ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

GIOVANNI AQUARO

Intorno ad alcuni recenti risultati relativi al problema di Vitali-Lusin

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 15, nº 3 (1961), p. 145-158

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1961_3_15_3_145_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

INTORNO AD ALCUNI RECENTI RISULTATI RELATIVI AL PROBLEMA DI VITALI-LUSIN

Nota (*) di GIOVANNI AQUARO

I risultati più generali relativi al problema di VITALI-LUSIN, dei quali lo scrivente sia a conoscenza, sono quelli ottenuti nel 1947 da H. M. SCHAERF ([13]; vedasi anche [8] oppure [9] cap. III, § 11, teor, 11.3.11). Con essi viene precisata, in modo esauriente, la struttura topologico-mensurale di uno spazio di intorni misurato affinchè ogni applicazione misurabile di esso in uno spazio topologico dotato di base numerabile sia quasicontinua, nel senso della def. 4.

Nel 1956, in spazi topologici perfettamente normali, F. CAFIERO, e, da un differente punto di vista F. BERTOLINI (cfr. [6], [7] e, rispett., [4]), trattarono la questione della coincidenza di misurabilità e di quasicontinuità per funzioni numeriche, dando alcune caratterizzazioni della struttura topologico-mensurali degli spazii nei quali tale coincidenza si realizza. Nel 1959 G. LETTA (cfr. [11]) riprendeva la questione in spazii perfettamente normali, dando forma più espressiva, nel tempo stesso in cui ne chiariva più nettamente l'estenzione, ai risultati sopracitati di F. CAFIERO e ad alcuni di F. BERTOLINI.

Nel presente lavoro gli ultimi risultati souo stati riesaminati nel quadro di quelli di H. M. SCHAERF. È convenuto, a tal fine, ed in un caso è stato necessario (cfr. ([3])), riprendere i risultati di SCHAERF in termini di misure esterne, con una nuova formulazione: questa consente di inquadrare in una veduta unitaria *tutti* i risultaii sopra citati e di chiarire, ampliandola lievemente, la loro portata (**).

(*) Il presente lavoro è stato esegnito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 20 del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) In spazii topologici nel senso consueto, o anche, nei casi che il Lettore riconoscerà agevolmente, nel senso più generale di [11] (assiomi (C_1), (C_2'), (C_3)) p. es.

1. Alle seguenti definizioni si farà costante riferimento in tutto il seguito.

DEF. 1. — *Se $\mathcal{U}$ è un insieme di parti dell'insieme E e se E' è uno spazio topologico, una applicazione f di E in E' si dice $\mathcal{U}$-misurabile se, per ogni insieme aperto U' di E' risulta $\overset{-1}{f}(U') \in \mathcal{U}$.*

DEF. 2. — *Se μ^* è una misura esterna sullo spazio topologico E e se E' è uno spazio topologico, un'applicazione f di E in E' si dice μ^*-quasicontinua se, per ogni numero reale $\varepsilon > 0$ esiste una parte A di E tale che $\mu^*(E - A) < \varepsilon$ e tale che la restrizione f_A di f ad A sia continua sul sottospazio A.*

DEF. 3. — *Se μ^* è una misura esterna sullo spazio topologico E e se $\mathcal{U}$ è un insieme di parti di E si dice che μ^* verifica la proprietà $(S \cdot \mathcal{U})$ se per ogni $X \in \mathcal{U}$, esiste un insieme aperto U di E tale che $\mu^*(X \Delta U) < \varepsilon$.*

I seguenti lemmi 1 e 2 hanno origine da H. M. SCHAERF ([13] teor. 1 e supplemento al teor. 1). Le loro dimostrazioni, fondate sulle argomentazioni di SCHAERF, vengono indicate in dettaglio per comodità del lettore.

LEMMA 1. — *Supponiamo che μ^* sia una misura esterna sullo spazio topologico* (1) *E e supponiamo che $\mathcal{U}$ sia un insieme di parti di E tale che μ^* verifichi la proprietà $(S \cdot \mathcal{U})$* (def. 3). *Allora, se E' é uno spazio topologico dotato di base numerabile, tutte le applicazioni $\mathcal{U}$-misurabili di E in E'* (def. 1) *sono μ^*-quasicontinue* (def. 2).

DIM. Supponiamo che $(B'_n)_{n \in N}$ sia una base di E' e sia f un'applicazione $\mathcal{U}$-misurabile di E in E'. Per ogni $n \in N$ si ha $\overset{-1}{f}(B'_n) \in \mathcal{U}$ e quindi, se ε è un numero positivo, per ogni $n \in N$ esiste un insieme aperto U_n di E tale che $\mu^*((\overset{-1}{f}(B'_n)) \Delta U_n) < \varepsilon/(n+1)$ (2). Posto $M = E - (\bigcup_{n \in N} (\overset{-1}{f}(B'_n) \Delta U_n)$, si ha $\mu^*(E - M) < \varepsilon$.

Come in [13] (teor. 1) si riconosce che, per ogni $p \in N$, è $M \cap \overset{-1}{f}(B'_p)) = M \cap U_p$ e quindi, detta f_M la restrizione di f ad M, si ha $\overset{-1}{f_M}(B'_p) = M \cap \cap (\overset{-1}{f}(B'_p)) = M \cap U_p$ e quindi, U_p essendo aperto in E, $\overset{-1}{f_M}(B'_p)$ è aperto nel sottospazio M, donde, $(B'_n)_{n \in N}$ essendo una base E', f_M è continua nel sottospazio M. Da ciò (def. 2) la tesi.

LEMMA 2. — *Supponiamo che μ^* sia una misura esterna sullo spazio topologico E, che $\mathcal{U}$ sia un insieme di parti di E e che la funzione caratte-*

---

(1) Questo enunciato è vero anche se in esso, oltre che nelle deff. 2 e 3, si suppone che E sia, più in generale, uno spazio di intorni secondo [1] pag. 37.

(2) Se A e B sono parti di E si pone $A \Delta B = (A - B) \cap (B - A)$.

ristica di ogni $X \in \mathcal{U}$ sia μ^*-quasicontinua (def. 2). *Allora μ^* verifica la proprietà* $(S \cdot \mathcal{U})$ (def. 3).

DIM. Sia $X \in \mathcal{U}$: la funzione caratteristica f di X è μ^*-quasicontinua e quindi (def. 2) per ogni numero positivo ε esiste una parte A di E tale che $\mu^*(E - A) < \varepsilon$ e tale che la restrizione f_A di f ad A sia continua sul sottospazio A. Per ciò, $\overset{-1}{f_A}\left(\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\right)$ è aperto nel sottospazio A e quindi esiste un insieme aperto U di E tale che $\overset{-1}{f_A}\left(\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\right) = U \cap A$. Essendo anche $\overset{-1}{f_A}\left(\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\right) = \overset{-1}{f}\left(\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[\right) \cap A = X \cap A$, consegue $U \cap A = X \cap A$ e quindi $X \Delta U \subset E - A$. Da ciò $\mu^*(X \Delta U) \leq \mu^*(E - A) < \varepsilon$.

Notiamo la:

PROP. 1. — *Supponiamo che μ^* sia una misura esterna sullo spazio topologico E, che $\mathcal{U}$ sia un insieme di parti di E tale che da $X \in \mathcal{U}$ consegua $\complement X \in \mathcal{U}$. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) — se E' è uno spazio topologico dotato di base numerabile, ogni applicazione $\mathcal{U}$-misurabile di E in E' (def. 1) *è μ^*-quasicontinua* (def. 2).

b) — le funzioni numeriche $\mathcal{U}$-misurabili su E (def. 1) *sono μ^*-quasicontinue* (def. 2),

c) — la funzione caratteristica di ogni $X \in \mathcal{U}$ è μ^*-quasicontinua (def. 2),

d) — μ^* gode della proprietà $(S \cdot \mathcal{U})$ def. 3).

DIM. *a) implica b)*. È ovvia.

b) implica c). Sia vera la *b)* e sia $X \in \mathcal{U}$: essendo $\complement X \in \mathcal{U}$ la funzione caratteristica di X è $\mathcal{U}$-misurabile e quindi μ^*-quasicontinua.

c) implica d). Consegue dal lemma 2.

d) implica a). Consegue dal lemma 1.

Si noti che, nella proposizione dimostrata non si chiede che $\mathcal{U}$ sia una σ-algebra e gli $X \in \mathcal{U}$ non si suppongono μ^*-misurabili.

Per ciò può avere interesse quanto segue. Iniziamo con una definizione.

DEF. 4. — *Se $\mathcal{U}$ è una σ-algebra sullo spazio topologico E, se μ è una misura su $\mathcal{U}$ e se E' è un ulteriore spazio topologico, un'applicazione f di E in E' si dice μ-quasicontinua se per ogni numero $\varepsilon > 0$ esiste un $A \in \mathcal{U}$ tale che $\mu(E - A) < \varepsilon$ e tale che la restrizione f_A di f ad A sia continua nel sottospazio A.*

PROP. 2. — *Supponiamo che $\mathcal{U}$ sia una σ-algebra sullo spazio topologico E e che μ sia una misura su $\mathcal{U}$. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti* (cfr. [13])

a) — ogni applicazione $\mathcal{U}$-misurabile (def. 1) *di E in uno spazio topologico dotato di base numerabile risulta μ-quasicontinua* (def. 4).

b) — ogni funzione numerica $\mathcal{U}$-misurabile su E (def. 1) *è μ-quasicontinua* (def. 4).

c) — *la funzione caratteristica di ogni* $X \in \mathcal{U}$ *e* μ*-quasicontinua* (def. 4).

d) — *la misura esterna* μ^* *generata da* μ *verifica la proprietà* $(S\text{-}\mathcal{U})$ (def. 3).

Dim. a) *implica* b). È ovvia.

b) implica c). Come la *b)* implica *c)* della prop. 1.

c) implica d). Se μ^* è la misura esterna generata da μ ogni $X \in \mathcal{U}$ è μ^*-misurabile e la restrizione di μ^* ad $\mathcal{U}$ è μ. Allora μ-quasicontinuità implica μ^*-quasicontinuità e dalla *c) implica d)* della prop. 1, consegue che l'attuale *c) implica d)* è dimostrata.

d) implica a). Supponiamo vera la *d)*. In forza della *d) implica a)* della prop. 1, se f è un'applicazione $\mathcal{U}$-misurabile (def. 1) di E in uno spazio topologico E' dotato di base numerabile, f è μ^*-quasicontinua (def. 2) e, per ciò, se ε è un numero positivo esiste una parte A (non necessariamente μ^*-misurabile) di E tale che $\mu^*(E - A) < \varepsilon$ e tale che la restrizione f_A di f ad A sia continua nel sottospazio A. Per la definizione di μ^*, essendo $\mu^*(E - A) < \varepsilon$, esiste un $B \in \mathcal{U}$ tale che $E - A \subset B$ e $\mu(B) < \varepsilon$. Posto $M = \complement B$ si ha $M \in \mathcal{U}$ e $\mu(E - M) = \mu(B) < \varepsilon$. Inoltre la restrizione f_M di f ad M è identica alla restrizione di f_A ad M e quindi è continua sul sottospazio M. Da ciò la *a)*

L'analisi delle relazioni tra misurabilità e quasicontinuità di un'applicazione può essere proseguita più agevolmente mediante i seguenti lemmi le cui dimostrazioni non esulano dagli schemi abituali.

LEMMA 3. — *Supponiamo che* $\mathcal{U}$ *sia una* σ*-algebra sullo spazio topologico* E *e che* μ *sia una misura su* $\mathcal{U}$. *Allora, se ogni funzione numerica* μ*-quasicontinua su* E (def. 4) *è* $\mathcal{U}$*-misurabile* (def. 1), *la* μ *è completa.*

LEMMA 4. — *Nelle ipotesi del lemma* 3, *se ogni insieme aperto di* E *appartiene ad* $\mathcal{U}$ *e se* μ *è completa, allora ogni applicazione* μ*-quasicontinua* (def. 4) *di* E *in uno spazio topologico* E', *è* $\mathcal{U}$*-misurabile* (def. 1).

DIM. Sia f un'applicazione μ-quasicontinua di E in E'. Per ogni $n \in N$ esiste un $A_n \in \mathcal{U}$ tale che $\mu(E - A_n) < \dfrac{1}{n+1}$ e tale che la restrizione f_n di f ad A_n sia continua nel sottospazio A_n. Sia $A = E - (\bigcup_{n \in N} A_n)$: risulta $E = A \cup (\bigcup_{n \in N} A_n)$ e quindi, se U' è un insieme aperto di E', si ha $\overset{-1}{f}(U') = (A \cap \overset{-1}{f}(U')) \cup (\bigcup_{n \in N} (A_n \cap \overset{-1}{f}(U')) = (A \cap \overset{-1}{f}(U')) \cup (\bigcup_{n \in N} \overset{-1}{f_n}(U'))$. Poichè f_n è continua nel sottospazio A_n, $\overset{-1}{f_n}(U')$ è un insieme aperto del sottospazio e quindi $\overset{-1}{f_n}(U')$ essendo intersezione di A_n e di un insieme aperto di E, è in $\mathcal{U}$ e per ciò è $(\bigcup_{n \in N} \overset{-1}{f_n}(U')) \in \mathcal{U}$.

D'altra parte, per ogni $n \in N$, è $\mu(A) \leq \mu(E - A_n) < \frac{1}{n+1}$ e quindi $\mu(A) = 0$. Poichè μ è completa consegue $\overset{-1}{f}(U') \in \mathfrak{A}$.

LEMMA 5. — *Ancora nelle ipotesi del lemma* 3, *le seguenti proposizioni sono equivalenti :*

a) — *la misura esterna* μ^* *generata da* μ *verifica la proprietà* $(S\text{-}\mathfrak{A})$ (def. 3).

b) — (Proprietà di SCHAERF) *per ogni* $X \in \mathfrak{A}$ *e per ogni numero* $\varepsilon > 0$ *esiste un* $U \in \mathfrak{A}$, *aperto e tale che* $\mu(X \Delta U) < \varepsilon$ (3).

DIM. Ogni $X \in \mathfrak{A}$ è μ^*-misurabile e la restrizione di μ^* ad $\mathfrak{A}$ è μ.

Sotto alcuni riguardi la seguente proposizione 3 compendia i risultati precedenti.

PROP. 3. — *Supponiamo che* $\mathfrak{A}$ *sia una* σ-*algebra sullo spazio topologico* E *alla quale appartengono gli insiemi di* E *e supponiamo che* μ *sia una misura su* $\mathfrak{A}$. *Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti :*

a) — *se* E' *è uno spazio topologico dotato di base numerabile, l'insieme* $\mathfrak{M}_{\mathfrak{A}}(E, E')$ *delle applicazioni* $\mathfrak{A}$-*misurabili* (def. 1) *di* E *in* E' *è identico all'insieme* $Q_\mu(E, E')$ *delle applicazioni* μ-*quasicontinue* (def. 4) *di* E *in* E'.

b) — *le funzioni numeriche* $\mathfrak{A}$-*misurabili su* E (def. 1) *sono tutte e solo quelle* μ-*quasicontinue* (def. 4).

c) — *per una parte* X *di* E *risulta* $X \in \mathfrak{A}$ *se e solo se la funzione caratteristica di* X *è* μ-*quasicontinua* (def. 4).

d) — μ *è completa e verifica la proprietà di* SCHAERF [lemma 5, *b*)].

DIM. *a*) *implica b*). È ovvia.

b) *implica c*) Sia vera la *b*) e supponiamo che X sia una parte di E. Per la prop. 2 [*b*) implica *c*)] se è $X \in \mathfrak{A}$ la funzione caratteristica φ_X di X è μ-quasicontinua. Viceversa, se φ_X è μ quasicontinua essa è $\mathfrak{A}$-misurabile e per ciò $X \in \mathfrak{A}$.

c) *implica d*). Sia vera la *c*). Riconosciamo che μ è completa. Sia X una parte di E contenuta in un $A \in \mathfrak{A}$ tale che $\mu(A) = 0$; la funzione caratteristica φ_X di X è μ-quasicontinua e quindi $X \in \mathfrak{A}$ in forza di *c*). Inoltre, μ verifica la proprietà di SCHAERF in forza del lemma 5 e della prop. 2 [*c*) implica *d*)].

d) *implica a*) Consegue dal lemma 4 e dalla prop. 2 [*d*) implica *a*)].

---

(3) Nella prop. 2, l'implicazione *b*) $\Longrightarrow$ *d*), quando in *d*) si sostituisca la proprietà $(S\text{-}\mathfrak{A})$ con la proprietà di SCHAERF, costituisce, con l'attuale terminologia, proprio il supplemento al teor. 1 di [13]: ma se non si aggiunge l'ipotesi che gli insiemi aperti di E siano in $\mathfrak{A}$, la tesi *d*) può esser falsa. Ora, questa ipotesi, per una svista, non è stata esplicitamente formulata in [13]. Ciò giustifica il lemma 2 di questa nota.

Nel caso degli spazi perfettamente normali la proposizione stabilita può enunciarsi:

PROP. 4. — *Supponiamo che $\mathcal{U}$ sia una σ-algebra sullo spazio topologico perfettamente normale E e supponiamo che μ sia una misura su $\mathcal{U}$. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) — come a) della prop. 3.

b) — come b) della prop. 3.

c) — gli insiemi aperti di E appartengono ad $\mathcal{U}$ e vale la c) della prop. 3.

d) — gli insiemi aperti di E appartengono ad $\mathcal{U}$ e vale la d) della prop. 3.

DIM. *a) implica b)* È ovvia.

b) implica c). Come è noto (4), se E è perfettamente normale e se U è un insieme aperto di E esiste una funzione numerica continua f su E tale che $\complement U = \overset{-1}{f}(1)$. Se è vera la *b)* si ha $U \in \mathcal{U}$ e la *c)* della prop. 3 è vera.

c) implica d). Consegue dalla *c)* e dalla prop. 3 [*c)* implica *d)*].

d) implica a). Consegue dalla prop. 3 [*d)* implica *a)*].

Un caso in cui la prima parte della precedente *d)* è verificata è il seguente.

PROP. 5. — *Se $\mathcal{U}$ è una σ-algebra sullo spazio topologico perfettamente normale E e se μ è una misura σ-finita e completa su $\mathcal{U}$ le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) — gli insiemi aperti di E appartengono ad $\mathcal{U}$.

b) — se A e B sono parti di E tali che $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, esistono X e Y in $\mathcal{U}$ tali che $A \subset X$, $B \subset Y$, $X \cap Y = \emptyset$.

DIM. Che *a)* implichi *b)* è vero anche se lo spazio topologico E non è perfettamente normale. Reciprocamente, supponiamo che *b)* sia vera e sia μ^* la misura esterna generata da μ. Se A e B sono parti di E tali che $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$, da *b)* consegue che esistono X e Y in $\mathcal{U}$ tali che $A \subset X$, $B \subset Y$, $X \cap Y = \emptyset$. Sia $Z \in \mathcal{U}$ tale che $A \cup B \subset Z$: $X \cap Z$ e $Y \cap Z$ sono elementi disgiunti di $\mathcal{U}$ e contengono A e, rispett., B. Dalla definizione di μ^* consegue, $\mu^*(A) + \mu^*(B) \leq \mu(X \cap Z) + \mu(Y \cap Z) \leq \mu(Z)$ e da ciò $\mu^*(A) + \mu^*(B) \leq \mu^*(A \cup B)$. Dunque è $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ ciò che, E essendo perfettamente normale, come è noto (cfr. p. es. [3]) dimostra che ogni insieme chiuso di E è μ^*-misurabile. Poichè μ è completa e σ-finita risulta che ogni insieme chiuso, come ogni parte μ^*-misurabile di E, appartiene ad $\mathcal{U}$ ([10] cap. IV, § 17, (4)).

---

(4) Cfr. [2] pag. 291 : I $\Longleftrightarrow$ III; vedasi anche [5] § 4, eserc. 7, *a)*, [11] n. 2 teor. I.

2. — Si indica ora il collegamento tra i risultati precedenti e quelli di G. LETTA e di F. BERTOLINI. Premettiamo, all'uopo, alcuni lemmi.

LEMMA 6. — *Supponiamo che $\mathcal{A}$ sia un σ-anello sull'insieme E e che μ sia una misura finita su $\mathcal{A}$. Supponiamo, inoltre che $(A_n)_{n\in N}$ sia una successione di elementi di $\mathcal{A}$ tale che, posto $A' = \liminf_{n\to\infty} A_n$ e $A'' = \limsup_{n\to\infty} A_n$ esista un $A \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(A' \Delta A) = 0 = \mu(A'' \Delta A)$. Allora risulta $\lim_{n\to\infty} \mu(A \Delta A_n) = 0$.*

DIM. Per ogni $n \in N$ assumiamo:

$$A'_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A \quad , \qquad A''_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k .$$

Essendo $\lim_{n\to\infty} A'_n = A'$ e $\lim_{n\to\infty} A''_n = A''$ e μ essendo finita, consegue $\lim_{n\to\infty} \mu(A'_n) = \mu(A')$, $\lim_{n\to\infty} \mu(A'') = \mu(A'')$ e quindi:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A' - A'_n) = 0, \ \lim_{n\to\infty} \mu(A''_n - A'') = 0. \tag{1}$$

Per ogni $n \in N$, inoltre, si ha $0 \leq \mu(A' - A_n) \leq \mu(A' - A'_n)$ e $0 \leq \mu(A_n - A'') \leq \mu(A''_n - A'')$, donde, in forza delle (1):

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A' - A_n) = 0, \ \lim_{n\to\infty} \mu(A_n - A'') = 0. \tag{2}$$

Poichè, per ipotesi, risulta $\mu(A \Delta A') = 0 = \mu(A \Delta A'')$, si trova $\mu(A - A') = 0$ e $\mu(A'' - A) = 0$ e da ciò consegue $\mu(A - A_n) \leq \mu(A' - A_n)$, $\mu(A_n - A) \leq \mu(A_n - A'')$ e poi $\mu(A \Delta A_n) \leq \mu(A' - A_n) + \mu(A_n - A'')$. Da ciò e dalle (2) la tesi.

LEMMA 7. — *Supponiamo che $\mathcal{A}$ sia una σ-algebra sullo spazio topologico E e supponiamo che μ sia una misura finita e verificante la proprietà di* SCHAERF [lemma 5, *b*)] *su $\mathcal{A}$.*

Allora, per ogni $X \in \mathcal{A}$ esiste un $B \in \mathcal{A}$ che è un G_δ e verifica la $\mu(X \Delta B) = 0$.

DIM. Sia $X \in \mathcal{A}$ ed $n \in N$. Per la proprietà di SCHAERF esiste un insieme aperto $U_n \in \mathcal{A}$ tale che $\mu(X \Delta U_n) < 1/2^{n+2}$. Pertanto, se è $p \in N$, $q \in N$, $p \leq q$, risulta $\mu(U_p \Delta U_q) < 1/2^{p+1}$ e quindi si ha:

$$\mu(U_p - U_q) < \frac{1}{2^{p+1}}, \quad \mu(U_q - U_p) < \frac{1}{2^{p+1}} . \tag{1}$$

Posto $U_n' = \bigcap_{k=n}^{\infty} U_k$ e $U_n'' = \bigcup_{k=n}^{\infty} U_k$ si ha $U_n' \in \mathcal{U}$, $U_n'' \in \mathcal{U}$ e U_n' e U_n'' sono insiemi di Borel, U_n'' risultando aperto. Inoltre risulta: $U_p'' - U_p \subset \bigcup_{n=p}^{\infty} (U_{n+1} - U_n)$, $U_p - U_p' \subset \bigcup_{n=p}^{\infty} (U_n - U_{n+1})$. Da ciò e dalle (1) consegue:

$$\mu(U_p'' - U_p) < \frac{1}{2^p}, \quad \mu(U_p - U_p') < \frac{1}{2^p}. \tag{2}$$

Ciò premesso, poniamo $U' = \liminf_{n\to\infty} U_n$ e $U'' = \limsup_{n\to\infty} U_n$. Per ogni $p \in N$ $p > 0$ si ha $U'' - U' \subset U_p'' - U_p'$ donde $\mu(U'' - U') \leq \mu(U_p'' - U_p') \leq \leq \mu(U_p'' - U_p) + \mu(U_p - U_p') < 1/2^{p-1}$ (cfr. le (2)): consegue che, essendo $\mu(U' - U'') = \mu(\emptyset) = 0$, deve essere anche $\mu(U'' \Delta U') < 1/2^{p-1}$, donde, per $p \to \infty$, $\mu(U' \Delta U'') = 0$. Posto $B = U''$, per quanto sopra, è $B \in \mathcal{U}$ e B risulta un G_δ e si ha $\mu(U'' \Delta B) = 0 = \mu(U' \Delta B)$: per il lemma 6, consegue $\lim_{n\to\infty} \mu(U_n \Delta B) = 0$. Eessendo $\lim_{n\to\infty} \mu(U_n \Delta X) = 0$ e $\mu(X \Delta B) \leq \mu(X \Delta U_n) + + \mu(U_n \Delta B)$, risulta $\mu(X \Delta B) = 0$.

La proposizione reciproca sussiste satto opportune condizioni. Per dimostrarlo premettiamo una definizione destinata a semplificare l'esposizione di quanto segue.

DEF. 5. — *Se $\mathcal{U}$ è una σ-algebra sullo spazio topologico E e se μ è una misura su $\mathcal{U}$, diciamo che μ verifica la proprietà di* SCHAERF *nell'elemento X di $\mathcal{U}$, se per ogni numero $\varepsilon > 0$ esiste un insieme aperto $U \in \mathcal{U}$ tale che $\mu(X \Delta U) < \varepsilon$.*

OSSERVAZIONE. La proprietà di SCHAERF in ogni $X \in \mathcal{U}$ implica la proprietà di SCHAERF secondo la *b*) del lemma 5.

LEMMA 8. — *Supponiamo che $\mathcal{U}$ sia una σ-algebra sullo spazio topologico E che contenga la σ-algebra di Borel $\mathcal{B}$ di E e supponiamo che μ sia una misura su $\mathcal{U}$ tale che, detto $\mathcal{U}_\mu$ l'insieme degli $X \in \mathcal{U}$ nei quali μ verifica la proprietà di* SCHAERF (def. 5), *ogni insieme chiuso di E appartenga ad $\mathcal{U}_\mu$: allora $\mathcal{U}_\mu$ è una σ-algebra e risulta $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_\mu$.*

DIM. Sia $(X_n)_{n\in N}$ una successione di elementi di $\mathcal{U}_\mu$ e sia ε un numero positivo: per ogni $n \in N$, esiste un $U_n \in \mathcal{U}$ e aperto tale che $\mu(X_n \Delta U_n) < < \varepsilon/2^{n+1}$. Sia $X = \bigcup_{n\in N} X_n$ e $U = \bigcup_{n\in N} U_n$: si ha $X \in \mathcal{U}$, $U \in \mathcal{U}$ e U è aperto. Ovviamente, è $\mu(X \Delta U) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(X_n \Delta U_n) < \varepsilon$ e quindi $X \in \mathcal{U}_\mu$. Inoltre se è $X \in \mathcal{U}_\mu$, poichè ogni insieme chiuso di E è in $\mathcal{U}_\mu$, si riconosce immediatamente che è $\complement X \in \mathcal{U}_\mu$. Dunque $\mathcal{U}_\mu$ è una σ-algebra e, poichè ad essa appartengono gli insiemi, chiusi si ha $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_\mu$.

Consegue:

PROP. 6. — *Supponiamo che $\mathcal{U}$ sia una σ-algebra sullo spazio topologico E e supponiamo che $\mathcal{U}$ contenga la σ-algebra di Borel $\mathcal{B}$ di E; supponiamo inoltre che μ sia una misura finita su $\mathcal{U}$, tale che detto $\mathcal{U}_\mu$ l'insieme degli $X \in \mathcal{U}$ nei quali μ verifica la proprietà di* SCHAERF (def. 5), *ogni insieme chiuso di E appartenga ad $\mathcal{U}_\mu$. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) — *μ verifica la proprietà di* SCHAERF [lemma 5, *b*)].

b) — *per ogni $X \in \mathcal{U}$ esiste un $A \in \mathcal{U}$ che è un G_δ tale che $\mu(X \Delta A) = 0$*

c) — *per ogni $X \in \mathcal{U}$ esiste un $A \in \mathcal{U}$ che è un F_σ tale che $\mu(X \Delta A) = 0$*

d) — *per ogni $X \in \mathcal{U}$ esiste un $B \in \mathcal{B}$ tale che $\mu(X \Delta B) = 0$.*

DIM. Le implicazioni $a) \Longrightarrow b)$ e $d) \Longrightarrow a)$ conseguono dai lemmi 7 e 8. Le $b) \Longrightarrow c)$ e $c) \Longrightarrow d)$ sono ovvie.

COROLLARIO. *Se ogni insieme aperto dello spazio topologico E è un F_σ (in particolare se E è perfettamente normale), se $\mathcal{U}$ è una σ-algebra su E nella quale sia contenuta la σ-algebra di Borel $\mathcal{B}$ di E e se μ è una misura finita su $\mathcal{U}$, allora le proposizioni a), b), c), d) della prop. 6 sono equivalenti.*

DIM. Poichè ogni insieme chiuso è un G_δ e μ è finita, μ verifica la proprietà di SCHAERF in ogni insieme chiuso.

Questo corollario permette di enunciare la prop. 4 in altro modo. Osserviamo, in primo luogo che in tale prop. 4, la proprietà *d*) può essere espressa esplicitamente così:

d) — *gli insiemi aperti di E appartengono ad $\mathcal{U}$, μ è completa e verifica la proprietà di* SCHAERF [lemma 5, *b*)].

In forza del corollario alla prop. 6, nella *d*) ora scritta la proprietà di SCHAERF può essere sostituita con una qualunque delle proprietà *b*), *c*), *d*) della prop. 6 e, in particolare, sostituendola con la *d*), la equivalenza di *b*) e *d*) nella prop. 4 è esattamente il risultato di LETTA in [11] (n. 3, teor. III).

Si indica ora un collegamento tra i risultati del n. 1 e quelli di F. BERTOLINI.

Sia $\mathcal{S}$ un semianello secondo J. VON NEUMANN (« half-ring » in [12] def. 10.1.5) sullo spazio topologico E e denotiamo con $a(\mathcal{S})$ e $b(\mathcal{S})$ l'anello e, rispettivamente, il σ-anello generato da $\mathcal{S}$.

Supponiamo, con BERTOLINI ([4] n. 7, pag. 301), che sia $E \in b(\mathcal{S})$ ossia, che E risulti riunione di una successione di elementi di $\mathcal{S}$: in conseguenza $b(\mathcal{S})$ è una σ-algebra.

Sia μ una misura (5) finita su $\mathcal{S}$ e denotiamo con μ_a la misura su $a(\mathcal{S})$, univocamente determinata ([12] teor. 10.1.12 oppure [10] cap. II, § 8, (5)) dalla condizione che la sua restrizione a $\mathcal{S}$ sia μ. Sia μ^* la misura esterna

(5) Cioè μ è non negativa, numerabilmente additiva e risulta $\mu(\emptyset) = 0$.

generata (indotta secondo [10] cap. II, § 10, teor. A) da μ_a e sia $\mathcal{U}$ la σ-algebra delle parti μ^*-misurabili di E (si tenga presente la $E \in b(\mathcal{S}) \subset \mathcal{U}$). Denotiamo con $\bar{\mu}$ la misura su $\mathcal{U}$ univocamente determinata ([12] teor. 10.3.33) dalla condizione che la sua restrizione ad $a(\mathcal{S})$ sia μ_a o, equivalentemente, dalla condizione che la sua restrizione a $\mathcal{S}$ sia μ.

Denotiamo con $\mathcal{R}$ l'insieme degli $X \in \mathcal{U}$ tale che $\bar{\mu}(X) < +\infty$ e con $\mathcal{C}$ l'insieme delle parti di E che sono intersezioni di successioni di elementi di $a(\mathcal{S})$.

Come è ben noto ([9] cap. II, § 6, teor. 6.5.4):

α) — *per ogni* $X \in \mathcal{R}$ *e per ogni numero* $\varepsilon > 0$ *esiste un* $C \in \mathcal{C}$ *tale che* $C \subset X$, $\bar{\mu}(X) - \varepsilon < \bar{\mu}(C)$.

Ciò premesso, supponiamo che sia $X \in \mathcal{R}$ e che ε sia un numero positivo: per la α) esiste $C \in \mathcal{C}$ tale che $\bar{\mu}(X \Delta C) = \bar{\mu}(X - C) < \varepsilon/3$. D'altra parte, essendo $C \in \mathcal{C} \subset b(\mathcal{S})$, in forza del teor. D, cap. III, § 2 di [10], esiste un $Y \in a(\mathcal{S})$ tale che $\bar{\mu}(C \Delta Y) < \varepsilon/3$.

Consegue $\bar{\mu}(X \Delta Y) < 2\varepsilon/3$. Essendo $Y \in a(\mathcal{S})$ esiste una famiglia finita $(Y_j)_{0 \leq j \leq q}$ di elementi di $\mathcal{S}$ tale che $Y = \bigcup_{j=0}^{q} Y_j$.

Ora, facciamo intervenire la condizione (necess. e suff.) del teor. XXI, n. 8 [4] di BERTOLINI. In conseguenza, per ogni $j = 0, 1, \ldots, q$, esiste una successione $(F_{jn})_{n \in N}$ di insiemi chiusi di E tale che, per ogni $n \in N$, sia $\mu^*(F_{jn} - Y_j) = 0$ e $\mu^*(Y_j - F_{jn}) < 1/(n+1)$. Risulta $\mu^*(Y_j \Delta F_{jn}) < 1/(n+1)$ e quindi, posto $F_n = \bigcup_{j=0}^{q} F_{jn}$, si ha $\mu^*(Y \Delta F_n) < (q+1)/(n+1)$ per ogni $n \in N$. Dunque esiste un insieme chiuso F di E tale che $\mu^*(Y \Delta F) < \varepsilon/3$. In definitiva:

β) — *per ogni* $X \in \mathcal{R}$ *e per ogni numero* $\varepsilon > 0$, *esiste un insieme chiuso* F *di* E *tale che* $\mu^*(X \Delta F) < \varepsilon$.

Dopo ciò, supponiamo che f sia una funzione numerica misurabile (μ) secondo BERTOLINI ([4] n. 7) su E, cioè $\mathcal{U}$-misurabile (def. 1). Dimostriamo che f e quasicontinua (μ) secondo BERTOLINI ([4] n. 8, pag. 300), cioè che:

γ) — *per ogni* $X \in \mathcal{R}$ *e per ogni numero* $\varepsilon > 0$ *esiste un* $C \in \mathcal{C}$ *tale che* $C \subset X$, $\bar{\mu}(X - C) < \varepsilon$ *e la restrizione* f_C *di* f *a* C *sia continua sul sottospazio* C.

Iniziamo col caso $\bar{\mu}(E) < +\infty$: allora è $\mathcal{U} = \mathcal{R}$ e quindi $\mathcal{R}$ è una σ-algebra per cui la β) implica la (S-$\mathcal{R}$) della def. 3. In forza della prop. 2 [d) equivale b)] la f è $\bar{\mu}$-quasicontinua (secondo la nostra def. 4), in quanto è $\bar{\mu}^* = \mu^*$ (cfr. [10] cap. III, § 12, teor. B).

Ciò premesso supponiamo $\bar{\mu}(E) = +\infty$. Sia $A \in \mathcal{R}$ e sia $\mathcal{U}_A$ la σ-algebra su A costituita dagli $X \in \mathcal{U}$ tali che $X \subset A$. Siano $\bar{\mu}_A$ e $\bar{\mu}_A^*$ le restrizioni di $\bar{\mu}$ ad $\mathcal{U}_A$ e, rispettivamente, di $\bar{\mu}^*$ all'insieme delle parti di A: rimarchiamo che, essendo $A \in \mathcal{U}$, $\bar{\mu}_A^*$ è identica alla misura esterna su A generata

da $\overline{\mu}_A$ e quindi, in forza di risultati ben noti ([10] cap. III, § 14, (3)), le parti $\overline{\mu}_A^*$ misurabili di A sono tutti e soli gli elementi di $\mathcal{U}_A$.

È lecito, allora, considerare valida la β) sostituendo in essa, $\mathcal{R}$ con $\mathcal{U}_A$, E con A, μ^* con $\overline{\mu}_A^*$ e supponendo che F sia un insieme chiuso del sottospazio A. La conclusione relativa al caso $\mu(E) < +\infty$ è valida per il sottospazio A, per $\mathcal{U}_A$ e per $\overline{\mu}_A$ e quindi, detta f_A la restrizione di f ad A, poichè f_A è $\mathcal{U}_A$-misurabile, f_A è $\overline{\mu}_A$-quasi continua su A (def. 4). Dunque per ogni numero $\varepsilon > 0$ esiste un $B \in \mathcal{U}_A$ tale che $\overline{\mu}_A(A - B) < \varepsilon/2$ e tale che la restrizione f_B di f_A a B sia continua sul sottospazio B. Rusulta $B \in \mathcal{U}$ e $B \subset A$ e quindi B e $\mathcal{R}$. Da ciò, in forza di β), consegue γ).

Si rilevi che nella argomentazione di cui sopra è lecito supporre che f sia, più in generale, un'applicazione $\mathcal{U}$-misurabile di E in uno spazio topologico E' dotato di base numerabile. Si trova così un buon miglioramento delle implicazioni fornite da BERTOLINI.

3. — Una formulazione più restrittiva, ben nota, del concetto di quasicontinuità è contenuta nella:

DEF. 6 — *Se $\mathcal{U}$ è una σ-algebra sullo spazio topologico E, se μ è una misura su $\mathcal{U}$ e se E' è un ulteriore spazio topologico, un'applicazione f di E in E' si dica μ-quasicontinua secondo* VITALI-LUSIN, *se per ogni numero $\varepsilon > 0$ esiste un $A \in \mathcal{U}$ chiuso, tale che $\mu(E - A) < \varepsilon$ e tale che la restrizione f_A di f ad A sia continua nel sottospazio A.*

Relazioni tra questa particolare quasicontinuità e misurabilità verranno indicate dopo aver premesso alcuni risultati preliminari.

LEMMA 9. — *Sia $\mathcal{U}$ una σ-algebra sullo spazio topologico E, sia μ una misura su $\mathcal{U}$ e sia $\mathcal{U}_\mu$ l'insieme delle parti X di E tali che per ogni numero $\varepsilon > 0$ esistano un $F \in \mathcal{U}$ e chiuso e un $G \in \mathcal{U}$ e aperto tali che $F \subset X \subset G$, $\mu(G - F) < \varepsilon$. Allora, se ogni insieme chiuso di E è in $\mathcal{U}_\mu$, tale $\mathcal{U}_\mu$ è una σ-algebra e contiene la σ algebra di Borel $\mathcal{B}$ di E.*

DIM. Sia $(X_n)_{n \in N}$ una successione di elementi di $\mathcal{U}_\mu$: poniamo $X = \bigcap_{n \in N} X_n$. Sia ε un numero positivo: per ogni $n \in N$, esistono un $F_n \in \mathcal{U}$ e chiuso ed un $G_n \in \mathcal{U}$ e aperto, tali che $F_n \subset X_n \subset G_n$ e $\mu(G_n - F_n) < \varepsilon/2^{n+2}$. Poniamo $F = \bigcap_{n \in N} F_n$ e $G' = \bigcup_{n \in N} (G_n - F_n)$: F e G' sono in $\mathcal{U}$ il primo chiuso ed il secondo aperto e si ha $\mu(G') < \varepsilon/2$ e risulta $F \subset X \subset F \cup G'$. Poichè è $F \in \mathcal{U}_\mu$ esiste un $G'' \in \mathcal{U}$ aperto tale che $F \subset G''$, $\mu(G'' - F) < \varepsilon/2$: posto $G = G' \cup G''$ si ha $F \subset X \subset G$ e $\mu(G - F) < \varepsilon$. Poichè, inoltre, da $X \in \mathcal{U}_\mu$ consegue $\complement X \in \mathcal{U}_\mu$, la $\mathcal{U}_\mu$ è una σ-algebra e poichè gli insiemi chiusi di E sono in $\mathcal{U}_\mu$, si ha $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}_\mu$.

DEF. 7. — *Con le notazioni e terminologia del lemma 9, $\mathcal{U}_\mu$ viene chiamata la σ-algebra associata a μ.*

LEMMA 10. — *Supponiamo che $\mathcal{B}$ sia la σ-algebra di Borel sullo spazio topologico E e che μ sia una misura su $\mathcal{B}$ tale che, detta $\mathcal{B}_\mu$ la σ-algebra associata a μ* (def. 7), *risulti $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_\mu$. Allora, detto $\overline{\mathcal{B}}_\mu$ il completamento di $\mathcal{B}$ per μ, risulta $\mathcal{B}_\mu = \overline{\mathcal{B}}_\mu$.*

DIM. Sia $X \in \overline{\mathcal{B}}_\mu$: esistono K e L in $\mathcal{B}$ tali che $K \subset X$, $X - K \subset L$, $\mu(L) = 0$. Sia $\varepsilon > 0$ reale: perchè è $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_\mu$, esistono un insieme chiuso E ed un insieme aperto G' di E tali che $E \subset K \subset G'$, $\mu(G' - F) < \varepsilon/2$ ed esiste un insieme aperto G'' di E tale che $L \subset G''$, $\mu(G'') < \varepsilon/2$. Sia $G = G' \cup G''$: risulta $F \subset X \subset G$ e $\mu(G - F) < \varepsilon$ donde, $X \in \mathcal{B}_\mu$ e poi, $\overline{\mathcal{B}}_\mu \subset \mathcal{B}_\mu$.

Reciprocamente, sia $X \in \mathcal{B}_\mu$. Per ogni $n \in N$, esistono un F_n chiuso ed un G_n aperto in E tale che $F_n \subset X \subset G_n$, $\mu(G_n - F_n) < 1/(n+1)$. Sia $K = \bigcup_{n \in N} F_n$ e $L' = \bigcap_{n \in N} G_n$: si ha $K \in \mathcal{B}$, $L' \in \mathcal{B}$, $K \subset X \subset L'$, $\mu(L' - K) = 0$. Posto $L = L' - K$, si ha $L \in \mathcal{B}$, $K \subset X$, $X - K \subset L$, $\mu(L) = 0$ e da ciò $X \in \overline{\mathcal{B}}_\mu$.

Ciò premesso, sussiste la

PROP. 7. — *Supponiamo che $\mathcal{U}$ sia una σ-algebra sullo spazio topologico E, contenente la σ-algebra di Borel $\mathcal{B}$ e supponiamo che μ sia una misura su $\mathcal{U}$. Inoltre, denotati con ν la restrizione di μ a $\mathcal{B}$, con $\mathcal{B}_\nu$ la σ-algebra associata a ν* (def. 7) *e con $\overline{\mathcal{B}}_\nu$ il completamento di $\mathcal{B}$ per ν, supponiamo che sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_\nu$. Allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

a) — se E' è un qualunque spazio topologico dotato di base numerabile, l'insieme $\mathcal{M}_{\mathcal{U}}(E, E')$ delle applicazioni $\mathcal{U}$-misurabili (def. 1) *di E in E' è identico all'insieme $Q^*_\mu(E, E')$ delle applicazioni μ-quasicontinue secondo* VITALI-LUSIN (def. 6) *di E in E'.*

b) — le funzioni numeriche $\mathcal{U}$-misurabili di E (def. 1) *sono tutte e sole quelle μ-quasicontinue secondo* VITALI-LUSIN (def. 6).

c) — se X è una parte di E risulta $X \in \mathcal{U}$ se e solo se la funzione caratteristica di X è μ-quasicontinua secondo VITALI-LUSIN.

d) — risulta $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{B}}_\nu$.

DIM. Si osservi preliminarmente che, in forza del lemma 10, risulta $\mathcal{B}_\nu = \overline{\mathcal{B}}_\nu$. Le implicazioni $a) \Longrightarrow b) \Longrightarrow c)$ sono ovvie. Dimostriamo che $c) \Longrightarrow d)$ e a tal fine, supposta vera la $c)$, sia $X \in \mathcal{U}$ e f sia la funzione caratteristica di X: per ogni $n \in N$ esiste un insieme chiuso F_n di E tale che $\mu(E - F_n) < 1/(n+1)$ e tale che la restrizione f_n di f a F_n sia continua nel sottospazio F_n. Posto $B = \bigcup_{n \in N} F_n$ e $A = E - B$ si ha $A \in \mathcal{B}$ e $\nu(A) = 0$. Ovviamente, è $\overset{-1}{f}(1) \cap B = \bigcup_{n \in N} \overset{-1}{f_n}(1)$ e quindi, $\overset{-1}{f}(1) \cap B$ essendo un F_σ, è in $\mathcal{B}$: essendo $X = (\overset{-1}{f}(1) \cap A) \cup (\overset{-1}{f}(1) \cap B)$ e $\nu(A) = 0$, si ha $X \in \overline{\mathcal{B}}_\nu$ e poi $\mathcal{U} \subset \overline{\mathcal{B}}_\nu$.

Reciprocamente, sia $X \in \overline{\mathcal{B}}_\nu$: esistono K e L in $\mathcal{B}$ tali che $K \subset X$, $X - K \subset L$, $\nu(L) = 0$. Essendo $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_\nu$, esiste un insieme aperto G tale che $L \subset G$ e $\nu(G) < \varepsilon$ per un prefissato $\varepsilon > 0$: la funzione caratteristica di $X - K$ è, dunque, μ-quasicontinua secondo VITALI-LUSIN e quindi, essendo vera la *c*), risulta $X - K \in \mathcal{U}$ e da ciò $X \in \mathcal{U}$. Dunque è $\overline{\mathcal{B}}_\nu \subset \mathcal{U}$ e da ciò la *d*).

Per dimostrare che *d*) $\Longrightarrow$ *a*), supposta vera la *d*), per la def. 7, μ verifica la proprietà di SCHAERF ed è completa: per la prop. 3 [*d*) implica *a*)], $\mathcal{M}_{\mathcal{U}}(E, E')$ è identico all'insieme delle applicazioni μ-quasicontinue di E in E' (def. 4) e quindi, essendo $\mathcal{U} = \mathcal{B}_\nu$, è identico a $Q^*(E, E')$. Dunque la *a*) è vera.

Se nella proposizione dimostrata si suppone che ogni insieme aperto di E sia un F_σ e che μ sia finita, allora la $\mathcal{B} \subset \mathcal{B}_\mu$ è automaticamente realizzata. In particolare

PROP. 8. — *Se E è uno spazio perfettamente normale, se $\mathcal{U}$ è una σ-algebra su E e se μ è una misura finita su $\mathcal{U}$ allora le proposizioni a) e b) della prop. 7 sono equivalenti, ciascuna ad ognuna delle seguenti:*

c) — *ogni insieme aperto di E è in $\mathcal{U}$ e vale la c) della prop. 7*

d) — *ogni insieme aperto di E è in $\mathcal{U}$ e risulta $\mathcal{U} = \overline{\mathcal{B}}_\nu$.*

DIM. Che *a*) implichi *b*) è ovvio. Se è vera la *b*), con argomentazione già adoperata, riconosce che ogni insieme aperto di E è in $\mathcal{U}$: dalla prop. 7 [*b*) implica *c*)] la attuale *c*) è dimostrata. Che *c*) implichi *d*) è ovvio e che *d*) implichi *a*) consegue dalla prop. 7 [*c*) implica *a*)]. L'equivalenza di *b*) e *d*) costituisce, ovviamente, la prop. V, n. 4 [11] di LETTA.

BIBLIOGRAFIA

[1] ALEXANDROFF, P. e HOPF, H.: *Topologie*, vol. I, Springer, Berlin (1935).

[2] AQUARO, G.: *Intorno alle funzioni reali della prima classe di Baire etc...*; Atti e Relaz. Accad. Pugliese Sc. (nuova serie) vol. XII (1954) pp. 287-301.

[3] » : *Misure secondo Carathéodory etc...*; Atti e Relaz. Accad. Pugliese Sc. (nuova serie) vol. XIII (1955) pp. 2-7.

[4] BERTOLINI, F: *Il problema di Lusin*; Ricerche di Mat., vol. VI (1957) pp. 288-306.

[5] BOUBBAKI, N.: *Topologie Générale*; « Actual. Scient. et Ind. », 1045 (nouv. éd.), Hermann Paris (1958).

[6] CAFIERO. F.: *Sul teorema di Vitali concernente la quasi-continuita etc...*; Le Matematiche, Catania, anno XI (1956) fasc. II.

[7] » : *Misura e integrazione*; « Monografie Matematiche » a cura del C.N.R., Cremonese, Roma (1959).

[8] COHEN, L. W.: *A new proof of Lusin's theorem*; Fundam. Math. vol. 9, 122-123 (1927).

[9] HAHN, H. e ROSENTHAL, A.: *Set functions*; Univ. of New Mexico Press, Albouquerque (N.M.) (1948).

[10] HALMOS, P. R.: *Measure Theory*; Van Nostrand, New York (1950).

[11] LETTA, G.: *Il problema di Vitali-Lusin negli spazii perfettamente normali*; Ricerche di Mat.; vol. VIII (1959) pp. 130-137.

[12] VON NEUMANN, J.: *Functional operators*; Annals of Math. Studies Princeton (1950).

[13] SCHAERF, H. M.: *On the continuity of measurable functions in neighborood spaces* I, II; Portugaliae Math., vol. 6 (1947) pp. 33-44, vol. 7 (1948) pp. 91-92.