

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

H. MILICER GRUŻEWSKA

**Propriété limite du potentiel généralisé de simple couche
relativement à l'équation parabolique normale**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 12,
n° 4 (1958), p. 359-396

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_4_359_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPRIÉTÉ LIMITE DU POTENTIEL GÉNÉRALISÉ DE SIMPLE COUCHE RELATIVEMENT À L'ÉQUATION PARABOLIQUE NORMALE

par H. MILICER GRUŻEWSKA (Warszawa)

Introduction. Le potentiel généralisé de simple couche [1] relativement à l'équation parabolique normale :

$$(1) \quad \widehat{\psi}_t(u) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n a_{\alpha\beta}(A, t) u''_{x_\alpha x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^n b_\alpha(A, t) u'_{x_\alpha} + c(A, t) u - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad A \in \Omega$$

c'est l'intégrale de surface de la forme suivante :

$$(2) \quad U(A, t) = \int_0^t \iint_S \Gamma(A, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) dQ d\tau^{(1)}, \quad A \in \Omega, \quad Q \in S,$$

où $\Gamma(A, t; B, \tau)$ désigne la solution fondamentale de l'équation (1), $\varphi(Q, \tau)$ la densité, Ω est un domaine mesurable dans l'espace euclidien à n dimension ($n \geq 3$) limité par la surface fermée S .

M. W. Pogorzelski m'a proposé d'examiner la limite de l'intégrale (2), pour $t \rightarrow \infty$. Ce problème fût déjà traité par Eidelman [2] et M. Krzyżanski [3], mais dans l'hypothèse que les coefficients de l'équation parabolique sont dérivables, ou dans un cas spécial. Ici on admettra seulement que les coefficients de l'équation (1) sont höldériens, ainsi que leurs limites, qui existent uniformément, de même que la limite de la densité $\varphi(Q, t)$, pour $t \rightarrow \infty$.

Je prouve dès lors que la limite du potentiel en question est le potentiel généralisé de simple couche de la densité limite $\overline{\varphi}(Q) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(Q, t)$ relati-

⁽¹⁾ dQ désigne l'élément d'aire de l'hypersurface S au point Q , pareillement dB désignera l'élément de volume du domaine Ω au point B .

vement à l'équation elliptique normale. Les coefficients de cette équation sont les limites des coefficients correspondants de l'équation parabolique. Cette équation elliptique sera nommée équation limite de l'équation (1).

Mais pour que ce passage à la limite soit légitime il faut admettre que le diamètre du domaine Ω n'est pas trop grand. C'est d'ailleurs en accord avec la question que soulève l'existence et la forme de la solution fondamentale de l'équation elliptique, [4] et [5].

§ 1. On admet, conformément à l'Introduction, les hypothèses suivantes :

I. Les fonctions $a_{\alpha\beta}(A, t)$ sont définies et bornées dans la région fermée Ω' contenant $\Omega + S$, et pour toute valeur non négative du paramètre t , donc pour :

$$(1,1) \quad A(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega', \quad t \geq 0, \quad \Omega' > \Omega + S$$

et on a uniformément dans Ω' :

$$(1',1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a_{\alpha\beta}(A, t) = \bar{a}_{\alpha\beta}(A),$$

en outre nous admettons les inégalités d'Hölder

$$(1'',1) \quad |a_{\alpha,\beta}(A, t) - a_{\alpha,\beta}(A_1, t_1)| \leq \text{const} [r_{AA_1}^h + |t - t_1|^{h'}]; \quad A, A_1 \in \Omega'$$

$$(1''',1) \quad |\bar{a}_{\alpha,\beta}(A) - \bar{a}_{\alpha,\beta}(A_1)| \leq \text{const} r_{AA_1}^h; \quad A, A_1 \in \Omega',$$

où r_{AA_1} désigne la distance des points A et A_1 , h et h' sont des constantes, $0 < h \leq 1$, $0 < h' \leq 1$.

II. Les fonctions $b_\alpha(A, t)$ et $c(A, t)$ sont continues par rapport à la variable $t \geq 0$, vérifient par rapport aux variables spatiales la condition d'Hölder et on a uniformément dans Ω'

$$(2,1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} b_\alpha(A, t) = \bar{b}_\alpha(A), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} c(A, t) = \bar{c}(A), \quad A \in \Omega'$$

en outre on a

$$(2',1) \quad |b_\alpha(A, t) - b_\alpha(A_1, t)| \leq C r_{AA_1}^h, \quad |c(A, t) - c(A_1, t)| \leq C_1 r_{AA_1}^{h'}$$

$$|\bar{b}(A) - \bar{b}(A_1)| \leq C_2 r_{AA_1}^h, \quad |\bar{c}(A) - \bar{c}(A_1)| \leq C_3 r_{AA_1}^{h'}$$

où C, C_1, C_2, C_3 sont constants et $0 < h \leq 1$, $0 < h' \leq 1$.

III. La forme quadratique :

$$(3,1) \quad \sum_{\alpha, \beta=1}^n a_{\alpha\beta}(A, t) X_{\alpha} X_{\beta}$$

est définie positive dans la région : $(\Omega', t \geq 0)$.

IV. La fonction $\varphi(Q, t)$ est définie, continue, bornée et intégrable sur la surface S , pour chaque valeur positive du paramètre t , et on a uniformément sur S

$$(4,1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(Q, t) = \bar{\varphi}(Q), \quad Q \in S.$$

Il résulte que les fonctions $\bar{\varphi}(Q)$, $\bar{a}_{\alpha\beta}(A)$, $\bar{b}_{\alpha}(A)$ $\alpha, \beta = 1, \dots, n$ et $\bar{c}(A)$ sont continues et bornées sur la surface S resp dans le domaine Ω' .

V. La forme quadratique

$$(3',1) \quad \sum_{\alpha=1}^n \bar{a}_{\alpha\beta}(A) X_{\alpha} X_{\beta}$$

est définie positive dans la région Ω' .

Si nous désignons par $a^{\alpha\beta}(A, t)$ et $\bar{a}^{\alpha\beta}(A)$ les éléments des matrices inverses de matrices $\|a_{\alpha\beta}(A, t)\|$ resp. $\|\bar{a}_{\alpha\beta}(A)\|$ nous pouvons écrire

$$(5,1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} a^{\alpha\beta}(A, t) = \bar{a}^{\alpha\beta}(A), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n, \quad A \in \Omega'$$

uniformément dans Ω' .

Soit maintenant pour $A = A(x_1 \dots x_n)$, $B = B(\zeta_1 \dots \zeta_n)$:

$$(6,1) \quad \vartheta^{M,t}(A, B) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n a^{\alpha, \beta}(M, t) (x_{\alpha} - \zeta_{\alpha})(x_{\beta} - \zeta_{\beta}),$$

$$(6',1) \quad \bar{\vartheta}^M(A, B) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \bar{a}^{\alpha, \beta}(M) (x_{\alpha} - \zeta_{\alpha})(x_{\beta} - \zeta_{\beta}),$$

alors on a, en vertu de (5,1), uniformément dans Ω :

$$(7,1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \vartheta^{M,t}(A, B) = \bar{\vartheta}^M(A, B), \quad M, A, B \in \Omega'.$$

Il résulte aussi de l'hypothèses III et V qu'il existe deux nombres positives g et G pour lesquelles on a

$$(7',1) \quad 4gr_{AB}^2 \leq \vartheta^{M,\tau}(A, B) \leq 4Gr_{AB}^2, \quad 0 \leq \tau, (M, A, B) \in \Omega'$$

d'où et de (7,1) on trouve aussi que :

$$(7'',1) \quad 4 \, gr_{AB}^2 \leq \bar{\vartheta}^M(A, B) \leq 4 \, Gr_{AB}^2; \quad M, A, B \in \Omega'$$

Rappelons (v. art. [1]) que la solution fondamentale I de l'équation (1) est donnée par les formules suivantes

$$(8,1) \quad \begin{aligned} I(A, t; B, \tau) &= w^{B, \tau}(A, t; B, \tau) + \\ &+ \int_{\tau}^t \iint_{\Omega'} w^{M, \theta}(A, t; M, \theta) \Phi(M, \theta; B, \tau) dM d\theta, \quad A, B, \in \Omega, \end{aligned}$$

où la fonction :

$$(8',1) \quad w^{M, \zeta}(A, t; B, \tau) = (t - \tau)^{-n/2} \exp[-\vartheta^{M, \zeta}(A, B)/4(t - \tau)], \quad t > \tau > 0$$

est la bien connue *quasi-solution*, et la fonction Φ est la solution d'une équation intégrale de Volterra de noyau N qui est donné par la formule

$$(8'',1) \quad \begin{aligned} N(A, t; M, \theta) &= \\ &= \lambda_n(A, t) \left\{ \sum_{\alpha, \beta=1}^n [a_{\alpha\beta}(A, t) - a_{\alpha\beta}(M, \theta)] w_{x_{\alpha}x_{\beta}}^{M, \theta}(A, t; M, \theta) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha=1}^n b_{\alpha}(A, t) w_{x_{\alpha}}^{M, \theta}(A, t; M, \theta) + c(A, t) w^{M, \theta}(A, t; M, \theta) \right\} \end{aligned}$$

où

$$\lambda_n(A, t) = \sqrt{\det |a^{\alpha, \beta}(A, t)|}.$$

On trouve facilement, en posant $h_1 = \min(h, 2h')$ et $1 - \frac{h_1}{2} < \mu < 1$, que :

$$(9,1) \quad \begin{aligned} &\int_{\tau}^t \iint_{\Omega'} |N(A, t; M, \theta)| dM d\theta \leq \\ &\leq C \left[\frac{1}{1-\mu} \iint_{\Omega'} r_{AM}^{-n-2+h_1+2\mu} dM + \frac{2}{n-1} \iint_{\Omega'} dM \right] \leq b, \quad A \in \Omega \end{aligned}$$

où la constante C ne dépend que des coefficients de l'équations (1). La constante b dépend donc seulement des ces coefficients et du domaine Ω .

Nous introduisons la fonction $N(A, t; B, \theta)$ qui est la dominante de la fonction $N(A, t; B, \theta)$, de la manière suivante : dans la quasi-solution

$w^{M,\theta}(A, t; B, \tau)$ et dans ses deux dérivées on y remplace les coefficients par les bornes supérieures des leurs modules et la fonction $\exp. [-\vartheta^{M,\theta}(A, B)/4(t-\tau)]$ par la fonction dominante $\exp. [-gr_{AB}^2/(t-\tau)]$; $g > 0$; outre cela les différences $a_{\alpha\beta}(A, t) - a_{\alpha\beta}(M, \theta)$ sont remplacées par les bornes supérieures de leurs modules, qui sont données par l'inégalité (1'',1) d'Hölder; les autres coefficients de la fonction $N(A, t; M, \theta)$ (8'',1) sont aussi remplacés par les bornes supérieures des leurs modules.

Notre dernière supposition, dont on parlait dans l'Introduction, est la suivante :

$$\text{VI.} \quad \int_{\tau}^t \iint_{\Omega'} \dot{N}(A, t; B, \theta) dB d\theta \leq b \leq (2\sqrt{\pi})^n \omega, \quad 0 < \omega < 1,$$

L'équation limite de l'Introduction c'est l'équation elliptique normale suivante :

$$(10,1) \quad \bar{\psi}(u) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \bar{a}_{\alpha\beta}(A) u''_{x_{\alpha}x_{\beta}} + \sum_{\alpha=1}^n \bar{b}_{\alpha}(A) u'_{x_{\alpha}} + \bar{c}(A) u = 0, \quad A \in \Omega$$

On posera

$$(10',1) \quad \bar{\lambda}_n(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_n(A, t) = \sqrt{\det |\bar{a}^{\alpha\beta}(A)|}$$

et on désignera par $\bar{w}^B(A, B)$ la quasi-solution de l'équation en écrivant

$$(10'',1) \quad \bar{w}^M(A, B) = 2^{n-2} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) [\bar{\vartheta}^M(A, B)]^{-\frac{n}{2}+1}, \quad A, B, M \in \Omega'.$$

Pareillement $\bar{F}(A, Q)$ désignera la solution générale de l'équation (10,1) et on aura :

$$\bar{F}(A, Q) = \bar{w}^Q(A, Q) + \iint_{\Omega'} \bar{w}^B(A, B) \bar{\Phi}(B, Q) dB, \quad A \in \Omega,$$

où pour

$$(10''',1) \quad \bar{f}(A, B) = \lambda \bar{\lambda}_n(A) \bar{\psi}_A[\bar{w}^B(A, B)], \quad A, B \in \Omega'$$

on a

$$\bar{\Phi}(B, Q) = \bar{f}(B, Q) + \lambda \iiint_{\Omega'} \bar{\partial} \bar{\mathcal{L}}(B, M) \bar{f}(M, Q) dM, \quad \lambda = (2\sqrt{\pi})^{-n},$$

et $\bar{\partial} \bar{\mathcal{L}}(B, M)$ est le noyau résolvant concernant l'équation (10,1) [4].

On prouvera sous les hypothèses I-V, que

$$(10^{iv},1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{N}(B, t; M, t - \theta) = \bar{\mathcal{N}}(B, M, \theta), \quad 0 < \theta \leq \text{const}$$

$$\text{où} \quad \mathcal{N}(B, t; M, \tau)$$

est le noyau résolvant de l'équation de Volterra, déjà mentionnée.

Dans l'article [1] il est démontré que la série du noyau résolvant est uniformément convergente pour toute valeur du paramètre t borné, car les noyaux itérés accomplissent les inégalités suivantes :

$$(11,1) \quad |N(A, t; M, \theta)| < c(t - \theta)^{-\mu} r_{AM}^{-(n+2-2\mu-h_1)},$$

$$(11',1) \quad 1 - \frac{h_1}{2} < \mu < 1 \quad h_1 = \min(h, 2h')$$

$$(11'',1) \quad N_{v_0+n}(A, t; M, Q) \leq g \frac{[g_2 \Gamma(1 - \mu)(t - \theta)^{1-\mu}]^m}{[(1 - \mu)m] \Gamma[m(1 - \mu)]}$$

où les constantes C, g_1, g_2, v_0 et μ ne dépendent pas de l'accroissement $0 < t - \theta$, ni de t . Dans l'inégalité (11,1) on peut remplacer le noyau $N(A, t; M, \theta)$ par la fonction $\Phi(A, t; M, \theta)$, ou le noyau résolvant $\mathcal{N}(A, t; M, \theta)$, si seulement

$$0 < t - \theta \leq T = \text{const.}, \quad A \in \Omega, \quad M \in \Omega'.$$

À cause de la formule (8,1) nous pouvons représenter le potentiel $U(A, t)$ comme une somme de deux intégrales :

$$(12,1) \quad U(A, t) = \int_0^t \int_S w^{Q,\tau}(A, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) dQ d\tau + \\ + \int_0^t \int_S \varphi(Q, \tau) \int_\tau^t \int_{\Omega'} w^{M,\theta}(A, t; M, \theta) \Phi(M, \theta; Q, \tau) dM d\theta dQ d\tau$$

ou en désignant par $U_1(A, t)$ et $U_2(A, t)$ les intégrales première et seconde on peut écrire que

$$(12',1) \quad U(A, t) = U_1(A, t) + U_2(A, t).$$

§ 2. LEMME (1,2). Si les conditions I, III, V et IV sont vérifiées, et si $\varphi(Q, T) \equiv 1$, $Q \in S$ alors on a conformément à (7,1) et (12',1):

$$(1,2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} U_1(A, t) = \int_0^\infty \int_S \tau^{-\frac{n}{2}} \exp[-\bar{\vartheta}^Q(A, Q)/4\tau] dQ d\tau,$$

Preuve du Lemme (1,2). Nous avons ici :

$$(2,2) \quad U_1(A, t) = \int_0^t \int_S w^{Q,\tau}(A, t; Q, \tau) dQ d\tau.$$

Il est facile de démontrer, qu'on a pour chaque $T > 0$:

$$(2',2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^T \int_S (t - \tau)^{-\frac{n}{2}} \exp[-\vartheta^{Q,\tau}(A, Q)/4(t - \tau)] dQ d\tau = 0$$

uniformément dans Ω , parce qu'on a supposé $n \geq 3$.

Il suffit donc à examiner l'intégrale :

$$(2'',2) \quad \bar{U}_1(A, t) = \int_T^t \int_S (t - \tau)^{-\frac{n}{2}} \exp[-\vartheta^{Q,\tau}(A, Q)/4(t - \tau)] dQ d\tau, t > T.$$

En introduisant dans cette dernière intégrale les coordonnées sphériques, et en posant :

$$r_{A,Q} = r, r_0 < r < r_1, \quad r_{A,Q} = 2\sqrt{t - \tau}u,$$

et en désignant par J le discriminant de cette transformation on reçoit :

$$(2''',2) \quad \bar{U}_1(A, t) = 2^{n-1} \int_{\omega_{n-2}} \int_{r_0}^{r_1} \int_0^\infty u^{n-3} \exp[-u^2 \vartheta_1^{Q,t-(r/2u)^2}(A, Q)] J du dr d\omega_{n-2},$$

où

$$(2^{iv},2) \quad u^2 \vartheta_1^{Q,t-(r/2u)^2}(A, Q) = \vartheta^{Q,\tau}(A, Q)/4(t - \tau).$$

Prenons maintenant le nombre T assez grand pour avoir, pour chaque $t \geq T$ et le nombre $\varepsilon > 0$, l'inégalité :

$$(2^v,2) \quad |\vartheta_1^{Q,t-(r/2u)^2}(A, Q) - \bar{\vartheta}_1^Q(A, Q)| \leq \varepsilon < g; A \in \Omega, Q \in S,$$

où

$$\bar{\vartheta}_1^Q(A, Q) = \lim_{t \rightarrow \infty} \vartheta_1^{Q, t - (r/2u)^2}(A, Q),$$

ce qui est possible parce que dans l'intégrale (2''', 2) on a :

$$T \leq t - (r/2u)^2.$$

Nous avons donc l'égalité suivante :

$$(3, 2) \quad -u^2 \vartheta_1^{Q, t - (r/2u)^2}(A, Q) = -u^2 \bar{\vartheta}_1^Q(A, Q) - \theta' u^2 \varepsilon, \quad (|\theta'| < 1)$$

et, comme la fonction $\bar{\vartheta}^Q(A, Q)$ accomplit l'égalité (7'', 1), alors :

$$(3', 2) \quad 4g \leq \bar{\vartheta}_1^Q(A, Q) \leq 4G.$$

Soit maintenant $\varepsilon' > 0$ et U un nombre assez grand pour que :

$$2^{n-1} \int_{\omega_{n-2}} \int_{r_0}^{r_1} r \int_U^\infty u^{n-3} \exp[-u^2 \vartheta_1^{Q, t - (r/2u)^2}(A, Q)] J du dr d\omega_{n-2} < \varepsilon'.$$

On a donc pour $U = \text{const.}$, $0 < \theta'' < 1$, $|\theta'''| < C_U$ l'égalité suivante :

$$\bar{U}_1(A, t) = \theta'' \varepsilon' + (1 + \theta''' \varepsilon) 2^{n-1} \int_{\omega_{n-2}} \int_{r_0}^{r_1} r \int_{r/2\sqrt{t-T}}^U u^{n-3} \exp[-u^2 \bar{\vartheta}_1^Q(A, Q)] \cdot J du dr d\omega_{n-2}$$

d'où on trouve, en substituant :

$$u = r/2 \sqrt{\tau} :$$

$$\bar{U}_1(A, t) = \theta'' \varepsilon' + (1 + \theta''' \varepsilon) \int_{\omega_{n-2}} \int_{r_0}^{r_1} r \int_{(r/2U)^2}^{t-T} \tau^{-n/2} \exp[-\bar{\vartheta}_1^Q(A, Q)/4\tau] J d\tau dr d\omega_{n-2}.$$

On a donc :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} U_1(A, t) = \int_{\omega_{n-2}} \int_{r_0}^{r_1} r \int_{(r/2U)^2}^\infty \tau^{-n/2} \exp[-\bar{\vartheta}^Q(A, Q)/4\tau] J d\tau dr d\omega_{n-2} + \varepsilon'$$

parce que le nombre $\varepsilon > 0$ est déjà arbitraire, tandis que le nombre U ne dépend pas ni de t ni de T , mais seulement de g et n . On passe maintenant à la limite pour $U \rightarrow \infty$, et parce que $\varepsilon' > 0$ est arbitraire, on a, après avoir changé convenablement les variables d'intégration :

$$(4,2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{U}_1(A, t) = \iint_S \int_0^\infty \tau^{-\frac{n}{2}} \exp[-\bar{\vartheta}^Q(A, Q)/4\tau] d\tau dQ, \quad A \in \Omega, \quad n \geq 3$$

Il est peut être convenable d'apprécier que l'existence de cette dernière intégrale est une conséquence de l'égalité bien connue à s :

$$\tau^{-\frac{n}{2}} \exp[-\bar{\vartheta}^Q(A, Q)/4\tau] = 0 [\tau^{-\mu} \cdot r_{AQ}^{-n+2\mu} \cdot \exp(-gr_{AQ}^2/\tau) \cdot (gr_{AQ}^2/\tau)^{\frac{n}{2}-\mu}],$$

$$A \neq Q, \quad \frac{1}{2} < \mu < 1, \quad \text{c.q.f.d.d.}$$

LEMME (2,2). Si les conditions I, III, V et IV sont accomplies, alors :

$$(5,2) \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} U_1(A, t) &= \bar{U}_1(A) = \\ &= 2^{\frac{n}{2}-2} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \iint_S \bar{\varphi}(Q) [\bar{\vartheta}^Q(A, Q)]^{-\frac{n}{2}+1} dQ, \quad A \in \Omega, \quad n \geq 3. \end{aligned}$$

Preuve du Lemme (2,2).

D'après la supposition on a $|\varphi(Q, \tau)| \leq \text{const}$, alors pour $T = \text{const}$ on a

$$\int_0^T \iint_S w^{Q,\tau}(A, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) dQ d\tau \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

uniformément dans Ω . Mais on a aussi, dès que le nombre T est suffisamment grand, l'inégalité qui suit :

$$|\varphi(Q, \tau) - \bar{\varphi}(Q)| \leq \varepsilon/2 (c_n + 1), \quad \tau \geq T,$$

où

$$c_n = \max_{A \in \Omega} \int_0^t \iint_S w^{Q,\tau}(A, t; Q, \tau) dQ d\tau, \quad 0 \leq t \leq \infty.$$

On peut écrire donc,

$$\left| \int_0^t \int_S w^{Q,\tau}(A, t; Q, \tau) [\varphi(Q, \tau) - \bar{\varphi}(Q)] dQ d\tau \right| \leq \\ \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(c_n + 1)} \cdot \int_0^t \int_S w^{Q,\tau}(A, t; Q, \tau) dQ d\tau \leq \varepsilon$$

si le paramètre t est suffisamment grand.

Nous avons donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \int_S w^{Q,\tau}(A, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) dQ d\tau = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \int_S w^{Q,\tau}(A, t; Q, \tau) \bar{\varphi}(Q) dQ d\tau,$$

uniformément dans Ω , dès que la dernière limite existe. Mais la fonction $\bar{\varphi}(Q)$ ne dépend pas de τ , elle est intégrable et bornée, c'est pourquoi on peut la placer sous le signe de l'intégrale double dans l'énoncé du Lemme (1,2) sans y rien changer dans l'épreuve de ce Lemme. On a donc démontré l'égalité suivante :

$$\bar{U}_1(A) = \iint_S \bar{\varphi}(Q) \int_0^\infty \tau^{-n/2} \exp[-\bar{\vartheta}^Q(A, Q)/4\tau] d\tau dQ, A \in \Omega, n \geq 3.$$

On change maintenant les variables de l'intergration par les notations :

$$\bar{\vartheta}^Q(A, Q)/4\tau = u$$

d'où

$$\tau = \bar{\vartheta}^Q(A, Q)/4u, d\tau = -\bar{\vartheta}^Q(A, Q)/4u^2 du$$

et

$$\bar{U}_1(A) = 4^{\frac{n}{2}-1} \int_0^\infty u^{\frac{n}{2}-2} \exp(-u) du \iint_S \bar{\varphi}(Q) [\bar{\vartheta}^Q(A, Q)]^{-\frac{n}{2}+1} dQ = \\ = 2^{n-2} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \iint_S \bar{\varphi}(Q) [\bar{\vartheta}^Q(A, Q)]^{-\frac{n}{2}+1} dQ, \quad \text{c.q.f.d.d.}$$

§ 3. L'évaluation de la fonction $U_2(A, t)$.

On posera conformément aux désignations (8,1) (12',1) et à la formule (64) de l'article cit. sub. [1]:

$$(1,3) \quad \Phi(A, t; B, \tau) = f(A, t; B, \tau) + \lambda \int_{\tau}^t \iiint_{\Omega} \mathcal{N}(A, t; M, Q) f(M, \theta; B, \tau) \cdot dM d\tau,$$

et

$$(2,3) \quad U_2(A, t) = \int_0^t \iint_S \varphi(Q, \tau) \bar{w}(A, t; Q, \tau) dQ d\tau = \\ = \int_0^t \iint_S \varphi(Q, \tau) \int_{\tau}^t \iiint_{\Omega'} w^{B, \theta}(A, t; B, \theta) f(B, \theta; Q, \tau) dB d\theta dQ d\tau + r(A, t).$$

On représentera la différence $U_2 - r$ comme une somme des trois intégrales :

$$U_2(A, t) - r(A, t) = \\ = \int_{t-T}^t \iint_S [\varphi(Q, \tau) - \bar{\varphi}(Q)] \int_{\tau}^t \iiint_{\Omega'} w^{B, \theta}(A, t; B, \theta) f(B, \theta; Q, \tau) dB d\theta dQ d\tau + \\ + \int_0^{t-T} \iint_S \varphi(Q, \tau) \int_{\tau}^t \iiint_{\Omega'} w^{B, \theta}(A, t; B, \theta) f(B, \theta; Q, \tau) dB d\theta dQ d\tau + \\ + \int_0^{t-T} \iint_S \bar{\varphi}(Q) \int_{t-T}^t \int_{\tau}^t \iiint_{\Omega'} w^{B, \theta}(A, t; B, \theta) f(B, \theta; Q, \tau) dB d\theta dQ d\tau.$$

On changera la variable d'intégration dans la dernière intégrale en posant $\tau = t - T + \tau_1$, et on aura

$$U_2(A, t) - r(A, t) = \int_0^t \iint_S \bar{\varphi}(Q) \int_0^T \int_{t-T+\tau_1}^t \iiint_{\Omega'} w^{B, \theta}(A, t; B, \theta) f(B, \theta; Q, t-T+\tau_1) dB d\theta d\tau_1 dQ = \\ = \int_{t-T}^t \iint_S [\varphi(Q, \tau) - \bar{\varphi}(Q)] \int_{\tau}^t \iiint_{\Omega'} w^{B, \theta}(A, t; B, \theta) f(B, \theta; Q, \tau) dB d\theta dQ d\tau + \\ + \int_0^{t-T} \iint_S \varphi(Q, \tau) \int_{\tau}^t \iiint_{\Omega'} w^{B, \theta}(A, t; B, \theta) f(B, \theta; Q, \tau) dB d\theta dQ d\tau.$$

On représentera maintenant les deux dernières intégrales intérieures comme sommes des deux intégrales avec les limites d'intégrations $[\tau, (t + \tau) : 2]$ et $[(t + \tau) : 2, t]$, en les nommant respectivement par $s_1(A, t, \tau)$ et $s_2(A, t, \tau)$. Quand à la première des intégrales on lui appliquera le changement des variables, en posant $\theta = t - T + \tau_1 + \theta_1$, et en remplaçant τ_1 , par τ et θ_1 , par θ , de sorte qu'on a :

$$\begin{aligned} U_2(A, t) - r(A, t) &= \iint_S \bar{\varphi}(Q) \int_0^T \int_0^{T-\tau} \iiint_{\Omega'} w^{B, t-T-\tau+\theta}(A, t; B, t-T+\tau+\theta) \cdot \\ &\quad \cdot f(B, t-T+\tau+\theta; Q, t-T+\tau) \cdot dB d\theta d\tau dQ = \\ &= \int_{t-T}^t \iint_S [\varphi(Q, \tau) - \bar{\varphi}(Q)] [s_1(A, t, \tau) + s_2(A, t, \tau)] dQ d\tau + \\ &\quad + \int_0^{t-T} \iint_S \varphi(Q, \tau) [s_1(A, t, \tau) + s_2(A, t, \tau)] dQ d\tau. \end{aligned}$$

Mais on y trouve aisément pour $t - \tau > T$

$$(3,3) \quad |s_1(A, t, \tau)| \leq \left(\frac{2}{T}\right)^{n/2} \int_{\tau}^{(t+\tau):2} \iiint_{\Omega'} |f(B, \theta; Q, \tau)| dB d\tau \leq \text{const} \left(\frac{2}{T}\right)^{n/2},$$

de même :

$$(3',3) \quad |s_2(A, t, \tau)| \leq \text{const} \left(\frac{2}{T}\right)^{n/2} \int_{(t+\tau):2}^t \iiint_{\Omega'} \omega^{B, \theta}(A, t; B, \theta) dB d\theta \leq \text{const} \left(\frac{2}{T}\right)^{n/2},$$

d'où on a pour la valeur de t assez grande et pour chaque $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |U_2(A, t) - r(A, t) - \iint_S \bar{\varphi}(Q) \int_0^T \int_0^{T-\tau} \iiint_{\Omega'} w^{B, t-T-\tau+\theta}(A, t; B, t-T+\tau+\theta) \cdot \\ \cdot f(B, t-T+\tau+\theta; Q, t-T+\tau) dB d\theta d\tau dQ| \leq \varepsilon \cdot \text{const} + \text{const} \left(\frac{1}{T}\right)^{\frac{n-2}{2}}, \end{aligned}$$

les constantes qui y figurent ne dépendent pas ici de t , car les coefficients de l'équation $\widehat{\psi}(u)$ sont bornés, de même que la fonction $\varphi(Q, \tau)$. On a donc

$$(3'',3) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} [U_2(A, t) - r(A, t) - \\ - \iint_S \overline{\varphi}(Q) \int_0^T \int_0^{T-\tau} \iiint_{\Omega'} w^{B, t-T-\tau+\theta}(A, t; B, t-T+\tau+\theta) \cdot \\ \cdot f(B, t-T+\tau+\theta; Q, t-T+\tau) dB d\theta d\tau dQ] = 0.$$

On évaluera l'intégrale de l'égalité (3'',3) dans le § 5. Maintenant nous analyserons l'expression $r(A, t)$.

La définition de la fonction $\Phi(B, \theta; Q, \tau)$ et l'expression (2,3) donne:

$$(4,3) \quad r(A, t) = \\ = \lambda \int_0^t \iint_S \varphi(Q, \tau) \int_\tau^t \iiint_{\Omega'} \omega^{B, \theta}(A, t; B, \theta) \int_\tau^\theta \iiint_{\Omega'} \mathcal{N}(B, \theta; M, \theta') \cdot \\ \cdot f(M, \theta'; Q, \tau) dM d\theta' dB d\theta dQ d\tau = \\ = \lambda \int_0^{t-4T} \iint_S \varphi(Q, \tau) \int_\tau^t \iiint_{\Omega'} \omega^{B, \theta}(A, t; B, \theta) \int_\tau^\theta \iiint_{\Omega'} \mathcal{N}(B, \theta; M, \theta') \cdot \\ \cdot f(M, \theta'; Q, \tau) dM d\theta' dB d\theta dQ d\tau + \\ + \lambda \int_{t-4T}^t \iint_S \varphi(Q, \tau) \int_\tau^t \iiint_{\Omega'} \omega^{B, \theta}(A, t; B, \theta) \int_\tau^\theta \iiint_{\Omega'} \mathcal{N}(B, \theta; M, \theta') \cdot \\ \cdot f(M, \theta'; Q, \tau) dM d\theta' dB d\theta dQ d\tau.$$

La première de ces intégrale sera nommée $r_1(A, t)$ et sera évaluée dans ce paragraphe. La dernière de ces intégrale sera nommée par $\mathcal{J}_1$, et sera évaluée au § 5.

Au § 4 il sera démontré que l'intégrale singulière

$$(5,3) \quad \int_0^\theta \iiint_{\Omega'} |\mathcal{N}(A, \theta; B, \theta')| dB d\theta'$$

existe uniformément par rapport à θ et $A \in \Omega'$, et que

$$(5',3) \quad \int_0^{\theta-T} \iiint_{\Omega'} |\mathcal{N}(A, \theta; B, \theta')| dB d\theta' \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty, \quad T < \theta.$$

Nous prouverons en nous appuyant sur les expressions (5,3) et (5',3) que l'intégrale $r_1(A, t)$ converge vers zéro, avec l'inverse du paramètre T .

En effet posons :

$$(5'',3) \quad R_1(B, \theta, \bar{\theta}) = \int_0^{\bar{\theta}} \int_{\tau}^{\theta} \iiint_{\Omega'} \mathcal{N}(B, \theta; M, \theta') \int_S \varphi(Q, \tau) f(M, \theta'; Q, \tau) dQ dM d\theta' d\tau$$

et écrivons

$$(6,3) \quad r_1(A, t) = r^{(1)}(A, t) + r^{(2)}(A, t),$$

où

$$r^{(1)}(A, t) = \lambda \int_0^{t-4T} d\theta \iiint_{\Omega'} w^{B,\theta}(A, t; B, \theta) R_1(B, \theta, \theta) dB,$$

et

$$(7,3) \quad r^{(2)}(A, t) = \lambda \int_{t-4T}^t d\theta \iiint_{\Omega'} w^{B,\theta}(A, t; B, \theta) R_1(B, \theta, t-4T) dB.$$

Il résulte de l'expression (5,3) que l'intégrale spatiale de $R_1(B, \theta, \bar{\theta})$ est bornée par rapport à θ . La partie, où $\theta - \tau \geq \frac{3}{2}$, est bornée parce que les singularités du noyau $\mathcal{N}$ et de la fonction f sont séparées. On peut outre cela décomposer l'intégrale intérieure de l'intégrale dont il s'agit, en somme des intégrales avec les limites d'intégration pour θ' de τ à $\tau+1$, et de $(\tau+1)$ à θ respectivement, où l'une ou l'autre des fonctions $\mathcal{N}$ et f reste bornée, uniformément pour $\theta \geq \tau + \frac{3}{2}$. Mais l'intégrale pour $\theta - \tau \leq \frac{3}{2}$ de la première de ces intégrales peut être traitée comme une limite des intégrales, réparties sur les domaines Ω'' , qui rapprochent le domaine Ω' mais qui n'ont pas des points communs avec la surface S . Si $0 < \theta - \tau \leq \frac{3}{2}$ la question de l'intégrale $R_1(B, \theta, \bar{\theta})$ est résolue par l'article [1]. L'intégrale

de $R_1(B, \theta, \bar{\theta})$ est donc bornée. Il résulte donc de la définition de la quasi-solution que

$$(6', 3) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} r^{(1)}(A, t) = 0 \quad t > 4T$$

parce que

$$t - \theta \geq 4T \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow \infty.$$

Évaluons maintenant l'intégrale $r^{(2)}(A, t)$ en posant

$$(7', 3) \quad \theta = \theta_0 + t - 4T,$$

ce qui permet d'écrire (7,3) comme :

$$(8, 3) \quad r^{(2)}(A, t) = \lambda \int_0^{4T} d\theta_0 \iiint_{\Omega'} \omega^{B, \theta}(A, t; B, \theta) R_1(B, \theta, t - 4T) dB.$$

Mais on peut représenter l'intégrale de θ' (V. (5'', 3)) comme une somme des deux intégrales répandues sur les intervalles d'intégrations de τ à $t - 4T$, et de $t - 4T$ à θ , parce que $\theta \geq t - 4T$. L'intégrale $r^{(2)}(A, t)$ est ainsi une somme des deux composants $r^{(3)}(A, t)$ et $r^{(4)}(A, t)$. Nous pouvons donc écrire :

$$(8', 3) \quad r^{(2)}(A, t) = r^{(3)}(A, t) + r^{(4)}(A, t),$$

où on a, en désignant

$$R_2(\theta, B) = \int_0^{t-4T} d\theta' \iiint_{\Omega'} \mathcal{N}(B, \theta; M, \theta') \int_0^{\theta'} \iint_S \varphi(Q, \tau) f(M, \theta'; Q, \tau) dQ d\tau dM$$

après l'inversion d'intégration dans l'intégrale $r^{(3)}(A, t)$:

$$(8'', 3) \quad r^{(3)}(A, t) = \lambda \int_0^{4T} d\theta_0 \iiint_{\Omega'} w^{B, \theta}(A, t; B, \theta) R_2(\theta, B) dB.$$

De même on trouve, après le changement de la variable d'intégration, en posant

$$(9, 3) \quad \theta' = t - 4T + \theta'_1,$$

et en désignant

$$R_3(\theta_0, B) = \int_0^{\theta_0} d\theta_1 \iiint_{\Omega'} \mathcal{N}(B, \theta; M, \theta') \int_0^{t-4T} \int_S \varphi(Q, \tau) f(M, \theta'; Q, \tau) dQ d\tau dM,$$

que

$$(9', 3) \quad r^{(4)}(A, t) = \lambda \int_0^{4T} d\theta_0 \iiint_{\Omega'} w^{B, \theta}(A, t; B, \theta) R_3(\theta_0, B) dB.$$

On prouvera d'abord que cette dernière intégrale converge vers zéro, avec l'inverse du paramètre T . Dans ce but on écrira l'intégrale $r^{(4)}(A, t)$ comme une somme des deux intégrales, $r^{(5)}(A, t)$ et $r^{(6)}(A, t)$, avec les intervalles d'intégrations par rapport à θ_0 respectivement $\langle 0, 2T \rangle$ et $\langle 2T, 4T \rangle$, de sorte que :

$$r^{(4)}(A, t) = r^{(5)}(A, t) + r^{(6)}(A, t).$$

Nous savons déjà que les intégrales spatiales des fonctions $R_2(\theta, B)$ et $R_3(\theta, B)$ sont bornées. Outre cela conformément à l'égalité (7', 3) on a pour l'intégrale $r^{(5)}(A, t)$

$$t - \theta = 4T - \theta_0 > 2T,$$

done

$$(9'', 3) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} r^{(5)}(A, t) = 0, \quad t > 4T.$$

L'intégrale $r^{(6)}(A, t)$ est transformé comme il suit, après avoir posé :

$$(9''', 3) \quad \theta_0 = 2T + \theta_2$$

$$r^{(6)}(A, t) = \lambda \int_0^{2T} d\theta_2 \iiint_{\Omega'} w^{B, \theta}(A, t; B, \theta) R_3(2T + \theta_2, B) dB.$$

Mais ici :

$$\begin{aligned} R_3(2T + \theta, B) = & \int_0^T d\theta_1 \iiint_{\Omega'} \mathcal{N}(B, \theta; M, \theta') \int_0^{t-4T} \int_S \varphi(Q, \tau) f(M, \theta'; \theta, \tau) dQ d\tau dM + \\ & + \int_T^{2T+\theta_2} d\theta_1 \iiint_{\Omega'} \mathcal{N}(B, \theta; M, \theta') \int_0^{t-4T} \int_S \varphi(Q, \tau) f(M, \theta'; Q, \tau) dQ d\tau dM. \end{aligned}$$

Dans le premier composant l'accroissement des paramètres du noyau $\mathcal{O}$ est égale à

$$\theta - \theta' = 2T + \theta_2 - \theta'_1 > T,$$

et dans le second composant l'accroissement des paramètres de la fonction f est égale à

$$\theta' - \tau = t - 4T + \theta'_1 - \tau > T,$$

d'où, de la forme de la fonction f et de la supposition (5',3) résulte que l'expression $r^{(6)}(A, t) \rightarrow 0$, $T \rightarrow \infty$. En effet : l'intégrale de la quasi-solution existe uniformément par rapport à t , T et A .

On a donc prouvé l'égalité suivante :

$$(9^{iv},3) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} r^{(4)}(A, t) = 0, \quad t \geq 4T,$$

à cause des formules (9'',3) et (9'3).

Revenons maintenant à l'expression $r^{(3)}(A, t)$. On décompose ici l'intégrale en somme des deux composants $r^{(7)}(A, t)$ et $r^{(8)}(A, t)$ répandus sur les intervalles suivants :

$$0 \leq \theta_0 \leq 2T \quad \text{et} \quad 2T < \theta_0 \leq 4T.$$

Dans la première l'accroissement des paramètres de la quasi solution est égale à

$$t - \theta = 4T - \theta_0 \geq 2T,$$

c'est pour quoi on peut écrire :

$$(10,3) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} r^{(7)}(A, t) = 0, \quad T \geq 4T.$$

comme nous savons, que l'intégrale spaciale de la fonction $R_2(\theta, B)$ est bornée par rapport à θ .

Le second composant de l'expression $r^{(3)}(A, t)$, $r^{(8)}(A, t)$ sera transformé comme il suit :

$$r^{(8)}(A, t) = \lambda \int_0^{2T} d\theta_2 \iint_{\Omega'} w^{B,\theta}(A, t; B, \theta) R_2(\theta, B) dB.$$

Mais ici on a :

$$R_2(\theta, B) = \int_0^{t-4T} d\theta' \iiint_{\Omega'} \mathcal{N}(B, \theta; M, \theta') \int_0^{\theta'} \iint_S \varphi(Q, \tau) f(M, \theta'; Q, \tau) dQ d\tau dM$$

et l'accroissement des paramètres du noyau $\mathcal{N}$ est ici

$$\theta - \theta' = t - 2T + \theta_2 - \theta' > 2T + \theta_2 > 2T \rightarrow \infty, \quad T \rightarrow \infty,$$

done

$$(10', 3) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} r^{(8)}(A, t) = 0, \quad t \geq 4T.$$

Il résulte des expressions (8'', 3), (10, 3) et (10', 3) que

$$(11, 3) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} r^{(3)}(A, t) = 0 \quad t \geq 4T,$$

ce qui donne avec les expressions (9iv, 3), (8', 3), (6, 3) et (6', 3)

$$(12, 3) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} r_1(A, t) = 0, \quad t \geq 4T, \quad \text{c. q. f. d.}$$

§ 4. On construit, conformément à la supposition VI, le noyau dominant du noyau résolvant $\mathcal{N}(A, t; B, \tau)$, en commençant par la domination de la quasisolution, ce qui conduit, à cause des inégalités (7, 1) et (7', 1), à la fonction :

$$(1, 4) \quad \dot{w}(A, B, \theta) = \theta^{-n/2} \exp(-gr_{AB}^2/\theta), \quad \text{avec } \theta = t - \tau.$$

Pour les fonctions dominantes des dérivées, première et seconde, de la quasi solution on a les fonctions suivantes :

$$(1', 4) \quad \dot{w}_\alpha(A, B, \theta) = \frac{1}{2} \theta^{-\frac{n}{2}-1} \exp(-gr_{AB}^2/\theta) \cdot \sum_{\gamma=1}^n \dot{a}^{\alpha\gamma}(B) |x_\gamma - \xi_\gamma|, \quad \theta = t - \tau,$$

où

$$\dot{a}^{\alpha\beta}(A) = \text{Max}_{0 \leq \tau} |\dot{a}^{\alpha,\beta}(A, \tau)|, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n,$$

et

$$(1'', 4) \quad \dot{w}_{\alpha,\beta}(A, B, \theta) = \frac{1}{4} \theta^{-\frac{n}{2}-2} \cdot \exp[-gr_{AB}^2/\theta] \cdot [2\theta \dot{a}^{\alpha\beta}(B) + \sum_{\gamma=1}^n \dot{a}^{\alpha\gamma}(B) |x_\gamma - \xi_\gamma| \cdot \sum_{\gamma=1}^n \dot{a}^{\gamma\beta} |x_\gamma - \xi_\gamma|].$$

On écrit dans l'inégalité (1'',1) $\text{const} = C$, et on introduit les bornes supérieures des modules des coefficients $b_\alpha(A, \tau)$, et $c(A, \tau)$, en posant :

$$(2,4) \quad \dot{b}_\alpha(A) = \text{Max}_{0 \leq \tau} |b_\alpha(A, \tau)|; \quad \dot{c}(A) = \text{Max}_{0 \leq \tau} |c(A, \tau)|$$

et

$$(2',4) \quad \dot{\lambda}_n(A) = \text{Max}_{0 \leq \tau} |\overline{\alpha^{\alpha\beta}(A, \tau)}|,$$

de sorte que la fonction :

$$(2'',4) \quad \dot{f}(A, B, \theta) = \dot{\lambda}_n(A) \left[\sum_{\alpha, \beta=1}^n C(r_{AB}^h + \theta^h) \dot{w}_{\alpha\beta}(A, B, \theta) + \sum_{\alpha=1}^n \dot{b}_\alpha(A) \dot{w}(A, B, \theta) + \dot{c}(A) \dot{w}(A, B, \theta) \right], \quad \theta = t - \tau.$$

est la dominante de la fonction $f(A, t, B, \tau)$.

Nous posons donc :

$$(2''',4) \quad \dot{N}(A, B, \theta) = \dot{f}(A, B, \theta) \cdot (\dot{\lambda})^{-1},$$

et

$$(3,4) \quad \dot{N}_{k+1}(A, B, \theta) = \int_0^\theta \iint_{\Omega'} \dot{N}(A, M, \theta - \theta') \dot{N}_k(M, B, \theta') d\theta',$$

$$\theta = t - \tau, \quad k = 1, 2 \dots$$

comme noyaux majorants des noyaux $N_{k+1}(A, B; t, \tau)$, $k = 1, 2 \dots$ et

$$(3',4) \quad \dot{\mathcal{N}}(A, B, \theta) = \dot{N}(A, B, \theta) + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{\lambda}^k \dot{N}_k(A, B, \theta), \quad \theta = t - \tau$$

comme la dominante cherchée du noyau résolvant $\mathcal{N}(A, t; B, \tau)$.

On démontrera, en s'appuyant sur la définition des noyaux $\dot{N}_k(A, B, \theta)$ et des évaluations des noyaux majorés $N_k(A, t; B, \tau)$, qui se trouvent dans l'article [1] (à s. dans les formules (63), (67) et (68)), que les fonctions $\dot{N}_k(A, B, \theta)$ sont bornées, à partir d'un indice $k = \nu_0$ assez élevé, mais constant par rapport à θ , A et B ; pour l'indice $n < \nu_0$ ces fonctions auront seulement les discontinuités faibles de façons, qu'elles accompliront l'inégalité (63) de l'article [1], à s :

$$(3'',4) \quad \dot{N}_k(A, B, \theta) < C_1 \theta^{-\mu} r_{AB}^{-(n+2-2\mu-h_1)} \quad \text{où } C_1 = \text{const},$$

$$h_1 = \min(h, 2h'), \quad \mu > 1 - \frac{h'}{2}, \quad k = 1, 2 \dots \nu_0 - 1.$$

L'inégalité analogue vérifiera la fonction $\dot{f}(A, B, \theta)$.

LEMME (1,4). *Le noyau résolvant $\mathcal{D}\mathcal{U}(A, t; B, \tau)$ est la somme d'une série des fonctions absolument et uniformément convergentes, par rapport à l'accroissement $t - \tau = \theta$, sous les suppositions I - VI.*

En effet, il suffit de démontrer que la série (3',4) est uniformément convergente par rapport à θ . Mais la supposition VI c'est n'est rien d'autre, que l'inégalité suivante :

$$(4,4) \quad \int_0^\theta \iint_{\Omega'} \dot{N}(A, B, \theta') dB d\theta' \leq b < (2\sqrt{\pi})^n \omega, \quad \omega < 1, \quad \theta = t - \tau.$$

Il est facile de démontrer l'inégalité que voici :

$$(4',4) \quad \dot{N}(A, B, \theta) \leq \text{cons } \theta^{-n/2} \exp[-gr^2(A, B)/\theta], \quad \theta \geq 1$$

et l'égalité (3'',4) pour $k = 1$.

En écrivant l'égalité (3,4) pour $n = 1$, sous la forme

$$(5,4) \quad \begin{aligned} \dot{N}_2(A, B, \theta) = \\ = \int_0^{\theta/2} \iint_{\Omega'} [\dot{N}(A, M, \theta - \theta') \dot{N}(M, B, \theta') + \dot{N}(A, M, \theta') \dot{N}(M, B, \theta - \theta')] dM \cdot d\theta' \end{aligned}$$

on y trouve sans peine :

$$(5,4) \quad \dot{N}_2(A, B, \theta) \leq a \cdot b \cdot \theta^{-n/2}, \quad \text{où } a = \text{const}, \quad \theta \geq 1, \quad \text{et}$$

$$(5',4) \quad \dot{N}_2(A, B, \theta) \leq \text{const } \theta^{1-2\mu} r_{AB}^{-n-4+2(2\mu+h_1)}, \quad \mu > 1 - \frac{h_1}{2}.$$

Il est facile de déduire maintenant les formules suivantes :

$$(5'',4) \quad \dot{N}_k(A, B, \theta) \leq a_k \theta^{-n/2}, \quad \text{où } a_k = \text{const}, \quad \theta \geq 1, \quad k = 1, 2 \dots$$

$$(5''',4) \quad \begin{aligned} \dot{N}_k(A, B, \theta) \leq a'_k \cdot \theta^{k-1-k\mu} r_{AB}^{-n-2k+k(2\mu+h_1)}, \quad a'_k = \text{const}, \\ \theta < 1, \quad k = 1, 2 \dots \end{aligned}$$

qui prouve l'inégalité (3'',4).

Soit à présent le premier des indices k pour lesquels on a :

$$-n - 2k + k(2\mu + h_1) \geq 0, \quad \text{c. à d.}$$

$$r_0 = [n \cdot (2\mu + h_1 - 2)^{-1}] + 1;$$

et alors

$$(5^{iv}, 4) \quad \dot{N}_{\nu_0}(A, B, \theta) \leq a''_{\nu_0} \theta^{(n+2)(1-\mu)h-h_1}, \quad \theta < 1$$

où

$$a''_{\nu_0} = a'_{\nu_0} \cdot r_{AB}^{\nu_0(2\mu+h-2)-n},$$

et

$$(n+2)(1-\mu)-h_1 > 0, \quad \nu_0(2\mu+h-2)-n \geq 0.$$

Mais le domaine Ω' étant borné, il existe une telle constante A_0 , que

$$(6, 4) \quad \dot{N}_{\nu_0}(A, B, \theta) \leq A_0$$

pour chaque valeur de $\theta > 0$, et $A, B \in \Omega'$.

La définition (3,4), les inégalités (6,4) et (4,4) permettent d'affirmer que :

$$(6', 4) \quad \dot{N}_{\nu_0+k}(A, B, \theta) \leq A_0 [(2\sqrt{\pi})^n \omega]^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

C'est pourquoi on peut écrire que :

$$(6'', 4) \quad 0 \leq \dot{\mathcal{N}}(A, B, \theta) - \left[\dot{N}(A, B, \theta) + \sum_{k=1}^{\nu_0-1} \lambda^k \dot{N}_k(A, B, \theta) \right] \leq A_0 / (1 - \omega),$$

$$0 < \theta = t - \tau, \quad A, B \in \Omega', \quad A_0 = \text{const},$$

ce qui prouve le Lemme (1,4).

LEMME (2,4). Les supposition I - VI, étant admises, l'intégrale :

$$(7, 4) \quad \bar{\mathcal{J}}(A, t, \tau) = \int_{\tau}^t \iiint_{\Omega'} |\dot{\mathcal{N}}(A, t; B, \theta')| dB d\theta', \quad A \in \Omega, \quad t - \tau = \theta > 0$$

existe uniformément par rapport à l'accroissement du paramètre $\theta > 0$.

Il suffit de démontrer que l'intégrale

$$(7', 4) \quad \dot{\mathcal{J}}(A, \theta) = \int_0^{\theta} \iiint_{\Omega'} \dot{\mathcal{N}}(A, B, \theta') dB d\theta'$$

existe uniformément pour $\theta > 1$. Soit K un indice positive.

Le Lemme (1,4) nous permet d'écrire, que :

$$(7'', 4) \quad \dot{\mathcal{N}}(A, B, \theta) = \dot{N}(A, B, \theta) + \sum_{k=1}^{K+\nu_0} \lambda^k \dot{N}_k(A, B, \theta) + \frac{\omega^K}{1-\omega} \cdot \eta A_0;$$

$$0 < \eta < 1,$$

ou

$$(7''',4) \quad \dot{\mathcal{J}}(A, B, \theta) = 2\ell_K(A, B, \theta) + \frac{\omega^K}{1-\omega} \eta \cdot A_0.$$

Introduisons l'expression (7''',4), où on a remplacé θ par θ' , dans l'intégrale (7',4). On y trouve :

$$(8,4) \quad \dot{\mathcal{J}}(A, \theta) = \int_0^\theta \iint_{\Omega'} 2\ell_k(A, B, \theta') dB d\theta' + \eta' A_0 \frac{\omega^K}{1-\omega} \cdot \theta, \quad 0 < \eta' < \text{const.}$$

Mais si nous ajusterons l'indice K de façon que

$$K \geq -\frac{\ln \theta^{1+\alpha}}{\ln \omega}, \quad \alpha > 0,$$

alors

$$(8',4) \quad \omega^K \cdot \theta \leq \theta^{-\alpha} \rightarrow 0, \quad \theta \rightarrow \infty.$$

Posons donc :

$$\bar{K} = \nu_0 + 1 + \left\lceil -\frac{\ln \theta^{1+\alpha}}{\ln \omega} \right\rceil$$

et écrivons :

$$\mathcal{J}_{\bar{K}} = i_0 + \sum_{k=1}^{\bar{K}} i_k,$$

où

$$(8'',4) \quad i_k = \lambda^k \int_0^\theta \iint_{\Omega'} \dot{N}_k(A, B, \theta') dB d\theta',$$

et

$$i_0 = i_1 \cdot \lambda^{-1}.$$

Il résulte de la supposition VI, qu'on a :

$$i_0 < \omega \lambda^{-1}; \quad i_1 < \omega.$$

Nous prouverons que

$$(9,4) \quad i_k < \omega^k, \quad k = 1, 2, \dots$$

En effet

$$\begin{aligned} i_2 \lambda^{-2} &= \int_0^\theta \int_{\Omega'} \int_0^{\theta'} \int_{\Omega'} \dot{N}(A, M, \theta'') \dot{N}(M, B, \theta' - \theta'') d\theta'' dM dB d\theta' = \\ &= \int_0^\theta d\theta'' \int_{\Omega'} \int_{\theta''}^\theta \int_{\Omega'} d\theta' \int_{\Omega'} \dot{N}(A, M, \theta'') \dot{N}(M, B, \theta' - \theta'') dM dB. \end{aligned}$$

Posons $\theta' - \theta'' = v$, $d\theta' = dv$, et nous trouverons :

$$(9',4) \quad i_2 \lambda^{-2} = \int_0^\theta \int_{\Omega'} \int_{\Omega'} \dot{N}(A, M, \theta'') \int_0^{\theta - \theta''} \int_{\Omega'} \dot{N}(M, B, v) dB dv dM d\theta'' \leq b^2 \cdot \lambda.$$

Par induction on peut prouver que

$$(9'',4) \quad i_k \lambda^{-k} \leq b^k, \quad k = 1, 2 \dots \infty,$$

d'où résulte l'inégalité (9,4). De cette inégalité et des expressions (7'',4) ... à ... (8'',4) résulte le Lemme (2,4), car ces expressions prouvent que l'intégrale $\mathcal{I}(A, \theta)$, qui est une fonction non décroissante du paramètre θ , est bornée. En effet :

$$(9',4) \quad \dot{I}(A, \theta) < \omega \lambda^{-1} + \frac{\omega}{1 - \omega} \quad \text{c. q. f. d. d. .}$$

COROLLAIRE (1,4). *Sous les suppositions du Lemme (2,4) l'intégrale :*

$$(10,4) \quad \dot{I}(A, t - T, \tau) = \int_\tau^{t-T} \int_{\Omega'} \int_{\Omega'} \partial \mathcal{I}(A, t; B, \theta') dB d\theta' \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty,$$

où :

$$0 < \tau < t - T, \quad A \in \Omega'.$$

En effet il suffit de prouver que :

$$(10',4) \quad \dot{I}_1(A, t - T, \tau) = \int_\tau^{t-T} \int_{\Omega'} \int_{\Omega'} \partial \mathcal{I}(A, B, t - \theta') dB d\theta' \rightarrow 0, \quad T \rightarrow \infty.$$

Mais si on change les variables d'intégration en posant $t - \theta' = \theta''$, et si on introduit comme auparavant $t - \tau = \theta$, on y trouve

$$(10'', 4) \quad \dot{I}_1(A, t - T, \tau) = \int_T^\theta \iint_{\Omega'} \int \partial \dot{\mathcal{I}}(A, B, \theta'') dB d\theta'', \quad \theta > T$$

et la convergence de l'expression (10'', 4) vers zéro, avec l'inverse du T , est une simple conséquence du fait que l'intégrale (7', 4) $\dot{I}(A, \theta)$ existe uniformément par rapport à θ .

§ 5. *L'évaluation des intégrales des égalités (3'', 3) et (4, 3), à s. : des intégrales :*

$$(1, 5) \quad u_1(A, t, T) = \int_S \bar{\varphi}(Q) \int_0^T \int_0^{T-\tau} \iint_{\Omega'} w^{B, \theta^1}(A, t; B, \theta^1) f(B, \theta^1; Q, \theta^1 - \theta) dB d\theta d\tau dQ,$$

avec :

$$\theta^1 = t - T + \tau + \theta$$

et :

$$(1', 5) \quad \mathcal{J}_1 =$$

$$\lambda \int_{t-T}^t \iint_S \varphi(Q, \tau) \int_\tau^t \iint_{\Omega'} w^{B, \theta}(A, t; B, \theta) \int_\tau^\theta \iint_{\Omega'} \partial \mathcal{I}(B, \theta; M, \theta') f(M, \theta'; Q, \tau) dM d\theta' dB dQ d\tau.$$

§ 5 A. *L'évaluation de l'intégrale $u_1(A, t, T)$. L'accroissement des paramètres des fonctions qui figurent dans l'intégrale $u_1(A, t, \tau)$ ne dépend pas du paramètre t .*

Nous trouvons donc en posant :

$$\bar{\omega}^B(A, B, \theta) = \theta^{-n/2} \exp[-\bar{\vartheta}^B(A, B)/4\theta],$$

$$\bar{\vartheta}^B(A, B) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \bar{a}^{\alpha, \beta}(B) (x_\alpha - \zeta_\alpha) (x_\beta - \zeta_\beta)$$

$$\begin{aligned} \bar{f}(B, Q, \theta) = \lambda \sqrt{\det |\bar{a}^{\alpha, \beta}(B)|} & \left\{ \sum_{\alpha, \beta=1}^n [\bar{a}_{\alpha\beta}(B) - \bar{a}_{\alpha\beta}(Q)] \bar{\omega}_{\zeta_\alpha \zeta_\beta}^B(B, Q, \theta) + \right. \\ & \left. + \sum_{\alpha=1}^n \bar{b}_\alpha(B) \bar{\omega}_{\zeta_\alpha}^B(B, Q, \theta) + \bar{c}(B) \bar{\omega}^B(B, Q, \theta) \right\}, \end{aligned}$$

qu'on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u_1(A, t, T) = \int_S \int_{\varphi(Q)} \int_{\Omega'} \int_0^T \int_0^{T-\tau} \bar{\omega}^B(A, B, T-\tau-\theta) \bar{f}(B, Q, \theta) d\theta d\tau dB dQ,$$

On nomme la plus intérieure intégrale double par $\mathcal{J}$, d'où on reçoit par le changement des variables à s. $T - \tau = u$, $d\tau = -du$

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \int_0^T \int_0^u \bar{\omega}^B(A, B, u-\theta) \bar{f}(B, Q, \theta) d\theta du = \\ &= \int_0^T d\theta \int_{\theta}^T \bar{\omega}^B(A, B, u-\theta) \bar{f}(B, Q, \theta) du d\theta, \end{aligned}$$

et :

$$\mathcal{J} = \int_0^T \int_0^{T-\theta} \bar{\omega}^B(A, B, v) \bar{f}(B, Q, \theta) dv d\theta = \int_0^T \bar{f}(B, Q, \theta) \int_0^{T-\theta} \bar{\omega}^B(A, B, v) dv d\theta$$

d'où on y trouve facilement

$$\mathcal{J} = \int_0^T \bar{f}(B, Q, T-\theta) \int_0^{\theta} \bar{\omega}^B(A, B, \tau) d\tau d\theta \quad (A \neq B \neq Q),$$

c. à d. que :

$$\begin{aligned} (2,5) \quad u_1(A, t, T) &\rightarrow \\ &\rightarrow \int_S \int_{\varphi(Q)} \int_0^T \int_{\Omega'} \bar{f}(B, Q, T-\theta) \int_0^{\theta} \bar{\omega}^B(A, B, \tau) d\tau d\theta dB dQ, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Les singularités des fonctions $\bar{f}(\dots)$ et $\bar{\omega}^B(\dots)$ sont ici séparées et ces fonctions accomplissent les inégalités (21) et (63) de l'article [1], et les inégalités analogues aux inégalités (3',3) et (3,3), ce qui prouve que l'intégrale (2,5) existe uniformément par rapport à T .

Nous avons déjà démontrés, pour $A \neq B$, l'égalité suivante

$$\int_0^{\theta} \bar{\omega}^B(A, B, \tau) d\tau = 4^{\frac{n}{2}-1} \left[\bar{\vartheta}^B(A, B) \right]^{-\frac{n}{2}+1} \int_{\bar{\vartheta}^B(A, B)/4\theta}^{\infty} u^{\frac{n}{2}-2} \exp(-u) du,$$

où on a posé :

$$\tau = \bar{\vartheta}^B(A, B)/4u, \quad d\tau = -\bar{\vartheta}^B(A, B) du/4u^2.$$

On exclue la sphère $K(A, \varrho)$ du domaine Ω' . Dans le domaine restant $\Omega' - K(A, \varrho)$ la substitution, d'ont il fût question, est légitime, et l'intégrale converge vers

$$4^{\frac{n}{2}-1} [\bar{\vartheta}^B(A, B)]^{-\frac{n}{2}+1} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right), \quad \text{avec } \theta \rightarrow \infty,$$

et elle converge vers zéro, si $\theta \rightarrow 0$. Cette intégrale reste donc borné dans le domaine $\Omega' - K(A, \varrho)$. Mais pour $0 < \theta < \frac{T}{2}$ le premier facteur de l'expression (2,5), qui est de l'ordre de $(T - \theta)^{-\frac{n}{2}+1} < (T/2)^{-\frac{n}{2}+1}$, converge vers zéro, $T \rightarrow \infty$. Donc pour $\theta > T/2$ et le nombre T assez grand nous pouvons écrire, que :

$$(2'5) \quad \int_S \bar{\varphi}(Q) \iiint_{\Omega' - K(A, \varrho)} \int_0^T \bar{f}(B, Q, T - \theta) dQ \int_0^\theta \bar{\omega}^B(A, B, \tau) dB d\tau d\theta =$$

$$O \left\{ 4^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \int_S \bar{\varphi}(Q) \iiint_{\Omega' - K(A, \varrho)} [\bar{\vartheta}^B(A, B)]^{-\frac{n}{2}+1} \int_{T/2}^T \bar{f}(B, Q, T - \theta) d\theta dQ dB \right\}$$

Excluons maintenant du domaine $\Omega' - K(A, \varrho)$ le domaine Ω'_1 où r_{BQ} est petit (donc le domaine entourant la surface S).

Désignons le domaine restant par $\bar{\Omega}$, alors :

$$\bar{\Omega} = \Omega' - K(A, \varrho) - \Omega'_1.$$

Dans le domaine $\bar{\Omega}$ nous pouvons appliquer aux composants de la fonction $\bar{f}(B, Q, T - \theta)$ les mêmes transformations que plus haut, ce qui est possible car les coefficients ne dépendent pas du paramètre. On reçoit ainsi la somme des intégrales de la forme :

$$u^{\frac{n}{2}+i-1} [\bar{\vartheta}(B, Q)]^{-\frac{n}{2}-i+1} \int_{\bar{\vartheta}^B(A, B)/4\theta}^{\infty} u^{\frac{n}{2}+i-2} \exp(-u) du, \quad i = 0, 1, 2.$$

Ici on a $\theta > \frac{T}{2}$, et chacune de ces intégrales converge vers $\Gamma\left(\frac{n}{2} + i - 1\right)$, avec $T \rightarrow \infty$.

À cause du fait que l'intégrale (5,2) existe uniformément, on peut assujettir le domaine $K(A, \varrho) + \Omega'_1$ aussi petit pour qu'on ait

$$(2'', 5) \quad \left| \iint_S \bar{\varphi}(Q) \iiint_{K(A, r) + \Omega'_1} \int_0^T \bar{f}(B, Q, \tau - \theta) dQ \int_0^\theta \bar{\omega}^B(A, B, \tau) dB d\tau d\theta \right| \leq \varepsilon/2 \quad \varepsilon > 0.$$

Les coefficients à l'indice $i = 2$ font le plus d'embarras car $-\frac{n}{2} - 2 + 1 < -\frac{n}{2}$, mais ces coefficient sont multipliés par le facteur :

$$r_{BQ}^2 |\bar{a}_{\alpha\beta}(B) - \bar{a}_{\alpha\beta}(Q)| \leq r_{BQ}^{2+h} \cdot \text{const}, \quad 0 < h$$

on y reçoit donc :

$$r_{BQ}^2 |\bar{a}_{\alpha\beta}(B) - \bar{a}_{\alpha\beta}(Q)| \cdot |\bar{\vartheta}^B(B, Q)|^{-\frac{n}{2}-1} \leq \text{const} \cdot r_{BQ}^{-n+h},$$

donc l'intégrale à n dimensions de cet expression existe. Mais ici il sera question de l'existence de l'intégrale suivante :

$$\mathcal{J}_{S, \bar{\Omega}} = \iiint_S \iiint_{\bar{\Omega}} r_{AB}^{-n+2} r_{BQ}^{-n+h} dB dQ.$$

Soit S_1 le partie de la surface S , où $r_{BQ} > r_{AB}$, et soit S_2 le partie de la surface S , où $r_{BQ} \leq r_{AB}$, alors :

$$\mathcal{J}_{S, \bar{\Omega}} = \mathcal{J}_{S_1} + \mathcal{J}_{S_2}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{S_1} &= \iiint_{\bar{\Omega}} r_{AB}^{-n+2} dB \iiint_{S_1} r_{BQ}^{-n+h} dQ = O \left\{ \iiint_{\bar{\Omega}} r_{AB}^{-n+2} dB \iiint_{S_1} r_{BQ}^{-2+h} dr_{BQ} \right\} = \\ &= O \left\{ \iiint_{\bar{\Omega}} r_{AB}^{-n+2} [r_{BQ_1}^{-1+h} - r_{BQ_0}^{-1+h}] dB \right\}; \quad Q_1, Q_0 \in S \end{aligned}$$

$$\mathcal{J}_{S_1} = O \left\{ \iiint_{\bar{\Omega}} r_{AB}^{-n+1+h} dB \right\} = O \left\{ \iiint_{\bar{\Omega}'} r_{AB}^{-n+1+h} dB \right\}$$

qui existe.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{S_2} &\leq \iint_{S_2} \iiint_{\bar{\Omega}} r_{BQ}^{-2n+2+h} dB dQ = 0 \left\{ \iint_{S_2} \iiint_{\bar{\Omega}} r_{BQ}^{-n+1+h} dr_{BQ} dQ \right\} = \\ &O \left\{ \iint_{S_2} [r_{B_1Q}^{-n+2+h} - r_{B_0Q}^{-n+2+h}] dQ \right\} = O \left\{ \iint_{S_2} r_{BQ}^{-n+2+h} dQ \right\} \end{aligned}$$

existe pour chaque $B \in \Omega'$. c. à d. que l'intégrale $\mathcal{J}_{S, \bar{\Omega}}$ existe pour chaque domaine :

$$\bar{\Omega} = \Omega' - K(A, \varrho) - \dot{\Omega}'_1.$$

Si $i = 1$, le coefficient est le suivant :

$$| \bar{a}_{\alpha\beta}(B) - \bar{a}_{\alpha\beta}(Q) | \asymp r_{BQ}^h,$$

et la singularité sera

$$[\bar{\vartheta}^B(B, Q)]^{-n/2} r_{BQ}^h \asymp r_{BQ}^{-n+h}$$

qui était déjà discuté.

La première dérivée du quasi-potential limite est de la forme :

$$\bar{w}_{\alpha\alpha}^Q(B, Q, \theta) = -\frac{1}{2} \theta^{-\frac{n}{2}-1} \exp \left[-\frac{\bar{\vartheta}^Q(B, Q)}{4\theta} \right] \cdot \sum_{\gamma=1}^n \bar{a}^{\alpha\gamma}(Q) (\xi_\gamma - \zeta_\gamma)$$

Ici la singularité est la suivante :

$$r_{BQ} \bar{\vartheta}^Q(A, Q)^{-\frac{n}{2}} \asymp r_{BQ}^{-n+1}$$

qui rentre dans le cas qu'on a discuté plus haut.

Pour revenir maintenant vers l'intégrale (2',5) on écrit :

$$\begin{aligned} \int_{T/2}^T \bar{f}(B, Q, T - \theta) d\theta &= \int_0^{T/2} \bar{f}(B, Q, u) du = \int_{\bar{\vartheta}^Q(B, Q)/2T}^{\infty} \bar{f} \left(B, Q, \frac{\bar{\vartheta}^Q(B, Q)}{4v} \right) \cdot \\ &\cdot \bar{\vartheta}^Q(B, Q) dv / 4v^2 \xrightarrow[T \rightarrow \infty]{B \neq Q} \int_0^{\infty} \bar{f} \left(B, Q, \frac{\bar{\vartheta}^Q(B, Q)}{4v} \right) \cdot \bar{\vartheta}^Q(B, Q) dv / 4v^2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \bar{f}(B, Q, u) du = \\
&= \lambda \sqrt{\det |\bar{a}^{\alpha\beta}(B)|} \left\{ \sum_{\alpha, \beta=1}^n [\bar{a}_{\alpha\beta}(B) - \bar{a}_{\alpha\beta}(Q)] \cdot \int_0^\infty \bar{w}_{\xi_\alpha \xi_\beta}^Q(B, Q, u) du + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\alpha=1}^n \bar{b}_\alpha(B) \int_0^\infty \bar{w}_{\xi_\alpha}^Q(B, Q, u) du + \bar{c}(B) \int_0^\infty \bar{w}^Q(B, Q, u) du \right\},
\end{aligned}$$

mais on sait, que

$$\int_0^\infty \bar{w}^B(B, Q, u) du = 4^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) [\bar{\vartheta}^Q(B, Q)]^{-\frac{n}{2}+1},$$

alors

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \bar{f}(B, Q, u) du &= 4^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \lambda \sqrt{\det |\bar{a}^{\alpha\beta}(B)|} \cdot \\
&\quad \left\{ \sum_{\alpha, \beta=1}^n [\bar{a}_{\alpha\beta}(B) - \bar{a}_{\alpha\beta}(Q)] \{[\bar{\vartheta}^Q(B, Q)]^{-\frac{n}{2}+1}\}'_{\xi_\alpha \xi_\beta} + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{\alpha=1}^n \bar{b}_\alpha(B) \{[\bar{\vartheta}^Q(B, Q)]^{-\frac{n}{2}+1}\}'_{\xi_\alpha} + \bar{c}(B) [\bar{\vartheta}^Q(B, Q)]^{-\frac{n}{2}+1} \right\}.
\end{aligned}$$

Mais on sait qu'on a pour $Q \neq B$ l'égalité suivante :

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^n \bar{a}_{\alpha\beta}(Q) \{[\bar{\vartheta}^Q(B, Q)]^{-\frac{n}{2}+1}\}_{\xi_\alpha \xi_\beta} = 0,$$

on peut donc écrire en introduisant l'expression $\widehat{\psi}(u)$, que

$$(3,5) \quad \int_0^\infty \bar{f}(B, Q, \theta) d\theta = 4^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \lambda \sqrt{\det |\bar{a}^{\alpha\beta}(B)|} \widehat{\psi}_B(u),$$

$$u = [\bar{\vartheta}^Q(B, Q)]^{-\frac{n}{2}+1}, \quad B \neq Q.$$

Mais à cause du fait que l'intégrale (2,5) existe uniformément par rapport à T , le domaine $K(A, \varrho) + \Omega'_1$ peut être choisi assez petit pour qu'on puisse écrire l'inégalité (2'',5).

Après avoir fixé le domaine $K(A, \varrho) + \Omega'_1$ on passe à la limite par rapport à T , ce qui permet d'écrire :

$$(3',5) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \left| \int_S \bar{\varphi}(Q) \int_0^T \iint_{\Omega'} \bar{f}(B, Q, T - \theta) \int_0^\theta \bar{w}^B(A, B, \tau) d\tau dB d\theta dQ - \right. \\ \left. - 4^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \int_S \bar{\varphi}(Q) \iint_{\bar{\Omega}} [\bar{\varphi}^B(A, B)]^{-\frac{n}{2}+1} \int_0^\infty \bar{f}(B, Q, u) du dB dQ \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On peut recevoir pareillement à l'inégalité (2'',5) l'inégalité suivante :

$$(3'',5) \quad \left| \int_S \bar{\varphi}(Q) \iint_{K(A, \varrho) + \Omega'_1} [\bar{\varphi}^B(A, B)]^{-\frac{n}{2}+1} \int_0^\infty \bar{f}(B, Q, u) du dB dQ \right| \leq \\ \leq \frac{\varepsilon}{2} \cdot \left[4^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right) \right]^{-1}.$$

Comme le nombre $\varepsilon > 0$ est à volonté petit, les deux inégalités (3'5) et (3'',5) et les définitions (10',1) et (10'',1) prouve que :

$$(3''',5) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \int_S \bar{\varphi}(Q) \int_0^T \iint_{\Omega'} \bar{f}(B, Q, T - \theta) \int_0^\theta \bar{w}^B(A, B, \tau) d\tau dB d\theta dQ = \\ = \lambda \int_S \bar{\varphi}(Q) \iint_{\bar{\Omega}} \bar{w}^B(A, B) \bar{\lambda}_n(B) \widehat{\psi}_B[\bar{w}^Q(B, Q)] dB dQ.$$

Revenons aux définitions du § 3. Les égalités (3''',5) et (3'',3) donnent :

$$(4,5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} [U_2(A, t) - r(A, t)] = \\ = \lambda \iint_{\bar{\Omega}'} \bar{\lambda}_n(B) \bar{w}^B(A, B) \int_S \bar{\varphi}(Q) \widehat{\psi}_B[\bar{w}(B, Q)] dQ dB.$$

§ 5 B. L'évaluation de l'intégrale $\mathcal{Y}_1$.

$$(5,5) \quad \mathcal{Y}_1 = \lambda \int_{t-4T}^t \iint_S \varphi(Q, \tau) \int_{\tau}^t \iiint_{\Omega'} w^{B,\theta}(A, t; B, \theta) \cdot \\ \cdot \int_{\tau}^{\theta} \iiint_{\Omega'} \mathcal{N}(B, \theta; M, \theta') f(M, \theta'; Q, \tau) dM d\theta' dB d\theta dQ d\tau.$$

On change la variable d'intégration en posant

$$\tau = t - 4T + \tau_1; \quad d\tau = d\tau_1,$$

et on écrit :

$$(5',5) \quad \mathcal{Y}_1 = \lambda \int_0^{4T} \iint_S \varphi(Q, \tau) \int_{\tau}^t \iiint_{\Omega'} w^{B,\theta}(A, t; B, \theta) \cdot \\ \cdot \int_{\tau}^{\theta} \iiint_{\Omega'} \mathcal{N}(B, \theta; M, \theta') f(M, \theta'; Q, \tau) dM d\theta' dB d\theta dQ d\tau_1.$$

En changeant la variable d'intégration par la substitution :

$$\theta = \tau + \theta_1 = t - 4T + \tau_1 + \theta_1; \quad d\theta = d\theta_1$$

on reçoit :

$$(5'',5) \quad \mathcal{Y}_1 = \lambda \int_0^{4T} \iint_S \varphi(Q, \tau) \int_0^{4T-\tau_1} \iiint_{\Omega'} w^{B,\theta}(A, t; B, \theta) \cdot \\ \cdot \int_{\tau}^{\theta} \iiint_{\Omega'} \mathcal{N}(B, \theta; M, \theta') f(M, \theta'; Q, \tau) dM d\theta' dB d\theta_1 dQ d\tau_1.$$

De même on écrira :

$$\theta' = \tau + \theta'_1 = t - 4T + \tau_1 + \theta'_1; \quad d\theta' = d\theta'_1,$$

et

$$\begin{aligned}
 (5''', 5) \quad \mathcal{Y}_1 &= \lambda \int_0^{4T} \iint_S \varphi(Q, \tau) \int_0^{4T-\tau_1} \iiint_{\Omega'} w^{B, \theta}(A, t; B, \theta) \cdot \\
 &\cdot \int_0^{\theta_1} \iiint_{\Omega'} \mathcal{N}(B, \theta; M, \theta') f(M, \theta'; Q, \tau) dM d\theta'_1 dB d\theta_1 dQ d\tau_1 = \\
 &= \lambda \int_0^{4T} \iint_S [\varphi(Q, \tau) - \bar{\varphi}(Q)] \int_0^{4T-\tau_1} \iiint_{\Omega'} w^{B, \theta}(A, t; B, \theta) \cdot \\
 &\cdot \int_0^{\theta_1} \iiint_{\Omega'} \mathcal{N}(B, \theta; M, \theta') f(M, \theta'; Q, \tau) dM d\theta'_1 dB d\theta_1 dQ d\tau_1 + \\
 &+ \lambda \iint_S \bar{\varphi}(Q) \int_0^{4T} \int_0^{4T-\tau_1} \iiint_{\Omega'} \omega^{B, \theta}(A, t; B, \theta) \cdot \\
 &\cdot \int_0^{\theta_1} \iiint_{\Omega'} \mathcal{N}(B, \theta; M, \theta') f(M, \theta'; Q, \tau) dM d\theta'_1 dB d\theta_1 d\tau_1 dQ.
 \end{aligned}$$

Mais il résulte de nos substitutions que les différences des paramètres des fonctions, outre que $\varphi(Q, \tau)$, ne dépendent pas de t ; $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(Q, \tau) = \bar{\varphi}(Q)$; les coefficients de l'équation $\widehat{\psi}(u) = 0$ convergent aussi vers leurs limites, uniformément par rapport à $Q \in S$, et $B, M \in \Omega'$. Il résulte de tout cela que le premier composant de l'expression (5''', 5) converge vers zéro avec l'inverse du paramètre t , donc

$$\begin{aligned}
 \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{Y}_1 &= \lambda \iint_S \bar{\varphi}(Q) \int_0^{4T} \int_0^{4T-\tau} \iiint_{\Omega'} \bar{\omega}^B(A, B, 4T - \tau - \theta) \cdot \\
 &\cdot \int_0^{\theta} \iiint_{\Omega'} \bar{\mathcal{N}}(B, M, \theta - \theta') \bar{f}(M, Q, \theta') dM d\theta' dB d\theta d\tau dQ,
 \end{aligned}$$

où

$$\overline{\varrho}(B, M, \theta) = \lim_{t \rightarrow \infty} \varrho(B, t; M, t - \theta), \quad 0 < \theta < 4T, \quad B \neq M$$

est le noyau résolvant construit sur la quasi-solution

$$\overline{\omega}^M(B, M, \theta).$$

On posera dans la dernière intégrale $4T - \tau = u$; d'où $d\tau = -du$, et on aura :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{Y}_1 &= \lambda \int_S \overline{\varphi}(Q) \int_0^{4T} du \int_0^u \iiint_{\Omega'} \overline{\omega}^B(A, B, u - \theta) d\theta \cdot \\ &\cdot \int_0^\theta \iiint_{\Omega'} \overline{\varrho}(B, M, \theta - \theta') \overline{f}(M, Q, \theta') dM d\theta' dB dQ = \\ &= \lambda \int_S \overline{\varphi}(Q) \int_0^{4T} d\theta \int_\theta^{4T} \iiint_{\Omega'} \overline{\omega}^B(A, B, u - \theta) du \cdot \\ &\cdot \int_0^\theta \iiint_{\Omega'} \overline{\varrho}(B, M, \theta - \theta') \overline{f}(M, Q, \theta') dM dB dQ d\theta'. \end{aligned}$$

En introduisant dans l'intégrale de la quasi-solution le même changement des variables que dans la parti A de ce paragraphe on reçoit sans peine l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{Y}_1 &= 4^{\frac{n}{2}-1} \lambda \int_S \overline{\varphi}(Q) \int_0^{4T} d\theta \iiint_{\Omega'} \int_{\vartheta}^{\infty} [\overline{\vartheta}^B(A, B)]^{-\frac{n}{2}+1} \vartheta^{\frac{n}{2}-2} \exp(-v) dv \cdot \\ &\cdot \int_0^\theta \iiint_{\Omega'} \overline{\varrho}(B, M, \theta - \theta') \overline{f}(M, Q, \theta') dM dB dQ d\theta', \end{aligned}$$

où

$$\vartheta = \overline{\vartheta}^B(A, B) \cdot [4(4T - \theta)]^{-1}.$$

On intervertie maintenant l'ordre d'intégration de θ et de θ' de sorte que θ' change dans l'intervalle $\langle 0, 4T \rangle$ et θ dans l'intervalle $\langle \theta', 4T \rangle$. On change outre cela la variable d'intégration en posant $\theta - \theta' = u$, $d\theta = du$, et on trouve

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{Y}_1 = 4^{\frac{n}{2}-1} \lambda \int_S \int \bar{\varphi}(Q) \int_0^{4T} \int \int \bar{f}(M, Q, \theta') \int_0^{4T-\theta'} \int \int \bar{\mathcal{G}}(B, M, u) \cdot \int_{\vartheta_1}^{\infty} [\bar{\vartheta}^B(A, B)]^{-\frac{n}{2}+1} v^{\frac{n}{2}-2} \exp(-v) dv dB du dM d\theta' dQ,$$

où

$$\vartheta_1 = \bar{\vartheta}^B(A, B) \cdot [4(4T - \theta' - u)]^{-1}.$$

Grâce aux résultats des §§ antérieurs nous savons que les intégrales de ci dessus existe uniformément par rapport à T . Donc à la limite, pour $T \rightarrow \infty$, on peut omettre les intégrales étendues aux intervalles de T à $4T$, pour la variable d'intégration θ' , et après de $2T$ à $4T - \theta'$, pour la variable u .

Il restera à évaluer la limite pour $T \rightarrow \infty$, de l'intégrale suivante :

$$4^{\frac{n}{2}-1} \lambda \int_S \int \bar{\varphi}(Q) \int_0^T \int \int \bar{f}(M, Q, \theta') \int_0^{2T} \int \int \bar{\mathcal{G}}(B, M, u) \cdot \int_{\vartheta_1}^{\infty} [\bar{\vartheta}^B(A, B)]^{-\frac{n}{2}+1} v^{\frac{n}{2}-2} \exp(-v) dv dB du dM d\theta' dQ,$$

qui est convergente (§ 4).

Nous avons donc

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{Y}_1 = \lambda \int_S \int \bar{\varphi}(Q) \int_0^{\infty} \int \int \bar{f}(M, Q, \theta') \int_0^{\infty} \int \int \bar{\mathcal{G}}(B, M, u) \cdot \int_0^{\infty} [\bar{\vartheta}^B(A, B)]^{-\frac{n}{2}+1} 4^{\frac{n}{2}-1} v^{\frac{n}{2}-2} \exp(-v) dv dB du dM d\theta' dQ.$$

En nous appuyant sur la définition (3''',5) on peut écrire, que

$$\lim_{T, t \rightarrow \infty} \mathcal{Y}_1 = \\ = \lambda \int_S \bar{\varphi}(Q) \int_0^\infty \int_{\Omega'} \bar{f}(M, Q, \theta') \int_0^\infty \int_{\Omega'} \bar{\omega}^B(A, B) \bar{\partial} \bar{\mathcal{L}}(B, M, u) dB dw dM d\theta' dQ.$$

Mais pour $M \neq Q$, on a d'après les formules (3,5) et (10'',1)

$$\int_S \bar{\varphi}(Q) \int_0^\infty \bar{f}(M, Q, \theta') d\theta' dQ = \lambda \int_S \bar{\varphi}(Q) \bar{\lambda}_n(M) \widehat{\psi}_M[\bar{w}^Q(M, Q)] dQ.$$

De même qu'au A. § 5 on peut prouver que :

$$\lim_{T, t \rightarrow \infty} \mathcal{Y}_1 = \\ = \lambda^2 \int_S \bar{\varphi}(Q) \int_0^\infty \int_{\Omega'} \bar{\lambda}_n(M) \widehat{\psi}_M[\bar{w}^Q(M, Q)] dQ \int_0^\infty \int_{\Omega'} \bar{w}^B(A, B) \int_0^\infty \bar{\partial} \bar{\mathcal{L}}(B, M, \theta) d\theta dB dM$$

mais

$$\int_0^\infty \bar{\partial} \bar{\mathcal{L}}(B, M, \theta) d\theta = \int_0^\infty \bar{N}(B, M, \theta) d\theta + \sum_{k=1}^\infty \lambda^k \int_0^\infty \bar{N}_k(B, M, \theta) d\theta = \\ = \bar{\lambda}_n(B) \widehat{\psi}_B(u) + \sum_{k=1}^\infty \lambda^k \int_0^\infty \bar{N}_k(B, M, \theta) d\theta; \quad u = \bar{w}^M(B, M), \quad B \neq M.$$

On calculera maintenant les noyaux itérés $\bar{N}_k(B, M, \theta)$, $B \neq M$

$$\int_0^\infty \bar{N}_2(B, M, \theta) d\theta = \int_0^\infty d\theta \int_0^\theta \int_0^\theta \int_{\Omega'} \bar{N}(B, M', \theta - \theta') \bar{N}(M', M, \theta') d\theta' dM' = \\ = \int_0^\infty d\theta' \int_\theta^\infty \int_0^\infty \int_{\Omega'} \bar{N}(B, M', \theta - \theta') \bar{N}(M', M, \theta') d\theta dM' = \\ = \int_0^\infty d\theta' \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\Omega'} \bar{N}(B, M', v) \bar{N}(M', M, \theta') dv dM' = \\ = \bar{\lambda}_n(B) \int_0^\infty \int_{\Omega'} \bar{\lambda}_n(M') \widehat{\psi}_B[\bar{w}^{M'}(B, M')] \widehat{\psi}_{M'}[\bar{w}^M(M', M)] dM' = M_2(B, M).$$

Il sera de même :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \bar{N}_3(B, M, \theta) d\theta &= \int_0^\infty d\theta' \int_0^\infty \iiint_{\Omega'} \bar{N}_2(B, M', v) \bar{N}(M', M, \theta') dv dM' = \\ &= \iiint_{\Omega'} M_2(B, M') M_1(M', M) dM' = M_3(B, M) \end{aligned}$$

où

$$M(A, B) = M_1(A, B) = \widehat{\psi_A} [w^B(A, B)] \cdot \bar{\lambda}_n(A).$$

On aura généralement :

$$\int_0^\infty \bar{N}_{k+1}(B, M, \theta) d\theta = M_{k+1}(B, M) = \iiint_{\Omega'} M_k(B, M') \cdot M(M', M) dM', \quad k=2, 3, \dots,$$

de façon que :

$$\int_0^\infty \bar{\partial} \bar{\mathcal{L}}(B, M, \theta) d\theta = M(B, M) + \sum_{k=1}^\infty \lambda^k M_k(B, M) = \bar{\partial} \bar{\mathcal{L}}(B, M)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \lim_{T, t \rightarrow \infty} \mathcal{J}_1 &= \lambda^2 \int_S \bar{\varphi}(Q) \iiint_{\Omega'} \bar{\lambda}_n(M) \widehat{\psi_M} [w^Q(M, Q)] dQ \cdot \\ &\quad \cdot \iiint_{\Omega'} \bar{w}^B(A, B) \left\{ M(B, M) + \sum_{k=1}^\infty \lambda^k M_k(B, M) \right\} dB, \end{aligned}$$

D'ici on trouvera en posant :

$$\lambda \cdot \bar{\lambda}_n(A) \widehat{\psi_A} [\bar{w}^B(A, B)] = \bar{f}(A, B) = \lambda \cdot M(A, B)$$

et

$$\bar{f}(B, Q) + \lambda \iiint_{\Omega'} \bar{\partial} \bar{\mathcal{L}}(B, M) \bar{f}(M, Q) dM = \bar{\Phi}(B, Q)$$

que

$$(10, 5) \quad \lim_{T, t \rightarrow \infty} \mathcal{J}_1 = \int_S \bar{\varphi}(Q) \iiint_{\Omega'} \bar{w}^B(A, B) [\bar{\Phi}(B, Q) - \bar{f}(B, Q)] dB.$$

Ces expressions, le LEMME (2,1) et ces définitions permettent d'écrire, que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \iint_S \varphi(Q, \tau) \Gamma(A, t; Q, \tau) dS d\tau =$$

$$\iint_S \bar{\varphi}(Q) \left\{ \bar{w}^Q(A, Q) + \iint_{\Omega'} \bar{w}^B(A, B) \left[\bar{f}(B, Q) + \lambda \iint_{\Omega'} \bar{\partial} \bar{v}(B, M) \bar{f}(M, Q) dM \right] dB \right\} dQ,$$

donc

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \iint_S \varphi(Q, \tau) \Gamma(A, t; Q, \tau) dQ d\tau = \iint_S \bar{\varphi}(Q) \left\{ \bar{w}^Q(A, Q) + \iint_{\Omega'} \bar{w}^B(A, B) \bar{\Phi}(B, Q) dB \right\} dQ.$$

Posons maintenant :

$$\bar{w}^Q(A, Q) + \iint_{\Omega'} \bar{w}^B(A, B) \bar{\Phi}(B, Q) dB = \bar{\Gamma}(A, Q).$$

On obtiendra donc :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \iint_S \varphi(Q, \tau) \Gamma(A, t; Q, \tau) dQ d\tau = \iint_S \bar{\varphi}(Q) \bar{\Gamma}(A, Q) dQ = \bar{U}(A).$$

Mais il est facile de vérifier que la fonction $\bar{\Gamma}(A, Q)$ est la résolution de l'équation elliptique :

$$(11,5) \quad \widehat{\psi}_A(u) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \bar{a}_{\alpha, \beta}(A) u''_{x_\alpha x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^n \bar{b}_\alpha(A) u'_{x_\alpha} + \bar{c}(A) u = 0.$$

qui fût nommé équation elliptique limite de l'équation (1). $\bar{U}(A)$ est donc le potentiel de simple couche de cet équation limite (11,5) et de densité limite $\bar{\varphi}(Q)$ sur la surface S . Nous pouvons donc écrire que

$$(12,5) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} U(A, t) = \bar{U}(A), \quad A \in \Omega.$$

On a donc démontré le théorème suivant :

TÉORÈME (1,5). *Si les coefficients de l'équation parabolique normale (1) vérifient les suppositions I, II, III et V, si la densité $\varphi(Q, t)$ du potentiel de simple couche $U(A, t)$ de l'équation (1), sur le bord S du domaine Ω , dans R_n , $n \geq 3$, vérifié la supposition IV, alors ce potentiel $U(A, t)$ converge, avec le paramètre t tendant vers l'infinie, vers le potentiel de simple couche $\bar{U}(A)$ de l'équation elliptique limite (11,5) et de la densité limite $\bar{\varphi}(Q)$, sur le bord S du même domaine Ω , si seulement ce domaine Ω est conforme avec la supposition VI.*

O U V R A G E S C I T É E S

- [1] W. POGORZELSKI, « *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique* », *Ricerche di Mathematica*, vol. 5, (1956).
- [2] S. D. EIDELMANN, « *Théorèmes du type de Liouville pour les systèmes paraboliques et elliptiques* », *Doklady Akademii Nauk, SSSR*. 99 (1954) N. 5. p. 681-684.
- [3] M. KRZYŻANSKI, « *Sur l'allure asymptotique des potentiels de chaleur et de l'intégrale de Fourier-Poisson* », *Annales Polonici Mathematici*, III, 2 (1957).
- [4] W. POGORZELSKI, « *Étude de la solution fondamentale de l'équation elliptique et des problèmes aux limites* », *Annales Polonici Mathematici*, III, 2 (1957).
- [5] C. MIRANDA, « *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico* », Berlin, 1955, C. III.
- [6] M. KRZYŻANSKI, « *Évaluations des solutions de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique, déterminées dans un domaine non borné* », *Annales Polonici Mathematici*, IV, 1 (1957).