ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

VINICIO VILLANI

Su una classe di domini di olomorfia approssimabili dall'esterno

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 14, nº 4 (1960), p. 349-361

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1960_3_14_4_349_0>

SU UNA CLASSE DI DOMINI DI OLOMORFIA APPROSSIMABILI DALL'ESTERNO

VINICIO VILLANI (Pisa)

Introduzione.

È noto che ogni dominio di olomorfia D, contenuto in C^n, può essere approssimato *dall'interno* mediante poliedri analitici, contenuti come insiemi relativamente compatti in D. Viceversa esistono in C^n dei domini di olomorfia (anche limitati), che non possono essere approssimati *dall'esterno* mediante poliedri analitici ([1]) contenenti D come sottoinsieme relativamente compatto. Proveremo tuttavia che in proposito sussiste il

TEOREMA 1. — *Se D é un dominio di olomorfia limitato, contenuto in C^n, il quale gode delle due proprietà seguenti:*

(a) *la frontiera ∂D di D é differenziabile di classe almeno C^3;*

(b) *D é fortemente pseudoconvesso;*

allora D può essere approssimato dall'esterno mediante una successione $\{P_j\}_{j \in Z}$ di poliedri analitici definiti relativamente ad uno stesso dominio Δ, non dipendente da j.

La dimostrazione che di questo teorema noi daremo nel § 1 consiste sostanzialmente nel far vedere che nelle dette ipotesi si può prendere come dominio Δ l'insieme $I_\varrho(D)$ dei punti di C^n la cui distanza reale da D è inferiore a ϱ, ϱ essendo un numero positivo opportunamente piccolo. Nel corso della dimostrazione proveremo che per ogni valore di ϱ non superiore ad un certo $\varrho_0 > 0$, l'insieme $I_\varrho(D)$ è un dominio di olomorfia, di cui $D \cup \partial D$ è sottoinsieme compatto, olomorficamente convesso. Questo risultato è utile, oltre che nella dimostrazione del teorema 1, anche per provare che D ed $I_\varrho(D)$ costituiscono una coppia di Runge; in altre parole, ne dedurremo il

TEOREMA 2. — *Se D é un dominio di olomorfia limitato, contenuto in C^n, soddisfacente alle ipotesi* (a) *e* (b) *del teorema* 1, *allora ogni funzione olo-*

([1]) Anzi, neppure mediante domini di olomorfia qualunque.

morfa su D é limite uniforme su ciascun sottoinsieme compatto di D, di una successione di funzioni olomorfe su tutto $I_{\varrho}(D)$, ϱ essendo un numero positivo, opportunamente piccolo.

Il teorema 1 s'inquadra nel seguente più generale problema: sia dato un dominio limitato $A \subset C^n$; si supponga che il suo inviluppo di olomorfia $H(A)$ sia anch'esso contenuto in C^n; dato un dominio di olomorfia $\varDelta$, di cui A è sottoinsieme relativamente compatto, si confronti l'inviluppo olomorficamente convesso $\widehat{A}_{\varDelta}$ di A, relativamente a $\varDelta$, con l'inviluppo $H(A)$.

Si ha sempre

$$\widehat{A}_{\varDelta} \supset H(A),$$

però non é detto che esista qualche $\varDelta$, per cui si ha la coincidenza

$$\widehat{A}_{\varDelta} = H(A) \qquad (\varDelta \text{ opportuno}). \tag{1}$$

Questa osservazione fa vedere l'opportunità di introdurre, in corrispondenza ad A e a $\varDelta$, una nuova nozione di inviluppo, che diremo *inviluppo geometrico di A relativamente a $\varDelta$*, e che denoteremo con $G(A, \varDelta)$, in modo che sia

$$G(A, \varDelta) = H(A) \qquad (\varDelta \text{ opportuno}), \tag{2}$$

per una classe di domini A, la quale è più ampia della classe dei domini per i quali vale la (1).

Daremo di $G(A, \varDelta)$ la definizione seguente: *$G(A, \varDelta)$ é il più grande dei domini G di C^n, che contengono A, e che godono della proprietà che ogni insieme analitico di dimensione $n-1$, definito in $\varDelta$, che ha intersezione non vuota con G, ha intersezione non vuota anche con A.*

Il § 2 è dedicato alla dimostrazione di alcune proprietà degli inviluppi geometrici, riassunte brevemente nel

TEOREMA 3. — *Sia A un dominio limitato di C^n; fissato un dominio di olomorfia $\varDelta$, di cui A é sottoinsieme relativamente compatto, si consideri l'inviluppo geometrico $G(A, \varDelta)$; risulta:*

I) $G(A, \varDelta) \subset \widehat{A}_{\varDelta}$;

II) *$G(A, \varDelta)$ é un dominio di olomorfia.*

Se l'inviluppo di olomorfia $H(A)$ è anch'esso contenuto in C^n, come immediato corollario del teorema 3 si ottiene la doppia inclusione

$$H(A) \subset G(A, \varDelta) \subset \widehat{A}_{\varDelta}.$$

L'introduzione di $G(A, \Delta)$ apporta quindi un miglioramento rispetto alla nozione di inviluppo olomorficamente convesso per ciò che concerne l'approssimabilità dall'esterno, e questo miglioramento è effettivo, in quanto si danno esempi di domini A, in corrispondenza ai quali esiste un dominio di olomorfia Δ, tale che $G(A, \Delta) = H(A)$, pur essendo, per ogni Δ, $\widehat{A}_\Delta \neq H(A)$.

Altri semplici esempi fanno tuttavia vedere che esistono anche dei domini A, per i quali non è possibile trovare alcun dominio di olomorfia Δ, soddisfacente a $G(A, \Delta) = H(A)$.

Il § 3 è dedicato all'esame di tali esempi.

Durante la preparazione del lavoro mi sono state di aiuto le discussioni avute con i partecipanti al seminario sulla teoria delle funzioni analitiche, tenuto a Pisa nell'anno 1959-60.

§ 1. — Nello spazio C^n, di coordinate complesse $z_1, \dots, z_n$, si considerino le due metriche, definite rispettivamente dalla *distanza complessa* (vale a dire *del massimo modulo*):

$$d_C(p, q) = \max_{k=1,\dots,n} |z_k(p) - z_k(q)|$$

e dalla *distanza reale*:

$$d_R(p, q) = \left[\sum_{k=1}^{n} (z_k(p) - z_k(q)) \overline{(z_k(p) - z_k(q))}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

È immediato verificare che si ha sempre

$$d_C(p, q) \geq n^{-\frac{1}{2}} d_R(p, q) \tag{3}$$

e che si ha l'uguaglianza

$$d_C(p, q) = n^{-\frac{1}{2}} d_R(p, q) \tag{4}$$

allora e solo che tutte le differenze $|z_k(p) - z_k(q)|$ $(k = 1, \dots, n)$ sono tra loro uguali.

Dato un dominio D (= insieme aperto e connesso) di C^n, denotiamo con Ω la totalità delle funzioni olomorfe su tutto D. Per ogni sottoinsieme relativamente compatto K di D, si definisce *l'inviluppo olomorficamente convesso di K, rispetto a D:*

$$\widehat{K}_D = \{x \in D;\ |f(x)| \leq \sup_{p \in K} |f(p)|, \text{ per ogni } f \in \Omega\}.$$

Si ha sempre $K \subset \widehat{K}_D$: se $K = \widehat{K}_D$, K si dice *olomorficamente convesso rispetto a D.*

È ben nota la seguente caratterizzazione dei domini di olomorfia:

PROPOSIZIONE 1. — *Un dominio D, contenuto in C^n, é dominio di olomorfia* (di una opportuna funzione) *se e solo se per ogni sottoinsieme compatto K di D si ha*

$$d_C(K, \partial D) = d_C(\widehat{K}_D, \partial D). \tag{5}$$

Per la dimostrazione, cfr. ad es. [1], exp. 8.

OSSERVAZIONE 1. — Per essere certi che D sia dominio di olomorfia, non occorre verificare (5), ma basta verificare che *per ogni sottoinsieme compatto K di D, anche $\widehat{K}_D$ é sottoinsieme compatto di D.*

Ora faremo vedere che l'enunciato della proposizione 1 resta vero anche ove la distanza che compare in (5) sia d_R invece che d_C, cioè proveremo la

PROPOSIZIONE 2. — *Un dominio D, contenuto in C^n, é dominio di olomorfia* (di una opportuna funzione) *se e solo se per ogni sottoinsieme compatto K di D si ha*

$$d_R(K, \partial D) = d_R(\widehat{K}_D, \partial D). \tag{6}$$

DIMOSTRAZIONE: Facciamo vedere in primo luogo che se D è un dominio di olomorfia, allora la (6) è necessariamente verificata per ogni sottoinsieme compatto K di D.

Ragioniamo per assurdo: esista dunque un sottoinsieme compatto K di D, per cui non sia verificata la (6). Ciò significa che esistono almeno un punto $p_0 \in \widehat{K}_D$ ed un punto $q_0 \in \partial D$, tali che

$$d_R(K, \partial D) > d_R(p_0, q_0). \tag{7}$$

Con un cambiamento di coordinate complesse, il quale lasci invariata la funzione distanza d_R (ad es. mediante una opportuna rotazione intorno al punto p_0) si può fare in modo che tutte le differenze $|z_k(q_0) - z_k(p_0)|$ $(k = 1,\ldots,n)$ siano tra loro uguali.

Poichè la nozione di dominio di olomorfia è indipendente dal sistema di coordinate complesse scelto, anche nel nuovo sistema di coordinate si può applicare al dominio di olomorfia D la proposizione 1, e quindi sarà certo

$$d_C(K, \partial D) \leq d_C(p_0, q_0).$$

La (3), applicata a tutte le coppie di punti $p \in K, q \in \partial D$, assicura che

$$n^{-\frac{1}{2}} d_{\boldsymbol{R}}(K, \partial D) \leq d_{\boldsymbol{C}}(K, \partial D).$$

Infine si osservi che la trasformazione di coordinate è stata scelta proprio in modo che per la coppia di punti p_0, q_0 valga la (4).

Da quanto si è detto risulta dunque:

$$n^{-\frac{1}{2}} d_{\boldsymbol{R}}(K, \partial D) \leq d_{\boldsymbol{C}}(K, \partial D) \leq d_{\boldsymbol{C}}(p_0, q_0) = n^{-\frac{1}{2}} d_{\boldsymbol{R}}(p_0, q_0)$$

cioè

$$d_{\boldsymbol{R}}(K, \partial D) \leq d_{\boldsymbol{R}}(p_0, q_0),$$

che contraddice all'ipotesi (7).

Per provare che, viceversa, se la (6) è verificata per ogni sottoinsieme compatto K di D, allora D è dominio di olomorfia, basta applicare l'osservazione 1. Con ciò la proposizione 2 è completamente dimostrata.

Ricordiamo ancora alcune definizioni:

Per *poliedro analitico* relativo al dominio Δ (che non è supposto necessariamente dominio di olomorfia) intendiamo un sottoinsieme relativamente compatto P di Δ, che possa essere definito come l'insieme dei punti $z \in \Delta$, soddisfacenti a

$$|f_1(z)| < 1 ; \dots ; |f_s(z)| < 1,$$

dove $f_1, \dots, f_s$ sono un numero finito di funzioni, olomorfe su tutto Δ.

La nozione di pseudoconvessità alla quale ci riferiremo, generalizzazione a $\boldsymbol{C}^n$ della pseudoconvessità introdotta da E. E. Levi per i domini di $\boldsymbol{C}^2$ (cfr. [3], rispettivamente [4]) è la seguente: un dominio D, contenuto come sottoinsieme relativamente compatto in $\boldsymbol{C}^n$, si dirà *pseudoconvesso* se in corrispondenza ad ogni punto $x_0 \in \partial D$ esiste un intorno $U(x_0)$ ed una funzione φ, a valori reali, differenziabile di classe almeno C^2, definita su $U(x_0)$, tale che

1) $d\varphi \neq 0$;

2) $D \cap U(x_0) = \{x \in U(x_0); \varphi(x) < 0\}$;

3) $L(\varphi) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} a_j \bar{a}_k \geq 0$ su $\partial D \cap U(x_0)$, per ogni vettore $(a_1, \dots, a_n)$

soddisfacente alla relazione $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} a_j = 0$. Il dominio D si dirà *fortemente pseudoconvesso* se nella condizione 3) si può sostituire $L(\varphi) \geq 0$ con $L(\varphi) > 0$ per ogni vettore non nullo soddisfacente alla relazione $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} a_j = 0$.

Se la frontiera ∂D di D è differenziabile di classe C^3, anche le funzioni φ si possono scegliere *differenziabili di classe* C^3.

Poniamo

$$I_\varrho(D) = \{x \in \boldsymbol{C}^n ; d_{\boldsymbol{R}}(x, D) < \varrho\} \qquad (\varrho > 0).$$

Sussiste il

LEMMA 1. — *Se D è un dominio di olomorfia, soddisfacente alle ipotesi del teorema 1, $I_\varrho(D)$ è fortemente pseudoconvesso per tutti i valori di ϱ, opportunamente piccoli.*

DIMOSTRAZIONE: La distanza $d_{\boldsymbol{R}}(p, \tilde{p})$ tra due punti $p \in \partial D$, $\tilde{p} \in \partial I_\varrho(D)$ è sempre maggiore o uguale a ϱ e, purchè ϱ sia abbastanza piccolo, $d_{\boldsymbol{R}}(p, \tilde{p}) = \varrho$ allora e solo che $\tilde{p}$ si trova sulla normale esterna, condotta a ∂D per p. Pertanto, se in un intorno U di p i punti che appartengono a D sono caratterizzati localmente da

$$D \cap U = \{x \in U ; \varphi(x) < 0\},$$

in un intorno $\tilde{U}$ di $\tilde{p}$ i punti che appartengono ad $I_\varrho(D)$ saranno caratterizzati localmente da

$$I_\varrho(D) \cap \tilde{U} = \{\tilde{x} \in \tilde{U} ; \tilde{\varphi}(\tilde{x}) < 0\},$$

dove

$$\tilde{\varphi}(\tilde{x}) = \varphi(\tilde{x} - \varrho \cdot n_x),$$

n_x essendo la normale esterna, condotta a ∂D per x, ed $\tilde{x}$ essendo il punto avente da x distanza ϱ, nella direzione di n_x.

A questo punto sarà utile fare la seguente

OSSERVAZIONE 2. — *Se $\varphi(x, \varrho)$ è una funzione a valori reali, differenziabile di classe almeno C^2 nel complesso delle coordinate del punto $x \in \boldsymbol{C}^n$ e nel parametro reale ϱ, e se per $\varrho = 0$ si ha, nel punto x_0:*

$$L(\varphi(x_0, 0)) > 0,$$

esistono un intorno M di x_0 ed un intorno N di $\varrho = 0$, tali che per ogni fissato $\tilde{\varrho} \in N$ sia $L(\varphi(x, \tilde{\varrho})) > 0$ in tutti i punti $x \in M$.

Ritornando alla dimostrazione del lemma 1, si noti che, in quanto ∂D è compatto, si può scegliere un valore $\varrho > 0$, in modo tale che l'osservazione 2 sia applicabile ad ogni punto $p \in \partial D$, relativamente al fissato valore di ϱ (indipendente dal punto p). Ciò prova il lemma 1.

Poichè i domini (fortemente) pseudoconvessi di C^n sono tutti domini di olomorfia, dal lemma 1 segue il

LEMMA 2. — *Se D é un dominio di olomorfia soddisfacente alle ipotesi del teorema 1, $I_\varrho(D)$ é un dominio di olomorfia per tutti i valori di ϱ, opportunamente piccoli.*

Proviamo ulteriormente il

LEMMA 3. — *$D \cup \partial D$ è, nelle dette ipotesi, un sottoinsieme compatto, olomorficamente convesso di $I_\varrho(D)$.*

DIMOSTRAZIONE: Per costruzione i punti di ∂D hanno tutti la stessa distanza *reale* ϱ dalla frontiera di $I_\varrho(D)$; perciò, se esistesse un punto dell'inviluppo convesso di $D \cup \partial D$, fuori di $D \cup \partial D$, tale punto verrebbe ad avere da $\partial I_\varrho(D)$ distanza reale inferiore a ϱ; ora ciò non può accadere, in quanto $I_\varrho(D)$ è dominio di olomorfia (cfr. lemma 2) e quindi per $D \cup \partial D$ e $I_\varrho(D)$ deve valere la proposizione 2.

Passiamo ora a dare la dimostrazione del teorema 1.

Sia ϱ_0 l'estremo superiore dei valori di ϱ, per i quali vale il lemma 3. Faremo vedere che è possibile scegliere come dominio Δ uno qualunque dei domini $I_\varrho(D)$, purchè sia $\varrho < \varrho_0$. Costruiamo infatti una successione (non crescente) di poliedri analitici $\{P_j\}_{j\varepsilon z}$, definiti relativamente ad $I_\varrho(D)$, i quali approssimano D dall'esterno, vale a dire sono tali che

1) D è un sottoinsieme relativamente compatto di ciascun P_j;

2) $\bigcap_{j\varepsilon z} P_j = D \cup \partial D$;

3) Per ogni punto $x \in \partial D$ si ha $\inf_{j\varepsilon z} d_{\boldsymbol{R}}(x, \partial P_j) = 0$.

A tal fine consideriamo un numero ϱ' compreso tra ϱ e ϱ_0:

$$\varrho < \varrho' < \varrho_0 .$$

Fissiamo poi una successione di numeri positivi, decrescenti e tendenti a O:

$$\varrho_1 = \varrho,\ \varrho_2,\ \varrho_3,\ \cdots;$$

indichiamo con $S(\varrho, \varrho_j)$ l'insieme (chiuso)

$$(I_\varrho(D) \cup \partial I_\varrho(D)) - I_{\varrho_j}(D).$$

Il lemma 3 assicura che $D \cup \partial D$ è sottoinsieme olomorficamente convesso di $I_{\varrho'}(D)$ e quindi, fissato comunque un punto $x_0 \in S(\varrho, \varrho_j)$, deve esistere una funzione f, olomorfa su tutto $I_{\varrho'}(D)$, tale che sia

$$\sup_{x \in D \cup \partial D} |f(x)| < |f(x_0)| .$$

Esisterà dunque anche tutto un intorno $U_0 \ni x_0$, tale che

$$\sup_{x \in D \cup \partial D} |f(x)| < \inf_{p \in U_0} |f(p)| .$$

Moltiplicando, se necessario, la funzione f per un'opportuna costante, si può supporre che sia

$$\sup_{x \in D \cup \partial D} |f(x)| < 1 < \inf_{p \in U_0} |f(p)| .$$

Poichè questo ragionamento si può fare relativamente a ciascun punto x_t di $S(\varrho, \varrho_j)$, si viene a definire così un ricoprimento aperto $\{U_t^{(j)}\}$ di $S(\varrho, \varrho_j)$. In quanto $S(\varrho, \varrho_j)$ è compatto, si può ricoprire $S(\varrho, \varrho_j)$ mediante un numero finito di aperti

$$U_1^{(j)}, \dots, U_{t_j}^{(j)}$$

di tale ricoprimento. Si considerino le corrispondenti funzioni

$$f_1^{(j)}, \dots, f_{t_j}^{(j)}$$

e si definisca

$$P_j = \{x \in I_\varrho(D); |f_1^{(j)}(x)| < 1, \dots, |f_{t_j}^{(j)}(x)| < 1\}.$$

È chiaro che ciascun P_j è sottoinsieme relativamente compatto di $I_\varrho(D)$, e quindi è un poliedro analitico, definito relativamente ad $I_\varrho(D)$; inoltre, per costruzione, P_j è tutto contenuto in $I_{\varrho_j}(D)$ e contiene $D \cup \partial D$. Poichè $\lim_{j \to \infty} \varrho_j = 0$, la successione $\{P_j\}$ soddisfa a tutte le condizioni richieste, e quindi il teorema 1 è dimostrato.

Si osservi che l'unica proprietà a cui non è detto che la successione $\{P_j\}$ soddisfi, è quella di essere una successione non crescente. Ma ove interessi anche quest'ultima proprietà, basta evidentemente sostituire la successione di poliedri analitici

$$P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$$

con la successione

$$P_1, P_1 \cap P_2, \dots, P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n, \dots .$$

Dimostriamo il teorema 2. Il lemma 3 assicura che $D \cup \partial D$ è olomorficamente convesso rispetto ad $I_\varrho(D)$, e quindi, preso un qualunque insieme compatto K di D, l'inviluppo olomorficamente convesso di K relativamente ad $I_\varrho(D)$ è ancora un sottoinsieme compatto di D. Questa proprietà garantisce che D e $I_\varrho(D)$ costituiscono una coppia di Runge (teorema di Behnke-Stein, cfr. [5], pag. 39) e quindi il teorema 2 resta dimostrato.

OSSERVAZIONE 3. — Il teorema 2 può essere dedotto anche dal lemma 2, senza bisogno di ricorrere al lemma 3. Infatti i domini $I_\varrho(D)$ costituiscono, per ϱ variabile tra O e ϱ_0 una *schiera continua* di domini di olomorfia (cfr. [2], def. 20) e quindi a D e a $I_\varrho(D)$ è applicabile il teorema 17 di [2], che assicura precisamente la validità del nostro teorema 2.

§ 2. — Siano dati un dominio limitato $A \subset C^n$ ed un dominio di olomorfia $\Delta \subset C^n$, contenente A come sottoinsieme relativamente compatto. Con $\mathcal{G}$ indichiamo la totalità dei domini G, contenuti in Δ e godenti delle due proprietà:

(a) $G \supset A$

(b) Se f è una funzione olomorfa su tutto Δ e se

$$A \cap \{x \in \Delta\,;\, f(x) = 0\} = \emptyset\,,$$

si ha anche

$$G \cap \{x \in \Delta\,;\; f(x) = 0\} = \emptyset\,.$$

Nella totalità $\mathcal{G}$ esiste un elemento massimo: esso è il dominio che si ottiene come riunione di tutti i domini appartenenti a $\mathcal{G}$. Come si è già detto nell'introduzione, tale elemento massimo si denoterà con il simbolo $G(A, \Delta)$ e si chiamerà l'*inviluppo geometrico di A relativamente a Δ*.

Diamo ora la dimostrazione del teorema 3:

I) $G(A, \Delta) \subset \widehat{A}_\Delta$. Infatti, se esistesse un punto $x_0 \in G(A, \Delta) - \widehat{A}_\Delta$, in corrispondenza ad x_0 dovrebbe esistere una funzione f, olomorfa su tutto Δ, e tale che

$$|f(x_0)| > \sup_{x \in A} |f(x)|\,.$$

Ma allora la funzione $F(x) = f(x) - f(x_0)$, olomorfa su tutto Δ, si annullerebbe nel punto $x_0 \in G(A, \Delta)$; d'altra parte $F(x)$ non si annullerebbe in alcun punto di A. Ciò è incompatibile con la definizione di inviluppo geometrico. Ne segue appunto

$$G(A, \Delta) \subset \widehat{A}_\Delta\,. \tag{8}$$

OSSERVAZIONE 4. — Poichè $\widehat{A}_\Delta$ è sottoinsieme relativamente compatto di Δ, come immediata conseguenza di (8) risulta che anche *l'inviluppo geometrico $G(A, \Delta)$ è sempre contenuto in Δ come sottoinsieme relativamente compatto.*

II) $G(A, \Delta)$ *è un dominio di olomorfia.* Per provarlo, basta far vedere che in corrispondenza ad ogni punto x_0 della frontiera di $G(A, \Delta)$ esiste una funzione olomorfa su tutto $G(A, \Delta)$ la quale ha una singolarità essenziale in x_0. Si osservi che in corrispondenza ad x_0 esiste certo almeno una successione $\{L_j\}$ di ipersuperficie, definite in Δ ($L_j =$ luogo di zeri di una opportuna funzione f_j olomorfa su tutto Δ), per cui sono verificate le due proprietà:

1) $\lim\limits_{j \to \infty} d_{\mathbf{R}}(x_0, L_j) = 0$,

2) $L_j \cap G(A, \Delta) = \emptyset$ per ogni j.

Pertanto la dimostrazione è ricondotta a far vedere che vale il

LEMMA 4. — *Siano H, Δ due domini di C^n, con H sottoinsieme relativamente compatto di Δ. Sia x_0 un punto di ∂H, in corrispondenza al quale esiste una successione $\{L_j\}$ di ipersuperficie di Δ:*

$$L_j = \{x \in \Delta;\ f_j(x) = 0,\ f_j \text{ funz. olom. su } \Delta\},$$

godente delle due proprietà seguenti:

1) $\lim\limits_{j \to \infty} d_{\mathbf{R}}(x_0, L_j) = 0$,

2) $L_j \cap H = \emptyset$ *per ogni* j.

In queste ipotesi esiste una funzione, olomorfa su tutto H, la quale ha una singolarità essenziale in x_0.

DIMOSTRAZIONE: Sia $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \ldots$ una successione di insiemi compatti, contenuti in H, tale che $\bigcup_j K_j = H$. Per ogni j sia $m = m(j)$ il più piccolo indice per cui

$$d_{\mathbf{R}}(x_0, L_{m(j)}) < \frac{1}{3} d_{\mathbf{R}}(K_j, \partial H).$$

Su ogni ipersuperficie L_m si fissi poi un punto z_m tale che sia

$$d_{\mathbf{R}}(x_0, z_m) < 2 d_{\mathbf{R}}(x_0, L_m).$$

A partire dalle funzioni f_m che definiscono le ipersuperficie L_m definiamo una nuova successione di funzioni g_j, ponendo

$$g_j(z) = f_{m(j)}(z - x_0 + z_{m(j)}).$$

Esiste un dominio $\Lambda \subset \Delta$, di cui H è sottoinsieme relativamente compatto, tale che da un certo j_0 in poi tutte le funzioni $g_j(z)$ sono definite su Λ. Eventualmente sostituendo j con $j - j_0$, possiamo supporre che per ogni $j > 0$ le funzioni g_j siano definite su tutto Λ.

Sia M_j il luogo degli zeri di g_j:

$$M_j = \{x \in \Lambda\,;\ g_j(x) = 0\}.$$

È ovvio verificare che

$$x_0 \in M_j.$$

Proviamo che si ha

$$M_j \cap K_j = \emptyset.$$

Infatti, se esistesse un punto $y \in M_j \cap K_j$, da $y \in K_j$ si dedurrebbe $z = y - (x_0 - z_{m(j)}) \in H$; da $y \in M_j$ si dedurrebbe $f_{m(j)}(z) = g_j(y) = 0$; ciò rappresenta una contraddizione, poichè per ipotesi f_m non si annulla in alcun punto di H.

Si ponga

$$\mu_j = \min_{x \in K_j} |\, g_j(x)\,|\,;$$

da quanto si è visto, risulta $\mu_j \neq 0$. Per ogni j si definisca su Λ la funzione

$$\Psi_j(z) = \frac{g_j(z)}{\mu_j}.$$

Si ottiene così una successione di funzioni $\{\Psi_j\}$, tutte definite su Λ, tale che:

i) $\Psi_j(x_0) = 0$;

ii) $\min\limits_{x \in K_j} |\, \Psi_j(x)\,| = 1$.

In virtù di *i*) è possibile scegliere una successione $\{z_j\}$ di punti di H, con $\lim z_j = x_0$, in modo che sia

$$|\, \Psi_j(z_j)\,| < \frac{1}{2^j}.$$

Poniamo $\varepsilon_j = \Psi_j(z_j)$ e consideriamo il prodotto infinito

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\varepsilon_j}{\Psi_j(x)}\right)^j.$$

Questo prodotto infinito converge uniformemente su ciascun K_j, e quindi rappresenta una funzione olomorfa f su tutto H; la funzione f non è identicamente nulla. Nei punti z_j la funzione f si annulla di ordine $\geq j$. Ciò assicura che x_0 è un punto singolare essenziale per f. Con questo il lemma 4 risulta dimostrato.

§ 3. — *Esempi:*

I). Si consideri in C^2 il dominio

$$D = \{(z, w) \in C^2 ;\ |z| < |w|,\ |w| < 1\}.$$

Per ogni dominio di olomorfia Δ di C^2, che contiene D come sottoinsieme relativamente compatto, si ha

$$\widehat{D}_\Delta = \{(z, w) \in C^2 ;\ |z| < 1,\ |w| < 1\},$$

e quindi

$$\widehat{D}_\Delta \supset D,$$

mentre è

$$G(D, \Delta) = D.$$

Si osservi che in questo caso si ha proprio

$$G(D, \Delta) = H(D).$$

II). Si considerino in corrispondenza ad un parametro λ $(0 < \lambda \leq 1)$ i domini D_λ di C^2, definiti come prodotti cartesiani $D_\lambda = D'_\lambda \times D''_\lambda$ dei due domini di C^1

$$D'_\lambda = \{z = x + iy \in C^1 ;\ 0 < x < \lambda,\ 0 < y < 2 \ \text{ oppure } \ \lambda \leq x < 2,\ 2 - \lambda < y < 2\}$$

$$D''_\lambda = \{w = u + iv \in C^1 ;\ 0 < u < 2,\ 0 < v < \lambda \ \text{ oppure } \ 2 - \lambda < u < 2,\ \lambda \leq v < 2\}.$$

Poniamo poi

$$A_\lambda = D_\lambda \cap \{(z, w) \in C^2 ;\ z = w\}.$$

A_λ è un insieme analitico di D_λ, che per ogni valore $0 < \lambda \leq 1$ è riducibile, in quanto risulta costituito dai due insiemi, chiusi in D_λ:

$$A'_\lambda = \{(z, w) \in A_\lambda ;\ |z| < \sqrt{2}\},$$

$$A''_\lambda = \{(z, w) \in A_\lambda ;\ |z| > \sqrt{2}\}.$$

Quindi ad es. il dominio $D_\lambda - A'_\lambda$, in quanto è ottenuto togliendo l'ipersuperficie A'_λ al dominio di olomorfia D_λ, è esso stesso un dominio di olomorfia (per ogni valore di λ, $0 < \lambda \leq 1$).

Se $\lambda < 1$, pur di scegliere Δ opportunamente piccolo, l'insieme analitico $\Delta \cap \{(z, w) \in C^2 ;\ z = w\}$ è ancora riducibile, e quindi si verifica che

$$G(D_\lambda - A'_\lambda, \Delta) = D_\lambda - A'_\lambda = H(D_\lambda - A'_\lambda) ;$$

per il valore $\lambda = 1$, si è già visto che $D_1 - A'_1$ è sempre un dominio di olomorfia, e quindi si ha

$$D_1 - A'_1 = H(D_1 - A'_1),$$

ma ora, comunque si scelga Δ, l'insieme analitico $\Delta \cap \{(z, w) \in C^2 ; z = w\}$ è connesso, e poichè ciò basta ad assicurarne l'irriducibilità, risulta

$$G(D_1 - A'_1, \Delta) = D_1 \neq H(D_1 - A'_1).$$

Si noti che per ogni $0 < \lambda \leq 1$, l'inviluppo olomorficamente convesso di $D_\lambda - A'_\lambda$, rispetto ad un qualunque dominio Δ, è sempre tutto D_λ.

Il caso $\lambda = 1$ di questo esempio fa dunque vedere che esistono dei domini per i quali l'inviluppo di olomorfia non può coincidere con l'inviluppo geometrico, bensì vi è sempre contenuto propriamente.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. Cartan: Séminaire Ecole Normale Supérieure, 1951-52.

[2] F. Docquier-H. Grauert: *Levisches Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten.* Math. Annalen **140** (1960) pagg. 94-123.

[3] H. Grauert: *On Levi's Problem and the Imbedding of Real-Analytic Manifolds.* Ann. of Math. 68 (1958) pagg. 460-472.

[4] E. E. Levi: *Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse.* Annali di Matematica pura appl. (3) **17** (1910) pagg. 61-87.

[5] K. Stein: *Leçons sur la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes.* Corso C.I.M.E., Varenna 1956.