

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

U. BARBUTÌ

Qualche osservazione sopra la teoria del prolungamento di misure da reticoli algebrici

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 15,
n° 3 (1961), p. 171-177*

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1961_3_15_3_171_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

**QUALCHE OSSERVAZIONE
SOPRA LA TEORIA DEL PROLUNGAMENTO
DI MISURE DA RETICOLI ALGEBRICI (*)**

Nota di U. BARBUTI (a Pisa)

Sia \mathcal{A} un anello booleano dotato di elemento nullo, sia S l'insieme dei filtri primi o massimali⁽¹⁾ di \mathcal{A} ; considerato un elemento $a \in \mathcal{A}$, detto A l'insieme dei punti di S a ciascuno dei quali appartiene a (vale a dire l'insieme dei filtri massimali che contengono a) e posto $A = \tau(a)$, si ottiene un'applicazione degli elementi $a \in \mathcal{A}$ in una famiglia \mathcal{A}_0 di sottoinsiemi di S ; per un noto teorema di M. H. Stone⁽²⁾ \mathcal{A}_0 è un anello ordinario d'insiemi⁽³⁾ (lo diremo di Stone) e τ un isomorfismo.

È stata notata da vari autori e citiamo tra questi S. Kakutani⁽⁴⁾, C. Pauc⁽⁵⁾ e F. Bertolini⁽⁶⁾ la proposizione:

Se μ è una funzione reale, finita, non negativa e finitamente additiva su \mathcal{A} , posto, per ogni $A \in \mathcal{A}_0$, $\mu_r(A) = \mu(\tau^{-1}(a))$ (immagine di μ su \mathcal{A}_0), μ_r risulta numerabilmente additiva su \mathcal{A} e conseguentemente può essere prolungata in una misura sul più piccolo anello condizionatamente σ -completo d'insiemi di S , contenente \mathcal{A}_0 .

Questa affermazione discende dalla banale osservazione che gli insiemi di \mathcal{A}_0 possono, ad un tempo, considerarsi gli insiemi aperti e chiusi in una

(*) Lavoro eseguito per la realizzazione del programma del gruppo di ricerca, n° 20, del C. N. R. (1960-61).

(1) Per la nomenclatura usata si veda R. Sikorski in [1] nella bibliografia alla fine della nota.

(2) Cfr. in [1], alle pp. 21 e seguenti.

(3) Diciamo anello ordinario d'insiemi ogni anello d'insiemi nel quale le operazioni \vee, \wedge sono le abituali operazioni d'unione e intersezione dell'algebra degli insiemi.

(4) Si veda in [2], a p. 533 (primo capoverso).

(5) Cfr. [3], alle pp. 34-35.

(6) Cfr. [4], p. 159.

topologia su S nella quale S stesso è compatto⁽⁷⁾ e ciò porta subito la numerabile additività di μ_τ su \mathcal{A}_0 .

Questa circostanza di carattere topologico indica chiaramente la ragione dell'indebolimento delle usuali condizioni di prolungabilità per la funzione μ_τ .

Allo scopo di porre il problema del prolungamento in una naturale sede, come ad es. ha fatto D. A. Kappos⁽⁸⁾, ma movendo da un reticolo distributivo \mathcal{R} (anzichè da un anello booleano) noi diremo, appunto con Kappos, che \mathcal{R} è immerso in un anello booleano \mathcal{A} , se \mathcal{A} contiene un sottoreticolo \mathcal{R}' isomorfo con \mathcal{R} . Se poi \mathcal{A} è un anello booleano minimale contenente \mathcal{R}' , diremo che la terna $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, h)$, dove h indica l'isomorfismo, è una *estensione* di \mathcal{R} ; se \mathcal{A} un anello minimale condizionatamente σ -completo⁽⁹⁾ contenente \mathcal{R}' , diremo che la detta terna è una σ -estensione di \mathcal{R} .

Ciò premesso, consideriamo i due problemi seguenti:

A) È assegnata una σ -estensione $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, h)$ di \mathcal{R} , si cercano condizioni « minime » per la funzione μ , definita su \mathcal{R} , affinché essa possa prolungarsi⁽¹⁰⁾ in una misura su \mathcal{A} .

B) Non è a priori assegnata alcuna σ -estensione di \mathcal{R} , si cercano condizioni « minime » per la μ affinché essa possa prolungarsi in una misura su qualunque σ -estensione di \mathcal{R} .

Indicheremo in questa breve nota due teoremi che attualmente risolvono i problemi A) e B) e faremo semplici osservazioni circa le accidentalità che possono incontrarsi nel caso A).

Valutazioni isotone regolari su \mathcal{R} .

1. Una funzione reale, finita, μ , definita sul reticolo distributivo \mathcal{R} , dotato di elemento nullo (che indicheremo con 0), sarà detta *isotona* se $a < b$ implica $\mu(a) \leq \mu(b)$ e se μ è nulla sull'elemento nullo di \mathcal{R} (e perciò non negativa). Presi due elementi di \mathcal{R} a, b , con $a \geq b$, si consideri il filtro \mathcal{F} e l'ideale \mathcal{I} (relativi al sottoreticolo \mathcal{R}_a) definiti con:

$$(1) \quad \mathcal{F} = (x : x \leq a, x \vee b = a); \quad \mathcal{I} = (x : x \leq a, x \wedge b = 0).$$

(7) Diciamo compatto ogni insieme che soddisfa l'assioma di Heine-Pincherle-Borel.

(8) Cfr. [5], alle pp. 71-109.

(9) Cioè chiuso rispetto alla unione numerabile di elementi non maggiori di un assegnato elemento.

(10) Meglio affinché μ_h possa prolungarsi su \mathcal{A} ; il prolungamento è qui inteso a meno di isomorfismi in una σ -estensione di \mathcal{R} .

Diremo che la funzione isotona μ è regolare esterna o regolare interna su \mathcal{R} secondo che risulta:

$$(2) \quad \inf_{x \in \mathcal{F}} \mu(x) = \mu(a) - \mu(b), \quad \sup_{x \in \mathcal{G}} \mu(x) = \mu(a) - \mu(b),$$

per ogni coppia di elementi a, b di \mathcal{R} ⁽¹¹⁾.

Una funzione finita μ su \mathcal{R} e poi detta una valutazione se soddisfa la condizione

$$(3) \quad \mu(a \vee b) = \mu(a) + \mu(b) - \mu(a \wedge b) \text{ }^{(12)},$$

per ogni coppia a, b di \mathcal{R} .

Vale osservare che:

Se \mathcal{R} è un anello booleano, ogni valutazione isotona su \mathcal{R} è, ad un tempo, regolare esterna ed interna ⁽¹³⁾.

La regolarità di una funzione μ è una proprietà che si conserva per isomorfismi nel senso che si conserva per la immagine μ_h ; si ha infatti la proposizione:

I. Se $h: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ è un isomorfismo tra i reticoli distributivi $\mathcal{R}, \mathcal{R}'$ e μ è una valutazione regolare (esterna od interna) su \mathcal{R} , tale risulta la $\mu_h(a') = \mu(h^{-1}(a))$ su \mathcal{R}' .

Che μ_h sia una valutazione isotona è ovvio; il fatto che μ_h risulti regolare discende dall'osservare che l'isomorfismo muta i filtri (gli ideali) in filtri (ideali) e conseguentemente, posto $a' = h(a)$, il filtro (ideale) $\mathcal{F}'(\mathcal{G}')$ in \mathcal{R}' proverrà dal filtro (dall'ideale) $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ di \mathcal{R} e ragionando, ad es., nel caso della regolarità esterna, avremo:

$$\inf_{x' \in \mathcal{F}'} \mu_h(x') = \inf_{x' \in \mathcal{F}'} \mu(h^{-1}(x')) = \inf_{x \in \mathcal{F}} \mu(x) = \mu(a) - \mu(b) = \mu_h(a') - \mu_h(b').$$

Analogamente si procede nel caso della regolarità interna.

⁽¹¹⁾ Nel caso di un reticolo d'insiemi la regolarità esterna (interna) riproduce la definizione data in [6], a p. 148.

⁽¹²⁾ Cfr. G. Birkhoff in [7] a p. 74.

⁽¹³⁾ Dire che \mathcal{R} è un anello booleano significa ammettere che, dati in \mathcal{R} a, b ($a \geq b$), esiste il complemento (in senso algebrico) di a rispetto a b e cioè: esiste un $c \in \mathcal{R}$, ed uno solo, tale che $c \wedge b = 0$, $c \vee b = a$. Dalla (3) si ha allora: $\mu(c) = \mu(a) - \mu(b)$. Si ha inoltre se $x \in \mathcal{F}$

$$\mu(x) = \mu(a) - \mu(b) + \mu(x \wedge b) \geq \mu(a) - \mu(b) = \mu(c),$$

la quale prova la prima delle (2). Se invece $x \in \mathcal{G}$, si ha dalla (2):

$$0 = \mu(b \wedge x) = \mu(b) + \mu(x) - \mu(b \vee x),$$

da cui $\mu(x) = \mu(b \vee x) - \mu(b)$ e poichè $x \leq a$, $b \leq a$, $x \vee b \leq a = c \vee b$, segue $\mu(x) = \mu(b \vee x) - \mu(b) \leq \mu(b \vee c) - \mu(b) = \mu(c)$, vale a dire la seconda delle (2).

Funzioni isotone continue su \mathcal{R} .

2. Consideriamo il reticolo distributivo \mathcal{R} e sia \mathcal{R}_1 una analogo reticolo contenente \mathcal{R} ; sia μ una funzione finita e isotona su \mathcal{R} . Diremo che μ è *continua* verso l'alto (verso il basso) *relativamente* ad \mathcal{R}_1 , se per ogni successione non decrescente (non crescente) $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ di elementi di \mathcal{R} il cui limite a esista in \mathcal{R}_1 ⁽¹⁴⁾ ed appartenga ad \mathcal{R} risulta: $\lim_n \mu(a_n) = \mu(a)$. Diremo poi che μ è continua (verso l'alto o verso il basso) in senso *assoluto* se risulta continua relativamente ad \mathcal{R} medesimo. Il concetto di continuità in senso assoluto è illuminato dalla asserzione: la continuità in senso assoluto di μ su \mathcal{R} induce la continuità di μ relativamente a *qualunque* sopra reticolo di \mathcal{R} . È poi facile constatare che se μ è isotona e continua (verso l'alto o verso il basso) in senso assoluto su \mathcal{R} ed h è un isomorfismo di \mathcal{R} in \mathcal{R}' , tale riesce la μ_h su \mathcal{R}' . Queste osservazioni conducono alla proposizione:

II. *Se $(\mathcal{R}, \mathcal{O}, h)$ è un'estensione di \mathcal{R} e μ è isotona e continua in senso assoluto su \mathcal{R} tale riesce sul reticolo $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{O}$ e isomorfo ad \mathcal{R} la immagine μ_h e conseguentemente risulterà continua relativamente ad \mathcal{O} .*

Vale osservare che può accadere che, non essendo μ continua in senso assoluto su \mathcal{R} , la μ possa riuscire continua relativamente ad \mathcal{O} su qualche particolare estensione $(\mathcal{R}, \mathcal{O}, h)$ di \mathcal{R} ⁽¹⁵⁾.

⁽¹⁴⁾ Se $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione non decrescente (o non crescente) di elementi del reticolo \mathcal{R}_1 diremo che essa ha limite in \mathcal{R}_1 se esiste in $\mathcal{R}_1 \vee a_n (\wedge a_n)$; vale a dire se esiste $a \in \mathcal{R}_1$ tale che $a_n \leq a$ ($a_n \geq a$) e preso $b \in \mathcal{R}_1$, tale che $a_n \leq b$ ($a_n \geq b$), risulta $a \leq b$ ($a \geq b$).

⁽¹⁵⁾ Può, per es., accadere che μ è non continua verso il basso sull'elemento nullo di \mathcal{R} , mentre tale riesce la μ_h su una particolare estensione. Allo scopo di dare un esempio in proposito ricordiamo che se \mathcal{R} è un reticolo distributivo, esiste (cfr. ad esempio [8], p. 106) un reticolo ordinario d'insiemi \mathcal{R}_0 in uno spazio S (lo spazio dei filtri primi di \mathcal{R}) isomorfo a \mathcal{R} . Può inoltre provarsi facilmente che \mathcal{R} è perfetto, cioè che ogni filtro primo \mathcal{F} in \mathcal{R}_0 è determinato da un punto $x \in S$, vale a dire $A \in \mathcal{F}$ se e solo se $x \in A$. Si ha anche facilmente che: *Se \mathcal{R} è un reticolo ordinario e perfetto d'insiemi di uno spazio sostegno X , contenente l'insieme vuoto come elemento, allora ogni famiglia $\Gamma(A)$ d'insiemi $A \in \mathcal{R}$, la cui intersezione è vuota, contiene una sottofamiglia finita la cui intersezione è vuota.*

Diamo la facile dimostrazione. Supponiamo non vera la tesi. Consideriamo in \mathcal{R} il filtro \mathcal{F}_0 generato da $\Gamma(A)$. Un insieme B appartiene a \mathcal{F}_0 se, e solo, se esiste un numero finito d'insiemi A_i ($i \leq n$), appartenenti a $\Gamma(A)$ per i quali risulta $B \supseteq \bigcap_{i \leq n} A_i$. Per l'asserto \mathcal{F}_0 è proprio. Sia \mathcal{F} un filtro massimale contenente \mathcal{F}_0 ; esso è primo (può provarsi che ogni filtro massimale è primo) e quindi è determinato da un punto $x \in X$. Poichè $\Gamma(A) \subseteq \mathcal{F}$, avremo che A appartiene a $\Gamma(A)$ se e solo se $x \in A$. Ciò reca l'assurdo che sia non vuota la intersezione degli insiemi di $\Gamma(A)$.

Per avere l'esempio di cui si è detto, basterà prendere su di un reticolo \mathcal{R} una fun-

Teoremi di prolungamento per i problemi A) e B).

3. Una soluzione del problema B è fornita dal seguente teorema:

III. *Se \mathcal{R} è un reticolo algebrico distributivo, contenente l'elemento nullo e μ una funzione reale finita su \mathcal{R} , affinché μ possa prolungarsi su qualunque σ -estensione $(\mathcal{R}, \mathcal{N}, h)$ di \mathcal{R} è sufficiente che la μ goda su delle seguenti proprietà:*

a) sia una valutazione isotona,

verifichi una o l'altra delle seguenti condizioni:

b) sia regolare esternamente e continua in senso assoluto verso l'alto,

b') sia regolare internamente e continua in senso assoluto verso il basso ⁽¹⁶⁾.

Suppongasi verificata la a) e b). Se $(\mathcal{R}, \mathcal{N}, h)$ è una qualsiasi estensione di \mathcal{R} e se $\mathcal{R}' \subseteq \mathcal{N}$ è il reticolo isomorfo ad \mathcal{R} , tramite h , le proposizioni I e II assicurano che μ_h è una valutazione regolare esterna, continua verso l'alto, in senso assoluto, e quindi continua anche relativamente ad \mathcal{N} . Per noti teoremi ⁽¹⁷⁾ μ_h , e quindi μ , può essere prolungata in modo univoco in una misura sulla estensione $(\mathcal{R}, \mathcal{N}, h)$. Analogamente si ragiona se sono verificate le condizioni a) e b').

4. Del problema A) può ottenersi una soluzione indebolendo le condizioni di continuità del teorema precedente. Basterà nell'enunciato precedente sostituire le ipotesi di continuità in senso assoluto con quelle di continuità relativamente ad \mathcal{N} ⁽¹⁸⁾. Si possono in tale maniera, precisando la estensione di \mathcal{R} , ottenere teoremi di prolungamento nei quali la ipotesi di continuità si tace; in realtà essa è realizzata per la particolare topologia dell'ambiente ove è avvenuta la immersione di \mathcal{R} . Diamo in proposito un esempio notevole con la seguente proposizione, la quale contiene quella enunziata nella introduzione:

IV. *Sia μ una valutazione isotona sul reticolo distributivo \mathcal{R} , dotato di elemento nullo, allora esiste una σ -estensione di \mathcal{R} nella quale la μ può essere prolungata in modo univoco in una misura.*

zione μ non continua su \mathcal{R} verso il basso sull'elemento nullo; la sua immagine μ_z riuscirà continua su \mathcal{R}_0 (reticolo di Stone) verso il basso nell'elemento nullo relativamente al minimo anello d'insiemi \mathcal{Q} contenente \mathcal{R}_0 .

⁽¹⁶⁾ E' sufficiente constatare (Cfr. [6]) la continuità verso il basso sull'elemento nullo.

⁽¹⁷⁾ Cfr. [6] e [9].

⁽¹⁸⁾ Si vedano i teoremi di prolungamento in [9].

Poichè \mathcal{R} è distributivo esiste una estensione $(\mathcal{R}, \mathcal{N}, h)$ ⁽¹⁹⁾ di \mathcal{R} . La ipotesi che μ sia una valutazione isotona reca che tale sarà la μ_h sul reticolo \mathcal{R}' isomorfo ad \mathcal{R} e contenuto in \mathcal{N} . Poichè μ_h è una valutazione isotona su \mathcal{R}' , essa può essere prolungata su \mathcal{N} in una funzione finita, non negativa e finitamente additiva⁽²⁰⁾. Sia ora \mathcal{A}_0 la rappresentazione di Stone, nello spazio S dei filtri primi di \mathcal{N} , dell'anello \mathcal{N} e τ l'isomorfismo di Stone. La funzione $(\mu_h)_\tau$ riuscirà finita non negativa e finitamente additiva su \mathcal{A}_0 . Essa inoltre risulterà numerabilmente additiva per le ragioni di compattezza dette nella introduzione; $(\mu_h)_\tau$ riuscirà dunque univocamente prolungabile sul più piccolo anello condizionatamente σ -completo \mathcal{A} d'insiemi di S contenente \mathcal{A}_0 . Risulta dunque μ prolungabile in $(\mathcal{R}, \mathcal{A}, \tau \circ h)$.

⁽¹⁹⁾ Per il teorema di Stone.

⁽²⁰⁾ Cfr. F. Cafiero in [10], a p. 89.

BIBLIOGRAFIA

- [1] R. SIKORSKI, *Boolean Algebras*, « *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* » Springer Verlag, Berlin, (1960).
- [2] S. KAKUTANI, *Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem*, *Annals of Math*, v. 42, pp. 523-537, (1941).
- [3] C. PAUC, *Darstellungs- und Struktursätze für Boolesche Verbände und σ -Verbände*, *Archiv der Mathematik*, Band 1, pp. 29-41, (1948).
- [4] F. BERTOLINI, *Le funzioni additive nella teoria algebrica della misura*, *Ann. della Scuola Normale Sup. di Pisa*, v. XII, pp. 155-162, (1958).
- [5] D. A. KAPPOS, *Erweiterung von Massverbänden*, *Jour. für die reine und angewandte Mathematik*, pp. 97-109, B. 191, (1953).
- [6] U. BARBUTI, *Teoremi di prolungamento per misure da reticoli d'insiemi*, *Ricerche di Matematica*, v. VIII, pp. 145-162, (1959).
- [7] G. BIRKHOFF, *Lattice theory*, *American Mathematical Society Colloquium Publications*, v. XXV, (1948).
- [8] H. HERMES, *Einführung in die verbändstheorie*, *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Springer Verlag, Berlin, (1955).
- [9] G. LETTA, *Teoremi di prolungamento per misure in reticoli algebrici*, *Ricerche di Matematica*, v. VIII, pp. 300-318, (1959).
- [10] F. CAFIERO, *Sul principio esteso delle probabilità totali*, *Ann. della Università di Ferrara*, v. V, pp. 85-102, (1956).