

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

JEAN PANVINI

Sull'area dei trapezoidi parabolici in geometria non archimedeica

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 14, n° 1 (1960), p. 93-101

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1960_3_14_1_93_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1960, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULL'AREA DEI TRAPEZOIDI PARABOLICI IN GEOMETRIA NON ARCHIMEDEA

di JEAN PANVINI (a Pisa)

L'operazione di coordinare una grandezza a una figura piana⁽¹⁾ si dimostra possibile, in primo luogo, nel caso elementare dei poligoni.

Stabilita, infatti, una teoria della equivalenza che assicuri alla classe dei poligoni i caratteri di una specie di grandezze, il problema può dirsi risolto. E non occorre, per questo, l'ipotesi archimedeica [postulato di Archimede: se a e b sono due segmenti, esiste un multiplo dell'uno che supera l'altro].

È noto infatti che si può stabilire una teoria delle proporzioni tra segmenti indipendentemente dal postulato di Archimede [essenzialmente fondata sul postulato della parallela: si dice che OA , OB , OC , OD sono in proporzione se, supposti OA e OB su un lato, e OC e OD sull'altro lato di un angolo retto di vertice O , le rette AC e BD sono parallele o coincidenti]; quindi, si può definire il prodotto di due segmenti a e b come il segmento quarto proporzionale dopo u , a , b essendo u un segmento fissato una volta per tutte e che si comporta come unità. Si definisce poi il quoziente e si trova facilmente che le quattro operazioni godono delle proprietà dell'aritmetica ordinaria⁽²⁾.

Ora, se si associa a ogni triangolo il semiprodotto segmentario di un lato per l'altezza relativa [non importa quale lato: il prodotto non cambia] e ad un poligono la somma dei segmenti associati ai triangoli in cui venga suddiviso [e non importa come: la somma non cambia], nasce una funzione segmentaria di poligono la quale è additativa e mai nulla: essa si comporta come l'area del poligono. [Nell'ipotesi archimedeica, d'altronde, poligoni aventi ugual segmento associato è lo stesso che poligoni equiscomponibili].

⁽¹⁾ In particolare, di misurarla.

⁽²⁾ V. Calcolo segmentario di HILBERT su « *Lezioni di Matematiche Complementari* » di F. CECIONI « *Principi di Geometria* » - Vallerini, Pisa.

Ma non appena si generalizzi la questione a figure un pò meno particolari non sembra che si possa fare a meno del postulato di Archimede. Giacchè in effetti, data una figura F , si ricorre alle due classi delle figure poligonali contenute in F e di quelle contenenti F ; le quali due classi, quando si verifica la circostanza che ogni figura poligonale (come grandezza), esclusa al più una, sia nell'una o nell'altra classe, si richiede che siano contigue.

Ma questa conclusione appare subito irraggiungibile in assenza del postulato di Archimede. Anzi, si può dimostrare il seguente fatto, in sè molto significativo: se si nega, per una coppia almeno di segmenti, il postulato di Archimede, avviene che, preso un cerchio qualunque, la classe dei poligoni regolari inscritti, e la classe dei poligoni regolari circoscritti, sono *non* contigue.

[La dimostrazione procede, per sommi capi, come segue: si fa vedere dapprima che un poligono inscritto o circoscritto è « confrontabile » col quadrato del raggio, intendendo con ciò che è superato da qualche multiplo del quadrato del raggio, mentre a sua volta il quadrato del raggio è superato da qualche multiplo del poligono; si prende poi un quadrato U — che si mostra esistere — tale che ogni suo multiplo sia minore del quadrato del raggio; ne discende allora senza difficoltà che la differenza tra due poligonigoni qualsivogliano delle due classi è maggiore di U].

Si pone allora la questione se non si possa generalizzare a qualche classe di figure non poligonali il metodo del segmento associato valido per i poligoni, o trovarne comunque uno che eviti il ricorso alle classi approssimanti; e anche prevedendo che la conclusione debba essere generalmente negativa, resterà almeno la questione di decidere fino a quale punto ciò sia possibile, nell'ipotesi non archimedea.

È quello che ci proponiamo di stabilire.

Intanto, si può vantaggiosamente ricondurre il problema a un problema analitico, giacchè, sostanzialmente, la questione posta equivale a quella dell'integrazione di una funzione in un campo di razionalità ordinato, non archimedeo.

[Ci si persuade facilmente dell'ultima osservazione. Infatti, stabilito il calcolo segmentario di Hilbert, di cui si è già fatto cenno, si riconosce che l'insieme dei segmenti è identico, come struttura, a un campo di razionalità ordinato, chiuso rispetto all'operazione $\sqrt{a^2 + b^2}$; archimedeo o no, secondochè si ammette o no il postulato di Archimede per i segmenti (si avverte, per chiarezza, che ci si riferisce all'assiomatizzazione della Geometria secondo Hilbert; v. per questo, il lavoro dello stesso Hilbert « Grundlagen der Geometrie » oppure: Cecioni — *Matematiche Complementari* — *Principi di geometria*, Vallerini, Pisa]. Si potrà quindi parlare di coordinate di un

punto rispetto a un sistema di assi coordinati, di equazione di una curva e così via, nel significato della geometria analitica ordinaria⁽³⁾, con l'avvertenza che ora i numeri sono elementi di un campo di razionalità ordinato, non archimedeo].

Penseremo dunque assegnato un campo di razionalità non Archimedeo, ordinato, nel quale è possibile l'operazione $\sqrt{a^2 + b^2}$; lo chiameremo il campo C , e supporremo anche che C sia un campo relativo, cioè che in C siano stati introdotti lo zero e i numeri negativi (cosa sempre possibile).

Data, in C , una funzione $y = f(x)$ (s'intende che x e y sono numeri di C), continua in un intervallo (a, b) estremi inclusi, ivi sempre positiva o nulla, vogliamo esaminare la possibilità di associare ad ogni intervallo (c, x) contenuto in (a, b) un numero $S(f, c; x)$ che si comporti come l'area del trapezoide compreso tra c e x [$a \leq c \leq x \leq b$], relativo alla funzione $y = f(x)$.

Se una tale funzione $S(f, c; x)$ esiste, dovrà godere delle seguenti proprietà:

- 1) È $S(f, c; c) = 0$
- 2) È $S(f, c; x) > 0$ per $c < x \leq b$ (escludiamo il caso che $f(x)$ sia nulla in un intero tratto).
- 3) La S è additiva, cioè se $c < x_1 < x_2$, deve essere

$$S(f, c; x_2) = S(f, c; x_1) + S(f, x_1; x_2)$$

- 4) Se $f(x) > \varphi(x) \geq 0$ in (a, b) allora $S(f, c; x) > S(\varphi, c; x)$
- 5) Nel caso che $f(x)$ sia una funzione lineare, la S deve coincidere col « segmento associato » definito per le figure elementari.

Infine, deduciamo la proprietà seguente (come conseguenza delle precedenti):

- 6) È

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(f, c; x_0 + h) - S(f, c; x_0)}{h} = f(x_0)$$

Ricorreremo a un ragionamento un pò diverso da quello che si fa di solito nell'analisi ordinaria (non valendo qui il teorema del valor medio).

In virtù della proprietà 3), la quantità $\Sigma_h = S(x_0 + h) - S(x_0)$ è il « numero associato » alla parte di trapezoide compresa tra x_0 e $x_0 + h$ (a prescindere dal segno se $h < 0$). Poichè $f(x)$ è continua, prefissato a piacere

⁽³⁾ Si suppongono introdotti lo zero e gli elementi negativi.

un $\varepsilon > 0$, esisterà un $\delta > 0$ tale che per $|h| < \delta$ sia:

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x_0 + h) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Supposto, per fissare le idee, $h > 0$ e $f(x_0) > 0$ il rettangolo $[h, f(x_0) - \varepsilon]$ è contenuto nella parte di trapezoide⁽⁴⁾ Σ_h e questa è contenuta nel rettangolo $[h, f(x_0) + \varepsilon]$. Allora in forza delle proprietà 3), 4), 5) sarà:

$$h \cdot [f(x_0) - \varepsilon] < \Sigma_h < h \cdot [f(x_0) + \varepsilon]$$

ossia

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{\Sigma_h}{h} < f(x_0) + \varepsilon$$

per $0 < h < \delta$; cioè, per l'arbitrarietà di ε

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Sigma_h}{h} = f(x_0)$$

Dunque, $S(f, c; x)$ deve essere una primitiva di $f(x)$. Ma supposto che per una classe $\{f\}$ di funzioni continue $f(x)$, chiusa rispetto alla somma e contenente le funzioni lineari, si verifichi la circostanza che ogni $f(x)$ ammette qualche primitiva, ciò non consente ancora alcuna conclusione: a cagione della discontinuità del campo, benchè sia $S(c; c) = 0$ e $\frac{dS}{dx} > 0$ per $x > c$, la $S(x)$ può diventare negativa (basta ripartire gli $x > c$ in due classi H e K prive di elemento separatore e in K mutare $S(x)$ in $S(x) - p$ con p costante e abbastanza grande, cosa che non influisce sulla derivata).

Le condizioni che occorre e basta richiedere alla classe $\{f\}$ sono le seguenti.

Ad ogni $f(x)$ di $\{f\}$ deve potersi associare una classe $S(f; x)$, di primitive di $f(x)$, in modo che:

α) se $f(x) = 0$ in tutto (a, b) , ogni $S(f; x)$ è costante⁽⁵⁾ in tutto (a, b) ; di qui segue allora che è individuata una primitiva della $f(x)$ quando è detto che essa per $x = c$ ha il valore zero; potremo indicare tale primitiva con $S(f, c; x)$ e allora avremo, successivamente

$$S(f, c; c) = 0$$

(4) Si può supporre

$$f(x_0) - \varepsilon > 0.$$

(5) In \mathcal{C} vi sono funzioni a derivata sempre nulle e non costanti.

e, [poichè $S(f, a; x) - S(f, a; c)$ è una primitiva che per $x = c$ vale zero],

$$S(f, a; x) - S(f, a; c) = S(f, c; x)$$

$$S(f, a; x) = S(f, a; c) + S(f, c; x)$$

donde la proprietà additiva.

β) se $f(x) > 0$ per $x > c$, è $S(f, c; x) > 0$ per $x > c$ [e allora si noti che di qui e dalla α) discende che $S(f, c; x)$ è crescente per $x > c$];

γ) se $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$, le primitive di $f(x)$ debbono ottenersi sommando le primitive di $\varphi(x)$ con le primitive di $\psi(x)$; quest'ultima condizione (che a rigore si potrebbe omettere perchè è conseguenza delle prime due) assicura che

$$S(f, a, b) = S(\varphi, a, b) + S(\psi, a, b)$$

Si riconosce subito che ciò è possibile per le funzioni lineari, e si ritrova la teoria del segmento associato, com'era prevedibile.

Noi ora dimostreremo che ciò è possibile (almeno) per la classe più ampia delle funzioni razionali intere.

A una funzione razionale intera $f(x)$, assoceremo, come classe di primitive delle $f(x)$, le primitive razionali intere della $f(x)$ [si noti che posto $f(x) = a_0 x^n + \dots + a_n$ la $S(x) = \frac{1}{n+1} a_0 x^{n+1} + \dots + a_n x$, ha dappertutto come derivata la $f(x)$].

Le condizioni α) e γ) sono evidentemente soddisfatte. Occorre far vedere che è verificata la condizione β). Per fare ciò, è utile premettere alcune proprietà del campo C .

Dati due numeri a, b di C , se b è compreso tra due multipli di a diremo a e b sono dello stesso ordine, o che sono confrontabili. Se b supera tutti i multipli di a , diremo che b è un infinito rispetto ad a , o che l'ordine di b è maggiore dell'ordine di a ; e diremo che a è infinitesimo rispetto a b , o che è di ordine inferiore.

Dati due elementi a e b , positivi e dello stesso ordine, si mettano in una classe H le frazioni $\frac{m}{n}$ tali che $\frac{m}{n} b < a$ e in una classe K le frazioni $\frac{p}{q}$ tali che $\frac{p}{q} b > a$. Si ottiene una sezione nel campo razionale, cioè un numero reale α , il quale può appartenere o no al campo C . (Si noti comunque che il campo C contiene il campo razionale). Supporremo provvisoriamente che α appartenga a C e lo chiameremo parte principale di $\frac{a}{b}$.

p) Posto $a = \alpha \cdot b + \varepsilon$, si ha subito che ε è di ordine inferiore⁽⁶⁾ ad a e b , mentre $\frac{\varepsilon}{b}$ è di ordine inferiore a 1. Si hanno poi le seguenti proprietà:

p') Se $\text{ord } a = \text{ord } b$ e $\text{ord } x = \text{ord } y$, allora $\text{ord } ax = \text{ord } by$. Infatti (riducendosi al caso di numeri positivi, com'è lecito) se

$$ma \leq b < (m + 1) a,$$

$$rx \leq y < (r + 1) x$$

è pure

$$mra x \leq by < (m + 1)(r + 1) ax$$

p'') Se $\text{ord } u = \text{ord } ab$, si può scomporre u nel prodotto $u_1 \cdot u_2$ in modo che $\text{ord } u_1 = \text{ord } a$, $\text{ord } u_2 = \text{ord } b$.

Prendiamo $u_1 = a$, $u_2 = \frac{u}{a}$; occorre far vedere che $\frac{u}{a}$ è dell'ordine di b . Se fosse, per esempio, $\text{ord } \frac{u}{a} < \text{ord } b$ sarebbe, per ogni intero K , $K \frac{u}{a} < b$ e quindi $Ku < ab$ contro l'ipotesi. Allo stesso modo, non può essere $\text{ord } \frac{u}{a} > \text{ord } b$.

Passiamo ora a dimostrare la proposizione β). Basterà dimostrare (facendo $c = 0$) che se il polinomio $f(x) = a_0 x^n + \dots + a_n$ è positivo per $0 < x < b$, è pure positivo per $0 < x \leq b$ il polinomio

$$S(x) = \frac{1}{n+1} a_0 x^{n+1} + \dots + a_n x$$

ossia (essendo $x > 0$) che è positivo, il polinomio

$$\bar{S}(x) = \frac{1}{n+1} a_0 x^n + \dots + a_n.$$

⁽⁶⁾ Infatti dall'essere $\frac{m}{n} b < ab < \frac{p}{q} b$, $\frac{m}{n} b < a < \frac{p}{q} b$ segue $|\alpha \cdot b - \alpha| < \frac{1}{N} b$ per ogni N .

Supponiamo che esista un z_0 in $(0, b)$ tale che $\bar{S}(z_0) \leq 0$ cioè

$$\frac{1}{n+1} a_0 z_0^n + \dots + a_n \leq 0.$$

Tra i termini di $\bar{S}(z_0)$ fissiamo l'attenzione su quelli di ordine massimo (nel senso già precisato).

Supponiamo, per semplificare il discorso, che questi siano, per esempio, 2^0 , il 4^0 e il 5^0 (ma il discorso vale in generale), e scriviamo

$$\bar{S}(z_0) = \frac{1}{n} a_1 z_0^{n-1} + \frac{1}{n-2} a_3 z_0^{n-3} + \frac{1}{n-3} a_4 z_0^{n-4} + R(z_0)$$

indicando con $R(z_0)$ il complesso dei termini di ordine non massimo.

Fissiamo un numero $u > 0$ di C confrontabile con i termini di ordine massimo: u sarà dell'ordine di $\frac{1}{n} a_1 z_0^{n-1}$.

Posto $u = z_0^{n-1} \cdot u_1$, u_1 sarà > 0 e dell'ordine di a_1 . Analogamente, posto $u = z_0^{n-3} \cdot u_3$, u_3 sarà > 0 e dell'ordine di a_3 . Stessa scomposizione per il 5^0 termine. Indichiamo ora con $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ le parti principali dei rapporti $\frac{a_1}{u_1}, \frac{a_3}{u_3}, \frac{a_4}{u_4}$, e supponiamo dapprima che questi numeri $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ appartengano a C .

Avremo $[v.p.]$:

$$a_1 = \alpha_1 u_1 + \varepsilon_1$$

$$a_3 = \alpha_3 u_3 + \varepsilon_3$$

$$a_4 = \alpha_4 u_4 + \varepsilon_4$$

con $\text{ord } \varepsilon_i < \text{ord } a_i$

Dividiamo $\bar{S}(z_0)$ per u (che abbiamo supposto positivo).

Otterremo:

$$\frac{\bar{S}(z_0)}{u} = \frac{1}{n} \cdot \frac{\alpha_1 u_1 + \varepsilon_1}{u} + \frac{1}{n-2} \cdot \frac{\alpha_3 u_3 + \varepsilon_3}{u_3} + \frac{1}{n-3} \cdot \frac{\alpha_4 u_4 + \varepsilon_4}{u_4} + \frac{R(z_0)}{u}.$$

Di qui (come si vede facilmente) si ha:

$$\frac{\bar{S}(z_0)}{u} = \frac{1}{u_1} \alpha_1 + \frac{1}{n-2} \alpha_3 + \frac{1}{n-3} \alpha_4 + r(z_0)$$

con gli α numeri reali e $r(z_0)$ di ordine minore di 1.

Se è $\frac{\bar{S}(z_0)}{u} \leq 0$, deve essere allora

$$(1) \quad \frac{1}{n} \alpha_1 + \frac{1}{n-2} \alpha_3 + \frac{1}{n-3} \alpha_4 \leq 0.$$

D'altronde, $f(x)$ è positiva per ogni $0 < x \leq z_0$; quindi, per ogni numero razionale λ compreso tra zero e uno, deve essere positiva $f(\lambda z_0)$:

$$f(\lambda z_0) > 0.$$

Dividendo $f(\lambda z_0)$ per u , e facendo su $f(\lambda z_0)$ le stesse operazioni fatte su $\frac{\bar{S}(z_0)}{u}$ si perviene subito alla seguente disuguaglianza [analoga alla (1)]:

$$(2) \quad \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_3 \lambda^{n-3} + \alpha_4 \lambda^{n-4} \geq 0$$

valida per $0 \leq \lambda \leq 1$ (λ razionale).

Ora, il primo membro della (2) è un polinomio in λ il quale, fuori di un numero finito di punti, è positivo senz'altro (principio di identità dei polinomi); pertanto, in forza di note proprietà dell'analisi ordinaria deve essere

$$\int_0^1 (\alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_3 \lambda^{n-3} + \alpha_4 \lambda^{n-4}) d\lambda > 0.$$

Ma il primo membro della disuguaglianza ora scritta altro non è che il primo membro della disuguaglianza (1); donde l'assurdo.

Rimane ora soltanto da svincolare la dimostrazione dall'ipotesi che i numeri α appartengano a C .

Si può procedere così.

Si ha, per ipotesi, $\frac{\bar{S}(z_0)}{u} \leq 0$; ossia $\frac{1}{n} \frac{a_1}{u_1} + \frac{1}{n-2} \frac{a_3}{u_3} + \frac{1}{n-3} \frac{a_4}{u_4} + \frac{R(z_0)}{u} \leq 0$, con $\frac{R(z_0)}{u}$ di ordine inferiore a 1.

Fissato un intero $k > 0$, consideriamo la frazione con segno $\frac{m_1}{K}$ tale che $\frac{m_1}{K} u_1 \leq a_1 < \frac{m_1 + 1}{K} u_1$; indichiamo questa frazione con $\alpha_1^{(K)}$. Consideriamo, analogamente, $\alpha_3^{(K)}$ e $\alpha_4^{(K)}$.

Si ha (nel senso delle disuguaglianze di numeri relativi):

$$\alpha_1^{(K)} \leq \frac{a_1}{u_1}, \quad \alpha_3^{(K)} \leq \frac{a_3}{u_3}, \quad \alpha_4^{(K)} \leq \frac{a_4}{u_4}.$$

e pertanto

$$\frac{1}{n} \alpha_1^{(K)} + \frac{1}{n-2} \alpha_3^{(K)} + \frac{1}{n-3} \alpha_4^{(K)} + \frac{R(z_0)}{n} \leq 0.$$

Di qui (tenendo conto degli ordini):

$$\frac{1}{n} \alpha_1^{(K)} + \frac{1}{n-2} \alpha_3^{(K)} + \frac{1}{n-3} \alpha_4^{(K)} \leq 0.$$

Al tendere dell'intero K all'infinito, $\alpha_i^{(K)}$ tende ad α_i e la disuguaglianza ora scritta si muta nella (1).

Per dedurre la disuguaglianza (2) si procede allo stesso modo, servendosi però di $\frac{m_i + 1}{K}$ in luogo di $\frac{m_i}{K}$ (essendo una disuguaglianza di verso opposto).

Stabilite le disuguaglianze (1) e (2), si procede come prima.