

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

BRUNO FORTE

Di alcune notevoli proprietà differenziali dei moti rigidi di rotolamento

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 12, n° 4 (1958), p. 417-423

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_4_417_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DI ALCUNE NOTEVOLI PROPRIETÀ DIFFERENZIALI DEI MOTI RIGIDI DI ROTOLAMENTO

di BRUNO FORTE (Pisa)

SOMMARIO: *Si deducono e si interpretano alcune proprietà differenziali, degne di nota, dei moti rigidi di puro rotolamento. Senza adoperare alcun particolare algoritmo, si individua la condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di punti la cui traiettoria presenta un flesso di ordine superiore.*

1. — **PREMESSE.** In una precedente nota lineea ⁽¹⁾, dopo avere ritrovate, con l'uso del concetto di coniugio tra due punti, alcune proprietà differenziali del primo, secondo, terzo ordine ed avere caratterizzate quelle del quarto, per un generico moto rigido di rotolamento, si prevedeva la possibilità di dedurre, con lo stesso metodo, ulteriori proprietà differenziali dei predetti moti.

Nel presente lavoro si intende porre in risalto come alcune di tali proprietà si possano dedurre senza l'uso di alcun algoritmo, con considerazioni, tuttavia, altrettanto rigorose.

Oggetto di particolare indagine saranno i punti, dello spazio solidale al corpo rigido, i quali, nel considerato movimento, descrivano, nell'intorno di una data posizione istantanea, traiettorie quasi rettilinee: aventi cioè un contatto di ordine superiore con la propria tangente.

Si riterrà ancora assegnato il generico moto rigido di rotolamento (per ciò che riguarda il suo aspetto geometrico) con una coppia di superficie rigate S e S' , che rotolino, senza strisciare, l'una sulla altra. Si riguarderà: la superficie S come solidale al corpo mobile, la superficie S' solidale allo spazio ambiente. Così definite, come è noto le due superficie rigate S e S' risultano applicabili l'una all'altra e godono di tutte le proprietà precedentemente ricordate ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Cfr. nota bibliografica [1].

⁽²⁾ Vedi loc. citata nella nota ⁽¹⁾.

Per le considerazioni di natura geometrica che seguono è necessario precisare brevemente la nozione di moti limitatamente e illimitatamente tangenti, osculatori, iperosculatori tra loro.

Si considerino due movimenti M_1 e M_2 ; ad essi, separatamente, venga sottoposto il corpo rigido, a partire dalla medesima configurazione C . Se accade che la traiettoria c_1 di cui un generico punto P , relativa al primo movimento, è tangente, osculatrice, iperosculatrice, alla traiettoria c_2 , descritta nel movimento M_2 , dal medesimo punto, in corrispondenza alla posizione da esso occupata nella configurazione C , i due moti M_1 e M_2 si diranno fra loro *illimitatamente tangenti, osculatori, iperosculatori, rispettivamente*. Qualora accada che tali proprietà valgano soltanto per un particolare insieme di punti dello spazio solidale al corpo rigido in movimento, i due moti M_1 e M_2 si diranno *limitatamente* (ai punti di detto insieme) *tangenti, osculatori, iperosculatori, fra loro*.

La possibilità di dedurre ulteriori proprietà differenziali dei moti rigidi di rotolamento, senza l'uso del concetto di coniugio o di algoritmo equivalente, trova il suo naturale fondamento nella possibilità di riconoscere a due enti il *piano principale* e l'*iperboloide delle normali*, definiti qui di seguito, alcune proprietà peculiari.

2. — Piano principale e proprietà ad esso connesse.

Si indichi con a la generatrice di contatto delle rigate S e S' in una data configurazione C del corpo mobile; sia π il piano, per essa, parallelo ad una seconda generatrice $\bar{a}$ della rigata S' . Si definisce *piano principale* della rigata S' in a , la posizione limite, al tendere di $\bar{a}$ ad a , del piano π considerato. Il piano principale è, pertanto, tangente alle rigate S e S' nel punto improprio della generatrice di contatto istantaneo.

I punti dello spazio mobile che, nella data configurano C , si trovano su detto piano, godono della seguente proprietà che li caratterizza: *si può, in infiniti modi, osculare il moto di rotolamento considerato, limitatamente ai punti del piano principale, con un moto rigido piano*⁽³⁾.

Osserviamo, preventivamente, che il moto considerato e un eventuale moto piano ad esso osculatore, limitatamente ai punti di un insieme di dimensione due, devono avere in comune, nella data configurazione, la gene-

(3) Per i moti rigidi piani e sferici tale proprietà si traduce nella seguente: si può osculare con un moto rotatorio un generico moto piano, limitatamente ai punti della tangente comune alla base ed alla rulletta, un generico moto rigido sferico, limitatamente ai punti del piano tangente ai coni del Poincot, che lo caratterizzano.

ratrice di contatto delle rigate che li generano. Le traiettorie dei punti del piano principale dovranno quindi potersi confondere, per un intorno del secondo ordine, con curve appartenenti ai piani perpendicolari a detta generatrice.

Per dimostrare allora la proprietà enunciata, basterà riconoscere agli spostamenti subiti dai punti del piano principale, per due rotazioni successive dello spazio mobile attorno, rispettivamente, alla generatrice di contatto a , relativa alla configurazione C considerata, ed a quella $\bar{a}$, relativa ad altra configurazione $\bar{C}$, la caratteristica di differire, per infinitesimi del terzo ordine⁽⁴⁾, da spostamenti normali alla retta a , asse della prima rotazione.

Il primo dei due spostamenti, subiti dal generico P del piano principale, per effetto delle due rotazioni considerate, è rigorosamente normale alla generatrice a di contatto. Si osservi poi che entrambi i moviuenti rotatori, attorno ai due assi, generalmente sghembi, considerati, possono ritenersi equivalenti, per note proprietà dei moti rigidi, al prodotto di una rotazione e di una traslazione. L'asse di detta rotazione, che ha per direzione quella della somma dei vettori che caratterizzano le due rotazioni precedentemente prese in esame, giacerà (al limite, al tendere di $\bar{C}$ a C) sul piano principale, per il modo stesso con cui questo è stato definito. Il vettore della traslazione, poi, parallelo (al limite) al predetto piano, come momento di una coppia di braccio (distanza fra a ed $\bar{a}$) infinitesimo, formata da vettori di intensità (ampiezza della rotazione attorno ad $\bar{a}$) pure infinitesima, ha lunghezza nel caso, regolare, più generale, infinitesima del secondo ordine almeno (rispetto a $\Delta\sigma$). Dato infine che le rette $\bar{a}$ ed a formano fra loro un angolo che tende a zero al tendere di $\bar{C}$ a C , si può concludere che il vettore della traslazione differirà da un vettore normale alla a per un vettore di lunghezza infinitesima nel terzo ordine almeno, rispetto a $\Delta\sigma$, o se si vuole, alla ampiezza delle rotazioni considerate.

È perciò provato che lo spostamento complessivo subito dal generico punto P , appartenente al piano principale, (e quindi, per quanto detto, anche il secondo dei due spostamenti ad esso attribuiti) è normale alla generatrice di contatto della rigata S ed S' nella configurazione C considerata.

Precisandola, la dimostrata proprietà differenziale relativa ai punti del piano principale si può così enunciare: i punti appartenenti al piano principale si mantengono, a meno di infinitesimi del terzo ordine (rispetto a $\Delta\sigma$), su piani perpendicolari, nella configurazione considerata, alla generatrice di contatto delle rigate S e S' , che caratterizzano il moto in esame.

(4) Rispetto all'incremento $\Delta\sigma$ subito, per il passaggio della rigata mobile S dalla configurazione C a $\bar{C}$, dal parametro σ cui dette configurazioni si ritengono riferite. Si noti che i moti di rotolamento in esame sono supposti regolari.

Tale circostanza non può, d'altra parte, essere verificata da altri punti del corpo in movimento, in quanto l'asse della rotazione risultante, testè considerata, non si trova, come dovrebbe, per il suo avverarsi, nel piano per essi e la generatrice a di contatto istantaneo. A questa generatrice potrebbe risultare, tuttavia, perpendicolare lo specificato spostamento di un altro punto dello spazio mobile (e quindi di tutti), solo nella eventualità, caso ovviamente particolare, che i vettori caratteristici delle due successive rotazioni (equivalenti alla rotazione e traslazione considerate) siano fra loro paralleli.

Si può, però, concludere, in tale ultima felice circostanza, che i punti del piano principale descrivono traiettorie, che possono essere osculate da un moto rotatorio e iperosculate con un medesimo movimento rigido piano⁽⁵⁾.

La seguente proprietà mette poi ulteriormente in luce l'importanza del piano principale nello studio delle proprietà in piccolo dei moti rigidi di rotolamento: i punti le cui traiettorie, in corrispondenza alla posizione da essi occupata nella configurazione C di riferimento, presentano flessio, si trovano sul piano principale⁽⁶⁾.

Infatti, perchè la traiettoria di un punto nella posizione da esso occupata in C , presenti un flessio, occorre e basta che gli spostamenti, da esso subiti nel passaggio del corpo mobile dalla configurazione C a $\bar{C}$, a meno di infinitesimi del secondo ordine (almeno) rispetto a $\Delta\sigma$, abbiano la stessa direzione. Ma per la natura del moto, cui partecipa il punto in esame, le direzioni di tali spostamenti sono perpendicolari, rispettivamente, al piano per esso e la generatrice di contatto a nella configurazione C , ed a quello per esso e per l'asse della rotazione relativa alla configurazione $\bar{C}$.

Questi piani, perpendicolari ad una stessa direzione, dovranno (al limite) risultare paralleli fra loro. Di qui discende che il primo di essi è parallelo all'asse della seconda rotazione e coincide pertanto con quello che è stato chiamato *piano principale*.

Per concludere, un generico moto rigido di rotolamento può essere osculato solo limitatamente (ai punti del piano principale) da un moto rigido piano. Tale moto rigido piano appartiene ad una famiglia di movimenti piani, che, osculando limitatamente (ai punti del piano principale) il medesimo moto di rotolamento, risultano limitatamente (ai punti del predetto piano) osculatori fra loro.

⁽⁵⁾ Vedi per questo la nota ⁽³⁾.

⁽⁶⁾ Cfr. per le considerazioni analitiche con le quali si può giungere a un risultato equivalente, limitatamente ai punti di flessio, come ubicazione nello spazio solidale: R. GARNIER, *Cours de Cinématique*, Paris, Gauthie-Villars, tome II, chap. VIII.

Tutti i moti del tipo indicato sono quindi caratterizzati dallo avere in comune quei punti, dei rispettivi cilindri dei flessi, che appartengono al piano principale, oltrechè, naturalmente, la generatrice di contatto istantaneo (asse di rotazione) delle coppie di rigate (cilindriche) che li individuano.

Si vede quindi, immediatamente, che il luogo dei punti le cui traiettorie presentano un flesso, nella posizione da essi occupata in C , è, per il generico moto di rotolamento, una retta, sul piano principale, parallela all'asse istantaneo di rotazione, con esso sostegno dei cilindri dei flessi di tutti i possibili moti piani, limitatamente osculatori al moto rigido dato.

3. — Iperboloide delle normali.

Connesso con la retta dei flessi e con il piano principale è il luogo dei punti Q , appartenenti allo spazio solidale, i quali, in un moto di rotolamento, descrivono curve il cui piano osculatore, nella posizione da essi istantaneamente occupata, è parallelo all'asse di rotazione, relativo alla configurazione C .

Per individuare tale luogo si considerino:

α) i due assi di rotazione a e $\bar{a}$, relativi alle configurazioni C e $\bar{C}$.

β) un piano χ perpendicolare alla retta a .

γ) i punti intersezione A e $\bar{A}$ del piano χ con a e $\bar{a}$, rispettivamente.

Tra i punti del piano χ , pensati solidali al corpo mobile, nella configurazione C , e come tali sottoposti alle due successive rotazioni attorno ad a e ad $\bar{a}$, ricerchiamo quindi quelli che, per detti movimenti rotatori, si mantengono (a meno di infinitesimi del terzo ordine rispetto a $\Delta\sigma$) in un piano parallelo alla retta a .

Un generico punto P , appartenente a χ , per la prima rotazione attorno ad a , subisce uno spostamento che individua, univocamente, un piano per P parallelo all'asse di detto movimento. Non è detto, però, che su tale piano il punto P si mantenga (a meno di infinitesimi del terzo ordine rispetto a $\Delta\sigma$), per lo spostamento, ad esso attribuito con la rotazione attorno al secondo asse $\bar{a}$. Osserviamo, tuttavia, che il movimento rotatorio considerato, attorno ad $\bar{a}$, può riguardarsi come il prodotto di due rotazioni, rispettivamente, attorno alla retta parallela ad a e passante per $\bar{A}$, che indicheremo con $\bar{a}_1$, e ad una retta $\bar{a}_2$, pure per $\bar{A}$, perpendicolare ad a . Tale ultima rotazione (di ampiezza infinitesima del secondo ordine rispetto a $\Delta\sigma$) mantiene il punto P , considerato, sul predetto piano, parallelo alla retta a .

Resta da vedere con quale punto Q del piano χ debba poi identificarsi il punto P (finora generico) perchè detta proprietà sia verificata anche per

la rotazione attorno ad a_1 . Si può riconoscere, ricorrendo a note proprietà dei moti piani, che, perchè ciò accada, è necessario e sufficiente che il punto P appartenga alla circonferenza dei flessi, relativa al moto del piano χ su se stesso; tale moto è individuato, a meno di infinitesimi del terzo ordine rispetto a $\Delta\sigma$, dalle rotazioni infinitesime attorno ai due assi a e $\bar{a}_1$, paralleli fra loro.

Il luogo cercato è quindi la superficie generata dalla circonferenza dei flessi del piano χ , al variare di questi nella famiglia dei piani perpendicolari alla generatrice a di contatti istantaneo delle rigate S e S' .

Con alcune considerazioni, che non è uopo riportare, basate sulla circostanza che:

a) la superficie ora introdotta si appoggia alla retta a ed alla retta dei flessi del considerato moto di rotolamento.

b) la generica circonferenza che la genera è tangente nel punto A alle rigate S e S'
si può concludere:

Il luogo dei punti Q , che descrivono traiettorie appartenenti, per un intorno del secondo ordine almeno, a piani paralleli alla generatrice di contatto istantaneo delle rigate rotolanti S e S' , è un iperboloide.

A detta quadrica daremo il nome di iperboloide delle normali, con denominazione che apparirà appropriata, quando si osservi che gli assi di curvatura delle traiettorie descritte dai punti Q , ad essa appartenenti, risultano perpendicolari all'asse istantaneo di rotazione.

4. — Condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un punto di ondulazione e , più in generale, di flesso di ordine n , in un moto di puro rotolamento.

Insieme alle due superficie rigate S e S' , consideriamo le successive posizioni assunte, per il movimento del corpo rigido nell'intorno della data configurazione C , dal piano principale, sia rispetto ad un osservatore solidale con la rigata fissa, sia rispetto ad un osservatore solidale con la rigata mobile.

Dimostriamo che: condizione necessaria e sufficiente perchè la traiettoria di un punto presenti un flesso di ordine n , nella posizione da esso occupata della configurazione C di riferimento, è che il piano principale, nel suo moto riferito all'osservatore solidale con lo spazio fisso, si mantenga, a meno di infinitesimi di ordine n , parallelo alla sua posizione iniziale, e che il movimento di detto piano, riferito all'osservatorio solidale con lo spazio

mobile, possa riguardarsi, a meno di infinitesimi dello stesso ordine, come un moto rigido con un punto fisso ⁽⁷⁾.

Tale ultima condizione assicura, infatti l'esistenza di un punto dello spazio mobile (il punto fisso nel moto relativo del piano principale), che, durante il movimento rigido in esame, si mantiene sul piano principale.

La prima condizione, se soddisfatta, garantisce che la tangente alla traiettoria di detto punto presenta, a meno di infinitesimi di ordine $n + 1$, direzione costante.

Dette condizioni sono anche necessarie, perchè se la traiettoria di un punto dello spazio mobile presenta un flesso di ordine n esso appartiene necessariamente al piano principale; il moto di questo gode poi, se riferito allo spazio fisso e, rispettivamente, mobile, delle caratteristiche contenute nelle condizioni sopra esposte.

BIBLIOGRAFIA

- [1] B. FORTE, « *Di alcune proprietà cinematiche riguardanti i moti rigidi di rotolamento* ». Rend. Acc. Naz. dei Lincei Serie VIII vol. XVI, fasc. 4 (1954).
[2] R. GARNIER, Cours de Cinématique, Gauthier-Villare, Paris (1949).

⁽⁷⁾ Tale punto risulta appartenere alla retta dei flessi relativa alla configurazione C considerata.