $\mathbf{L}_2$). De $\lambda, \mu \in r(L_1)$ on déduit $(\lambda - \mu)(\mathbf{S} \cap \mathbf{L}_2) = 0$, donc $\mathbf{S} \cap \mathbf{L}_2 \subset \mathbf{T}$ et $x \in \mathbf{L}_1$ De $\mathbf{S} \cap \mathbf{L}_2 \subset \mathbf{T} \subset \mathbf{H}$, on déduit que les racines de $\mathbf{L}_2$ forment une partition : $r(L_2) = r(L_2)_H \cup r(L_2)_M$. Mais $x \in \mathbf{L}_1$ entraîne $[x, \mathbf{L}_2] = 0$, donc la condition (3.3) entraîne $r(L_2)_M = \emptyset$, soit donc $\mathbf{L}_2 \subset \mathbf{H}$ et $M \subset \mathbf{L}_1$. Mais on alors $[\mathbf{L}_2, M] \subset [\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] = 0$ ce qui contredit (3.4).

Deuxième cas : $\lambda \in r(L_1)$ *et* $\mu \in r(L_2)$.

LEMME 1. $r(G)_{\text{tord}} = \{\pm \lambda\} \cup \{\pm \mu\}$.

Soit (λ', μ') un autre couple appartenant à $r(G)_{\text{tord}}$. D'après (26.3) : $\lambda' - \mu' = k(\lambda - \mu)$, avec $\lambda \in r(L_1)$, $\mu \in r(L_2)$. La sous-algèbre de Cartan $\mathbf{S}$ étant somme directe de ses intersection avec $\mathbf{L}_1$ et $\mathbf{L}_2$, et ces dernières étant des sous-algèbres de Cartan de $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ respectivement. il en est de même pour les duals, grâce au produit scalaire. Donc $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$ sont

quatre éléments du dual de $\mathbf{S}$, appartenant chacun à l'un des sous espaces de ce dual dont il est somme directe. Aucun de ces éléments n'étant nul, il est facile de voir que la relation $\lambda' - \mu' = k(\lambda - \mu)$ entraîne, à un changement de lettres près, que : $\lambda' = k\lambda$ et $\mu' = k\mu$. Pour des racines d'une algèbre de Lie, on a rappelé au n° 6 que celà entraîne $\lambda' = \pm\lambda$ et $\mu' = \pm\mu$.

De $[\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] = 0$, on déduit, grâce à (3.3), que $r(L_1)_N = \varnothing$ ou $r(L_2)_N = \varnothing$. Supposons, ce qui n'est pas une resctriction, que l'on ait $r(L_2)_N = \varnothing$, ce qu'on supposera dans toute la suite de ce n°. On a alors $r(L_2) = r(L_2)_H \cup \{\pm\mu\}$. On a le :

Lemme 2. $\mathbf{L}_2$ *est isomorphe à* $\mathbf{A}_1$

Comme $r(L_2) \supset \mu$, il suffit de prouver que rang $\mathbf{L}_2 = 1$ (cf. liste (4.1)). Supposons que rang $\mathbf{L}_2 \geq 2$, alors il existe $z \in \mathbf{S} \cap \mathbf{L}_2$ tel que $\mu(z) = 0$ et $z \neq 0$. Un tel z appartient nécessairement à $\mathbf{T}$, donc à $\mathbf{H}$; en effet, on a $\pi(z) = 0$ quel que soit $\pi \in r(L_1)$, donc $\lambda(z) = 0$ et le choix de z montre que $(\lambda - \mu)(z) = 0$, donc que z appartient à $\mathbf{T}$ par définition de $(\lambda, \mu) \in r(G)_{\text{tord}}$. Montrons maintenant que $[z, M] = 0$ ce qui contredira (3.4). Mais M est la somme, au sens des espaces vectoriels, de $\mathbf{X}$, de N et d'un sous-espace de dimensions deux de $G^\lambda + G^\mu$. On a $N = \Sigma_{\xi \in r(L_1)_N} G^\xi$, donc $[\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] = 0$ entraîne $[z, G^\xi] = 0$ quel que soit $\xi \in r(L_1)_N$, d'où $[z, N] = 0$. On a $[z, \mathbf{X}] = 0$ parce que $z \in \mathbf{S}$ et $\mathbf{X} \subset \mathbf{S}$; enfin : $[z, G^\lambda] = 0$ parce que $\lambda \in r(L_1)$ et $[z, G_\mu] = 0$ parce que z a été choisi tel que $\mu(z) = 0$. Ce qui démontre le lemme.

Du lemme 2, on déduit $r(L_2) = \{\pm\mu\} \subset r(G)_{\text{tord}}$, donc on a $r(G)_H = r(L_1)_H = \{\chi \in r(L_1) \mid \chi(x) = 0\}$ d'après (26.5). Quelle que soit $\chi \in r(G)_H$, on a donc $(\lambda \pm \chi)(x) = \lambda(x) \neq 0$; si on avait en plus $\lambda \pm \chi \in r(G)$, on aurait donc $\lambda \pm \chi \in r(G)_{\text{tord}}$ d'après (26.5), contredisant le lemme 1, c'est donc que $\lambda \pm \chi \notin r(G)$, d'où (corollaire 52.2): $[G^\lambda, G^\chi] = 0$ quel que soit $\chi \in r(G)_H$ (à vrai dire, il resterait la possibilité $G^{\lambda \pm \chi} \subset N$, mais elle est impossible parce que, d'après (24,1): $G^\lambda \subset \mathbf{H} + P$ donc $[G^\lambda, G^\chi] \subset [G^\chi, \mathbf{H} + [\mathbf{H}, x]] \subset [G^\chi, \mathbf{H}] + [G^\chi, [\mathbf{H}, x]] \subset \mathbf{H} + [x, [\mathbf{H}, G^\chi]] \subset \mathbf{H} + [x, \mathbf{H}]$). Posons alors $\mathbf{K} = \mathbf{B} \oplus \mathbf{D}$, où $\mathbf{B}$ est la sous-algèbre de $\mathbf{G}$ engendrée par G^λ et $\mathbf{D}$ la sous-algèbre engendrée par $\Sigma_{\chi \in r(G)_H} G^\chi$; on a donc $[\mathbf{B}, \mathbf{D}] = 0$. La sous-algèbre $\mathbf{B}$ est isomorphe à $\mathbf{A}_1$. L'on a : $\mathbf{L}_1(\mathbf{S} \cap \mathbf{L}_1) + G^\lambda + N + \Sigma_{\chi \in r(G)_H} G^\chi$ *d'où l'on déduit que* $\mathbf{L}_1 = (\mathbf{B} \oplus \mathbf{D}) + N$, affirmation qui est évidente pour la partie de $\mathbf{L}_1$ constitué des plans propres relatifs au racines; il reste seulement à montrer que $\mathbf{S} \cap \mathbf{L}_1 \subset (\mathbf{B} + \mathbf{D})$. Or, d'après la proposition 5.2, $\mathbf{B} \oplus \mathbf{D}$ contient par construction de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{D}$, la sous-algèbre $\mathbf{T}'_1$ de $\mathbf{S} \cap \mathbf{L}_1$ engendrée par $[G^\lambda, G^\lambda]$ et les $[G^\chi, G^\chi]$ où χ parcourt $r(L_1)_H$; comme de plus

$\lambda(x) \neq 0$, on a $\dim \mathbf{T}'_1 = \dim(\mathbf{T} \cap \mathbf{L}_1) + 1$ et $\dim(\mathbf{S} \cap \mathbf{L}_1) = \dim(\mathbf{T} \cap \mathbf{L}_1 + \mathbf{X} \cap \mathbf{L}_1) \leq \dim(\mathbf{T} \cap \mathbf{L}_1) + 1$, on a donc $\mathbf{T}'_1 \subset \mathbf{S} \cap \mathbf{L}_1$ avec $\dim \mathbf{T}'_1 \geq \dim(\mathbf{S} \cap \mathbf{L}_1)$ d'où $\mathbf{T}'_1 = \mathbf{S} \cap \mathbf{L}_1$; qu'il fallait démontrer.

On a $\mathbf{H} \supset \mathbf{D}$; définissons $\mathbf{E}$ par la décomposition orthogonale $\mathbf{H} = \mathbf{D} \oplus \mathbf{E}$; alors $\mathbf{E}$ sera une sous-algèbre simple isomorphe à $\mathbf{A}_1$ de $\mathbf{V}^\lambda + \mathbf{V}^\mu + G^\lambda + G^\mu = \mathbf{L}_2 \oplus \mathbf{B}$.

LEMME 3. *Le couple* $(\mathbf{L}_1, \mathbf{B} \oplus \mathbf{D})$, *qui est tel que* rang $\mathbf{L}_1 =$ rang $(\mathbf{B} \oplus \mathbf{D})$, *est admissible, sauf dans le cas* $\mathbf{L}_1 = \mathbf{B} \oplus \mathbf{D}$.

La proposition 6.2 montre l'égalité des rangs, car dim N est paire. Comme N satisfait (3.3) puisque $N \subset M$ et M satisfait (3.3), il reste à montrer que le couple $(\mathbf{L}_1, \mathbf{B} \oplus \mathbf{D})$ satisfait (3.4). Soit $\mathbf{A}$ l'idéal de $\mathbf{L}_1$ défini par $\mathbf{A} = \{ u \in (\mathbf{B} + \mathbf{D}) \mid [u, N] = 0 \}$; comme $\mathbf{A}$ est un idéal de la somme directe $\mathbf{B} \oplus \mathbf{D}$ où $\mathbf{B}$ est simple, la proposition 4.1 entraîne que, si $\mathbf{A} \neq 0$, alors soit $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, soit $\mathbf{A} \subset \mathbf{D}$. Le cas $\mathbf{A} \subset \mathbf{D}$ est impossible parce que le couple $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ vérifie (3.4) et que $\mathbf{D} \subset \mathbf{H}$; donc $\mathbf{A} \supset \mathbf{B}$, puis $[\mathbf{B}, N] = 0$, soit $[\mathbf{G}^\lambda, N] = 0$. On a aussi $[N, G^\mu] \subset [\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] = 0$ donc $[N, G^\lambda + G^\mu] = 0$. Mais M contient un élément non nul de $G^\lambda + G^\mu$, ce qui contredit (3.3) et démontre le lemme.

En résumé, nous avons $\mathbf{G} = \mathbf{L}_1 \oplus \mathbf{L}_2$ avec $\mathbf{L}_2$ isomorphe à $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{H} = \mathbf{D} \oplus \mathbf{E}$, somme directe avec $\mathbf{E}$ isomorphe à $\mathbf{A}_1$ et de plus $\mathbf{E}$ sous-algèbre de $\mathbf{L}_2 \oplus \mathbf{B}$, où $\mathbf{B}$ isomorphe à $\mathbf{A}_1$; le couple $(\mathbf{L}_1, \mathbf{B} \oplus \mathbf{D})$ est admissible et tel que rang $\mathbf{L}_1 =$ rang $(\mathbf{B} \oplus \mathbf{D})$, sauf dans le cas $\mathbf{L}_1 = \mathbf{B} \oplus \mathbf{D}$. Regardons d'abord ce premier cas : $N = 0$, donc $M \subset G^\lambda + G^\mu$, mais $[\mathbf{D}, G^\lambda + G^\mu] = 0$ qui, d'après (3.4), entraîne $\mathbf{D} = 0$. D'où $\mathbf{G} = \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_1$ et $\mathbf{H}$ est une sous-algèbre isomorphe à $\mathbf{A}_1$ de $\mathbf{G}$; la position de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{G}$ est bien définie comme on le verra dans la quatrième partie (proposition 38.2 : démonstration) par un paramètre ξ qui est le rapport des normes $\|\lambda\|$ et $\|\mu\|$ de λ et μ ; on note un tel couple $(\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_1)_\xi$; on verra que ces couples sont tous admissibles (proposition 38.2). Supposons maintenant le couple $(\mathbf{L}_1, \mathbf{B} \oplus \mathbf{D})$ admissible ; un seul couple, dans la proposition 17.1, peut convenir, c'est $(\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{A}_1)$ $(n \geq 2)$; on voit que $\mathbf{D}$ est bien définie comme étant le morceau $\mathbf{C}_{n-1}$, sauf apparemment dans le cas $n = 2$, mais alors les deux sous-algèbres isomorphes à $\mathbf{A}_1$ dans $\mathbf{C}_2$ sont échangeables. Remarquer que le cas précédent n'est autre que celui-ci, prolongé pour $n = 1$. Il reste seulement à fixer la position du morceau $\mathbf{E}$ de $\mathbf{H}$ dans $\mathbf{L}_2 \oplus \mathbf{B} = \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_1$; nous avons vu ci-dessus que cette position dépendait d'un paramètre ξ, les couples correspondants sont notés $(\mathbf{C}_n \oplus \mathbf{A}_1, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{A}_1)_\xi$; on verra (proposition 38.2) qu'ils sont tous admissibles, les espaces homogènes étant homéomorphes aux sphères S_{4n-1} ; par contre, les structures riemanniennes homogènes normales associées ne sont pas à courbure constante (corollaire 42.1).

28. $\mathbf{G} = \mathbf{A}_n$ $(n \geq 1)$.

Même système de racines $r(A_n)$ et mêmes notations qu'au n⁰ 11. Pour le couple $(\lambda, \mu) \in r(A_n)_{\text{tord}}$, on doit avoir $\lambda - \mu \notin r(A_n)$ d'après (26.1), $\lambda + \mu \notin r(A_n)$ d'après (26.2), parce que deux racines quelconques de $\mathbf{A}_n$, dont la somme est encore une racine, engendrent une sous-algèbre de $\mathbf{A}_n$ isomorphe à $\mathbf{A}_2$. On doit donc d'abord avoir $n \geq 3$ et on aura, à une permutation des indices près, le couple $(\lambda, \mu) = (e_1 - e_2, e_3 - e_4)$. Le seul autre couple, au signe près, qui appartient à $r(A_n)_{\text{tord}}$, d'après la condition (26.3), est $(\lambda', \mu') = (e_1 - e_3, e_2 - e_4)$, donc on a déterminé $r(A_n)_{\text{tord}}$: $r(A_n)_{\text{tord}} = \{\pm(e_1 - e_2)\} \cup \{\pm(e_1 - e_3)\} \cup \{\pm(e_2 - e_4)\} \cup \{\pm(e_3 - e_4)\}$.

Supposons d'abord $n = 3$: d'après (26.5), on a $r(A_3)_N = \varnothing$ donc $N = 0$ et $r(A_3)_H = \{\pm(e_1 - e_4)\} \cup \{\pm(e_2 - e_3)\}$, $x = (1/2)(1, -1, -1, 1)$. On voit que dim $\mathbf{H} = 10$, ; d'autre part, les hypothèses (26.7) sont vérifiées, donc le couple $(\mathbf{G}, \mathbf{H}) = (\mathbf{K}, \mathbf{H})$ (puisque $N = 0$) est symétrique. D'après [6], il existe un couple symétrique et un seul $(\mathbf{A}_3, \mathbf{H})$ tel que dim $\mathbf{H} = 10$, c'est le couple $(\mathbf{A}_3, \mathbf{C}_2)$ correspondant à l'espace symétrique compact $SO(6)/SO(5)$ qui est de rang un ; c'est la sphère à courbure constante S_5. Le couple rencontré est donc admissible.

Supposons ensuite $n = 4$: $r(A_4)_{\text{tord}}$ est la même que dans le cas $n = 3$, et on peut prendre $x = (1/2)(1, -1, -1, 1, 0)$; alors (26.5) montre que $r(A_4)_H$ est le même que dans le cas $n = 3$ mais de plus $r(A_4)_N = \{\pm(e_i - e_5)\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. La propriété (26.7) est toujours applicable au couple $(\mathbf{K}, \mathbf{H})$ qui est le couple $(\mathbf{A}_3 \oplus \mathbf{R}, \mathbf{C}_2 \oplus \mathbf{R})$ construit à partir du couple du cas précédent en ajoutant $\mathbf{R}$; le couple $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ est isomorphe au couple canonique $\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_3 + \mathbf{R})$ comme le montre les systèmes de racines qui lui donne naissance (cf. n⁰ 11). On obtient donc un seul couple éventuellement possible : $(\mathbf{A}_4, \mathbf{C}_2 \oplus \mathbf{R})$, l'inclusion étant celle précisée ci-dessus. Nous verrons au n⁰ 41 que ce couple est effectivement admissible et que la variété correspondante, homogène, n'est pas homéomorphe à un espace riemannien symétrique compact de rang un.

Supposons enfin $n = 5$: $r(A_n)_{\text{tord}}$ étant toujours le même et $x = (1/2)(1, -1, -1, 1, 0, \ldots, 0)$, on déduit de (26.5) que $e_1 - e_5 \in r(A_n)_N$ et $e_2 - e_6 \in r(A_n)_N$, mais ceci contredit (26.6) ; ce cas est donc impossible.

29. $\mathbf{G} = \mathbf{B}_n$ $(n \geq 3)$.

Mêmes notations et même ensemble de racines qu'au n⁰ 12. A des changements d'indices et de signes près, les conditions (26.1) et (26.2) laissent subsister les seuls cas possibles suivants pour un couple $(\lambda, \mu) \in r(B_n)_{\text{tord}}$:

Premier cas : $(\lambda, \mu) = (e_1, -e_1 - e_2)$. De (26.3), on déduit :

$$r(B_n)_{\text{tord}} = \{\pm e_1\} \cup \{\pm (e_1 + e_2)\}$$

D'où, d'après (26.5) :

$$e_2 \in r(B_n)_N \text{ et } e_1 + e_3 \in r(B_n)_N \text{ (on a pris } x = (1/\sqrt{5})(2, 1, 0, \dots, 0)) ;$$

mais ceci contredit (26.6).

Deuxième cas : $(\lambda, \mu) = (e_1, -e_2 - e_3)$. De (26.3) on déduit que

$$r(B_n)_{\text{tord}} = \{\pm e_i\} \cup \{\pm (e_i + e_j)\} \ (i, j) \text{ distincts, de 1 à 3).}$$

On prendra

$$x = (1/\sqrt{3})(1, 1, 1, 0, \dots, 0) ; \text{ d'où (26.5) :}$$

$$e_1 + e_4 \in r(B_n)_N \text{ et } e_1 - e_4 \in r(B_n)_N$$

si $n \geq 4$, ce qui contredit (26.6). Il y a donc seulement à examiner le cas $n = 3$, où (26.5) montre que $r(B_3)_N = \varnothing$ et $r(B_3)_H = \{e_i - e_j\}$ (i, j distincts de 1 à 3). Il existe un couple ayant ces propriétés, c'est le couple $(\mathbf{B}_3, \mathbf{G}_2)$ correspondant à l'inclusion canonique de groupes compacts $G_2 \subset SO(7)$; pour le voir, on peut par exemple regarder ceci sur les complexifiées comme dans [13], exposé 14, p. 4-5. Réciproquement, tout couple ayant ces propriétés est isomorphe au précédent ; en effet, considérons la sous-algèbre $\mathbf{B}$ de $\mathbf{H}$ dont les racines sont les éléments de $r(B_3)_H$, elle est nécessairement isomorphe à $\mathbf{A}_2$ et coincide avec la sous algèbre canonique $\mathbf{A}_2$ de $\mathbf{G}_2$. D'autre part, un élément de $\mathbf{H}$, de norme égale à un et appartenant à $G^{e_1} + G^{e_2+e_3}$ est bien déterminé, d'après le corollaire 9.5, à un automorphisme intérieur près de $\mathbf{G}$, automorphisme qui laisse invariante par sa construction (voir démonstration du corollaire 9.5) la sous algèbre $\mathbf{B}$ globalement. Mais il est facile de voir que, au sens des algèbres de Lie, $\mathbf{B}$ et l'élément en question engendrent $\mathbf{H}$ toute entière, ce qui démontre l'isomorphisme annoncé. On trouve donc au plus un couple possible : $(\mathbf{B}_3, \mathbf{G}_2)$; ce couple est admissible, car il est classique que la représentation adjointe de $\mathbf{G}_2$ dans M engendre un groupe de rotations de M qui est transitif sur les couples orthonormés de M. Ce groupe conservant la courbure de la structure riemannienne homogène normale correspondant au couple considéré, cette structure riemannienne sera donc a courbure constante et le couple $(\mathbf{B}_3, \mathbf{G}_2)$ admissible. La variété correspondante est la sphère S_7 comme on le voit en appliquant la proposition 3.2.

Troisième cas : $(\lambda, \mu) = (e_1 + e_2, -e_3 - e_4)$ $(n \geq 4)$. Supposons d'abord $n \geq 5$ et montrons qu'aucun couple correspondant ne peut être admissible.

On peut prendre $x = (1/2)(1, 1, 1, 1, 0,..., 0)$ d'où ((26.3)) : $r(B_n)_{\text{tord}} = \{\pm(e_i + e_j)\}$ (i, j) distincts, de 1 à 4). Puis ((26.3)) : $e_1 + e_5 \in r(B_n)_N$ et $e_1 - e_5 \in r(B_n)_N$, contredisant (26.6). Supposons désormais $n = 4$; on a ((26.5)) : $r(B_4)_H = \{e_i - e_j\}$ $(i, j$ distincts, de 1 à 4) et $r(B_4)_N = \{\pm e_i\}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. La propriété (26.7) est applicable ; le couple $(\mathbf{G}, \mathbf{K})$ est isomorphe au couple $(\mathbf{B}_4, \mathbf{D}_4)$ correspondant à l'inclusion de groupes classiques $SO(8) \subset SO(9)$. Le couple $(\mathbf{K}, \mathbf{H})$ est symétrique et de [6], p. 409-412 on déduit que ce couple est isomorphe au couple $(\mathbf{D}_4, \mathbf{B}_3)$ correspondant à l'inclusion de groupes classiques $SO(7) \subset SO(8)$, mais cet isomorphisme est extérieur et ne peut pas se prolonger à $\mathbf{B}_4$, parce que nous allons voir que le couple $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ n'est pas celui correspondant à l'inclusion de groupes $SO(7) \subset SO(9)$, dont l'espace homogène n'est pas la sphère S_{15}. Le couple $(\mathbf{B}_4, \mathbf{H})$ ayant les propriétés de racines ci-dessus est unique à un isomorphisme près : démonstration analogue à celle utilisée dans le deuxième cas ci-dessus, où la sous-algèbre $\mathbf{B}$ considérée est ici isomorphe à $\mathbf{A}_3$. Il reste à voir qu'il existe effectivement un couple ayant ce système de racines ; ceci provient de ce qu'il existe un automorphisme d'ordre trois de $\mathbf{D}_4$ transformant le couple symétrique canonique $(\mathbf{D}_4, \mathbf{B}_3)$ en un couple noté $(\mathbf{D}_4, \mathbf{B}_3^{\cdot})$, qui a pour systèmes de racines les systèmes ci-dessus. Prenons la tranformation orthogonale de $\mathbf{S}$ définie par linéarité à partir de $e_i \to (1/2)(-e_i + e_j + e_k + e_1)$, où i, j, k est une permutation de 2, 3, 4 et $e_1 \to (1/2)(e_1 - e_2 - e_3 - e_4)$ (voir [6], p. 409). Le système $r(B_4)_H$ ci-dessus devient $\{\pm e_i \pm e_j\}$ (i, j) distincts, de 2 à 4) et le système $r(B_4)_{\text{tord}}$ devient $\{\pm e_i \pm e_1\}$. Ces deux systèmes sont ceux que l'on rencontrera pour le couple canonique $(\mathbf{D}_4, \mathbf{B}_3)$ dans le n° 31, deuxième cas.

Il reste maintenant à regarder quel est l'espace homogène associé au couple $(\mathbf{B}_4, \mathbf{B}_3^{\cdot})$. C'est la sphère S_{15} ; en effet, le couple $(\mathbf{F}_4, \mathbf{B}_4)$ rencontré dans la deuxième partie au n° 15 est symétrique de rang un, donc le groupe linéaire engendré par la représentation adjointe de $\mathbf{B}_4$ dans M est transitif sur M en directions ; donc on obtient ainsi un groupe Spin (9) transitif sur S_{15} ; le groupe de stabilité d'un point a pour algèbre de Lie exactement la sous-algèbre $\mathbf{B}_3^{\cdot}$ ci dessus. Prenons en effet la direction d'un élément $z \in M$ qui appartienne à la racine $(1/2)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$ (voir n° 15). On a d'abord, comme éléments commutant avec z, ceux correspondants aux racines $e_i - e_j$ $(i, j$ distincts, de 1 à 4) parce que le corollaire 5.2 est applicable. Ensuite, d'après le n° 22, premier cas, si l'on remarque que les racines $e_1 + e_2$, $e_3 + e_4$, $(1/2)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$, $(1/2)(e_1 + e_2 - e_3 - e_4)$ engendrent une sous-algèbre de type $\mathbf{C}_2$ de $\mathbf{F}_4$, on voit qu'il existe des éléments de $G^{e_1+e_2} + G^{e_3+e_4}$ qui commutent avec z. On obtient donc un groupe de stabilité de la direction de z possédant un système de racines qui est celui du couple $(\mathbf{B}_4, \mathbf{B}_3^{\cdot})$.

Montrons maintenant que *ce couple est admissible* (quant à la structure riemannienne homogène normale ainsi obtenue sur S_{15} elle ne sera certainement pas à courbure constante d'après le corollaire 42.1). Pour le voir, on calque la démonstration de la proposition 41.1 en y remplacant les racines $e_i - e_5$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ par les racines e_i $(i = 1, 2. 3, 4)$ et les racines $e_1 - e_2$, $e_3 - e_4$ par les racines $e_1 + e_2$, $e_3 + e_4$. On a ici aussi $(V^{e_1+e_2} + V^{e_3+e_4}) \cap V^{e_1} = 0$ et deux couples symétriques successifs $(\mathbf{B}_4, \mathbf{D}_4)$ et $(\mathbf{D}_4, \mathbf{B}_3^{\cdot})$; pour ce dernier, associé à l'espace $SO(8)/SO(7)$, on a encore le fait que $SO(7)$ opère transitivement sur les couples orthonormés de P.

30. $\mathbf{C}_n$ $(n \geq 2)$.

Nous allons voir que ce n'est jamais possible à l'exception du couple $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A}_1^{\cdot})$. Mêmes notations et ensemble de racines qu'au n° 13. Les seuls couples possibles $(\lambda, \mu) \in r(C_n)_{\text{tord}}$ qui satisfont les conditions (26.1) et (26.2) sont, à un changement d'indices et de signes près :

Premier cas : $(\lambda, \mu) = (2e_1, -e_1 - e_2)$. De (26.3) on déduit que :

$$r(C_n)_{\text{tord}} = \{\pm 2e_1\} \cup \{\pm(e_1 + e_2)\}.$$

Si $n = 2$, on verra au n° 39 que l'on obtient un couple admissible noté $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A}_1^{\cdot})$, dont l'espace homogène correspondant a même cohomologie réelle que la sphère S_7 mais possède de la 2 — et de la 5-torsion (voir n° 40). Si $n \geq 3$, on prendra $x = (1/\sqrt{10})\,(3, 1, 0, \ldots, 0)$ et (26.5) entraîne :

$$e_1 - e_2 \in r(C_n)_N \text{ ainsi que } 2e_3 \in r(C_n)_N,$$

ce qui contredit (26.6).

Deuxième cas : $(\lambda, \mu) = (2e_1, -e_2 - e_3)$. D'après (26.3), on trouve

$$r(C_n)_{\text{tord}} = \{\pm 2e_1\} \cup \{\pm(e_2 + e_3)\} \cup \{\pm(e_1 + e_2)\} \cup \{\pm(e_1 + e_3)\}.$$

On aurait donc un couple $(\lambda', \mu') = (e_1 + e_2, -(e_1 + e_3)) \in r(C_n)_{\text{tord}}$, qui contredit (26.2).

Troisième cas : $(\lambda, \mu) = (e_1 + e_2, -e_3 - e_4)$. D'après (26.3), on aura :

$$r(C_n)_{\text{tord}} = \{\pm(e_i + e_j)\} \quad (i, j \text{ distincts, de 1 à 4}).$$

On peut prendre $x = (1/2)(1, 1, 1, 1, 0, \ldots, 0)$ et (26.5) montre que :

$$2e_1, 2e_2 \in r(C_n)_H \text{ contredisant (26.6).}$$

31. $\mathbf{G} = \mathbf{D}_n \, (n \geq 4)$.

Mêmes notations et ensemble de racine qu'au n⁰ 12. Les conditions (26.1) et (26.2) ne laissent subsister, à un changement d'indices et de signes près, que les couples :

Premier cas : $(\lambda , \mu) = (e_1 + e_2, - e_1 + e_2)$. Ce cas convient pour tout n. Car, d'après (26.3) : $r\,(D_n)_{\text{tord}} = \{\pm e_1 \pm e_i\}$ $(i \geq 2)$ et $r\,(D_n)_N = \varnothing$ comme le montre (26.5) en prenant $x = (1 , 0 , \dots , 0)$ car alors $r\,(D_n)_H = \{\pm e_i \pm e_j\}$ (i , j distincts, de 2 à n). La propriété (26.7) s'applique donc, le couple $(\mathbf{G} , \mathbf{H}) = (\mathbf{K} , \mathbf{H}) = (\mathbf{D}_n , \mathbf{H})$ est symétrique ; comme dim $\mathbf{H} = (2n - 1)(n - 1)$, les résultats de [6] montrent que, nécessairement, le couple considéré est isomorphe au couple $(\mathbf{D}_n , \mathbf{B}_{n-1})$ correspondant à l'inclusion de groupes classiques $SO\,(2n - 1) \subset SO\,(2n)$. Ce couple est admissible puisque c'est celui d'un espace symétrique de rang un ; l'espace homogène riemannien normal correspondant est la sphère S_{2n-1} munie de sa métrique à courbure constante.

Deuxième cas : $(\lambda, \mu) = (e_1 + e_2, - e_3 - e_4)$. On a $r\,(D_n)_{\text{tord}} = \{\pm (e_i + e_j)\}$ (i , j distincts, de 1 à 4). Si $n = 4$, on a vu au n⁰ 29, troisième cas, que le couple correspondant est admissible, il est isomorphe au couple $(\mathbf{D}_4, \mathbf{B}_3)$ du premier cas ci-dessus. Si $n \geq 5$, prenons $x = (1/2)(1,1,1,1,0,\dots,0)$ d'où ((26.5)) : $e_1 + e_5 \in r\,(D_n)_N$ et $e_1 - e_5 \in r\,(D_n)_N$, contredisant (26.6).

32. $\mathbf{G} = \mathbf{E}_n$ $(n = 6 , 7 , 8)$.

Nous allons voir qu'aucun couple correspondant n'est admissible. Mêmes notations et systèmes de racines qu'au n⁰ 14. Une remarque préliminaire est que toutes les racines de $\mathbf{E}_n$ $(n = 6 , 7 , 8)$ ont même norme comme le montrent les schémas de Dynkin correspondant : [13], exposé 13, p. 8. Soit d'abord $\mathbf{G} = \mathbf{E}_6$; des conditions (26.1) et (26.2) on déduit les seuls couples possibles, à un changement d'indices près : $(\lambda , \mu) = (e_1 - e_2 , e_3 - e_4)$, $(e_1 - e_2 , e_1 + e_2 + e_3)$, $(e_1 - e_2 , e_3 + e_4 + e_5)$, $(e_1 - e_2 , e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6)$, $(e_1 + e_2 + e_3, - (e_1 + e_4 + e_5))$. Mais tous ces couples vérifient $\lambda + \mu \notin r\,(E_6)$, donc les hypothèses de (26.7), d'après la remarque du début ; de plus le couple $(\mathbf{E}_6 , \mathbf{K})$ vérifie (3.3) donc, puisque $\mathbf{E}_6$ est simple, est admissible et doit se trouver dans la liste de la proposition 17.1, sauf si $\mathbf{K} = \mathbf{E}_6$. Comme aucun couple avec $\mathbf{G} = \mathbf{E}_6$ ne figure dans la proposition 17.1 c'est donc que $\mathbf{K} = \mathbf{E}_6$. D'après (26.7) le couple $(\mathbf{K} , \mathbf{H}) = (\mathbf{E}_6 , \mathbf{H})$ est symétrique et vérifie (3.3), c'est à dire qu'il est de rang un au sens de [6] ; les résultats de [6] montrent que ceci n'est jamais possible.

Supposons maintenant $\mathbf{G} = \mathbf{E}_7$. Les seuls couples possibles sont: $(\lambda, \mu) = (e_1 - e_2, e_3 - e_4)$, $(e_1 - e_2, e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$, $(e_1 - e_2, e_3 + e_4 + e_5 + e_6)$. Les hypothèses de (26.7) sont toutes vérifiées; et le raisonnement fait pour $\mathbf{E}_6$ s'applique sans changement, vu [6]. Ce cas n'est donc jamais possible.

Supposons enfin $\mathbf{G} = \mathbf{E}_8$. On trouve facilement comme seuls couples possibles: $(\lambda, \mu) = (e_1 - e_2, e_3 - e_4)$, $(e_1 - e_2, e_1 + e_2 + e_3)$, $(e_1 - e_2, e_3 + e_4 + e_5)$, $(e_1 + e_2 + e_3, e_1 + e_4 + e_5)$, $(e_1 + e_2 + e_3, -e_1 - e_4 - e_5)$. Les hypothèses de (26.7) sont toutes vérifiées et, vus [6] et la proposition 17.1, ce cas n'est jamais possible.

33. $\mathbf{G} = \mathbf{F}_4$.

Nous allons voir qu'aucun couple n'est admissible; notations de la deuxième partie. Les seuls couples possibles sont:

Premier cas: $(\lambda, \mu) = (e_1, -e_1 - e_2)$. De (26.3):

$$r(F_4)_{\text{tord}} = \{\pm e_1\} \cup \{\pm (e_1 + e_2)\}$$

puis

$$x = (1/\sqrt{5})(2, 1, 0, 0). \text{ D'où } ((26.5)): \ e_2 \in r(F_4)_N \text{ et } e_1 + e_3 \in r(F_4)_N,$$

contredisant (26.6).

Deuxième cas: $(\lambda, \mu) = (e_1, -e_2 - e_3)$. De (26.3):

$$r(F_4)_{\text{tord}} = \{\pm e_i\} \cup \{\pm (e_i + e_j)\} \ (i, j \text{ distincts, de 1 à 3}) \text{ et } x = (1/\sqrt{3})(1, 1, 1, 0).$$

On aura:

$$e_1 - e_2 \in r(F_4)_N \text{ et } (1/2)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \in r(F_4)_N, \text{ contredisant (26.6).}$$

Troisième cas: $(\lambda, \mu) = (e_1 + e_2, -e_3 - e_4)$. D'où:

$$r(F_4)_{\text{tord}} = \{\pm (e_i + e_j)\} \text{ et } x = (1/2)(1, 1, 1, 1).$$

On trouve :

$$(1/2)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4) \in r(F_4)_N \text{ et } (1/2)(e_1 - e_2 + e_3 + e_4) \in r(F_4)_N,$$

contredisant (26.6).

Quatrième cas : $(\lambda, \mu) = (e_1 + e_2, -(1/2)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4))$.

On prendra

$$x = (1/\sqrt{20})(3, 3, 1, 1); \text{ on aura (26.3)):}$$

$$r(F_4)_{\text{tord}} = \{\pm(e_1 + e_2)\} \cup \{\pm(1/2)(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)\}. \text{ D'où ((26.5)):}$$

$$e_1 + e_3 \in r(F_4)_N \text{ et } e_2 + e_4 \in r(F_4)_N,$$

contredisant (26.6).

Cinquième cas : $(\lambda, \mu) = (e_1 + e_2, -(1/2)(e_1 - e_2 + e_3 + e_4))$.

Soit $x(1/\sqrt{12})(3, 1, 1, 1)$ et $r(F_4)_{\text{tord}} = \{\pm(e_1 + e_i)\} \cup \{\pm(1/2)(e_1 - e_i + e_j + e_k)\}$

(i, j, k distincts, de 2 à 4). De (26.5) :

$$e_1 \in r(F_4)_N \text{ et } e_2 + e_3 \in r(F_4)_N.$$

contredisant (26.6).

34. $\mathbf{G} = \mathbf{G}_2$.

On vérifie facilement que (26.1) et (26.2) ne permettent à aucun couple $(\lambda, \mu) \in r(G_2)_{\text{tord}}$ de convenir. Il n'y a donc aucun couple admissible.

35. Conclusions de la troisième partie.

On peut résumer les résultats des n°s 19 à 34 en la :

PROPOSITION 35.1. *Un couple admissible* $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ *tel que* $\operatorname{rang}\mathbf{G} = \operatorname{rang}\mathbf{H} + 1$ *est isomorphe à l'un des couples suivants :* $(\mathbf{A}_n \oplus \mathbf{R}, \mathbf{A}_{n-1} \oplus \mathbf{R})_\xi$ $(n \geq 1)$, $(\mathbf{C}_n \oplus \mathbf{R}, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{R})_\xi$ $(n \geq 2)$, $(\mathbf{C}_n \oplus \mathbf{A}_1, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{A}_1)_\xi$ $(n \geq 1)$, $(\mathbf{D}_n, \mathbf{B}_n)$ $(n \geq 3)$, $(\mathbf{A}_4, \mathbf{C}_2 \oplus \mathbf{R})$, $(\mathbf{B}_4, \mathbf{B}_3)$, $(\mathbf{B}_3, \mathbf{G}_2)$, $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A}_1)$ (*les inclusions étant celles précisées dans le texte et où l'on a posé :* $\mathbf{A}_0 = 0$, $\mathbf{C}_1 = \mathbf{A}_1$, $\mathbf{D}_3 = \mathbf{A}_3$).

En apparence, nous avons rencontré d'autres couples admissibles que ceux-ci ; mais, pour une valeur convenable de ξ, les couples $(\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_{n-1})$ et $(\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_{n-1})$ rentrent dans la liste ci-dessus.

PROPOSITION 35.2. *Soit V un espace homogène riemannien normal simplement connexe, de dimension impaire supérieure ou égale à trois, et à courbure strictement positive. Alors V est homéomorphe à une sphère, sauf les deux exceptions suivantes : $V_1 = Sp(2)/SU(2)$ qui a même cohomologie réelle que S_7 mais possède de la 2- et de la 5-torsion et $V_2 = SU(5)/Sp(2) \times T$ dont le deuxième nombre de Betti réel est égal à un. Lorsque V est homéomorphe à une sphère, la métrique obtenue n'est pas en général à courbure constante (cf. corollaire 42.1).*

On peut réunir la proposition 17.2 et la proposition 35.2 en le :

THÉORÈME 35.1. *Soit V un espace homogène riemannien normal, simplement connexe, de dimension supérieure ou égale à deux. Supposons de plus que V soit à courbure strictement positive. Alors V est homéomorphe à un espace riemannien symétrique de rang un, à l'exception de deux variétés V_1, V_2 de dimension 7 et 13 respectivement.*

Remarquer que le fait que l'on puisse obtenir sur les sphères des métriques à courbure non constante tient à ce que les représentations adjointes de $\mathbf{H}$ dans M sont réductibles (voir proposition 3.2).

QUATRIÈME PARTIE : QUELQUES COUPLES ET QUELQUES ESPACES HOMOGÈNES PARTICULIERS.

36. Le couple $(\mathbf{A}_2, \mathbf{T})$.

Soit $\mathbf{T}$ une sous-algèbre de Cartan de l'algèbre de Lie simple compacte $\mathbf{A}_2$.

PROPOSITION 36.1 *Le couple $(\mathbf{A}_2, \mathbf{T})$ n'est pas admissible.*

On sait que l'on peut considérer $\mathbf{A}_2$ comme l'ensemble des matrices carrées A, complexes, d'ordre 3, telles que, si ${}^tA$ désigne la matrice transposée de la matrice A et $\bar{A}$ la matrice complexe conjuguée, on ait : 1) trace $(A) = 0$; 2) ${}^tA = -\bar{A}$. Le crochet étant $[A, B] = AB - BA$. On sait aussi que l'on peut prendre comme sous-algèbre de Cartan particulière la partie de $\mathbf{A}_2$ formée des matrices diagonales ; ce n'est pas une restriction pour le couple $(\mathbf{A}_2, \mathbf{T})$ puisque deux sous algèbres de Cartan sont toujours conjuguées par un automorphisme intérieur. Comme l'algèbre de Lie $\mathbf{A}_2$ est simple, les produits scalaires invariants par la représentation adjointe de $\mathbf{A}_2$ dans $\mathbf{A}_2$ sont tous proportionnels à l'un d'entre eux, celui défini par la forme de Killing et qui, en écriture de matrcies, est : $\langle A, B \rangle = -$ trace (AB).

Le complément orthogonal M de la décomposition orthogonale correspondante $\mathbf{A}_2 = \mathbf{T} + M$ est donc l'ensemble des matrices de $\mathbf{A}_2$ dont les termes de la diagonale sont nuls. On vérifie directement que les deux matrices suivantes de M:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ i & 0 & i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

commutent; comme elles sont linéairement indépendantes sur les réels, la proposition est démontrée parce que la condition (3.3) n'est pas satisfaite.

COROLLAIRE 36.1. *Soit* $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ *un couple admissible et* $\alpha, \beta, \gamma \in r(G)$ *trois racines de* $\mathbf{G}$ *telles que les plans propres correspondants* G^α, G^β, G^γ *soient tels que :* $G_\alpha \subset M$, $G^\beta \subset M$, $G^\gamma \subset M$. *Alors les trois racines* α, β, γ *ne peuvent pas vérifier à la fois les conditions suivantes :* 1) $\alpha + \beta + \gamma = 0$; 2) $\alpha - \beta \notin r(G)$, $\beta - \gamma \notin r(G)$, $\gamma - \alpha \notin r(G)$.

Considérons en effet la sous-algèbre $\mathbf{A}$ de $\mathbf{G}$ engendrée, au sens des algèbres de Lie, par $G^\alpha + G^\beta + G^\gamma$. Si les conditions énoncées sont toutes satisfaites, le corollaire 5.1 montre que : $[G^\alpha, G^\beta] \subset G^\gamma$, $[G^\beta, G^\gamma] \subset G^\alpha$, $[G^\gamma, G^\alpha] \subset G^\beta$. D'apres le n° 5, on a encore : $[G^\alpha, G^\alpha] \subset \mathbf{V}^\alpha$, $[G^\beta, G^\beta] \subset \mathbf{V}^\beta$, $[G^\gamma, G^\gamma] \subset \mathbf{V}^\gamma$. Mais, en identifiant la sous-algèbre de Cartan de $\mathbf{G}$ à son dual par le produit scalaire, de la proposition 5.2 et de $\alpha+\beta+\gamma=0$ on déduit $\mathbf{V}^\gamma \subset \mathbf{V}^\alpha + \mathbf{V}^\beta$; donc $\mathbf{A} = \mathbf{V}^\alpha + \mathbf{V}^\beta + G^\alpha + G^\beta + G^\gamma$, ce qui a montre que $\mathbf{A}$ est de rang deux, de dimension huit, donc isomorphe à $\mathbf{A}_2$ (liste (4.1)). La proposition 36.1 a exhibé deux éléments de $G^\alpha + G^\beta + G^\gamma$, donc de M, commutant, contredisant ainsi (3.3).

Il est intéressant de préciser l'ensemble $\Sigma \subset M$ formé des $x \in M$ tels qu'il existe $x' \neq 0$ avec $\langle x, x' \rangle = 0$ et $[x, x'] = 0$. Ceci fournit en effet des renseignements, soit sur les sous-algèbres de Cartan de $\mathbf{A}_2$ qui sont toutes entières contenues dans M, soit sur les géodésiques de l'espace simplement connexe associé au couple $(\mathbf{A}_2, \mathbf{T})$, Pour faire cette étude, posons :

$$x(a, b, c) = \begin{pmatrix} 0 & a & \bar{b} \\ -\bar{a} & 0 & c \\ -b & -\bar{c} & 0 \end{pmatrix}.$$

Un calcul direct de crochet montre que $[x(a, b, c), x(a', b', c')] \in M$ est équivalent à $a\bar{a}' - a'\bar{a} = b\bar{b}' - b'\bar{b} = c\bar{c}' - c'\bar{c}$ et qu'alors $[x(a, b, c), x(a', b', c')] = x(bc' - b'c, ca' - c'a, ab' - a'b)$. On en déduit facilement que $\Sigma = \{x(a, b, c) \mid a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}\}$, un élément x' tel que $\langle x, x' \rangle = [x, x'] = 0$ étant $x' = (ia, ib, ic)$ si $x = x(a, b, c)$. Le sous-ensemble Σ de M est donc un cône de dimension 4 de M dont l'intersection Φ avec la sphère unité S_5 de M est une sous-variété connexe de dimension 3 de S_5. On va en déduire la :

PROPOSITION 36.2. *Soit le couple* $(\mathbf{A}_2, \mathbf{T})$ *formé de l'algèbre simple compacte* $\mathbf{A}_2$ *et d'une sous-algèbre de Cartan* $\mathbf{T}$ *de* $\mathbf{A}_2$ *et soit* $\mathbf{A}_2 = \mathbf{T} + M$ *la décomposition orthogonale correspondante. Il existe dans* M *des sous-algèbres abéliennes de dimension deux et deux telles sous algèbres sont conjuguées entre elles par la représentation linéaire de* M *engendrée par la représentation adjointe de* $\mathbf{T}$ *dans* M.

La définition de Σ montre que Φ est stable par la représentation linéaire considérée. D'autre part, quel que soit $x \in \Phi$, on a $[h, x] \neq 0$ pour tout $h \in \mathbf{T}$, $h \neq 0$; en effet, les seuls éléments de M qui commutent avec un élément donné h de $\mathbf{T}$ sont ceux éventuels d'un plan propre correspondant de la représentation adjointe de $\mathbf{T}$ dans M ; ces trois plans propres sont les ensembles suivants : $\{x(a, 0, 0) \mid a \in C\}$, $\{x(0, b, 0) \mid b \in C\}$, $\{x(0, 0, c) \mid c \in C\}$, où C désigne le corps des nombres complexes. Mais comme $\Sigma = \{x(a, b, c) \mid a\bar{a} = b\bar{b} = c\bar{c}\}$, aucun élément $x \in \Phi$ ne peut appartenir à un de ces plan propres.

Soit $\mathrm{Orb}(z)$ l'orbite d'un point $z \in \Phi$, où z est fixé, sous l'action de la représentation linéaire $\exp(\mathrm{ad}\ \mathbf{T})$ considérée ; le fait que $[h, z] \neq 0$ pour tout $h \in \mathbf{T}$, $h \neq 0$, montre que cette orbite est une sous-variété de dimension deux de Φ. De plus $\mathrm{Orb}(z)$ est connexe puisque c'est une orbite sous l'action d'une exponentielle. Un vecteur x, qui est normal à $\mathrm{Orb}(z)$ en $u \in \Phi$ et tangent à Φ, est tel que $[x, u] = 0$; en effet, si $u \in \Phi$, il existe par définition u' tangent à Φ tel que $[u, u'] = 0$. On a donc $\langle [u, u'], \mathbf{T} \rangle = 0$, d'où, d'après la formule (2.1) : $\langle u', [u, \mathbf{T}] \rangle = 0$ ce qui entraîne $[x, u] = 0$ parce que x est proportionnel à u' puisque $\mathrm{Orb}(z)$ est une hypersurface de Φ et que le plan tangent à $\mathrm{Orb}(z)$ est $[u, \mathbf{T}]$.

Soit alors z fixé dans Φ et x quelconque dans Φ ; soit u un point de $\mathrm{Orb}(z)$ tel que la distance de x à u soit un minimum absolu pour u parcourant $\mathrm{Orb}(z)$; alors $x - u$ est orthogonal à $\mathrm{Orb}(z)$, donc, comme on vient de le voir : $[x - u, u] = 0$ soit $[x, u] = 0$. C'est bien dire que x appartient à la sous-algèbre abélienne de dimension deux de M, déduite de la sous-algèbre abélienne fixée de M qui contient z, par l'élément de $\exp(\mathrm{ad}\ \mathbf{T})$ qui transforme z en le point u de $\mathrm{Orb}(z)$.

Remarque : un théorème de conjuguaison du type de la proposition 36.2 est connu pour tous les espaces symétriques compacts, [6], p. 356. Nous en avons ici un exemple dans le cas d'un espace homogène non symétrique, la méthode de démonstration étant directement inspirée de [8]. Un tel résultat est faux en général pour un espace homogène quelconque, i. e. pour un couple $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ quelconque (G compact) ; par exemple, un couple admissible $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ pour lequel $N \neq 0$, car dire que le couple est admissible entraîne que les sous-algèbres abéliennes maximales de M sont de dimension un, d'après la condition (3.3). Dire qu'elles sont conjuguées par exp (ad $\mathbf{H}$) reviendrait à dire que cette représentation est transitive sur les directions de M donc que $M = \{x\} + [x, \mathbf{H}]$ ce qui entraîne $N = 0$. On aurait encore pu espérer que les sous-algèbres abéliennes maximales de M fussent conjuguées dans le plus grand groupe d'isométries de l'espace homogène G/H (comme c'est le cas pour $G = G/\{e\}$ d'un groupe lui-même) mais ceci est encore faux en général. Un exemple en est le couple admissible $(\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_{n-1})$, parce que (voir corollaire 42.1) les géodésiques d l'espace homogène correspondant ne sont pas de même nature, les une étant fermées, les autres ayant une adhérence de dimension deux.

37. Les couples $(\mathbf{A}_n \oplus \mathbf{R}, \mathbf{A}_{n-1} \oplus \mathbf{R})_\xi$ $(n \geq 1)$.

Les notations sont celles du n° 25.

PROPOSITION 37.1. *Quel que soit ξ, le couple $(\mathbf{A}_n \oplus \mathbf{R}, \mathbf{A}_{n-1} \oplus \mathbf{R})_\xi$ est admissible.*

Soit (u, v) un couple d'éléments de M. Si on écrit $u = u_1 + u_2$ et $v = v_1 + v_2$ avec $u_1, v_1 \in \mathbf{A}_n$ et $u_2, v_2 \in \mathbf{A} = \mathbf{R}$ (notation du n° 25), on aura : $[u, v] = [u_1, v_1] + [u_2, v_2] = [u_1, v_1]$ puisque $\mathbf{G} = \mathbf{A}_n \oplus \mathbf{A}$ est une somme directe et que $\mathbf{A} = \mathbf{R}$ est abélienne. Posons, à partir de l'inclusion canonique $\mathbf{A}_{n-1} \subset \mathbf{A}_n$ (voir n° 11) : $\mathbf{A}_n = (\mathbf{A}_{n-1} \oplus \mathbf{Y}) + N$, où $\mathbf{Y}$ est tel que $[\mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{Y}] = \langle \mathbf{A}_{n-1}, \mathbf{Y} \rangle = 0$. Le couple $(\mathbf{A}_n \oplus \mathbf{R}, \mathbf{A}_{n-1} \oplus \mathbf{R})_\xi$ est construit en sorte que $\mathbf{H} = \mathbf{A}_{n-1} \oplus \mathbf{U}$ avec $\mathbf{U} \oplus \mathbf{X} = \mathbf{Y} \oplus \mathbf{A}$; donc $M = \mathbf{N} + \mathbf{X}$. Si $u, v \in M$, alors $[u, v] \in N + \mathbf{X} \subset N + Y + \mathbf{A}$, donc $[u_1, v_1] \in N + \mathbf{Y}$. La proposition 37.1 sera donc une conséquence de la :

PROPOSITION 37.1 *Le couple $(\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_{n-1})$ est admissible.*

Avec les notations du n° 11, on a $N = \Sigma_{i \geq 2} G^{e_1 - e_i}$. L'exponentielle de la représentation adjointe de $\mathbf{A}_{n-1}$ dans N est isomorphe au groupe linéaire classique $SU(n)$ opérant dans un espace vectoriel réel de dimension $2n = \dim N$. Il est alors classique que tout couple (a, b) d'éléments de N est conjugué, par cette représentation, d'un couple de la forme $(c, d + f)$

tel que $c, d \in G^{e_1-e_2}$ et $f \in G^{e_1-e_3}$. Un couple quelconque d'éléments de M sera donc conjugué d'un couple de la forme $(kx + c, hx + d + f)$ (où x est un élément engendrant $\mathbf{Y}$) et il suffira de démontrer la proposition pour les couples de ce type parce que l'exponentielle de la représentation adjointe de $\mathbf{H}$ dans M respecte le crochet. On a :

$$[kx + c, hx + d + f] = [x, kd - hc] + [kx, f] + [c, d] + [c, f].$$

Des diverses propriétés rappelées au n° 5, on déduit :

$$[x, kd - hc] \in G^{e_1-e_2}, [x, f] \in G^{e_1-e_3}, [c, d] \in \mathbf{S}, [c, f] \in G^{e_2-e_3}$$

(où $\mathbf{S}$ désigne la sous-algèbre de Cartan fixée une fois pour toutes). Supposons que $[a, b] = 0$; on doit donc avoir :

$$[x, kd - hc] = 0, \ [kx, f] = 0, \ [c, d] = 0, \ [c, f] = 0.$$

Comme d'après (6.1) :

$$[G^{e_1-e_2}, G^{e_1-e_3}] = G^{e_2-e_3},$$

c'est que $[c, f] = 0$ entraîne $c = 0$ ou $f = 0$; mais on vérifie facilement que $[x, f] = 0$ entraîne $f = 0$ et parce que $(e_1 - e_i)(x) \neq 0$ pour tout $i \geq 2$, puisque on peut prendre $x = (n + n^2)^{-(1/2)}(-n, 1, 1, \ldots, 1)$. On a aussi $kd = hc$ parce que $[x, kd - hc] = 0$ donc, si $kx + c \neq 0$, on a $f = 0$ et $kx + c$ et $hx + d$ sont linéairement dépendants, ce qui démontre la condition (3.3).

Examinons maintenant la nature d'un espace homogène simplement connexe associé à un tel couple. Il existe un groupe simplement connexe ayant pour algèbre de Lie $\mathbf{A}_n \oplus \mathbf{R}$, à savoir le produit $G = SU(n+1) \times R$ du groupe classique $SU(n+1)$ par la droite réelle R ; dans ce groupe G, le groupe engendrée par l'algèbre de Lie $\mathbf{A}_{n-1} \oplus \mathbf{R}$ est nécessairement fermé car c'est le produit direct du sous-groupe fermé $SU(n)$ de $SU(n+1)$ par une droite du cylindre $T \times R$ où T est le cercle tel que $U(n) = SU(n) \times T$. La proposition 3.2 est applicable pour $\mathbf{G}' = \mathbf{A}_n$ et $\mathbf{H}' = \mathbf{A}_{n-1}$, le supplémentaire commun étant $N + \mathbf{Y}$. Donc l'espace homogène considéré associé à $(\mathbf{A}_n \oplus \mathbf{R}, \mathbf{A}_{n-1} \oplus \mathbf{R})_\xi$ est homéomorphe à l'espace homogène G'/H' à savoir $SU(n+1)/SU(n)$; il est classique que ce dernier est homéomorphe à la sphère S_{2n+1}, comme le montre d'ailleurs la proposition 3.2 appliquée cette fois-ci pour $G = SO(2n+2)$, $H = SO(2n+1)$, $G' = SU(n+1)$, $H' = SU(n)$. Ainsi, pour tout ξ, on obtient une structure homogène unique, homéomorphe à S_{2n+1}, mais le corollaire 42.1 montre qu'elle n'est pas à courbure constante.

38. Les couples $(\mathbf{C}_n \oplus \mathbf{R}, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{R})_\xi$ $(n \geq 2)$ *et* $(\mathbf{C}_n \oplus \mathbf{A}_1, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{A}_1)_\xi$ $(n \geq 1)$.

Pour les couples $(\mathbf{C}_n \oplus \mathbf{R}, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{R})_\xi$, le raisonnement de la démonstration de la proposition 37.1 s'applique sans changement et montre que *ces couples sont admissibles* parce que l'on a la :

PROPOSITION 38.1. *Le couple* $(\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_{n-1})$ *est admissible.*

Démonstration semblable à celle de la proposition 37.2 ; on posera ici $\mathbf{C}_n = (\mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{A}_1) + N$ et d'après le n° 13 : $M = \mathbf{A}_1 + N$ avec $\mathbf{A}_1 = \{x\} + G^{2e_1}$ et $N = \Sigma_{i \geq 2} (G^{e_1+e_i} + G^{e_1-e_i})$. Ici l'exponentielle de la représentation adjointe de $\mathbf{C}_{n-1}$ dans N est isomorphe au groupe linéaire classique $Sp\,(n-1)$ opérant dans un espace vectoriel réel de dimension $4\,(n-1) = \dim N$. On pourra, sans changer la valeur du crochet, prendre pour couple d'éléments de N un couple (z, z') tel que :

$$z \in G^{e_1+e_2} \text{ et } z' \in G^{e_1+e_2} + G^{e_1-e_2} + G^{e_1+e_3}.$$

Un couple quelconque d'éléments de M pourra donc être pris de la forme :

$$(u, v) = (kx + y + z, hx + y' + z')$$

avec $y, y' \in G^{2e_1}$. On aura :

$$[kx + y + z\,,\, hx + y' + z'] = [x\,,\, ky' - hy] + [x\,,\, kz' - hz] + [y\,,\, z'] +$$
$$+ [z\,,\, y'] + [y\,,\, y'] + [z\,,\, z'].$$

D'après les résultats du n° 5, on a :

$$[x\,,\, ky' - hy] \in G^{2e_1}, \quad [x\,,\, kz' - hz] \in G^{e_1+e_2} + G^{e_1+e_2} + G^{e_1+e_3},$$
$$[y\, z'] \in G^{e_1-e_2} + G^{e_1+e_2} + G^{e_1-e_3}, \quad [y'\,,\, z] \in G^{e_1-e_2}, \quad [y\,,\, y'] \in \mathbf{S},$$
$$[z\,,\, z'] \in \mathbf{S} + G^{2e_1} + G^{2e_2} + G^{e_2-e_3}.$$

On voit que, dans le crochet calculé, les morceaux en $G^{e_1+e_3}$ ou $G^{e_1-e_3}$ ou $G^{e_2-e_3}$ ou G^{2e_2} ne figurent chacun que dans un seul terme. Si donc le crochet $[u\,,\, v]$ est nul, ces composantes uniques devront être nulles ; on en déduit successivement : $[z\,,\, z'] \in \mathbf{S} + G^{2e_1} + G^{2e_2}$, ce qui (formule (6.1)) impose $z = 0$ ou $z' \in G^{e_1+e_2} + G^{e_1-e_2}$. Puis : $[y\,,\, z'] \in G^{e_1+e_2} + G^{e_1-e_2}$ d'où $y = 0$ ou $z' \in G^{e_1+e_2} + G^{e_1-e_2}$. Si donc on suppose $kx + y + z \neq 0$, on doit avoir $z' \in G^{e_1+e_2} + G^{e_1+e_2} + G^{e_1-e_2}$; mais aussi $[z\,,\, z'] \in \mathbf{S} + G^{2e_1}$, la

formule (6.1) imposant alors $z = 0$ ou $z' \in G^{e_1+e_2}$. Dans les deux cas, les morceaux en G^{2e_1} et $G^{e_1+e_2}$ ne figurent plus qu'en un seul endroit et l'on doit donc avoir $[x, ky' - hy] = [x, kz' - hz] = 0$ ce qui, puisque $e_1(x) = (e_2 + e_2)(x) \neq 0$ impose donc $ky' - hy = kz' - hz = 0$ entraînant que $u = kx + y + z$ et $v = hx = y' + z'$ sont liés par la relation $hu - kv = 0$ ce qui démontre la condition (3.3).

COROLLAIRE 38.1. *Le couple* $(\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{R})$ *est admissible.*

En effet, si on a $\mathbf{C}_n = (\mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{R}) + M'$, avec les notations ci-dessus c'est que $M' = G^{2e_1} + N$ donc que $M' \subset M$ et M' vérifie donc (3.3) puisque M le fait.

PROPOSITION 38.2. *Les couples* $(\mathbf{C}_n \oplus \mathbf{A}_1, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{A}_1)_\xi$ *sont admissibles.*

Les notations sont celles du n° 27 : $\mathbf{G} = \mathbf{C}_n \oplus \mathbf{L}_2$ avec $\mathbf{L}_2$ isomorphe à $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{H} = \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{E}$ où $\mathbf{E}$ doit être une sous-algèbre de $\mathbf{L}_2 \oplus \mathbf{B}$, avec $\mathbf{B}$ isomorphe à $\mathbf{A}_1$. On aura $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1$ si l'on écrit $\mathbf{C}_n = (\mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{A}_1) + N$. Le corollaire 9.5 montre que la position de $\mathbf{E}$ dans $\mathbf{L}_2 \oplus \mathbf{B}$ dépend d'un seul paramètre ξ (à un isomorphisme près); fixons en effet une sous-algèbre de Cartan $\mathbf{S}$ de $\mathbf{L}_2 \oplus \mathbf{B}$; un élément $h \in \mathbf{E}$, qui est orthogonal à $\mathbf{S} \subset \mathbf{E}$, est justiciable de ce corollaire. Le couple, $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ est donc bien déterminé, à un isomorphisme près, par la donnée des racines, sur $\mathbf{S}$, plus précisèment par le rapport de $\lambda(x)$ et de $\mu(x)$, un calcul direct montrant en effet que, comme les racines λ, μ sont orthogonales (au sens du dual après usage du produit scalaire) on a $\lambda(x)/\mu(x) = \|\lambda\|^2/\|\mu\|^2$, compte tenu du fait que $\bar{\lambda} = \bar{\mu}$. Le rapport de ces normes est quelconque, puisqu'un produit scalaire invariant sur $\mathbf{L}_2 \oplus \mathbf{B}$ est somme d'un produit scalaire invariant sur $\mathbf{L}_2$ et d'un produit scalaire invariant sur $\mathbf{B}$, ces derniers étant uniques à un scalaire près parce que $\mathbf{L}_2$ et $\mathbf{B}$ sont simples. Le paramètre choisi ξ sera par exemple $\xi = \|\lambda\|/\|\mu\|$ $(\xi \neq 0)$, et le couple correspondant noté $(\mathbf{C}_n \oplus \mathbf{A}_1, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{A}_1)_\xi$. Les cas $\xi = 0$ ou $\xi = \infty$ correspondant à $\mathbf{E} = \mathbf{L}_2$ ou $\mathbf{E} = \mathbf{A}_1$ sont exclus parce que l'on ne satisfait plus alors visiblement (3.4) ou (3.3).

Montrons maintenant que, quel que soit ξ, un couple ci-dessus est admissible ; la méthode est celle de la démonstration de la proposition 37.1, qui nous ramènera à utiliser la proposition 38.1. Pour un couple (u, v) d'éléments de $\mathbf{G}$, posons : $u = u_1 + u_2$ et $v = v_1 + v_2$ avec $u_1, v_1 \in \mathbf{C}_n$ et $u_2, v_2 \in \mathbf{L}_2$; puisque l'on a affaire à une somme directe, on aura :

$[u, v] = [u_1, v_1] + [u_2, v_2]$ et donc $[u, v] = 0$ entraînera $[u_1, v_1] = 0$ et $[u_2, v_2] = 0$.

Calculons maintenant M en posant $\mathbf{L}_2 \oplus \mathbf{B} = \mathbf{E} + P$, d'où $\mathbf{C}_n \oplus \mathbf{L}_2 = (\mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{L}_2) + N$ et $\mathbf{H} = \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{E}$, soit $M = P + N$. Si donc $u, v \in M$,

on aura nécessairement $[u_1, v_1] \in \mathbf{A}_1 + N$. D'après la proposition 38.1, la condition $[u_1, v_1] = 0$ entraîne que u_1, v_1 sont linéairement dépendants. D'autre part, comme u_2, v_2 appartiennent à $\mathbf{L}_2$ qui est de rang un, c'est que $[u_2, v_2] = 0$ entraîne que u_2, v_2 sont aussi linéairement dépendants. Alors $u, v \in M$ tels que $[u, v] = 0$ sont aussi linéairement dépendants, car alors u_1, v_1 et u_2, v_2 sont linéairement dépendants d'après ce qui précède ; si u, v n'étaient pas linéairement dépendants, il existerait une combinaison linéaire non nulle de u et de v n'ayant plus de composante selon $\mathbf{C}_n$, c'est à dire appartenant à $\mathbf{L}_2$; or $M \cap \mathbf{L}_2 = 0$.

Examinons maintenant la nature des espaces homogènes simplement connexes associés aux couples ci-dessus. De même qu'au n° 37, on montre par application de la proposition 3.2 que ces espaces sont tous homéomorphes à l'espace homogène simplement connexe $Sp(n)/Sp(n-1)$, qui lui-même est classiquement homéomorphe à la sphère S_{4n-1} (comme le montre d'ailleurs la proposition 3.2 appliquée cette fois pour $SO(4n)/SO(4n-1)$). Pour les couples $(\mathbf{C}_n \oplus \mathbf{R}, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{R})_\xi$, le groupe G de départ sera le produit $Sp(n) \times R$ tandis que pour les couples $(\mathbf{C}_n \oplus \mathbf{A}_1, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{A}_1)_\xi$, ce sera $Sp(n) \times SU(2)$; dans ce dernier cas, le sous-groupe engendré par $\mathbf{H}$ sera fermé parce que ce sera le produit direct $Sp(n-1) \times W$ où W est le sous groupe engendré dans un groupe $SU(2) \times SU(2)$ par l'algèbre de Lie $\mathbf{E}$, sous-algèbre de $\mathbf{L}_2 \oplus \mathbf{B}$; or $\mathbf{E}$ est étant la sous-algèbre des points fixes d'un automorphisme involutif de $\mathbf{L}_2 \oplus \mathbf{B}$, d'après la démonstration de la proposition 9.8, c'est que W sera le sous-groupe des points fixes dans $SU(2) \times SU(2)$ de l'automorphisme involutif de ce groupe simplement connexe défini par l'automorphisme de $\mathbf{L}_2 \oplus \mathbf{B}$ qui est son algèbre de Lie ; et W sera donc un fermé. On verra au n° 42 que les structures riemanniennes homogènes normales ne sont pas isométriques à la structure riemannienne canonique à courbure constante de S_{4n-1}.

Toujours par application de la proposition 3.2, mais ici pour $G = SU(2n)$, $H = U(2n-1)$, $G' = Sp(n)$, $H' = Sp(n-1) \times T$, on montre que l'espace homogène simplement connexe associé au couple $(\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_{n-1} + \mathbf{R})$ est homéomorphe à l'espace projectif complexe $SU(2n)/U(2n-1) = P_{2n-1}(C)$. D'après le corollaire 42.1, la structure riemannienne homogène normale associée n'est pas isométrique à celle correspondant au couple symétrique de rang un $(\mathbf{A}_{2n-1}, \mathbf{A}_{2n-2} \oplus \mathbf{R})$.

39. Le couple $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A}_1)$.

C'est le couple rencontré dans le deuxième cas du n° 22. Pour $\mathbf{C}_2$ nous prendrons l'algèbre de Lie des matrices carrées complexes d'ordre 4, ainsi

définie : $\mathbf{C}_2 = \{ A \mid {}^tA = -\bar{A}, a_{11} = -a_{22}, a_{33} = -a_{44}, a_{24} = -\bar{a}_{13}, a_{23} = -\bar{a}_{14} \}$. Le produit scalaire invariant est nécessairement proportionnel au suivant : $\langle A, B \rangle = -\operatorname{trace}(AB)$. Définissons six éléments particuliers de $\mathbf{C}_2$:

$$u = \{ A \mid a_{ij} = 0 \text{ sauf } a_{11} = -a_{22} = 1 \}, \; v = \{ A \mid a_{ij} = 0 \text{ sauf } a_{33} = -a_{44} = 1 \},$$

$$p = \{ A \mid a_{ij} = 0 \text{ sauf } a_{12} = -\bar{a}_{21} = 1 \}, \; q = \{ A \mid a_{ij} = 0 \text{ sauf } a_{34} = -\bar{a}_{43} = 1 \},$$

$$r = \{ A \mid a_{ij} = 0 \text{ sauf } a_{13} = -\bar{a}_{31} = -\bar{a}_{24} = a_{42} = 1 \},$$

$$s = \{ A \mid a_{ij} = 0 \text{ sauf } a_{23} = -\bar{a}_{32} = \bar{a}_{14} = -a_{41} \}.$$

Toute matrice de $\mathbf{C}_2$ sera donc de la forme $au + bv + cp + dq + er + fs$ *avec* a, b imaginaires purs et c, d, e, f complexes quelconques. Pour sous-algèbre de Cartan $\mathbf{S}$, nous prendrons celle des matrices diagonales : $\mathbf{S} = \{ au + bv \}$. On vérifie alors que $(1/\sqrt{2})(p, ip) \in 2e_1$, $(1/\sqrt{2})(q, iq) \in 2e_2$, $(r, ir) \in e_1 - e_2$, $(s, is) \in e_1 + e_2$ (avec $i = \sqrt{-1}$). D'après la proposition 9.5 et le corollaire 9.5, la sous-algèbre $\mathbf{H}$ est isomorphe à la suivante : $\mathbf{H} = \{ 3bu + bv + dq + (\sqrt{3}/2)\, dr \mid a$ imaginaire pur, d complexe$\}$. On en déduit le complément orthogonal M : $M = \{ au - 3av + cp + dq - (1/\sqrt{3})\, dr + fs \mid a$ imaginaire pur, et c, d, f complexes$\}$. On notera ce couple $(\mathbf{C}_2, \mathbf{H})$ par $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A}_1^{\cdot})$ parce que $\mathbf{H}$ est isomorphe à $\mathbf{A}_1$ mais que l'inclusion $\mathbf{H} \subset \mathbf{C}_2$ n'est pas l'inclusion canonique.

PROPOSITION 39.1. *Le couple* $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A}_1^{\cdot})$ *est admissible.*

Soit (y, y') un couple d'éléments de M ; prenons-les sous la forme $y = au - 3av + cp + dq - (1/\sqrt{3})\, dr + fs$, $y' = a'u - 3a'v + c'p + d'q - (1/\sqrt{3})\, d'r + f's$. Un calcul direct de crochet montre que $[y, y'] = 0$ est équivalent aux six conditions :

1 $\qquad (c'\bar{c} - c\bar{c}') + (1/3)(d'\bar{d} - d\bar{d}') + (f'\bar{f} - f\bar{f}') = 0$

2 $\qquad (2/3)(d'\bar{d} - d\bar{d}') + (f'\bar{f} - f\bar{f}') = 0$

3 $\qquad \sqrt{3}(ac' - a'c) = fd' - f'd$

4 $\qquad 3\sqrt{3}\, ad' - a'd) = f'\bar{d} - f\bar{d}'$

5 $\qquad 4(a'd - ad') + \sqrt{3}(c\bar{f}' - c'\bar{f}) + \sqrt{3}(f'\bar{d} - f\bar{d}') = 0$

6 $\qquad 2\sqrt{3}(a'f - af') = c'\bar{d} - c\bar{d}'.$

Pour simplifier les calculs, nous utiliserons la possibilité de prendre un couple choisi après action de l'exponentielle de la représentation adjointe de **H** dans M, notée exp (ad **H**). Montrons que l'on peut supposer, sans perdre la généralité, que l'élément y est tel que $acdf \neq 0$. Pratiquement, nous allons trouver des éléments voisins de y_0 donné qui vérifient $acdf \neq 0$. Un élément $h \in \mathbf{H}$ étant choisi, on a vu au n° 2 que $\left.\dfrac{d(\exp(ad(ht))y_0)}{dt}\right|_{t=0} = [h, y_0]$; les dérivées secondes et troisièmes à l'origine sont donc $(1/2)[h,[h,y_0]]$ et $(1/6)[h,[h,[h,y_0]]]$. Remarquer d'abord que si y_0 a une composante en u, p, q, s non nulle, elle le restera pour t assez voisin de zéro, ce que l'on fera bien sûr. Ensuite un calcul direct montre que pour les y_0 dont toutes les composantes sont nulles sauf une à savoir selon u, p, q, s, si l'on prend $h = q + (\sqrt{3}/2)\, r$, alors l'ensemble des trois crochets $[h, y_0]$, $[h,[h,y_0]]$, $[h,[h,[h, y_0]]]$ contient des composantes selon u, p, q, s toutes non nulles. La formule de Taylor montre donc que, pour t assez voisin de zéro, quel que soit y_0 on sera sûr que $\exp(ad(ht))\, y_0$ a ses composantes selon u, p, q, s toutes non nulles, ce que nous voulions démontrer. Remarquons maintenant que l'action de $\exp(ad(ht))$ sur M, pour $h = 3u + v$, laisse la composante en u fixe et multiplie celles en p, q, s par un nombre complexe de module un; on peut donc choisir y tel que, non seulement $acdf \neq 0$ mais encore tel que l'un des c, d, f soit réel; *on prendra* par exemple d *réel* et on normera, ce qui est légitime, *y de sorte que* $d = 1$ *ce qu'on supposera avoir fait désormais.*

Maintenant que $acdf \neq 0$, nous avons le droits de poser: $a' = \alpha a$, $c' = (\alpha + \gamma)\, c$, $d' = (\alpha + \delta)\, d$, $f' = (\alpha + \varphi) f$, avec α réel et γ, δ, φ complexes. S'il existe y, y' linéairement indépendants tels que $[y, y'] = 0$, alors il existera γ, δ, φ non tous nuls tels que les conditions 1 à 6 soient satisfaites, et réciproquement. Ces conditions, avec les nouvelles notations, deviennent:

1′ $$3c\bar{c}(\gamma - \bar{\gamma}) = \delta - \bar{\delta}$$

2′ $$2(\delta - \bar{\delta}) + 3f\bar{f}(\varphi - \bar{\varphi}) = 0$$

3′ $$3\, ac\, \gamma = f(\delta - \varphi)$$

4′ $$3\sqrt{3}\, a\delta = f(\varphi - \bar{\delta})$$

5′ $$2\sqrt{3}\, af\varphi = c(\bar{\delta} - \gamma)$$

6′ $$3c\bar{f}(\gamma - \bar{\varphi}) = 5\, a\delta.$$

De 4′ on tire $\varphi = \bar{\delta} + 3\sqrt{3}\, af^{-1}\delta$ d'où, de 3′ :

$$\gamma = (\sqrt{3}\, ac)^{-1}(f(\delta - \bar{\delta}) - 3\sqrt{3}\, a\delta).$$

En remplacant γ et φ par leurs valeurs en fonction de δ dans 1′, 2′, 5′, 6′, il reste quatre conditions à satisfaire :

7 $$\delta(a(1 + 9\bar{c}) + \sqrt{3}(c\bar{f} - \bar{c}f)) = \bar{\delta}(a(1 + 9c) + \sqrt{3}(c\bar{f} - f\bar{c}))$$

8 $$\delta(2 - 3f\bar{f} + 9\sqrt{3}\, a\bar{f}) = \bar{\delta}(2 - 3f\bar{f} - 9\sqrt{3}\, af)$$

9 $$\delta(3 - 18a^2 - (\sqrt{3}\, a)^{-1}f) = \bar{\delta}(2\sqrt{3}\, af - (\sqrt{3}\, a)^{-1}f - c)$$

10 $$\delta(f\bar{f}a^{-1} - 3\sqrt{3}\, \bar{f} - \sqrt{3}\, c\bar{f} - 5a) = \bar{\delta}(f\bar{f}a^{-1} - 9ac).$$

Puisque $\delta \neq 0$ (car sinon $\gamma = \varphi = \delta = 0$), on peut poser $\delta\bar{\delta}^{-1} = k$; on notera que $\bar{k} = k^{-1}$! De 9 on tire :

$$c = 3k(6a^2 - 1) + (\sqrt{3}\, a)^{-1}(6a^2 + k - 1)f.$$

On peut écrire 8 sous la forme :

8′ $$(k - 1)f\bar{f} = (2/3)(k - 1) + 3\sqrt{3}\, a(k\bar{f} + f).$$

De 8′ et de la valeur de c, en reportant dans 7 et 10, on trouve deux conditions qui sont identiques à l'unique condition suivante :

7′ $$27\sqrt{3}\, a^3(f + k^3\bar{f}) + (k - 1)((k - 1)^2 + 9a^2k(6 - 27a^2)) = 0.$$

De ce qui précède, on déduit que l'on pourra trouver y, y' linéairement indépendants tels que $[y, y'] = 0$ si et seulement si on peut trouver a imaginaire pur, f complexe quelconque et k complexe de module un, tels que 7′ et 8′ soient satisfaites. Nous allons voir que c'est toujours impossible, ce qui démontrera bien la proposition 39.1. On peut poser :

$$k = \cos(2\theta) + i \cdot \sin(2\theta)\ (0 \leq \theta \leq \pi),\ a = li \text{ et } f = m + ni\ (i = \sqrt{-1}).$$

Les conditions 7′ et 8′ deviennent alors :

7″ $$27\sqrt{3}\, l^3(\cos(3\theta) \cdot m + \sin(3\theta) \cdot n) + 9\sin\theta \cdot l^2(6 + 27l^2) + 4\sin^3\theta = 0$$

8″ $$m^2 + n^2 - 3\sqrt{3}\, lm\cos\theta \cdot \sin^{-1}\theta - 3\sqrt{3}\, ln - 2/3 = 0$$

lorsque $\sin\theta \neq 0$. Si $\sin\theta = 0$, le calcul fait reste valable sur la droite numérique complétée. Les conditions 7″ et 8″ représentent une droite et un cercle du plan des (m, n). Le rayon du cercle est égal à $R^2 = 2/3 + (27/4)l^2\sin^{-2}\theta$, tandis que la distance du centre du cercle à la droite est égale à $\Delta = (3\sqrt{3}/2)\, l \sin^{-1}\theta + (2/\sqrt{3}) \sin\theta \cdot l^{-1} + (4/27\sqrt{3}) \sin^3\theta \cdot l^{-3}$. En prenant les deux premiers termes du développement du carré de Δ, on obtient $\Delta^2 \geq (27/4)\, l^2 \sin^{-2}\theta + 6 > R^2$, ce qui est valable même si $\sin\theta = 0$ et montre que la droite et le cercle ne peuvent jamais se couper, donc que le couple $(\mathbf{C}_2, \mathbf{A}_1^{\cdot})$ est admissible.

40. L'espace homogène $V_1 = Sp(2)/SU(2)$.

Le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathbf{C}_2$ est le groupe linéaire $Sp(2)$. Montrons d'abord que *le sous-groupe*, que l'on notera $SU(2)$, de $Sp(2)$ *engendré par la sous-algèbre* $\mathbf{A}_1^{\cdot}$ *de* $\mathbf{C}_2$ *est fermé.* Pour celà, constatons d'abord que le sous-groupe à un paramètre $\exp(\mathbf{T}) = \{\exp(3\,tu + tv)\}$ $(t \in \mathbf{R})$ est fermé ; en effet, l'exponentielle est ici l'exponentielle de matrice pour la représentation linéaire utilisée au n° précédent, et l'on a $\exp(6\pi\, u + 2\pi\, v) = I$ (où I désigne la matrice unité). Remarquons aussi que $\exp(3\pi u + \pi v) = -I$, et que $-I$ est l'élément non trivial du centre de $Sp(2)$. Comme $\mathbf{A}_1^{\cdot}$ est une algèbre simple à trois paramètres, $\exp(\mathrm{ad}(\mathbf{H}))$ est transitive sur les directions de $\mathbf{H}$, ce qui montre que tous les sous-groupes à un paramètre du sous-groupe $SU(2)$ de $Sp(2)$ engendre par $\mathbf{A}_1^{\cdot}$ sont tous conjugués par des automorphismes intérieurs de $Sp(2)$ du sous-groupe fermé $\{\exp(3\,tu + tv)\}$. Donc $SU(2)$ est fermé et de plus homéomorphe à la sphère à trois dimensions parce que tous ses sous groupes à un paramètre passent par $-I$, ce qui justifie la notation $SU(2)$ (remarquer que l'inclusion $Sp(2) \subset SU(2)$ n'est pas l'inclusion canonique). On appellera V_1 la variété espace homogène $Sp(2)/SU(2)$. Bien que ceci ne soit pas utile pour la suite, une interprétation de l'inclusion $SU(2) \subset Sp(2)$ est la suivante : $SU(2) \to Sp(2)$ correspond à la représentation linéaire irréductible de dimension complexe quatre de $SU(2)$ (dont on sait qu'elle est symplectique).

Nous allons maintenant montrer que V_1 n'est pas homéomorphe à un espace riemannien symétrique compact de rang un ; cette démonstration sera une simple utilisation des résultats de [2] et [3]. Il faut d'abord préciser comment le cercle de $SU(2)$ est plongé dans un tore maximal de $Sp(2)$. Il est clair que les deux cercles $s_1 = \{\exp(tu)\}$ et $s_2 = \{\exp(tv)\}$ $(t \in \mathbf{R})$ de $Sp(2)$ forment une base de l'homologie de dimension un, par rapport à un anneau A quelconque, du tore maximal T de $Sp(2)$ qui est constitué par les matrices diagonales de $Sp(2)$. Si S est le cercle $T \cap SU(2)$, on a vu que

ce cercle était $S = \{\exp(3\,tu + tv)\}$ $(t \in \mathbf{R})$. Appelons $u_1 = S$ ce cercle, qui est évidemment une base de son homologie de dimension un, pour tout anneau A. Alors l'injection $i : S \to T$, avec ces notations, est définie par $i(u_1) = 3s_1 + s_2$. Soit $\{y_1, y_2\}$ (resp. $\{z_1\}$) la base de $H^1(T, A)$ (resp. $H^1(S, A)$) duale de la base $\{s_1, s_2\}$ (resp. $\{u_1\}$) de $H_1(T, A)$ (resp. $H_1(S, A)$). Alors pour l'application en cohomologie i^*, transposée de l'injection $i : S \to T$, on a : $i^*(y_1) = 3z_1$ et $i^*(y_2) = z_1$. Pour compléter l'harmonie avec les notations de [2], nous poserons encore $G = Sp(2)$ et $U = SU(2)$.

Supposons désormais que l'anneau A soit le corps des nombres réels R ou le corps Z_p des entiers modulo p. Les notations étant celles de [2], le théorème 8.2 de [3] et la proposition 29.2 de [2] entraînent que $\varrho_A^*(T, G)$ et $\varrho_A^*(S, U)$ sont biunivoques. Si l'on identifie $H(B_U, A)$ (resp. $H(B_G, A)$) à une sous-algèbre de $H(B_T, A)$ (resp. $H(B_S, A)$), alors (page 195 de [2]) on peut identifier $\varrho_A^*(U, G)$ à la restriction de $\varrho_A^*(S, T)$ à $H(B_G, A)$. D'après la proposition 28.1, l'application $\varrho_A^*(S, T)$ n'est autre que le i^* calculé ci-dessus. D'après la proposition 29.2 et la ligne 3 du bas de la page 203 de [2] et parce que $SU(2)$ est isomorphe à $Sp(1)$, on a : $H(B_U, A) = A[z_1^2]$ et $H(B_G, A) = A[y_1^2 + y_2^2, y_1^2 y_2^2]$ où la notation $A[p, q]$ désigne l'anneau des polynômes à coefficients dans A en les indéterminees p, q. Ci-dessus, on a vu que $i^*(y_1) = 3z_1$, $i^*(y_2) = z_1$, c'est donc que l'image de $H(B_G, A)$ par $\varrho_A^*(U, G)$ est $A[10z_1^2, 9z_1^4]$. On voit donc que, si $A = R$, l'application $\varrho_A^*(U, G)$ est surjective et que si $A = Z_2$ ou Z_5, son image est $A[z_1^4]$. On va en déduire la:

PROPOSITION 40.1. *V_1 a même cohomologie réelle que S_7 ; par contre la cohomologie de V_1 à valeurs dans Z_2 ou dans Z_5 diffère de celle de S_7. En particulier, V_1 n'est pas homéomorphe à S_7 et n'est donc par homéomorphe a un espace riemannien symétrique compact de rang un.*

Dans le cas de la cohomologie réelle, d'après le théoreme 6.1 de [3], il existe des éléments x_1 (de degré 3) et x_2 (de degré 7) de $H(G)$, universellement trangressifs dont les images par trangression sont justement $y_1^2 + y_2^2$ et $y_1^2 y_2^2$. D'après le théorème 25.2 de [2] et avec les notations de ce théorème, $H(V_1)$ est isomorphe canoniquement à l'algèbre de cohomologie du complexe $R(z_1^2) \otimes H(G)$ muni de la différentielle nulle sur $R(z_1^2) \otimes 1$ et définie par $d(1 \otimes x_1) = 10\,t \otimes 1$, $d(1 \otimes x_2) = 9\,t^2 \otimes 1$ (où l'on a pose $t = z_1^2$). On voit alors immédiatement que tout cocycle de degré > 0 est homologue au cycle de la forme $k(10 \otimes x_2 - 9\,t \otimes x_1)$, où k parcourt R ; donc $H^n(V_1) = 0$ sauf pour $n = 0$ et $n = 7$, auxquels cas on a $H^n(V_1) = R$.

Supposons maintenant $A = Z_2$ ou Z_5 ; le théorème 25.2 n'étant plus applicable, nous utiliserons le théorème 22.2 qui affirme qu'il existe une algèbre spectrale où $H_2 = H(B_G, H(V_1, A))$ et se terminant par $H(B_U, A)$, l'homomorphisme associé à cette suite spectrale étant $\varrho_A^*(U, G)$. On a vu

ci-dessus que si $A = Z_2$ ou Z_5, on avait $A[z_1^4]$ pour image par $\varrho_A^*(U, G)$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $H(V_1, A) = H(S_7, A)$. On aurait alors $H_2 = H(B_G, A) \otimes H(S_7, A)$; comme on sait que pour tout corps les nombres de Betti de $B_G = B_{Sp(2)}$ sont non nuls seulement en dimensions multiples de quatre et que le quatrième nombre de Betti vaut un, on aura donc $H_2^{p,q} = 0$ sauf pour p multiple de quatre et q égal à 0 ou 7, et $H_2^{4,0} = A$. Montrons alors que $H_\infty^{4,0} = H_2^{4,0} = A$, ce qui contredira le fait que $\varrho_A^*(U, G)$ tue $H^4(B_G, A)$ (pour $A = Z_2$ ou Z_5). Tous les éléments de $H_r^{4,0}$ sont des cycles quel que soit r ([2], p. 128); mais on a: $d_r : H_r^{4-r,r-1} \to H_r^{4,0}$, donc un élément de $H_r^{4,0}$ ne peut être un bord que si $r - 1 = 7$ (puisque $r \geq 2$), soit pour $r = 8$; mais alors $4 - r > 0$, donc $H_r^{4-r,r-1} = 0$; donc d_r est triviale, quel que soit $r \geq 2$, sur $H_r^{4,0}$ et on a $H_\infty^{4,0} = H_2^{4,0} = A$. La dernière affirmation de la proposition provient de ce que [6] montre qu'un espace riemannien symétrique compact de rang un et de dimension impaire est à courbure constante.

41. *Le couple* $(\mathbf{A}_4, \mathbf{C}_2 \oplus \mathbf{R})$ *et l'espace homogène associé.*

PROPOSITION 41.1. *Le couple* $(\mathbf{A}_4, \mathbf{C}_2 \oplus \mathbf{R})$ *est admissible.*

Les notations sont celles du n° 28; on a $\mathbf{A}_4 = (\mathbf{A}_3 \oplus \mathbf{R}) + N$ avec $N = \Sigma_{i \leq 4} G^{e_i - e_5}$ et, $\mathbf{A}_3 = \mathbf{C}_2 + P$ (donc $M = P + N$) avec $P \subset \{x\} + G^{e_1 - e_2} + G^{e_3 - e_4} + G^{e_1 - e_3} + G^{e_2 - e_4}$. D'après le n° 28, le couple $(\mathbf{A}_3, \mathbf{C}_2)$ est symétrique et correspond à l'espace symetrique compact $SO(6)/SO(5)$, ce qui montre que l'exponentielle de la représentation adjointe de $\mathbf{C}_2$ dans P est transitive sur les couples orthonormés de P. Utilisons ceci pour choisir un couple (u, v) d'éléments de M le plus maniable possible; si $u = u_P + u_N$ et $v = v_P + v_N$ avec $u_P \neq 0$ et $v_P \neq 0$ on peut remplacer les deux vecteurs u, v du plan qu'ils engendrent par un couple u', v' engendrant le même plan et tel que le couple (u'_P, v'_P) soit orthonormé. Démontrons la proposition dans ce premier cas: prenons pour couple orthonormé (u'_P, v'_P) un couple tel que $u'_P, v'_P \in G^{e_1 - e_2} + G^{e_3 - e_4}$; ceci entraîne $[u'_P, v'_P] \in \mathbf{V}^{e_1 - e_2} \oplus \mathbf{V}^{e_3 - e_4}$. Supposons que $[u, v] = 0$, ce qui s'écrit: $[u', v'] = [u'_P, v'_P] + [u'_N, v'_N] + [u'_P, v'_N] + [u'_N, v'_P] = 0$, mais on a $[u'_P, v'_N]$, $[u'_N, v'_P] \in N$ et $[u'_P, v'_P]$, $[u'_N, v'_N] \in \mathbf{A}_3 \oplus \mathbf{R}$, parce que le couple $(\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_3 \oplus \mathbf{R})$ est symétrique: formule (3.5) On a donc: $[u'_P, v'_P] + [u'_N, v'_N] = 0$. D'autre part, on a $[u'_N, v'_N] \in \Sigma_{i \leq 4} G^{e_i - e_5}$. Si $[u'_N, v'_N] \in \mathbf{S}$, la formule (6.1) montre que nécessairement, à un changement d'indices près: $u'_N, v'_N \in G^{e_1 - e_5}$. Mais la proposition 5.2 entraîne alors $[u'_N, v'_N] \in \mathbf{V}^{e_1 - e_5}$; or $(\mathbf{V}^{e_1 - e_2} \oplus \mathbf{V}^{e_3 - e_4}) \cap \mathbf{V}^{e_1 - e_5} = 0$, puisque les $\mathbf{V}^{e_i - e_j}$ sont duaux des $e_i - e_j$, sur lesquels le fait est évident. On a donc finalement: $[u'_P, v'_P] = [u'_N, v'_N] = 0$. Mais les deux couples $(\mathbf{A}_3, \mathbf{C}_2)$ et $(\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_3 \oplus \mathbf{R})$ sont admissibles (proposition 35.1 et

proposition 17.1) donc la condition (3.3) entraîne que u'_P, v'_P d'une part, u'_N, v'_N d'autre part, sont linéairement dépendants. Supposons que u', v', eux, ne soient pas linéairement dépendants ; alors il existerait u'', v'' dans le plan des u, v tels que $u'' \in P$ et $v'' \in N$ avec $u'' \neq 0$ et $v'' \neq 0$. Ceci est impossible, car alors $[u'', v''] = 0$ et la représentation linéaire considérée tout à l'heure dans P est a fortiori transitive sur les directions, donc, on peut supposer que $u'' = x \in \mathbf{S}$. On peut poser $v'' = \Sigma_{i \leq 4} v_i$ avec $v_i \in G^{e_i - e_5}$ et les formules (5.1) montrent que l'on aura : $[u'', v''] = [x, \Sigma_{i \leq 4} v_i] = \Sigma_{i \leq 4} [x, v_i] = \Sigma_{i \leq 4} (e_i - e_5)(x) \; v'_i = 0$. D'après le n° 28, on a $(e_i - e_5)(x) \neq 0$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ (par définition de $r(A_n)_N$) donc l'égalité ci-dessus entraîne $v_i = 0$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ soit $v'' = 0$. Ceci démontre (3.3) dans le cas $u'_P \neq 0$ et $v'_P \neq 0$.

Si maintenant $u_P = 0$ et $v_P \neq 0$, on peut supposer que c'est vrai pous tous les couples du plan des u, v, c'est donc qu'il existe dans ce plan $u'' \in P$, $v'' \in P$ et alors $v'' = 0$ comme on vient de le voir ; donc (3.3) est encore satisfaite. Il reste seulement le cas $u_P = v_P = 0$; mais alors u, $v \in N$ et le couple $(\mathbf{A}_4, \mathbf{A}_3 \oplus \mathbf{R})$ est admissible. Ceci achève la démonstration de la proposition 41.1.

Soit maintenant à étudier l'espace homogène simplement connexe correspondant au couple $(\mathbf{A}_4, \mathbf{C}_2 \oplus \mathbf{R})$. Il existe un groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathbf{A}_4$, c'est le groupe classique $SU(5)$. Dans ce groupe, l'algèbre de Lie $\mathbf{C}_2 + \mathbf{R}$ engendre le sous-groupe fermé $Sp(2) \times T$ où $Sp(2) \subset SU(5)$ et $Sp(2) \subset SU(4)$ et T désigne le cercle tel que $SU(4) \times T = U(4)$ pour l'inclusion classique $U(4) \subset SU(5)$. On obtient donc un espace homogène simplement connexe et un seul que l'on notera $V_2 = SU(5)/Sp(2) \times T$; il est de dimension 13 et pour sa topologie on a la :

PROPOSITION 41.2. *Le deuxième nombre de Betti réel de V_2 est égal à un.*

La démonstration est une utilisation directe du théorème 25.2 de [2]. Nous emploierons les notations de [2]. Ici $G = SU(5)$ donc $H(G)$ possède un système de générateurs universellement transgressifs x_1, x_2, x_3, x_4 de degrés respectifs 3, 5, 7, 9 (cf. [2], théorème 19.1 et proposition 27.2). Dans l'énoncé du théorème 25.2, les $\varrho^*(y_i)$ sont de degrés égal à ceux des y_i puisque ϱ^* conserve les degrés, et comme y_i est de degré égal à celui de x_i augmenté de un, les $\varrho^*(y_i)$ seront de degres 4, 6, 8, 10. D'autre part ici : $U = Sp(2) \times T$, donc $S_U = S_{Sp(2)} \oplus S_T$. D'après [2] et [3] on voit que S_U n'est pas nul en degré deux et plus précisément que $\dim S_U^2 = 1$.

La différentielle du théoréme 25.2 est telle que tous les éléments de $S_U \otimes 1$, en particulier ceux de $S_U^2 \otimes 1$, sont des cycles ; mais ces éléments

ne peuvent pas être des bords puisque les $\varrho^*(y_i)$ sont de dimension 4, 6, 8, 10. C'est donc bien que :

$$H^2(S_U \otimes H(G)) = H(S_U^2 \otimes 1) = S_U^2 \otimes 1 = H^2(G/U)$$

d'où :

$$\dim H^2(V_2, R) = \dim H^2(G/U) = \dim (S_U^2 \otimes 1) = 1.$$

COROLLAIRE 41.1. *La variété V_2 n'est pas homéomorphe à un espace riemannien symétrique compact de rang un.*

En effet les espaces riemanniens symétriques compacts simplement connexes de rang un et de dimension impaire sont seulement les sphères : [6].

REMARQUE : ce corollaire est aussi une consèquence de la classification des groupes de Lie transitifs sur les sphères (Montgomery-Samelson, Ann. of Math., v. 44 (1942), p. 454-470). Il n'en est pas de même de la deuxième partie de la proposition 40.1. ; cependant, à ce sujet, voir les travaux d'Onischi (Dokl. Akad. Nauk. SSSR. v. 129 (1959), p. 261-264 et v. 135 (1960), p. 531-534).

42. Les espaces homogènes normaux dont toutes les géodésiques sont fermées.

Rappelons que l'on dit qu'une géodésique $\Gamma = \{\gamma(s)\}$ $(0 \leq s < \infty)$ d'un espace riemannien est fermée s'il existe $t \in]0, \infty[$ tel que $\gamma(t) = \gamma(0)$ et $\gamma'(t) = \gamma'(0)$ (où $\gamma'(s)$ désigne le vecteur tangent à Γ au point $\gamma(s)$). Nous allons démontrer le :

THÉORÈME 42.1. *Si un espace homogène riemannien compact simplement connexe G/H est, pour sa structure riemannienne normale, à géodésiques toutes fermées, alors cet espace est isométrique à un espace riemannien symétrique compact de rang un.*

LEMME 1. *Si G/H est compact, riemannien homogène normal, simplement connexe et à géodésiques toutes fermées, alors le couple correspondant d'algèbres de Lie* $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ *est admissible.*

On peut supposer la condition (3.4) remplie, sans perdre la généralité. Et supposons la condition (3.3) non satisfaite, c'est à dire qu'il existe $a, b \in M$ linéairement indépendants tels que $[a, b] = 0$. Il existe un couple (k, h) de réels tels que la géodésique $\{\exp(ka + hb)t)\} = \Gamma$ (t parcourant R) de G ait une adhérence U dans G telle que l'algèbre de Lie $\mathbf{U}$ de U vérifie : $\mathbf{U}_M$ contient le sous-espace vectoriel de M engendré par a et b. En effet, si le plan de a, b contient des élément c tels que l'adhérence de $\{\exp(ct)\}$ $(t \in R)$ soit partout dense dans un tore maximal de G, l'affaire est réglée ; sinon c'est que le plan de a, b engendre dans G un sous-tore d'un tore maximal,

et l'on récurre alors sur la dimension de ce dernier. D'après le théorème 3.1, la géodésique Γ de G donne dans G/H une géodésique $\{\exp((ka+hb)t)p_0\}$ $(t \in R)$ (où p_0 est le point de G/H constitué par la classe à gauche H); l'adhérence de cette géodésique de G/H est de dimension supérieure ou égale à deux dans G/H puisque l'espace tangent à cette adhérence en p_0 est $\mathbf{U}_M$; une telle géodésique ne peut donc pas être fermée.

De cette démonstration, on déduit aussi le:

LEMME 2. *Soit G/H comme dans le lemme 1 et $g \in G$ tel que $\{\exp(gt)\,p_0\}$ $(t \in R)$ soit une géodésique de G/H. Alors l'adhérence U de $\{\exp(gt)\}$ dans G est telle que* $\dim \mathbf{U}_M = 1$.

LEMME 3. *Soient G/H comme dans le lemme 1 avec de plus* rang $G \geq 2$ *et S un tore maximal de G tel que sa sous-algèbre de Cartan $\mathbf{S}$ de $\mathbf{G}$ vérifie la décomposition orthogonale $\mathbf{S} = \mathbf{R}x \oplus \mathbf{T}$ avec $\mathbf{T} \subset \mathbf{H}$ et $x \in M$ et $\|x\| = 1$. Supposons le couple $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ tel que la décomposition $M = \mathbf{R}x + [\mathbf{H}, x] + W$ vérifie $W \neq 0$. Alors il existe, quel que soit $\varepsilon > 0$, un $a \in \mathbf{S}$ tel que: 1) $a_H \neq 0$, $a_M \neq 0$, $\|a\| = 1$; 2) $\langle a, x\rangle > 1 - \varepsilon$; 3) $\{\exp(at)\}$ $(t \in R)$ est partout dense dans S; 4) il existe $g \in \mathbf{G}$ tel que $\|(\exp(ad(g))(a))_H\| < \|a_H\|$.*

Remarquons d'abord qu'il est classique que l'ensemble des $a \in \mathbf{S}$ vérifiant 3) est partout dense dans $\mathbf{S}$; seule la condition 4) est à satisfaire en plus. Calculons $\|(\exp(ad(tg))(a))_H\|$ pour t tendant vers zéro; d'après le n° 2, on aura:

$$\exp(ad(tg))(a) = a + t[g, a] + (t^2/2)[g, [g, a]] + 0(t^2)$$

d'où:

$$(\exp(ad(tg))(a))_H = a_H + t[g, a]_H + (t^2/2)[g, [g, a]]_H + 0(t^2)$$

puis:

$$\|(\exp(ad(tg))(a))_H\|^2 = \|a_H\|^2 + 2t\langle a_H, [g, a]_H\rangle + \tag{42.1}$$
$$+ t^2(\|[g, a]_H\|^2) + \langle a_H, [g, [g, a]]_H\rangle) + 0(t^2)$$

d'où, pour les termes et t, t^2 après usage de la formule (2.1):

$$t\langle g, [a, a_H]\rangle, \qquad t^2(\|[g, a]_H\|^2 - \|[g, a_H]\|^2 + \langle [g, a_H], [g, a_M]\rangle). \tag{42.2}$$

Ici, comme $a \in \mathbf{S}$ en $\mathbf{S} = \mathbf{S}_H \oplus \mathbf{S}_M$, on a $[a, a_H] = 0$ et le terme en t étant donc nul, il nous faut trouver un $a \in \mathbf{S}$ tel que le terme en t^2 soit strictement négatif. Remarquons que, par construction, W est tel que $\langle W, [\mathbf{H}, x]\rangle = 0$ d'où, d'après (2.1): $\langle [W, x], \mathbf{H}\rangle = 0$ donc $[W, x] \subset M$. Prenons $g \neq 0$ et $g \in W$, ce qui existe par hypothèse; comme $a_M \in \mathbf{R}x$, on aura alors: $[g, a] = [g, a_H] + [g, a_M] \in M$ donc $[g, a]_H = 0$, le terme en t^2 se réduira donc, d'après (42.2) à $-t^2(\|[g, a_H]\|^2 + \langle [g, a_H], [g, a_M]\rangle)$. Quitte à remplacer $a = a_H + a_M$ par $a_H - a_M$ (parce que les a vérifiant 1), 2), 3) sont partout denses), on peut supposer que l'on a $\langle [g, a_H], [g, a_M]\rangle \leq 0$ et nous sommes

finalement réduits à trouver un $g \in W$ tel que $[g, a_H] \neq 0$. Par l'absurde, supposons donc dans la suite de cette démonstration que $[W, a_H] = 0$, ce qui entraîne $[W, \mathbf{T}] = 0$ puisque $\{\exp(ta_H)\}$ $(t \in R)$, qui est la projection sur T de $\{\exp(ta)\}$ $(t \in R)$ a pour adhérence ce tore T de H engendré par $\mathbf{T}$, puisque $\{\exp(ta)\}$ $(t \in R)$, a pour adhérence S tout entier. Comme $\mathbf{T}$ est un hyperplan de $\mathbf{S}$, la proposition 8.1 entraîne que le centralisateur $\mathbf{C}(\mathbf{T})$ de $\mathbf{T}$ est tel que $\dim \mathbf{C}(\mathbf{T}) \leq \dim \mathbf{T} + 3$. Supposons d'abord $\operatorname{rang} G = \operatorname{rang} H$; alors il existe une sous-algèbre de Cartan $\mathbf{S}'$ de $\mathbf{H}$ telle que $\mathbf{S}' \subset \mathbf{T}$ et posons $\mathbf{S}' = \mathbf{R}x' \oplus \mathbf{T}$; comme $\mathbf{C}(\mathbf{T})$ contient $x \in M$, $x' \in \mathbf{H}$, il contiendra $[x, x']$ qui est un élément de M, différent de x puisqu'orthogonal à x et non nul (sinon, on aurait $\operatorname{rang} \mathbf{G} > \dim \mathbf{S}$); donc $\mathbf{C}(\mathbf{T}) \supset \mathbf{R}x + \mathbf{R}x' + \mathbf{R}[x, x'] + \mathbf{T} + W$ d'où le fait que $\dim \mathbf{C}(\mathbf{T}) \leq \dim \mathbf{T} + 3$ entraîne $W = 0$ contrairement à l'hypothèse. Remarquer que, en passant, on a montré que si $\operatorname{rang} G = \operatorname{rang} H$, la sous-algèbre $\mathbf{T}$ de $\mathbf{H}$ est toujours telle que $\dim \mathbf{C}(\mathbf{T}) \leq \dim \mathbf{T} + 3$, donc que $\mathbf{T}$, dans une sous-algèbre de Cartan $\mathbf{S}$ de $\mathbf{G}$ telle que $\mathbf{S} \supset \mathbf{T}$, est un hyperplan annullateur d'une racine.

Supposons maintenant que $\operatorname{rang} \mathbf{G} = \operatorname{rang} \mathbf{H} + 1$, ce qui, proposition 6.1, épuisera tous les cas possibles vu le lemme 1. Mais alors $\mathbf{C}(\mathbf{T}) \supset \mathbf{T} + \mathbf{R}x + W$ avec $W \neq 0$, donc x', x'' existent (n° 8). Comme le couples $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ est admissible, on sait alors (corollaire 24.2) que $M \subset \mathbf{X}$, d'où $[\mathbf{H}, M] = [\mathbf{H}, \mathbf{X}] = 0$ et la condition (3.4): $\mathbf{H} = 0$ soit $\mathbf{G} = \mathbf{X} = \mathbf{A}_1$ contrairement à l'hypothèse faite sur le rang de G.

Lemme 4. *Si G/H vérifie les hypothèses du lemme* 1, *plus* $\operatorname{rang} G \geq 2$ *alors* $\exp(\operatorname{ad} \mathbf{H})$ *est transitive sur les directions de M.*

Choisissons un élément g de $\mathbf{G}$ tel que $\{\exp(tg)\}$ $(t \in R)$ soit partout dense dans un tore maximal S de G, avec de plus $S \not\subset H$. Notons $\operatorname{Orb}(g)$ l'orbite de g sous $\{\exp(\operatorname{ad} \mathbf{G})\}$ c'est à dire $\{\exp(\operatorname{ad} \mathbf{G})(g)\}$; c'est un compact de $\mathbf{G}$ et comme la fonction $g \to \| g_H \|$ sur $\mathbf{G}$ est continue, il existe donc un point $g' \in \operatorname{Orb}(g)$ tel que $\| g'_H \|$ soit minimum en ce point. Appliquons la formule (42.1); on doit avoir $\langle [g', g'_H], z \rangle = 0$ pour tout $z \in \mathbf{G}$, donc $[g', g'_H] = 0$, ou encore $[g'_H, g'_M] = 0$. Ceci entraîne d'abord que la courbe $\{\exp(\operatorname{ad}(g't))(p_0)\}$ $(t \in R)$ est une géodésique, parce que $g' = g'_H + g'_M$ avec $[g'_H, g'_M] = 0$ et $g'_M \neq 0$, entraîne: $\exp(\operatorname{ad}(tg')) = \exp(\operatorname{ad}(tg'_H)) \cdot \exp(\operatorname{ad}(tg'_M))$ d'où $\exp(\operatorname{ad}(tg'))(p_0) = \exp(\operatorname{ad}(tg'_M))(p_0)$, cf. théorème 3.1. Maintenant on a donc une géodésique dont l'adhérence est le tore maximal de G déduit du tore maximal initial S par l'élément de $\exp(\operatorname{ad} \mathbf{G})$) qui fait passer, sur $\operatorname{Orb}(g)$, de g à g'. On peut appliquer le lemme 2 qui montre qu'un tel tore est nécessairement, pour son algèbre de Lie, somme directe de ses projections sur $\mathbf{H}$ et M, celle sur M devant être de dimension un. Toutes les hypothèses du lemme 3 sont donc satisfaites, parce que $\exp(\operatorname{ad} \mathbf{H})$ non transitive sur

les directions de M est équivalent à $W \neq 0$. Nous allons dans la suite de la démonstration de ce lemme supposer donc $W \neq 0$ et aboutir à une contradiction, en fixant un a vérifiant les conclusions de ce lemme 3.

Introduisons $\mathrm{Orb}(a) = \{\exp(\mathrm{ad}\,\mathbf{G})(a)\}$ et un point a' tel que $\| a'_H \|$ soit minimum pour $\mathrm{Orb}(a)$. Utilisons encore la formule (42.1) et la formule (42.2); le raisonnement fait ci-dessus reste valable et montre d'abord que a' appartient à une sous-algèbre de Cartan $\mathbf{S}'$ de $\mathbf{G}$ telle que, si l'on pose $x' = a'_M / \| a'_M \|$, on a $\mathbf{S}' = \mathbf{R}x' \oplus \mathbf{T}'$ avec $\mathbf{T}' \subset \mathbf{H}$. Supposons d'abord $\mathrm{rang}\,G = \mathrm{rang}\,H$; si on a l'égalité $a = \exp(\mathrm{ad}(g))(a')$, on aura, pour des raisons de densité : $\mathbf{S} = \exp(\mathrm{ad}(g))(\mathbf{S}')$; posons $x'' = \exp(\mathrm{ad}(g))(x'')$. D'après la démonstration du lemme 3, il resulte que x et x'' sont des directions orthogonales à des hyperplans annulateurs de racines de $\mathbf{G}$; comme de telles directions sont en nombre fini, elles ne peuvent être trop voisines sans coincider; mais on a, d'après le lemme 3 et le choix de a dans $\mathbf{S}$:

$$\langle x, a \rangle > 1 - \varepsilon \text{ et } \langle x'', a \rangle = \langle x', a' \rangle > 1 - \varepsilon$$

parce que $\langle x', a' \rangle = \| x'_M \|$ et que $\| a'_H \| < \| a_H \|$ entraîne $\|a'_M\| > \|a_M\|$ car $\| a \| = \| a' \|$. On en déduit facilement que $\langle x', x'' \rangle > 1 - 2\varepsilon$, ce qui, d'après la remarque précédente, comme ε est quelconque dans le lemme 3, entraîne $x = x''$ donc $\| a'_H \| = \| a_H \|$ contredisant la conclusion 4) du lemme 3.

Supposons maintenant $\mathrm{rang}\,\mathbf{G} = \mathrm{rang}\,\mathbf{H} + 1$; alors $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ sont deux sous-algèbres de Cartan de $\mathbf{H}$ et il existe $h \in \mathbf{H}$ tel que $\exp(\mathrm{ad}(h))(\mathbf{T}') = \mathbf{T}$. Soit alors $x'' = \exp(\mathrm{ad}(h))(x')$; on a ici $x'' \in M$. On peut trouver $u \notin \mathbf{G}$ tel que $x''' = \exp(\mathrm{ad}(u))(x'') \in \mathbf{S}$ et $\exp(\mathrm{ad}(u))(\mathbf{T}) = \mathbf{T}$; si $x'' \in \mathbf{S}$, c'est évident, sinon, comme x, x'' commutent avec $\mathbf{T}$ et donc appartiennent à $\mathbf{C}(\mathbf{T}) = \mathbf{T} \oplus \mathbf{A}_1$ dans ce cas et que $\exp(\mathrm{ad}(\mathbf{A}_1))$ laisse $\mathbf{T}$ fixe et est transitive sur les directions de $\mathbf{A}_1$, la chose est sûre. En résumé, on est arrivé à trouver dans $\mathbf{S}$ deux éléments a et $a''' = \exp(\mathrm{ad}(u))(a'')$ qui sont conjugués par $\exp(\mathrm{ad}\,\mathbf{H})$. Comme ils appartiennent à la même sous-algèbre de Cartan $\mathbf{S}$ de $\mathbf{G}$, c'est donc qu'ils sont conjugués par le 6roupe de Weyl de $\mathbf{G}$ (voir [13], exposé 23, corollaire du théorème 2); comme ce groupe est fini, les éléments a, a''' ne peuvent avoir des directions arbitrairement voisines sans coincider; mais on a ici :

$$\langle x, a \rangle > 1 - \varepsilon \text{ et } \langle x''', a''' \rangle = \langle x', a' \rangle > 1 - \varepsilon \text{ avec ici } x''' = \pm x,$$

donc, puisque ε est arbitraire dans le lemme 3 : $a''' = \pm a$, soit $\| a_H \| = \| a'_H \|$, qui est une contradiction.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 42.1. Soit un couple $(\mathbf{G}, \mathbf{H})$ admissible. Supposons d'abord rang $G = 1$ donc deux cas possibles seulement, pour des raisons de dimension : $\mathbf{H} = 0$ ou $\mathbf{H} = \mathbf{R}$; dans les deux cas toutes les géodésiques sont fermées mais dans les deux cas on obtient visiblement des structures riemannienne homogènes normales à courbure constante (de dimension respectivement deux et trois) et le théorème est démontré dans ce cas. Supposons maintenant rang $G \geq 2$ et appliquons le lemme 4 en regardant la liste des couples admissibles (proposition 17.1 et 35.1) pour trouver les couples pour lesquels $M = \mathbf{R}x + [\mathbf{H}, x]$, où x est celui fixé dans la troisième partie si rang $G =$ rang $H + 1$ et un x au choix dans M sinon. Les seuls cas convenant sont :

$$(\mathbf{A}_n, \mathbf{A}_{n-1} \oplus \mathbf{R})\,(n \geq 2), (\mathbf{B}_n, \mathbf{D}_n)\,(n \geq 3), (\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{A}_1)\,(n \geq 2),$$
$$(\mathbf{D}_n, \mathbf{B}_{n-1})\,(n \geq 4), (\mathbf{F}_4, \mathbf{B}_4), (\mathbf{G}_2, \mathbf{A}_2).$$

Ces couples sont exactement l'ensemble des couples symétriques compacts de rang un (voir [6]) à l'exception du couple $(\mathbf{G}_2, \mathbf{A}_2)$, mais on a vu que ce dernier donnait naissance à un espace homogène riemannien normal simplement connexe isométrique à la sphère S_6 à courbure constante (voir n° 16), qui est aussi correspondante au couple symétrique $(\mathbf{B}_3, \mathbf{A}_3) = (\mathbf{B}_3, \mathbf{D}_3)$.

COROLLAIRE 42.1 *Les métriques riemanniennes homogènes normales sur la sphère S_{2n-1} (resp. S_{4n-1}, S_{4n-1}, S_{15}, le projectif complexe $P_{2n-1}(C)$) qui correspondent aux couples admissibles $(\mathbf{A}_n \oplus \mathbf{R}, \mathbf{A}_{n-1} \oplus \mathbf{R})_\xi$ (resp. $(\mathbf{C}_n \oplus \mathbf{R}, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{R})_\xi$, $(\mathbf{C}_n \oplus \mathbf{A}_1, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{A}_1)_\xi$, $(\mathbf{B}_4, \mathbf{B}_3)$, $(\mathbf{C}_n, \mathbf{C}_{n-1} \oplus \mathbf{R})$) ne sont pas isométriques à la structure riemannienne canonique de ces espaces. En particulier, dans tous ces espaces, il existe des géodésiques ayant une adhérence de dimension au moins égale à deux.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BERGER, *Variétés riemanniennes à courbure positive* (Bull. Soc. math. France, 87, 1959, p. 285-292).

[2] A. BOREL, *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts* (Ann. of Math., 57, 1953, pp. 115-207).

[3] A. BOREL, *Sur l'homologie et la cohomologie des groupes de Lie compacts connexes* (Amer. J. of math., 76, 1954, p. 273-342).

[4] A. BOREL et J. de SIEBENTHAL, *Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos* (Comm. Math. Helv., 23, 1949, p. 200-221).

[5] E. CARTAN, *Les groupes réels simples finis et continus* (Ann. Ecol. Norm., 31, 1914, p. 263-355).

[6] E. CARTAN, *Sur certaines formes riemanniennes remarquables des géométries à groupe fondamental simple* (Ann. Ecol. Norm., 44, 1927, p. 345-467).

[7] S. HELGASON ; *On riemannian curvature of homogeneous spaces* (Proc. Amer. Math. Soc., 9, 1958, p. 831-838).

[8] G. A. HUNT, *A theorem of E. Cartan* (Proc. Amer. Math. Soc., 7, 1956, p. 307-308).

[9] A. LICHNEROWICZ, *Géométrie des groupes transformations* (Paris, Dunod, 1958).

[10] D. MONTGOMERY et L. ZIPPIN, *Topological transformations groups* (New York, 1955).

[11] K. NOMIZU, *Invariant affine connections on homogeneous spaces* (Amer. J. of Math., 76, 1954, p. 33-65).

[12] H. SAMELSON, *On curvature and characteristic of homogeneous spaces* (Michig. Math. J., 5, 1958, p. 13-18).

[13] *Séminaire Sophus* LIE, (Secrétariat mathématique, Paris 1955).