

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

FERNANDO BERTOLINI

Le misure su un reticolo di Boole, come elementi di un reticolo lineare

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 15, n° 3 (1961), p. 129-144

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1961_3_15_3_129_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1961, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LE MISURE SU UN RETICOLO DI BOOLE, COME ELEMENTI DI UN RETICOLO LINEARE

Nota di FERNANDO BERTOLINI (a Roma)

È ben noto che la totalità delle misure (reali) definite su un σ -reticolo di BOOLE costituisce un reticolo lineare di BANACH; ricerche ormai classiche di S. KAKUTANI ed altri⁽¹⁾ consentirebbero di caratterizzare una tale totalità tra i reticoli di BANACH, beninteso a meno d'isomorfismi. Ci proponiamo ora di ottenere una caratterizzazione della stessa totalità tra i reticoli lineari, senza far intervenire la nozione di *norma*. Nella presente nota ci limitiamo a dare condizioni *necessarie*, affinché un reticolo lineare sia isomorfo al reticolo delle misure definite su un opportuno σ -reticolo di BOOLE; una nota successiva verrà dedicata al conseguimento di condizioni necessarie e sufficienti.

1. Generalità. In questa nota prenderemo in considerazione reticoli di BOOLE e reticoli lineari, reticoli σ -completi, completi e relativamente completi.

Per reticolo di BOOLE s'intende un reticolo distributivo e complementato, dotato di minimo e di massimo elemento⁽²⁾. Per reticolo lineare s'intende un insieme lineare sul corpo reale, che contemporaneamente sia un reticolo e verifichi le seguenti condizioni « di monotonia »:

- (1) se è $l' \leq l''$, allora è anche $l' + l \leq l'' + l$, e viceversa;
- (2) se è $l \geq 0$ e $c \geq 0$, allora è anche $c \cdot l \geq 0$;

⁽¹⁾ Cfr. [4], [5].

⁽²⁾ Cfr. ad es. [8]; i segni $\wedge, \vee, \leq$, verranno usati con lo stesso significato loro attribuito in [8]; per indicare l'eventuale elemento minimo o massimo d'un reticolo useremo rispettivamente i segni O ed I ; useremo poi la notazione $A \vdash B$ (anzichè la $A - B$ usata in [8]) per indicare il complemento di B rispetto ad A , entro un reticolo complementato; in caso d'ambiguità questi segni verranno muniti, a guisa d'indice, del nome del reticolo cui si riferiscono.

dove l, l', l'' sono elementi del reticolo e c è un numero reale⁽³⁾. Si rammenti che ogni reticolo lineare è distributivo⁽⁴⁾.

Un reticolo si dice *completo* [o σ -completo, o *relativamente completo*, rispettivamente] quando è dotata di interferenza e congiunzione qualunque collezione d'elementi del reticolo [o qualunque collezione di potenza non superiore ad $\aleph_0$, o qualunque collezione che sia limitata entro il reticolo, rispettivamente].

Ad ogni reticolo $\mathcal{A}$ di BOOLE può associarsi uno spazio topologico $\mathcal{Q}$ (spazio « di STONE ») così definito:

(3) i punti a di $\mathcal{Q}$ sono tutti e soli gli ultrafiltri del reticolo $\mathcal{A}$ ⁽⁵⁾;

(4) gli intorni dello spazio $\mathcal{Q}$ sono tutti e soli gl'insiemi del tipo $\omega A = \{a : A \in a\}$, dove A è un generico elemento del reticolo $\mathcal{A}$, diverso da O ⁽⁶⁾. Il classico teorema di STONE afferma:

1.1. *Lo spazio di STONE $\mathcal{Q}$, relativo ad un reticolo di BOOLE $\mathcal{A}$, è uno spazio topologico T_1 , compatto, totalmente sconnesso, normale⁽⁷⁾.*

La famiglia $\omega\mathcal{A}$ degli intorni dello spazio $\mathcal{Q}$ (includendovi l'insieme vuoto $\emptyset = \omega O$) è un anello d'insiemi al quale appartengono tutti e soli quegli insiemi che sono chiusi e aperti simultaneamente; essa forma ad un tempo una base d'aperti ed una base di chiusi per lo spazio $\mathcal{Q}$.

⁽³⁾ Cfr. ad es. [3], [6]; il segno 0 indicherà sempre il numero zero ovvero l'origine del reticolo lineare considerato; se l è un elemento d'un reticolo lineare, $l^+, l^-, |l|$ indicheremo rispettivamente gli elementi $l \vee 0, (-l) \vee 0, l \vee (-l)$: si dimostra che è $|l| = l^+ + l^-$, $l = l^+ - l^-$, $l^+ \wedge l^- = 0$; se $\mathcal{L}$ è un reticolo lineare, con $\mathcal{L}^+$ od $\mathcal{L}^-$ s'indicherà, rispettivamente, la totalità degli elementi di $\mathcal{L}$ che sono ≥ 0 , ovvero ≤ 0 ; due elementi l' ed l'' d'un reticolo lineare si dicono *ortogonali* (in simboli, $l' \perp l''$) quando è $|l'| \wedge |l''| = 0$; così due insiemi E' ed E'' si diranno *ortogonali* ($E' \perp E''$) quando ogni elemento dell'uno è ortogonale a qualunque elemento dell'altro; con $E^\perp$ s'indicherà la totalità degli elementi ortogonali ad un assegnato insieme E ; cfr. [3], pag. 52 e sgg., pag. 83 e sgg..

⁽⁴⁾ Cfr. [3], pag. 55, teor. 2. 1. 6.

⁽⁵⁾ Cfr. [8], pag. 22: in un reticolo di BOOLE un ultrafiltro può esser definito come un insieme a d'elementi del reticolo, verificante le seguenti condizioni: $O \notin a$; $I \in a$; $A' \wedge A'' \in a$ quando e solo quando $A' \in a$ e $A'' \in a$; $A' \vee A'' \in a$ quando e solo quando $A' \in a$ ovvero $A'' \in a$.

⁽⁶⁾ Evidentemente, $\omega O = \emptyset$; in generale, se x è una variabile astratta, $\varphi(x)$ una funzione astratta di tale variabile, $\psi(x)$ una « funzione proposizionale » esprimente una condizione in x , il simbolo ${}_x\{\varphi(x); \psi(x)\}$ indicherà l'insieme dei valori della $\varphi(x)$ in corrispondenza ai quali la condizione $\psi(x)$ è soddisfatta; nel caso che la funzione $\varphi(x)$ sia l'identità, scriveremo semplicemente $\{x; \psi(x)\}$.

⁽⁷⁾ Ossia: ogni punto dello spazio costituisce un insieme chiuso, ogni ricoprimento aperto dello spazio ammette un sottoricoprimento finito, ogni insieme connesso è costituito d'un sol punto, due insiemi chiusi disgiunti son sempre inclusi (rispettivamente) in due insiemi aperti disgiunti.

L'applicazione $\omega : A \rightarrow \omega A$ è un isomorfismo della struttura $\langle \mathcal{A}, \leq, 0, I, \wedge, \vee, \perp \rangle$ sulla struttura $\langle \omega \mathcal{A}, \subset, \emptyset, \mathcal{A}, \cap, \cup, - \rangle$ ⁽⁸⁾.

L'isomorfismo di cui parla il teorema non si estende alle operazioni (reticolari ed insiemistiche) infinite; per queste ultime abbiamo:

1.2. Una famiglia $\{A_i\}$ d'elementi del reticolo di BOOLE $\mathcal{A}$ sarà dotata di congiunzione $\bigvee A_i$ quando e solo quando la chiusura dell'insieme $\bigcup \omega A_i$ è aperta: in tal caso questa chiusura coincide con $\omega \bigvee A_i$. Dualmente, la famiglia $\{A_i\}$ sarà dotata d'interferenza $\bigwedge A_i$ quando e solo quando l'interno dell'insieme $\bigcap \omega A_i$ è chiuso: in tal caso questo interno coincide con $\omega \bigwedge A_i$ ⁽⁹⁾.

(i) Se l'insieme $\overline{\bigcup \omega A_i}$ è aperto, deve appartenere ad $\omega \mathcal{A}$, quindi esiste un $A \in \mathcal{A}$ con $\omega A = \overline{\bigcup \omega A_i}$; ne segue $\omega A_i \subset \omega A$ e quindi $A_i \leq A$, per ogni indice i . D'altronde, supponendo che sia $A_i \subset A' \in \mathcal{A}$ per ogni indice i , avremo $\bigcup \omega A_i \subset \omega A'$, quindi $\omega A = \overline{\bigcup \omega A_i} \subset \overline{\omega A'} = \omega A'$, ed infine $A \leq A'$. Ciò dimostra che è $A = \bigvee A_i$.

(ii) Se è $A = \bigvee A_i$, avremo $A_i \leq A$ per ogni indice i , quindi $\bigcup \omega A_i \subset \omega A$, da cui $\overline{\bigcup \omega A_i} \subset \overline{\omega A} = \omega A$. D'altronde, un punto a non appartenente all'insieme $\overline{\bigcup \omega A_i}$ dev'essere esterno ad esso, quindi avrà un intorno $\omega A' \in \omega \mathcal{A}$ disgiunto da $\bigcup \omega A_i$; dalla condizione $\omega A' \cap \omega A_i = \emptyset$ segue $A' \wedge A_i = 0$ per ogni indice i , quindi $A' \wedge A = A' \wedge \bigvee A_i = \bigvee (A' \wedge A_i) = 0$, $\omega A' \cap \omega A = \emptyset$; necessariamente il punto a non appartiene ad ωA . Si conclude che $\omega A = \overline{\bigcup \omega A_i}$.

Dualmente si tratta il caso della interferenza ⁽¹⁰⁾.

Consideriamo ora un reticolo lineare $\mathcal{L}$ relativamente completo. Un insieme B d'elementi di $\mathcal{L}$ verrà detto una *banda* ⁽¹¹⁾ quando per ogni $l \in \mathcal{L}$ esistono (univocamente determinati) due elementi l' e l'' di $\mathcal{L}$, tali che: $l = l' \dot{+} l''$, $l' \in B$, $l \perp l''$. Si ha poi:

⁽⁸⁾ Cfr. [8], pag. 155, teor. 18.6.

⁽⁹⁾ Cfr. [6], pag. 510, definizione 2.13.

⁽¹⁰⁾ Cfr. [9], pag. 73, la definizione di *extremally disconnected* e le osservazioni che precedono.

⁽¹¹⁾ Ted. *Band*, russo *komponenta*, ingl. *band*.

1.3. *Affinchè un sottoinsieme B del reticolo lineare relativamente completo $\mathcal{L}$ sia una banda,*

(a) *è necessario e sufficiente che esista un sottoinsieme E di $\mathcal{L}$, con $B = E^1$ ⁽¹²⁾,*

(b) *è necessario e sufficiente ch'esso verifichi le tre condizioni seguenti:*

B sia uno spazio lineare subordinato ad $\mathcal{L}$,

per $l' \in \mathcal{L}$, $l'' \in B$, $|l'| \leq |l''|$, sia anche $l' \in B$,

se E è un sottoinsieme di B che sia limitato in $\mathcal{L}$, allora è $\bigvee_{\mathcal{L}} E \in B$,

$\bigwedge_{\mathcal{L}} E \in B$ ⁽¹³⁾.

Si dimostra poi che:

1.5. *La totalità delle bande d'un reticolo lineare $\mathcal{L}$ relativamente completo costituiscono a loro volta un reticolo completo di BOOLE, nel quale: $B' \leq B''$ significa $B' \subset B''$, $O = \{0\}$, $I = \mathcal{L}$, $\bigvee_i B_i = (\bigcup_i B_i)^1$, $\bigwedge_i B_i = \bigcap_i B_i$, $B' \perp B'' = B' \cap B''^1$ ⁽¹⁴⁾.*

Tra le bande d'un reticolo lineare relativamente completo $\mathcal{L}$ meritano particolare menzione quelle che chiameremo *principali*: B è una banda principale, quando v'è un elemento l di $\mathcal{L}$, con $B = \{l\}^1$.

2. Il reticolo lineare delle misure definite su un σ -reticolo di BOOLE.

In questo numero e nei seguenti, $\mathcal{A}$ indicherà un assegnato reticolo σ -completo (« σ -reticolo ») di BOOLE, $\mathcal{Q}$ il relativo spazio di STONE, $\mathcal{L}$ la totalità delle misure reali (finite) definite su $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ la totalità delle bande di $\mathcal{L}$ (cfr. teor. 2.1) $\mathcal{P}$ la totalità delle bande principali di $\mathcal{L}$.

Il teorema di STONE 1.1 ci consente di identificare, per semplicità, il reticolo $\mathcal{A}$ con l'anello d'insiemi $\omega\mathcal{A}$ nello spazio $\mathcal{Q}$, e ciascun elemento A di $\mathcal{A}$ col corrispondente insieme ωA ; pertanto avremo, in virtù di questa identificazione: $A' \leq A''$ se e solo se $A' \subset A''$, $O = \emptyset$, $I = \mathcal{Q}$, $A' \wedge A'' = A' \cap A''$, $A' \vee A'' = A' \cup A''$, $A' \perp A'' = A' - A''$, ed infine (teor. 1.2)

$\bigvee_{k=1}^{\infty} A_k = \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}$, $\bigwedge_{k=1}^{\infty} A_k = \text{interno di } \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Sempre per il teorema 1.2, l'ipotesi della σ -completezza del reticolo $\mathcal{A}$ si traduce nella ipotesi che sia aperta la chiusura dell'unione e chiuso l'interno dell'intersezione di qualunque successione d'insiemi « apertichiusi » dello spazio $\mathcal{Q}$.

⁽¹²⁾ Cfr. [3], pag. 83; pag. 97, teor. 4. 5. 3;

⁽¹³⁾ Cfr. [3], pag. 97, teor. 4. 5. 2 e pagg. 81-82, def. 4. 1. 2, 4. 1. 4.

⁽¹⁴⁾ Cfr. [3], pag. 83, teor. 4. 2. 2. e 4. 2. 5, e pag. 97, teor. 4. 5. 3.

Una misura su $\mathcal{A}$ è una funzione reale l , definita su $\mathcal{A}$ e tale, che per ogni successione $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ d'elementi mutuamente disgiunti di $\mathcal{A}$ si abbia $l\left(\bigvee_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} l(A_k)$, la serie a secondo membro convergendo assolutamente; ciò implica banalmente $l(\emptyset) = 0$. Come d'uso, date due misure l' ed $l'' \in \mathcal{L}$, dati due numeri reali c' e c'' porremo

$$(c' l' + c'' l'')(A) = c' \cdot l'(A) + c'' \cdot l''(A) \text{ per ogni } A \in \mathcal{A},$$

$$l' \leq l'' \text{ quando e solo quando è, per ogni } A \in \mathcal{A}, l'(A) \leq l''(A).$$

Con queste convenzioni,

2.1. La totalità $\mathcal{L}$ risulta un reticolo lineare relativamente completo.

(i) È banale che $\mathcal{L}$ sia chiuso alla operazione di combinazione lineare a coefficienti reali; è pure banale la verifica delle condizioni (1) e (2) del n. 1.

(ii) Sia ora $\{l_i\}$ una collezione di misure non negative su $\mathcal{A}$. Per ogni $A \in \mathcal{A}$ poniamo: $p(A) = \inf_i \{l_i(A)\}$, ed avremo:

$$0 \leq p(A) < +\infty \text{ per ogni } A \in \mathcal{A}; p(\emptyset) = 0;$$

se A' ed A'' son due elementi disgiunti di $\mathcal{A}$, allora $p(A') + p(A'') = \inf_i \{l_i(A')\} + \inf_i \{l_i(A'')\} = \inf_{i,*} \{l_i(A') + l_i(A'')\} \leq \inf_i \{l_i(A') + l_i(A'')\} = \inf_i \{l_i(A' \cup A'')\} = p(A' \cup A'')$.

Segue di qui che tra le misure reali su $\mathcal{A}$ minoranti p ve n'è una massima, che chiamiamo $l^{(15)}$; d'altronde è chiaro che le misure minoranti p sono esattamente quelle che minorano l'intera famiglia $\{l_i\}$: possiamo concludere che è, in $\mathcal{L}$, $l = \bigwedge_i l_i$.

(iii) Sia ora $\{l_i\}$ una famiglia di misure reali su $\mathcal{A}$, tutte minorate dalla misura l ; la famiglia $\{l_i - l\}$, di misure non negative, ammette in $\mathcal{L}$ una interferenza, per il punto precedente; di qui è immediato verificare che la misura $l + \bigwedge_i (l_i - l)$ rappresenta la massima misura minorante la famiglia $\{l_i\}$, ossia la sua interferenza $\bigwedge_i l_i$.

(iv) Se poi $\{l_i\}$ è una famiglia di misure reali su $\mathcal{A}$, tutte maggiorate dalla misura l , la famiglia $\{l - l_i\}$, di misure non negative, ammette in $\mathcal{L}$ una interferenza, e si verifica subito che la misura $l - \bigwedge_i (l - l_i)$ rap-

(15) Cfr. [2], pag. 233, teor. 1; pag. 235, teor. 4.

presenta la minima misura maggiorante la famiglia $\{l_i\}$, ossia la sua congiunzione $\bigvee l_i$.

(v) È poi ben noto che qualunque misura su $\mathcal{A}$ è maggiorata da una misura non negativa ed è minorata da una misura non positiva⁽¹⁶⁾; quindi qualunque famiglia finita di misure su $\mathcal{A}$ è maggiorata e minorata in $\mathcal{L}$, e conseguentemente è dotata d'interferenza e congiunzione in $\mathcal{L}$, per i punti precedenti. Ciò completa la dimostrazione.

A proposito del reticolo lineare $\mathcal{L}$ osserviamo che:

- (1) l'elemento nullo di $\mathcal{L}$ è la misura identicamente nulla su $\mathcal{A}$;
- (2) data la misura $l \in \mathcal{L}$, l^+ , l^- , $|l|$ rappresentano rispettivamente la variazione positiva, la variazione negativa, la variazione totale della misura l ⁽¹⁷⁾;
- (3) la condizione $l' \perp l''$ tra due elementi l' ed l'' di $\mathcal{L}$ significa che le due misure l' ed l'' sono tra loro singolari; pertanto $\{l\}^\perp$ è l'insieme delle misure singolari, $\{l\}^{\perp\perp}$ è l'insieme delle misure assolutamente continue rispetto ad una prefissata misura $l \in \mathcal{L}$ ⁽¹⁸⁾.

3. Il supporto di una misura definita su un σ -reticolo di BOOLE.

Data una misura $l \in \mathcal{L}$, indicheremo con F_l l'insieme di tutti i punti a di $\mathcal{A}$, gli intorno $A \in \mathcal{A}$ dei quali verifichino la condizione: $|l|(A) > 0$; indicheremo invece con G_l l'unione di tutti gl'insiemi $A \in \mathcal{A}$ verificanti la condizione: $|l|(A) = 0$. Si ha:

3.1. Per ogni $l \in \mathcal{L}$, gl'insiemi F_l e G_l sono tra loro complementari, il primo è chiuso, il secondo è aperto.

È banale che G_l , come unione d'aperti, sia aperto. Inoltre se è $a \in G_l$, deve esistere un $A \in \mathcal{A}$, con $a \in A$, $|l|(A) = 0$: pertanto è $a \notin F_l$; viceversa, se è $a \notin G_l$, necessariamente dalla premessa $a \in A \in \mathcal{A}$ segue $|l|(A) > 0$: se ne deduce $a \in F_l$; dunque F_l e G_l sono tra loro complementari. È ora ovvio che F_l sia chiuso.

3.2. Dati ad arbitrio $l \in \mathcal{L}$ ed $A \in \mathcal{A}$, si ha $A \subset G_l$ se e solo se è $|l|(A) = 0$, si ha $A \subset F_l$ se e solo se — per ogni $A' \in \mathcal{A}$ con $\emptyset \neq A' \subset A$ — è $|l|(A') > 0$.

(i) Dalla condizione $|l|(A) = 0$ segue per definizione $A \subset G_l$; viceversa, dalla condizione $A \subset G_l$ si deduce che A (insieme chiuso e compatto!)

⁽¹⁶⁾ precisamente, è maggiorata dalla propria variazione totale, è minorata dalla opposta della stessa variazione totale.

⁽¹⁷⁾ Cfr. [1].

⁽¹⁸⁾ Cfr. [1].

è ricoperto dalla famiglia di intornoi $\{A': A' \in \mathcal{A}, |l|(A') = 0\}$, quindi anche da una sottofamiglia finita $\{A_k\}_{k=1}^n$ di tali intornoi: ne segue $|l|(A) \leq \sum_{k=1}^n |l|(A_k) = 0$.

(ii) Dalla condizione $A \subset F_l$ segue, per ogni $A' \in \mathcal{A}$ con $\emptyset \neq A' \subset A$, $A' \cap F_l \neq \emptyset$ e quindi per definizione $|l|(A') > 0$; viceversa, dalla condizione $A \not\subset F_l$ segue l'esistenza di un punto $a \in A - F_l$, quindi l'esistenza d'un intorno $A'' \in \mathcal{A}$ di a , disgiunto da F_l ; posto allora $A' = A \cap A''$, avremo $a \in A' \in \mathcal{A}$, $A' \subset G_l$, quindi $|l|(A') = 0$ con $\emptyset \neq A' \subset A$.

Dopo questo teorema è giustificato chiamare l'insieme F_l il *supporto* della misura l . Si ha inoltre:

3.3. *Date ad arbitrio due misure l e $l' \in \mathcal{L}$ sarà: l assolutamente continua rispetto a l' quando e solo quando $F_l \subset F_{l'}$, l singolare rispetto a l' quando e solo quando $F_l \cap F_{l'} = \emptyset$.*

(i) Se $l \in \{l'\}^{\perp}$, allora, dato a piacere $A \in \mathcal{A}$, dalla premessa $|l'|(A) = 0$ segue $|l|(A) = 0$: ciò prova che è $G_l \subset G_{l'}$, ossia $F_l \subset F_{l'}$. Questa deduzione è reversibile.

(ii) Se l è singolare rispetto a l' , allora vi sono due elementi di $\mathcal{A}$ tra loro complementari, A e A' , con $|l'|(A) = |l'|(A') = 0$ ⁽¹⁹⁾; abbiamo perciò $A \subset G_{l'}$, $A' \subset G_l$, da cui $F_l \subset A$, $F_{l'} \subset A'$, $F_l \cap F_{l'} \subset A \cap A' = \emptyset$. Viceversa, se i due insiemi F_l e $F_{l'}$ sono disgiunti, esistono due insiemi disgiunti A ed $A' \in \mathcal{A}$, che rispettivamente li contengono⁽²⁰⁾: è chiaro che A e A' possono anche prendersi complementari; ne segue $|l'|(A) = |l'|(A') = 0$, e le due misure l ed l' risultano singolari l'una rispetto all'altra.

Si potrebbe quindi dire che i supporti delle misure su $\mathcal{A}$ rappresentano le classi in cui si ripartisce $\mathcal{L}$ quando si considerano equivalenti due misure l'una assolutamente continua rispetto all'altra. Indicheremo in questo numero e nei seguenti con $\mathcal{F}$ la totalità $\{F_l: l \in \mathcal{L}\}$ dei supporti delle misure definite sul reticolo $\mathcal{A}$.

3.4. *Se è $C_k \in \mathcal{F}$ per $k = 0, 1, \dots$, allora è anche $\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k \in \mathcal{F}$.*

⁽¹⁹⁾ Cfr. [2], pag. 159, def. 3, def. 2.

⁽²⁰⁾ Essendo lo spazio $\mathcal{Q}$ normale, esistono due aperti $H = \bigcup A_i$ ed $H' = \bigcup A'_k$ tra loro disgiunti e rispettivamente includenti F_l ed $F_{l'}$, con $A_i \in \mathcal{A}$, $A'_k \in \mathcal{A}$; per la compattezza dello spazio $\mathcal{Q}$, anche i chiusi F_l ed $F_{l'}$ sono compatti, quindi dalla famiglia $\{A_i\}$ e dalla famiglia $\{A'_k\}$ si possono estrarre due sottofamiglie finite, rispettivamente $\{A_i\}_{i=1}^n$ ed $\{A'_k\}_{k=1}^{n'}$ con $F_l \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$ ed $F_{l'} \subset \bigcup_{k=1}^{n'} A'_k$; ponendo $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$, $A' = \bigcup_{k=1}^{n'} A'_k$ si ha $A \in \mathcal{A}$, $A' \in \mathcal{A}$, $F_l \subset A$, $F_{l'} \subset A'$, $A \cap A' = \emptyset$.

(i) Sia, per ogni indice k , $l_k \in \mathcal{L}$ con $C_k = F_{l_k}$, e supponiamo anche, senza essenziale restrizione⁽²¹⁾, che sia $0 \leq l_k(A) \leq 1$ per ogni $A \in \mathcal{A}$. Ponendo $l = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} l_k$ sarà ancora $l \in \mathcal{L}$ e, per ogni $A \in \mathcal{A}$, $0 \leq l(A) \leq 1$. Consideriamo allora g'insiemi F_l e G_l .

(ii) Per ogni punto $a \in G_l$ esiste un intorno $A \in \mathcal{A}$, con $a \in A \subset G_l$, e quindi $l(A) = 0$; ne segue, per ogni indice k , $l_k(A) = 0$, quindi $A \subset \bigcap_{k=0}^{\infty} G_{l_k}$.

Pertanto è $G_l \subset \bigcap_{k=0}^{\infty} G_{l_k}$, ossia $F_l \supset \bigcup_{k=0}^{\infty} F_{l_k}$, ed infine $\overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k} \subset F_l$.

(iii) D'altronde, se il punto a non appartiene all'insieme $\overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} F_{l_k}}$, vi sarà un intorno $A \in \mathcal{A}$ di a , disgiunto da $\bigcup_{k=0}^{\infty} F_{l_k}$, quindi avremo $l_k(A) = 0$ per ogni indice k , ed infine $l(A) = 0$; pertanto sarà $A \subset G_l$, e quindi $a \notin F_l$. Si conclude che è $F_l \subset \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} F_{l_k}}$ e quindi (combinando col risultato del punto precedente) $\overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} C_k} = F_l \in \mathcal{F}$, come dovevasi dimostrare.

3.5. La famiglia $\mathcal{F}$ è un anello d'insiemi nello spazio $\mathcal{A}$.

(i) Siano F_l e $F_{l'}$ (con l ed $l' \in \mathcal{L}$) due arbitrari elementi di $\mathcal{F}$. Sussiste in modo univoco la decomposizione di LEBESGUE⁽²²⁾ $l = l_1 + l_2$, con $l_1 \in \{l'\}^{\perp}$, $l_2 \in \{l'\}^{\perp\perp}$; avremo perciò (teorema 3.3) $F_{l_1} \cap F_{l'} = \emptyset$, $F_{l_2} \subset F_{l'}$. Inoltre si ha $l_1 \in \{l\}^{\perp\perp}$, $l_2 \in \{l\}^{\perp\perp}$, quindi $F_{l_1} \cup F_{l_2} \subset F_l$; d'altra parte, per ogni $A \in \mathcal{A}$, la condizione $|l_1|(A) = |l_2|(A) = 0$ implica $|l|(A) = 0$, quindi si ha $G_{l_1} \cap G_{l_2} \subset G_l$, ossia $F_l \subset F_{l_1} \cup F_{l_2}$. In conclusione, $F_l = F_{l_1} \cup F_{l_2}$, $F_{l_1} \cap F_{l'} = \emptyset$, $F_{l_2} \subset F_{l'}$; ciò significa: $F_{l_1} = F_l - F_{l'}$, $F_{l_2} = F_l \cap F_{l'}$. Pertanto la famiglia d'insiemi $\mathcal{F}$ è chiusa rispetto alla differenza ed alla intersezione.

(ii) Per il teorema 3.4, poi, dati C' , $C'' \in \mathcal{F}$, si ha $C' \cup C'' = \overline{C' \cap C''} \in \mathcal{F}$, quindi la famiglia $\mathcal{F}$ è anche chiusa rispetto alla unione, e il teorema è dimostrato.

Pertanto,

3.6. Assunta la relazione d'inclusione $\subset$ come relazione d'ordine $\leq$, la famiglia d'insiemi $\mathcal{F}$ risulta un reticolo distributivo, relativamente complementato, dotato di minimo (l'insieme vuoto $\emptyset$), σ -completo.

Si ha ancora:

3.7. Se è $F \in \mathcal{F}$ ed $A \in \mathcal{A}$, allora è anche: $A \cap F \in \mathcal{F}$.

⁽²¹⁾ Ove l'ipotesi non fosse verificata, in luogo di l basta porre $|l|/[|l|(\mathcal{Q}) + 1]$.

⁽²²⁾ Cfr. [2], pag. 189.

Data la misura $l \in \mathcal{L}$, con $F = F_l$, poniamo $l'(A') = |l|(A \cap A')$ per ogni $A' \in \mathcal{A}$. Avremo allora $l' \in \mathcal{L}$, $|l'| \leq |l|$, quindi $F_{l'} \subset F$; sarà anche $|l'|(\mathcal{A} - A) = 0$, quindi $\mathcal{A} - A \subset G_{l'}$, da cui $F_{l'} \subset A$; pertanto abbiamo $F_{l'} \subset A \cap F$. D'altra parte, supposto $a \in A \cap F$, per ogni intorno $A' \in \mathcal{A}$ del punto a avremo $a \in A' \cap A \cap F_l \neq \emptyset$, quindi $l'(A') = |l|(A \cap A') > 0$, quindi $a \in F_{l'}$; pertanto abbiamo $A \cap F \subset F_{l'}$. Si conclude: $A \cap F = F_{l'} \in \mathcal{F}$, come volevasi dimostrare.

4. Le misure sul reticolo $\mathcal{F}$. Prendiamo ora in considerazione una classe di misure definite sul reticolo $\mathcal{F}^{(23)}$, classe che indicheremo con $\mathcal{M}$. Precisamente, un elemento della classe $\mathcal{M}$ sarà una funzione reale m , definita in $\mathcal{F}$ e verificante le seguenti condizioni:

(1) per ogni successione $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$ d'elementi mutuamente disgiunti del reticolo $\mathcal{F}$, sia $m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} m(C_k)$, la serie a secondo membro convergendo assolutamente;

(2) esista un insieme $K_m \in \mathcal{F}$ (supporto della misura m), tale da aversi $|m|(F) = 0$ ogniqualvolta è $A - K_m \supset F \in \mathcal{F}$, e $|m|(F) > 0$ ogniqualvolta è $K_m \supset F \in \mathcal{F}$, $F \neq \emptyset$.

Allo stesso modo del teorema 2.1 si dimostra il seguente:

4.1. La classe $\mathcal{M}$ è un reticolo lineare relativamente σ -completo.

Consideriamo ora le operazioni μ e λ così definite:

$$(\mu l)(F) = \inf_A \{l(A) : F \subset A \in \mathcal{A}\} \quad \text{per } l \in \mathcal{L}^+, F \in \mathcal{F};$$

$$(\lambda m)(A) = m(A \cap K_m) \quad \text{per } m \in \mathcal{M}^+, A \in \mathcal{A}.$$

4.2. L'operazione μ è una applicazione di $\mathcal{L}^+$ in $\mathcal{M}^+$.

Sia $l \in \mathcal{L}^+$, sia $m = \mu l$; cominciamo col dimostrare che m è una misura non negativa, sul reticolo $\mathcal{F}$.

(i) Banalmente, $m(\emptyset) = 0$ e, per ogni $F \in \mathcal{F}$, $m(F) \geq 0$. Dati poi due elementi F' ed F'' di $\mathcal{F}$, se è $F' \subset F''$ sarà anche $\inf_A \{l(A) : F'' \subset A \in \mathcal{A}\} \subset \inf_A \{l(A) : F' \subset A \in \mathcal{A}\}$, e quindi $m(F') \leq m(F'')$.

(ii) Siano ora F' ed F'' due elementi disgiunti di $\mathcal{F}$, siano A' e A'' due elementi disgiunti di $\mathcal{A}$, includenti rispettivamente F' ed F'' ⁽²⁴⁾. Avremo allora: $m(F' \cup F'') = \inf_A \{l(A) : F' \cup F'' \subset A \in \mathcal{A}\} \geq \inf_A \{l[A \cap (A' \cup A'')]\}$:

⁽²³⁾ Si tratta d'un reticolo del tipo «di CARATHÉODORY» ed ha senso perciò parlare di misure su di esse.

⁽²⁴⁾ Cfr. nota ⁽²⁰⁾.

$F' \cup F'' \subset A \in \mathcal{A} \Rightarrow \inf_{\mathcal{A}} \{l(A \cap A') + l(A \cap A'') : F' \cup F'' \subset A \in \mathcal{A}\} \geq \inf_{\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2} \{l(A_1) + l(A_2) : F' \subset A_1 \in \mathcal{A}, F'' \subset A_2 \in \mathcal{A}\} = \inf_{\mathcal{A}} \{l(A) : F' \subset A \in \mathcal{A}\} + \inf_{\mathcal{A}} \{l(A) : F'' \subset A \in \mathcal{A}\} = m(F') + m(F'')$. D'altra parte, dati due elementi A' e A'' di $\mathcal{A}$, contenenti rispettivamente F' ed F'' , avremo $m(F' \cup F'') \leq l(A' \cup A'') \leq l(A') + l(A'')$ e quindi, per l'arbitrarietà di A' , A'' , anche $m(F' \cup F'') \leq m(F') + m(F'')$. Si conclude quindi che è $m(F' \cup F'') = m(F') + m(F'')$.

(iii) Consideriamo ora una successione $\{C_k\}_{k=1}^{\infty}$ di elementi mutualmente disgiunti di $\mathcal{F}$, e poniamo $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k$. Avremo allora $\bigcup_{k=1}^n C_k \subset C$ e quindi anche $\sum_{k=1}^n m(C_k) \leq m(C)$ per ogni numero naturale n , dunque $\sum_{k=1}^{\infty} m(C_k) \leq m(C)$. Reciprocamente, sia un numero reale $\varepsilon > 0$ sia, per ogni indice k , $A_k \in \mathcal{A}$, $C_k \subset A_k$, $l(A_k) \leq m(C_k) + \varepsilon \cdot 2^{-k}$; poniamo $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$; ed avremo allora: $C = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k \subset A$, $m(C) \leq l(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} l(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(C_k) + \varepsilon$; per l'arbitrarietà di ε si ha $m(C) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m(C_k)$. Si conclude che m verifica la condizione (1).

Resta da verificare la condizione (2).

(iv) Sia F un elemento di $\mathcal{F}$ disgiunto da F_l , siano A' ed A'' due elementi disgiunti di $\mathcal{A}$, contenenti rispettivamente F_l ed F . Avremo $|m|(F) = m(F) \leq l(A'') = 0$, quindi $|m|(F) = 0$.

(v) Sia ora F_l (con $l' \in \mathcal{L}$) un elemento di $\mathcal{F}$ incluso in F_l , tale che $m(F_l) = 0$; poniamo $F_{l'} = F_l - F_l$ (con $l'' \in \mathcal{L}$), e siano A' ed A'' due elementi di $\mathcal{A}$ complementari tra loro e contenenti rispettivamente F_l ed $F_{l'}$. Avremo allora: $l(\mathcal{Q}) = m(F_l) = m(F_l) + m(F_{l'}) = m(F_{l'})$, $m(F_{l'}) \leq l(A'') \leq l(\mathcal{Q})$, quindi $l(A'') = l(\mathcal{Q}) = l(A') + l(A'')$, da cui $l(A') = 0$, ed infine $A' \cap F_l = \emptyset$; d'altronde dev'essere pure $A' \cap F_l \supset F_l$, dunque $F_l = \emptyset$.

(vi) I punti (v) e (iv) dimostrano che la proprietà (2) è verificata se si pone $K_m = F_l$, e ciò completa la dimostrazione del teorema.

4.3. L'operazione λ è un'applicazione di $\mathcal{M}^+$ in $\mathcal{L}^+$.

(i) Sia $m \in \mathcal{M}^+$ e poniamo $l = \lambda m$. Evidentemente è $l(\emptyset) = m(\emptyset) = 0$; inoltre, dati A' ed $A'' \in \mathcal{A}$, dalla condizione $A' \subset A''$ segue $l(A') = m(A' \cap K_m) \leq m(A'' \cap K_m) = l(A'')$, dalla condizione $A' \cap A'' = \emptyset$ segue invece $l(A' \cup A'') = m[K_m \cap (A' \cup A'')] = m[(K_m \cap A') \cup (K_m \cap A'')] = m(K_m \cap A') + m(K_m \cap A'') = l(A') + l(A'')$.

(ii) Sia ora $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una successione decrescente d'elementi di $\mathcal{A}$, tale che $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = \emptyset$; sia $l' \in \mathcal{L}$, tale che: $F_l \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$. Per ogni insieme $A \in \mathcal{A}$ disgiunto da F_l (in particolare, per $A = \mathcal{Q} - A_1$) avremo $|l'|(A) = 0$, quindi

sarà $|l|(A_k) = |l|(A_1) - |l|(A_1 - A_k) = |l|(A_1)$ per ogni indice k , ed infine $|l|(A_1) = \lim_{k \rightarrow +\infty} |l|(A_k) = 0$; da ciò si deduce che l è identicamente nulla, e quindi $F_l = \emptyset$. Per l'arbitrarietà di F_l , possiamo concludere che $\bigwedge_{k=1}^{\infty} (K_m \cap A_k) = \emptyset$ nel reticolo $\mathcal{F}$, e quindi $\lim_{k \rightarrow +\infty} l(A_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(K_m \cap A_k) = 0$. Ciò prova che è $l \in \mathcal{L}^+$.

(iii) Supponendo ora $a \in K_m$, avremo (per ogni intorno $A \in \mathcal{A}$ del punto a) $\emptyset \neq A \cap K_m$, quindi $m(A \cap K_m) > 0$, ossia $l(A) > 0$, e quindi $a \in F_l$. Supponendo invece $a \notin K_m$, vi sarà un intorno $A \in \mathcal{A}$ del punto a , disgiunto da K_m : Per tale intorno avremo $l(A) = m(A \cap K_m) = 0$, e quindi $a \notin F_l$. In conclusione si ha: $F_l = K_m$.

4.4. L'operazione μ è un'applicazione biunivoca di $\mathcal{L}^+$ su $\mathcal{M}^+$; l'operazione λ è l'applicazione inversa, di $\mathcal{M}^+$ su $\mathcal{L}^+$.

(i) Sia $m \in \mathcal{M}^+$ e poniamo $l = \lambda m$. Dati ad arbitrio gl'insiemi $A \in \mathcal{A}$, ed $F \in \mathcal{F}$, con $F \subset A$, avremo: $m(F) = m(F \cap K_m) + m(F - K_m) = m(F \cap K_m) \leq m(A \cap K_m) = l(A)$; quindi è $m(F) \leq \inf_A \{l(A) : F \subset A \in \mathcal{A}\} = (\mu l)(F)$. D'altra parte, essendo $F - K_m$, $F \cap K_m$, $K_m - F$ tre insiemi chiusi disgiunti, esistono tre elementi disgiunti A_1 , A_0 , $A_2 \in \mathcal{A}$ che rispettivamente li contengono, e sarà anche $F \cap K_m = A_0 \cap K_m$; ne segue: $m(F) = m(F - K_m) + m(F \cap K_m) = m(F - K_m) + m(A_0 \cap K_m) = m(A_0 \cap K_m) + m(\emptyset) = m(A_0 \cap K_m) + m(A_1 \cap K_m) = l(A_0) + l(A_1) = l(A_0 \cup A_1)$, con $F \subset A_0 \cup A_1$: si conclude che è $m(F) = \inf_A \{l(A) : F \subset A \in \mathcal{A}\} = (\mu l)(F)$ ⁽²⁵⁾.

(ii) Sia ora data la misura $l \in \mathcal{L}^+$ e poniamo $m = \mu l$. Per ogni $A \in \mathcal{A}$ avremo $A \cap K_m \subset A$, quindi $m(A \cap K_m) \leq l(A)$, per definizione. Viceversa, dati gl'insiemi A ed $A' \in \mathcal{A}$, con $A \cap F_l \subset A'$, avremo $\emptyset = F_l \cap (A - A')$, quindi $l(A - A') = 0$, quindi $l(A') \geq l(A \cap A') = l(A)$, da cui $m(A \cap K_m) = m(A \cap F_l) = \inf_{A'} \{l(A') : A \cap F_l \subset A' \in \mathcal{A}\} \geq l(A)$.

(iii) Abbiamo provato dunque che, da un lato, si ha $\mu \lambda m = m$ per ogni $m \in \mathcal{M}^+$, dall'altro si ha $\lambda \mu l = l$ per ogni $l \in \mathcal{L}^+$; e ciò appunto dimostra la tesi del teorema.

4.5. L'applicazione μ è un isomorfismo del reticolo $\mathcal{L}^+$ sul reticolo $\mathcal{M}^+$; l'applicazione λ è l'isomorfismo inverso, del reticolo $\mathcal{M}^+$ sul reticolo $\mathcal{L}^+$.

Siano l' ed l'' due elementi di $\mathcal{L}^+$, e poniamo $m' = \mu l'$, $m'' = \mu l''$. Supponendo $l' \leq l''$ avremo: $m'(F) = \inf_A \{l'(A) : F \subset A \in \mathcal{A}\} \leq \inf_A \{l''(A) :$

⁽²⁵⁾ Tra l'altro, questo discorso dimostra che è $m(F) = \min_A \{l(A) : F \subset A \in \mathcal{A}\}$, per $l = \lambda m$.

$F \subset A \in \mathcal{A} \} = m''(F)$, per ogni $F \in \mathcal{F}$. Supponendo invece $m' \leq m''$, avremo $K_{m'} \subset K_{m''}$ e quindi: $l'(A) = m'(A \cap K_{m'}) \leq m''(A \cap K_{m'}) = l''(A)$, per ogni $A \in \mathcal{A}$.

4.6. *L'applicazione μ è una trasformazione lineare del semispazio lineare $\mathcal{L}^+$ sul semispazio lineare $\mathcal{M}^+$; l'applicazione λ è la trasformazione lineare inversa.*

Siano l' e l'' due elementi di $\mathcal{L}^+$, siano c' e c'' due numeri reali non negativi. Per ogni $F \in \mathcal{F}$, avremo: $\mu(c' \cdot l' + c'' \cdot l'')(F) = \inf_A \{c' \cdot l'(A) + c'' \cdot l''(A) : F \subset A \in \mathcal{A}\} \geq \inf_{A', A''} \{c' \cdot l'(A') + c'' \cdot l''(A'') : F \subset A' \in \mathcal{A}, F \subset A'' \in \mathcal{A}\} = c' \cdot \inf_A \{l'(A) : F \subset A \in \mathcal{A}\} + c'' \cdot \inf_A \{l''(A) : F \subset A \in \mathcal{A}\} = c' \cdot (\mu l')(F) + c'' \cdot (\mu l'')(F)$; viceversa, e tenendo conto dell'ultimo passaggio, $c' \cdot (\mu l')(F) + c'' \cdot (\mu l'')(F) = \inf_{A', A''} \{c' \cdot l'(A') + c'' \cdot l''(A'') : F \subset A' \in \mathcal{A}, F \subset A'' \in \mathcal{A}\} \geq \inf_{A', A''} \{c' \cdot l'(A' \cap A'') + c'' \cdot l''(A' \cap A'') : F \subset A' \cap A'' \in \mathcal{A}\} = \mu(c' \cdot l' + c'' \cdot l'')(F)$.

La linearità dell'applicazione inversa λ è banale.

Possiamo ora prolungare le due trasformazioni μ e λ ponendo: $\mu l = \mu l^+ - \mu l^-$ per ogni $l \in \mathcal{L}$, $\lambda m = \lambda m^+ - \lambda m^-$ per $m \in \mathcal{M}$; i risultati di questo numero si riassumono allora nel seguente enunciato

4.7. *L'applicazione μ è un isomorfismo del reticolo lineare $\mathcal{L}$ sul reticolo lineare $\mathcal{M}$; l'applicazione λ è l'isomorfismo inverso, del reticolo lineare $\mathcal{M}$ sul reticolo lineare $\mathcal{L}$.*

5. **Ancora sul reticolo $\mathcal{F}$.** Siamo ora in grado di dimostrare che il reticolo $\mathcal{F}$ verifica la « σ -chain condition » relativa:

5.1. *Una famiglia d'elementi non nulli e mutuamente disgiunti del reticolo $\mathcal{F}$, che sia maggiorata in $\mathcal{F}$, non può avere potenza superiore a $\aleph_0$.*

Sia $K_m \in \mathcal{F}$, sia $\{C_i\}$ una famiglia d'elementi non nulli e mutuamente disgiunti del reticolo $\mathcal{F}$, con $m \in \mathcal{M}$, $\bigcup C_i \subset K_m$. In tale ipotesi si ha $\sum |m|(C_i) \leq |m|(K_m)$, e dalla finitezza del secondo membro si deduce che al primo membro al più $\aleph_0$ addendi possono essere diversi da zero, e questo prova la tesi, in virtù della proprietà (2) del n. 4 postulata per l'insieme K_m .

Segue il corollario:

5.2 *Il reticolo $\mathcal{F}$ è relativamente completo.*

Per dimostrarlo basta osservare che, in base ai risultati del n. 3, fissato ad arbitrio l'insieme $C \in \mathcal{F}$, la totalità $\{F : C \supset F \in \mathcal{F}\}$ è un σ -reticolo di BOOLE, verificante la « σ -chain condition », e quindi è un reticolo completo⁽²⁶⁾.

⁽²⁶⁾ Cfr. [9], pag. 61, teor. 20.2.

Notiamo ancora:

5.3. Per ogni collezione $\{C_i\}$ d'elementi del reticolo $\mathcal{F}$, che sia maggiorata in $\mathcal{F}$, si ha: $\bigcup_i C_i = \bigvee_{\mathcal{F}} C_i$.

(i) Poniamo $C_* = \bigcup_i C_i$, $C^* = \bigcap \{F: \bigcup_i C_i \subset F \in \mathcal{F}\}$. Per la stessa definizione di $\bigvee_{\mathcal{F}} C_i$, dovrà essere $\bigcup_i C_i \subset \bigvee_{\mathcal{F}} C_i \subset C^*$, e quindi $C_* \subset \bigvee_{\mathcal{F}} C_i \subset C^*$.

(ii) D'altra parte, ogni punto a non appartenente a C_* ammette un proprio intorno $A \in \mathcal{A}$ disgiunto da C_* ; ma dalla premessa $\bigcup_i C_i \subset F \in \mathcal{F}$ segue $\bigcup_i C_i \subset F - A = F \cap (\mathcal{A} - A) \in \mathcal{F}$, quindi anche C^* dev'essere disgiunto da A : ne segue che il punto a non appartiene neanche a C^* ; pertanto è $C_* = C^*$.

5.4. Per ogni collezione $\{C_i\}$ d'elementi del reticolo $\mathcal{F}$, che sia maggiorata in $\mathcal{F}$, esiste una collezione $\{l_i\}$ di misure non negative, della classe $\mathcal{L}$, maggiorata in $\mathcal{L}$, tale da aversi: $C_i = F_{l_i}$ per ogni indice i , $\bigcup_i C_i = F_{\bigvee_i l_i}$.

Sia $l' \in \mathcal{L}$ con $\bigcup_i C_i = F_{l'}$, sia (per ogni indice i) $l'_i \in \mathcal{L}$ con $C_i = F_{l'_i}$, poniamo $l_i = |l'| \wedge |l'_i|$, $l = \bigvee_i l_i$, ed avremo $F_{l_i} = F_{l'} \cap F_{l'_i} = C_i \cap \bigcup_{j \neq i} C_j = C_i$, $F_{l_i} \subset F_l$, quindi $\bigcup_i C_i \subset F_l$. Sia ora $a \in F_l - \bigcup_i C_i$, sia $A \in \mathcal{A}$ un intorno di a disgiunto da $\bigcup_i C_i$; avremo allora $l(A) > 0$, $l_i(A) = 0$ per ogni indice i , e quindi, ponendo $l''(A') = l(A' - A)$ per ciascun $A' \in \mathcal{A}$, sarà $l'' \in \mathcal{L}^+$, $l_i \leq l'' < l$ per ogni indice i , il che è assurdo: necessariamente $F_l - \bigcup_i C_i = \emptyset$, ossia $F_l \subset \bigcup_i C_i$.

5.5. Le seguenti tre condizioni sono tra loro equivalenti.

- (1) Il reticolo lineare $\mathcal{L}$ ammette unità di FREUDENTHAL;
- (2) Il reticolo $\mathcal{F}$ ammette un massimo elemento $\mathbf{J}$, e quindi è un reticolo di BOOLE completo;
- (3) Sul reticolo $\mathcal{F}$ è definita una misura strettamente positiva, dotata di supporto in $\mathcal{F}$.

(i) Sia l una unità di FREUDENTHAL per il reticolo $\mathcal{L}$; ciò significa che è $l \in \mathcal{L}^+$, $\{l\}^{\perp\perp} = \mathcal{L}$; ma la condizione che ogni $l' \in \mathcal{L}$ sia assolutamente continua rispetto ad l implica che sia $F \subset F_l$ per ogni $F \in \mathcal{F}$; dunque la (1) implica la (2).

(ii) Se $\mathcal{F}$ ammette un massimo elemento $\mathbf{J}$, questo sarà il supporto di una misura $m \in \mathcal{M}$; allora, per ogni $F \in \mathcal{F}$ avremo $|m|(F) > 0$, salvochè sia $F = \emptyset$; dunque la (2) implica la (3).

(iii) Una misura $m \in \mathcal{M}$ che sia strettamente positiva risulta singolare solo rispetto alla misura identicamente nulla⁽²⁷⁾, quindi sarà $\{m\}^{\perp\perp} = \mathcal{M}$, e conseguentemente $\{\lambda m\}^{\perp\perp} = \mathcal{L}$; dunque la (3) implica la (1).

Consideriamo ora l'operazione π , così definita:

$$\pi F = \{l \in \mathcal{L}, F_l \subset F\}, \text{ per } F \in \mathcal{F};$$

si ha il teorema:

5.6. *L'operazione π è un isomorfismo della struttura $\langle \mathcal{F}, \subset \rangle$ sulla struttura $\langle \mathcal{P}, \subset \rangle$; quindi $\mathcal{P}$, assuntavi come relazione d'ordine $\leq$ l'inclusione $\subset$, è un reticolo isomorfo al reticolo $\mathcal{F}$.*

(i) Dato $F \in \mathcal{F}$, πF non è altro che la totalità delle misure (su $\mathcal{A}$) assolutamente continue rispetto ad una fissata misura (su $\mathcal{A}$) avente F come supporto: e tale totalità è appunto una banda principale del reticolo $\mathcal{L}$. Viceversa, ciascuna banda principale B del reticolo $\mathcal{L}$ non è altro che la totalità delle misure (su $\mathcal{A}$) assolutamente continue rispetto ad una certa misura $l \in \mathcal{L}$: sarà allora $B = \pi F_l$.

(ii) Dati F' ed $F'' \in \mathcal{F}$, dalla $F' \subset F''$ segue banalmente $\pi F' \subset \pi F''$. Viceversa, date B' e $B'' \in \mathcal{P}$, con $B' \subset B''$, dette l' ed l'' due misure (su $\mathcal{A}$) tali che sia $B' = \{l'\}^{\perp\perp}$, $B'' = \{l''\}^{\perp\perp}$, l' sarà assolutamente continua rispetto a l'' , quindi $F_{l'} \subset F_{l''}$, con $B' = \pi F_{l'}$, $B'' = \pi F_{l''}$.

Si potrebbe ancora dimostrare, in base a quanto esposto in questo numero e nei precedenti, che

il reticolo $\mathcal{P}$ è completamente subordinato al reticolo $\mathcal{B}$, è anche un σ -ideale del reticolo $\mathcal{B}$, ed è denso nel reticolo $\mathcal{B}$ nel senso che qualunque elemento del reticolo $\mathcal{B}$ (anche lo stesso elemento massimo $\mathcal{L}$) può esser rappresentato come congiunzione, in $\mathcal{B}$, d'una collezione di elementi del reticolo $\mathcal{P}$; inoltre il reticolo $\mathcal{P}$ è dotato di massimo elemento quando e solo quando è $\mathcal{P} = \mathcal{B}$.

Omettiamo la dimostrazione di tutto ciò. È chiaro, a questo punto, che ogni misura definita su $\mathcal{F}$, ivi dotata di supporto, può esser «trapiantata» sul reticolo $\mathcal{P}$ (in modo isomorfo rispetto alla operazione di combinazione lineare ed alla relazione $\leq$) dando luogo ad una misura dotata di supporto su $\mathcal{P}$; quest'ultima misura poi potrà esser prolungata (non univocamente!) in una misura definita sul reticolo $\mathcal{B}$, dotata di supporto appartenente a $\mathcal{P}$.

Facciamo ancora un'osservazione. Fissato un insieme $F^* \in \mathcal{F}$, consideriamo il reticolo $\mathcal{F}^* = \{F: F^* \supset F \in \mathcal{F}\}$, subordinato al reticolo $\mathcal{F}$; se $l \in \mathcal{L}$ è una misura avente F^* come supporto, allora $|l| \mathcal{F}^*$ è una misura stret-

⁽²⁷⁾ Sia m' una misura $\in \mathcal{M}$, singolare rispetto a m ; avremo allora $K_m \cap K_{m'} = \emptyset$, quindi $m(K_{m'}) = 0$, da cui $K_{m'} = \emptyset$, ed infine $m'(F) = m'(F \cap K_{m'}) = 0$ per ogni $F \in \mathcal{F}$.

tamente positiva sul reticolo $\mathcal{F}^*$, come risulta dalla definizione di supporto; dunque il reticolo $\mathcal{F}^*$ deve verificare le condizioni di KELLEY⁽²⁸⁾.

7. — **Conclusione.** Vogliamo ora tirare le somme di quanto siamo sin qui venuti esponendo. Supposto, come abbiamo convenuto, che $\mathcal{A}$ sia assegnato σ -reticolo di BOOLE, che $\mathcal{L}$ sia il reticolo lineare delle misure reali (finite) definite in $\mathcal{A}$, $\mathcal{L}$ dovrà risultare un reticolo relativamente completo; in secondo luogo, la totalità $\mathcal{P}$ delle « bande principali » del reticolo $\mathcal{L}$ dovrà formare, rispetto alla inclusione, un σ -reticolo generalizzato di BOOLE, anch'esso relativamente completo; in terzo luogo, $\mathcal{L}$ dovrà essere isomorfo al reticolo lineare $\mathcal{N}$ delle misure reali (finite) definite sul reticolo $\mathcal{P}$, ed ivi dotate di *supporto*⁽²⁹⁾; infine, fissata ad arbitrio una banda principale B del reticolo lineare $\mathcal{L}$, il sottoreticolo delle bande di $\mathcal{L}$ incluse in B dovrà essere un reticolo completo di BOOLE, verificante le condizioni di KELLEY⁽²⁹⁾. A sua volta, poi, il reticolo lineare $\mathcal{N}$ potrebbe essere « immerso » in quello delle misure reali (finite) definite sul reticolo $\mathcal{B}$ delle bande di $\mathcal{L}$, e dotate di supporto appartenente a $\mathcal{P}$; si avrebbe il lievissimo vantaggio di considerare misure su un reticolo di BOOLE completo — ma lo svantaggio che queste misure non sarebbero, almeno in generale, regolari nel senso di CARATHÉODORY.

Un prossimo lavoro sarà dedicato alla discussione della sufficienza delle proprietà ora menzionate, affinchè un dato reticolo lineare sia isomorfo a quello delle misure reali (finite) definite su un opportuno σ -reticolo di BOOLE.

(28) In [7] J. L. KELLEY ha dato condizioni necessarie e sufficienti affinchè su un reticolo completo di BOOLE sia definita una misura strettamente positiva; queste condizioni sono di natura strettamente reticolare-combinatoria. Cfr. p. 1167, teor. 4, e p. 1170, teor. 9.

(29) Basti pensare che $\mathcal{P}$ è un reticolo isomorfo ad $\mathcal{F}$, e quindi le misure definite su $\mathcal{F}$ possono essere « trapiantate » su $\mathcal{P}$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. BAUER, *Eine Rieszsche Bandzerlegung im Raum der Bewertungen eines Verbandes*, in « S. - Ber. math. - naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. », München, 1953, pp. 89-117.
- [2] C. CARATHÉODORY, *Mass und Integral und ihre Algebraisierung*, Birkhäuser Verlag, Basel 1956.
- [3] R. CRISTESCU, *Spatii liniare ordonate*, Editura Academiei R. P. R., Bucuresti 1959.
- [4] S. KAKUTANI, *Concrete representation of abstract (L) - spaces and the mean ergodic theorem*, in « Ann. of Math. », **42**, 1941, pp. 523-537.
- [5] S. KAKUTANI, *Concrete representation of abstract (M) - spaces*, in « Ann. of Math. », **42**, 1941, pp. 994-1024.
- [6] L. V. KANTOROVIC^v, B. Z. VULIH^v, A. G. PINSKER, *Funkcional'nyj analiz v poluuporjadovennyh prostranstvakh*, Gostehizdat, Moskva-Leningrad 1950.
- [7] J. L. KELLEY, *Measures on boolean algebras*, in « Pacific Journal of Mathematics », **9**, 1959, pagg. 1165-1177.
- [8] G. NÖBELING, *Grundlagen der analytischen Topologie*, Springer Verlag, Berlin 1954.
- [9] R. SIKORSKI, *Boolean algebras*, Springer Verlag, Berlin 1960.