

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

G. VRANCEANU

Spazi a connessione affine e le algebre di numeri ipercomplessi

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 12, n° 1-2 (1958), p. 5-20

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_1-2_5_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SPAZI A CONNESSIONE AFFINE E LE ALGEBRE DI NUMERI IPERCOMPLESSI

di G. VRANCEANU (Bucarest)

SUNTO. Nella prima parte di questo lavoro si mostra come nello studio degli spazi A_n , che io ho chiamato a connessione affine costante, si possono utilizzare risultati del campo delle algebre di numeri ipercomplessi ed inversamente. Nella seconda parte si considera una riduzione alla forma canonica degli spazi A_n (o delle algebre $\mathcal{Q}_n$), per cui il vettore associato non è nullo e il tensore covariante quadratico associato è non degenere e si determinano tutte le algebre $\mathcal{Q}_3$ aventi questa proprietà. Nella terza parte si mostra come si può associare ad uno spazio a connessione affine A_n qualunque una algebra generale, le cui unità variano da punto a punto.

I

È ben noto che si chiama spazio a connessione affine A_n , uno spazio a n dimensioni $x^1, \dots, x^n$, che possiede un sistema di n^3 funzioni Γ_{jk}^i delle variabili $x^1, \dots, x^n$, che hanno la proprietà che per una trasformazione di coordinate

$$(1) \quad x'^i = x'^i(x^1, \dots, x^n)$$

si trasformano secondo le formule ⁽¹⁾

$$(2) \quad \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma_{rs}^i \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - \Gamma_{ik}^s \frac{\partial x'^i}{\partial x^s}$$

dove Γ_{rs}^i sono funzioni delle variabili $x^1, \dots, x^n$ e costituiscono le componenti della connessione affine dello spazio A_n , nelle variabili $x^1, \dots, x^n$.

Diciamo che lo spazio A_n è a connessione affine costante se esiste un sistema di variabili per il quale le componenti della connessione sono delle

⁽¹⁾ Altri autori prendono le Γ_{jk}^i con segno cambiato.

costanti e si mostra facilmente che una condizione necessaria e sufficiente perchè uno spazio A_n sia a connessione affine costante è che esso abbia un gruppo di trasformazioni in sè semplicemente transitivo ed abeliano.

Se le coordinate nelle quali la connessione è costante sono le variabili $x^1, \dots, x^n$, dunque se le componenti Γ_{jk}^i sono delle costanti, allora lo spazio ammette come gruppo di trasformazioni in sè il gruppo delle traslazioni

$$(3) \quad x'^i = x^i + a^i.$$

Infatti se nelle formule (2) consideriamo Γ_{jk}^i altresì costanti e uguali rispettivamente alle Γ_{jk}^i e cioè consideriamo Γ_{jk}^i la connessione dello stesso spazio A_n , le formule (2) ammettano come soluzioni le (3) qualunque siano le a^i , ciò che dimostra che le (3) costituiscono un gruppo di trasformazioni dello spazio A_n a connessione costante in sè stesso.

Inversamente se le (3) sono trasformazioni in sè di uno spazio A_n , questo spazio è a connessione affine costante. Infatti tenendo conto delle (3), le (2) diventano

$$\Gamma_{jk}^i(x') = \Gamma_{jk}^i(x)$$

che non possono aver luogo che se le Γ_{jk}^i sono delle costanti.

Possiamo osservare che nelle variabili $x^1, \dots, x^n$ lo spazio a connessione affine costante è definito in tutto lo spazio euclideo $E_n(x^1, \dots, x^n)$ e la proprietà si conserva per una trasformazione affine delle variabili $x^1, \dots, x^n$. Le variabili $x^1, \dots, x^n$ possono chiamarsi coordinate cartesiane dello spazio a connessione affine costante. Per una trasformazione affine di coordinate

$$(3') \quad x'^i = a_j^i x^j + a^i$$

le quantità Γ_{jk}^i si trasformano come un tensore perchè le (2) diventano

$$(4) \quad \Gamma_{rs}^i a_j^r a_k^s = \Gamma_{jk}^s a_s^i$$

Possiamo altresì considerare uno spazio a connessione affine costante realizzato non solo nello spazio euclideo $E_n(x^1, \dots, x^n)$ ma anche in spazi toroidali e cioè nei quali una o più delle variabili x^i sono degli angoli, e perciò determinate a meno di un multiplo di 2π . Questo fatto equivale a considerare come spazio un prodotto diretto di un certo numero di rette e un certo numero di cerchi. In particolare possiamo considerare lo spazio a

connessione affine costante definito sopra il toro a n dimensioni per il quale tutte le variabili sono definite a meno di un multiplo di 2π .

Restando alla prima interpretazione e cioè dello spazio A_n a connessione costante Γ_{jk}^i realizzato in tutto lo spazio euclideo $E_n(x^1, \dots, x^n)$, possiamo associare allo spazio A_n l'algebra $\mathcal{A}_n$ di numeri ipercomplessi

$$(5) \quad x = x^1 e_1 + \dots + x^n e_n$$

dove $e_1, \dots, e_n$ sono delle unità ipercomplesse dell'algebra $\mathcal{A}_n$, la loro legge di moltiplicazione essendo data dalle formule

$$(6) \quad e_j e_k = \Gamma_{jk}^i e_i$$

Infatti una trasformazione di unità ipercomplesse

$$(7) \quad e_i = a_i^s e'_s$$

dove a_i^s sono dei numeri reali a determinante $|a_i^s|$ non nullo è equivalente ad una trasformazione lineare e omogenea delle variabili dello spazio A_n

$$(7') \quad x'^s = a_i^s x^i$$

con le stesse costanti a_i^s e le quantità Γ_{jk}^i si trasformano secondo le formule (4), sia che teniamo conto dalle (7) nelle formule (6), sia che teniamo conto dalle (7') nelle formule (2).

Abbiamo così il teorema:

A qualunque spazio A_n a connessione costante si può associare un'algebra $\mathcal{A}_n$ di numeri ipercomplessi e inversamente.

Ne risulta dunque che le proprietà dello spazio A_n a connessione costante Γ_{jk}^i e dell'algebra $\mathcal{A}_n$ dipendono come ci mostrano le (4), da un tensore Γ_{jk}^i costante contravariante nell'indice i e covariante negli indici j, k .

Una prima osservazione che possiamo fare è che lo spazio A_n è senza torsione se l'algebra $\mathcal{A}_n$ è commutativa ed inversamente. Infatti le componenti del tensore di torsione dello spazio A_n sono date dalle formule

$$T_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i$$

Ne risulta che T_{jk}^i sono nulle se Γ_{jk}^i sono simmetriche in j, k ossia se il prodotto $e_j e_k$ è eguale a $e_k e_j$, ossia se l'algebra $\mathcal{A}_n$ è commutativa. Abbiamo evidentemente le formule

$$(e_l e_j) e_k - e_l (e_j e_k) = (\Gamma_{lj}^s \Gamma_{sk}^i - \Gamma_{ls}^i \Gamma_{jk}^s) e_i.$$

Ne risulta che l'algebra $\mathcal{Q}_n$ è associativa se abbiamo le formule

$$\Gamma_{sk}^i \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{ls}^i \Gamma_{jk}^s = 0.$$

Tenendo conto altresì delle formule che ci forniscono le componenti del tensore di curvatura dello spazio A_n , ne risulta che questo tensore è nullo:

$$(8) \quad \Gamma_{sk}^i \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{sl}^i \Gamma_{jk}^s = 0$$

se l'algebra $\mathcal{Q}_n$ è nello stesso tempo commutativa ed associativa.

Abbiamo così il teorema:

Se $\mathcal{Q}_n$ è commutativa ed associativa lo spazio A_n è localmente euclideo ossia il suo tensore di torsione e di curvatura sono nulli. Inversamente se A_n è localmente euclideo, la $\mathcal{Q}_n$ è commutativa e associativa.

Si sa che tra le algebre più studiate, vi sono quelle che possiedono un modulo e cioè nelle quali esiste un numero ⁽²⁾

$$\varepsilon = \varepsilon^1 e_1 + \dots + \varepsilon^n e_n$$

che ha la proprietà

$$x \varepsilon = x$$

per qualunque numero x di $\mathcal{Q}_n$. Abbiamo dunque

$$x^i e_i \varepsilon^j e_j = x^r e_r,$$

formula che possiamo scrivere tenendo conto dalle (3)

$$x^i \varepsilon^j \Gamma_{ij}^r e_r = x^r e_r$$

dunque dobbiamo avere le condizioni

$$(9) \quad \Gamma_{ij}^r \varepsilon^j = \delta_i^r \begin{cases} = 1, & r = i \\ = 0, & r \neq i \end{cases}$$

Se facciamo $r = i$ e sommiamo, otteniamo le formule

$$\varepsilon^j \Gamma_j = n \quad (\Gamma_j = \Gamma_{ij}^i),$$

⁽²⁾ E. STUDY et E. CARTAN, *Nombres complexes*, Encyclopédie des sciences math. ed. française, 15, 1908 o B. SEGRE, *La teoria delle algebre ed alcune questioni di realtà*. Rend. di Mat. e delle sue applicazioni, Roma 1954, 13, 157-169.

dove Γ_j è quello che si chiama la connessione contratta, o il vettore di connessione. Abbiamo dunque il teorema:

Una condizione necessaria perchè l'algebra $\mathcal{A}_n$ abbia un modulo è che la connessione contratta Γ_j non sia nulla.

Che la condizione non è sufficiente lo mostra l'esempio di una algebra $\mathcal{A}_2$ avente le formule di struttura

$$(10) \quad e_1^2 = e_1, \quad e_1 e_2 = 0, \quad e_2^2 = 0$$

la cui connessione contratta è data da $\Gamma_1 = 1$, $\Gamma_2 = 0$, ma l'algebra (10) non ha un modulo perchè le formule (9) non hanno soluzioni. Ne risulta che le algebre per cui Γ_i non è nullo contengono tutte le algebre con modulo, ma non inversamente e cioè esistono delle algebre con Γ_i non nullo e che non hanno un modulo.

Si può dimostrare ⁽³⁾ che un'algebra commutativa ed associativa per la quale le Γ_i sono tutte nulle è un'algebra nilpotente e cioè un'algebra per la quale l'equazione caratteristica ha solamente delle radici nulle. Per la dimostrazione si introducono i tensori covarianti di diversi ordini

$$(11) \quad \Gamma_{jk} = \Gamma_{js}^h \Gamma_{kh}^s, \dots, \Gamma_{j_1 \dots j_p} = \Gamma_{j_1 s_1}^{s_1} \Gamma_{j_2 s_2}^{s_2} \dots \Gamma_{j_p s_p}^{s_p}$$

e si mostra che per un'algebra commutativa ed associativa, questi tensori sono nulli se è nullo il vettore Γ_j . Infatti se nelle formule (8) facciamo $i = k$ e sommiamo ne risulta

$$(12) \quad \Gamma_s \Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ij}$$

formule che dimostrano la proprietà per il tensore quadratico. In modo analogo se nell'espressione di $\Gamma_{j_1 \dots j_p}$ data dalle (11) poniamo in virtù delle (8), al posto dei primi termini $\Gamma_{j_1 s_1}^{s_1} \Gamma_{j_2 s_2}^{s_2}$ le quantità $\Gamma_{s_3 s_2}^{s_1} \Gamma_{j_1 j_2}^s$, ne risultano le formule

$$\Gamma_{j_1 \dots j_p} = \Gamma_{j_1 j_2}^s \Gamma_{s j_3 \dots j_p}.$$

Queste formule associate alle (12) ci mostrano che se per una algebra

⁽³⁾ P. MOCANU, *Spatii cu conexiune afină constantă echivalente în mare cu spatiul euclidian*, Comunicările Acad. R. P. R., Bucuresti, 2, 1952, pp. 389-395.

commutativa ed associativa uno dei tensori covarianti

$$(12') \quad \Gamma_i, \Gamma_{jk}, \dots, \Gamma_{j_1 \dots j_p}, \dots$$

è nullo, sono nulli anche i tensori di ordine superiore. Le algebre nilpotenti sono caratterizzate dal fatto che tutti i tensori covarianti (13) sono nulli.

II.

Supponiamo adesso che il vettore $\Gamma_k = \Gamma_{ik}^i$ non sia nullo. Esso si può allora sempre ridurre alla forma canonica

$$(13) \quad \Gamma_{i1}^i = \dots = \Gamma_{in-1}^i = 0, \Gamma_{in}^i = n.$$

Questa forma canonica è conservata solamente dalle trasformazioni lineari della forma

$$(14) \quad x'^i = \alpha_j^i x^j + \alpha_n^i x^n + \alpha^i, x'^n = x^n + \alpha^n.$$

D'altra parte tenendo conto delle (12), abbiamo

$$\Gamma_{ij} = n \Gamma_{ij}^n$$

dunque le componenti Γ_{ij}^n costituiscono un tensore del secondo ordine covariante. Ne risulta che la forma quadratica

$$(14') \quad \Phi = \Gamma_{ij}^n dx^i dx^j + 2 \Gamma_{ni}^n dx^i dx^n + \Gamma_{nn}^n (dx^n)^2$$

è un invariante del problema rispetto alle trasformazioni (14).

Supponiamo che la forma quadratica in $n - 1$ differenziali dx^i

$$(14'') \quad \Gamma_{ij}^n dx^i dx^j \quad (i, j = 1, \dots, n - 1)$$

non sia degenera. Possiamo allora scrivere la forma quadratica Φ data dalla formula (14') sotto la forma canonica

$$(14''') \quad \Phi = \varepsilon_1 (dx^1)^2 + \dots + \varepsilon_{n-1} (dx^{n-1})^2 + \varrho (dx^n)^2$$

dove $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ sono uguali a $+1$ o -1 . Abbiamo dunque le formule

$$(15) \quad \Gamma_{ij}^n = \varepsilon_i \delta_j^i, \Gamma_{ni}^n = 0, \Gamma_{nn}^n = \varrho.$$

Supponiamo altresì che lo spazio A_n sia localmente euclideo, dunque che siano verificate le formule (8).

Consideriamo in primo luogo queste formule per $i = l = n, j, k < n$ e per $i = j = l, k < n$. Esse si scrivono tenendo conto delle (15)

$$(15') \quad \Gamma_{jkn}^n = \varepsilon_k \Gamma_{jn}^k - \varrho \varepsilon_j \delta_k^j = 0, \quad \Gamma_{nkn}^n = \varepsilon_k \Gamma_{nn}^k = 0$$

dove k, j sono indici fissi. Le prime di queste formule ci danno $\Gamma_{kn}^j = \varrho \delta_k^j$ e l'ultima formula (13) ci mostra che dobbiamo avere $\varrho = 1$. Ne risulta dunque che le formule (15') si possono scrivere

$$(16) \quad \Gamma_{kn}^j = \delta_k^j, \quad \Gamma_{nn}^j = 0 \quad (j, k < n)$$

Quanto alle formule (8) per $i = j = n, l, k < n$ si trova che esse sono identicamente verificate.

Consideriamo allora le formule (8) per $i = n$ e $j, k, l < n$. Abbiamo

$$(17) \quad \Gamma_{jkl}^n = \varepsilon_k \Gamma_{jl}^k - \varepsilon_l \Gamma_{jk}^l = 0$$

dove k, l sono indici fissi.

Considerando le equazioni (8) per le quali l'indice $i < n$ ma uno o più degli indici j, k, l sono uguali a n cioè le equazioni

$$\Gamma_{nkl}^i = \Gamma_{sk}^i \Gamma_{nl}^s - \Gamma_{sl}^i \Gamma_{nk}^s = 0$$

$$\Gamma_{nml}^i = \Gamma_{sn}^i \Gamma_{ml}^s - \Gamma_{sl}^i \Gamma_{mn}^s = 0$$

$$\Gamma_{jnl}^i = \Gamma_{sn}^i \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{sl}^i \Gamma_{jn}^s = 0$$

si constata che esse sono verificate (basta tener conto dalle equazioni (15) e (16)).

Ci restano dunque da considerare le formule (8) nelle quali gli indici i, j, k, l sono tutti minori di n . Queste equazioni si scrivono

$$(18) \quad \Gamma_{jkl}^i = \Gamma_{sk}^i \Gamma_{jl}^s - \Gamma_{sl}^i \Gamma_{jk}^s + \varepsilon_j (\delta_k^i \delta_l^j - \delta_l^i \delta_k^j) = 0$$

dove l'indice di sommazione s varia da 1 a $n - 1$. Osserviamo altresì che l'ultima (13) è identicamente verificata dalle (15) (16) con $\varrho = 1$ e che le altre (13) si scrivono esplicitamente

$$(19) \quad \Gamma_k = \Gamma_{1k}^1 + \dots + \Gamma_{n-1n}^{n-1} = 0, \quad (k = 1, \dots, n - 1);$$

dunque le equazioni (17), (18) e (19) costituiscono delle condizioni nelle componenti Γ_{jk}^i con indici i, j, k minori di n .

Abbiamo dunque il teorema:

Essendo dato uno spazio A_n a connessione affine costante, localmente euclideo, a vettore Γ_i non nullo (13) e a forma quadratica (14'') non degenerare, la connessione di questo spazio si può ridurre alla forma canonica

$$(20) \quad \Gamma_{ij}^n = \varepsilon_i \delta_j^i, \Gamma_{ni}^n = 0, \Gamma_{nn}^i = 0, \Gamma_{nn}^n = 1, \Gamma_{jn}^i = \delta_j^i (i, j < n)$$

dove ε_i sono uguali a ± 1 e le componenti Γ_{jk}^i ($i, j, k < n$) soddisfano alle formule (17), (18) e (19).

Consideriamo adesso il caso in cui le ε_i sono tutte uguali a $\varepsilon = \pm 1$. In questo caso le formule (17) ci dicono che le componenti Γ_{jl}^k sono simmetriche negli indici k, l . Poichè queste componenti sono supposte già simmetriche in j, l risulta che Γ_{jl}^k sono simmetriche in tutti gli indici k, j, l . D'altra parte ponendo $i = k$ nelle formule (18) e sommando da 1 a $n - 1$ si ha per $n > 2$ e tenendo conto dalle (19)

$$- \Gamma_{sl}^i \Gamma_{ji}^s + \varepsilon (n - 2) \delta_l^j = 0.$$

Ponendo anche $l = j$ e sommando da 1 a $n - 1$ si ottiene, tenendo conto dalla simmetria delle Γ_{sl}^i ,

$$(20') \quad \varepsilon (n - 1) (n - 2) = \sum (\Gamma_{sj}^i)^2$$

e questa formula ci mostra che ε deve essere positivo, dunque uguale a $+1$.

Abbiamo dunque il teorema:

Se lo spazio A_n a connessione affine localmente euclideo è reale e la forma quadratica (14'') è definita, essa è definita positiva insieme alla forma (14').

Tenendo conto del fatto che nel caso in cui la forma (14'') o (14') è definita positiva, le Γ_{ik}^i sono simmetriche in tutti gli indici e che la forma canonica (14''') è conservata solamente dalle trasformazioni (14) che sono delle trasformazioni ortogonali nelle variabili $x^1, \dots, x^{n-1}$, ne risulta che la forma cubica

$$(21) \quad \psi = \Gamma_{jk}^i x^i x^j x^k$$

è un invariante ortogonale associato allo spazio A_n e rispetto alle trasformazioni ortogonali delle $x^1, \dots, x^{n-1}$.

Ne risulta dunque che essendo dati due spazi a connessione costante localmente euclidei A_n e $\bar{A}_n$ le cui componenti Γ e $\bar{\Gamma}$ soddisfano rispettivamente le (20) con $\varepsilon_i = 1$ e le (17), (18) e (19), questi spazi sono equivalenti se le rispettive forme (21) sono equivalenti per una trasformazione ortogonale delle variabili $x^1, \dots, x^{n-1}$.

Supponiamo adesso che le ε_i non siano tutte uguali a l'unità e che si abbia $\varepsilon_p = 1$ ($i = 1, \dots, m$) e $\varepsilon_\alpha = -1$ ($\alpha = m+1, \dots, n-1$). Le formule (17) e (18) si scrivono in questo caso

$$(21') \quad \Gamma_{jq}^p = \Gamma_{jp}^q, \Gamma_{ja}^p = \Gamma_{jp}^a, \Gamma_{j\beta}^a = \Gamma_{ja}^\beta \quad (p, q \leq m).$$

$$\Gamma_{sk}^i \Gamma_{pl}^s - \Gamma_{sl}^i \Gamma_{pk}^s + \delta_k^i \delta_l^p - \delta_l^i \delta_k^p = 0$$

$$\Gamma_{sk}^i \Gamma_{al}^s - \Gamma_{sl}^i \Gamma_{ak}^s - \delta_k^i \delta_l^a + \delta_l^i \delta_k^a = 0$$

e due algebre associative e commutative che soddisfano alle stesse formule (19), (20), (21) sono equivalenti, se per una trasformazione quasi ortogonale, che conserva la forma quadratica

$$(dx^1)^2 + \dots + (dx^m)^2 - (dx^{m+1})^2 - \dots - (dx^n)^2$$

si può fare in modo che le due algebre abbiano le stesse componenti Γ_{jk}^i ($i, j, k = 1, \dots, n-1$).

Consideriamo adesso l'algebra associata allo spazio A_n . Abbiamo in virtù delle formule (20):

$$(22) \quad e_j e_k = \Gamma_{jk}^i e_i + \varepsilon_i \delta_j^i e_n$$

$$e_i e_n = e_i, e_n^2 = e_n,$$

e queste formule ci mostrano che l'unità e_n è un modulo. L'algebra associata possiede dunque un modulo. Quanto alle unità $e_1, \dots, e_{n-1}$ esse sono determinate da una trasformazione ortogonale nel caso in cui Γ_{jk}^i sono simmetriche in tutti gli indici e ε_i sono tutti uguali a $+1$. La determinazione delle forme canoniche delle algebre (22) in questo caso dipende dalla riduzione ad una forma canonica della forma cubica (21) per trasformazioni ortogonali delle unità $e_1, \dots, e_{n-1}$.

Possiamo osservare altresì che le formule (22) ci mostrano che le quantità Γ_{jk}^i e $\Gamma_{jk}^n = \varepsilon_i \delta_j^i$ possono essere considerate come componenti di una connessione proiettiva a $n-1$ dimensioni. Dunque alla connessione affine costante A_n si può associare una connessione proiettiva costante a $n-1$ dimensioni.

Supponiamo adesso di essere nel caso $n = 3$ e che $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$. In questo caso le formule (17) e (19) si possono scrivere

$$(22) \quad \begin{aligned} \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{11}^2, \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^1 &= -\Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2 \end{aligned}$$

e perciò tutte le componenti Γ_{jk}^i ($i, j, k = 1, 2$) si possono esprimere tramite $\Gamma_{22}^1, \Gamma_{11}^2$. Quanto alle formule (18) esse si scrivono, tenendo conto di queste formule:

$$\Gamma_{112}^1 = \Gamma_{212}^2 = 0, \Gamma_{121}^1 = \Gamma_{212}^1 = -2(\Gamma_{11}^2)^2 - 2(\Gamma_{22}^1)^2 + 1 = 0.$$

Ne risulta che le quantità $\Gamma_{11}^2, \Gamma_{22}^1$ sono legate dalla equazione

$$(23) \quad (\Gamma_{11}^2)^2 + (\Gamma_{22}^1)^2 = \frac{1}{2}.$$

Quanto alla forma ψ essa si scrive

$$\psi = -\Gamma_{22}^1 (x^1)^3 + 3\Gamma_{11}^2 (x^1)^2 x^3 + 3\Gamma_{22}^1 x^1 (x^3)^2 + \Gamma_{11}^2 (x^3)^3.$$

Questa forma si può scrivere evidentemente come un prodotto di tre fattori dei quali almeno uno è reale. Possiamo scegliere gli assi ortogonali x^1, x^2 in modo che questo fattore reale sia x^1 , dunque in modo che $\Gamma_{11}^2 = 0$. In questo caso la formula (23) diviene

$$(24) \quad \Gamma_{22}^1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ma siccome Γ_{22}^1 cambia di segno con x^1 possiamo supporre sempre Γ_{22}^1 positivo.

Abbiamo dunque il teorema:

Esiste una sola algebra associativa e commutativa per cui il vettore Γ_i non è nullo e il tensore quadratico è definito positivo le cui formule di moltiplicazione si scrivono

$$(25) \quad \begin{aligned} e_1^2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + e_3, e_1 e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_2, e_2^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} e_1 + e_3 \\ e_1 e_3 &= e_1, e_2 e_3 = e_2, e_3^2 = e_3 \end{aligned}$$

Consideriamo adesso il caso in cui ε_1 e ε_2 sono di segni contrari. Possiamo

sempre supporre $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$ e allora le equazioni (17) e (19) si scrivono

$$(26) \quad \begin{aligned} \Gamma_{12}^1 &= -\Gamma_{11}^2, \Gamma_{12}^2 = -\Gamma_{22}^1 \\ \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{22}^1, \Gamma_{22}^2 = \Gamma_{11}^2. \end{aligned}$$

Quanto alle equazioni (18) esse ci danno

$$(26') \quad 2(\Gamma_{22}^1)^2 - 2(\Gamma_{11}^2)^2 = 1.$$

Ne risulta che, purchè la connessione sia reale dobbiamo avere $|\Gamma_{22}^1| > |\Gamma_{11}^2|$. Possiamo anche in questo caso con una trasformazione iperbolica delle variabili x^1, x^2 fare in modo che $\Gamma_{11}^2 = 0$ e abbiamo anche in questo caso una algebra.

Abbiamo così il teorema:

Esistono due algebre $\mathcal{A}_3$ reali per le quali il vettore $\Gamma_i = n \delta_n^i$ è non nullo e la forma quadratica (14'') è non degenera.

III.

Tenendo conto del fatto che uno spazio A_n a connessione affine costante può essere realizzato non solamente sullo spazio euclideo, ma anche sugli spazi toroidali e non solamente nelle coordinate cartesiane $x^1, \dots, x^n$, ma anche in coordinate curvilinee qualunque, ci si può domandare se possiamo fare la stessa cosa per l'algebra $\mathcal{A}_n$ associata. Vogliamo far vedere che questa cosa è possibile se interpretiamo le unità $e_1, \dots, e_n$ come le derivate parziali di una funzione delle variabili $x^1, \dots, x^n$.

Infatti abbiamo sempre

$$(27) \quad df = \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

e se supponiamo che $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ sono uguali a e_i , dove e_i sono considerate delle costanti indipendenti dalle variabili $x^1, \dots, x^n$, l'equazione (27) si può integrare ed abbiamo

$$f = e_i x^i + c$$

dove c è una costante. Ne risulta che f sono i numeri dell'algebra $\mathcal{A}_n$ astra-

zione fatta da una costante. Quanto alla legge di moltiplicazione (6) dell'algebra essa è data dai prodotti simbolici

$$\frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^k} = \Gamma_{jk}^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Considerando f come una funzione, si può dare un carattere invariante a queste formule rispetto a delle trasformazioni di variabili introducendo nel primo membro i termini $-\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k}$ che nel caso in cui $\frac{\partial f}{\partial x^i}$ sono delle costanti sono nulli.

Consideriamo dunque le equazioni

$$-\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^k} - \Gamma_{jk}^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = 0.$$

Moltiplicando per e^{-f} e ponendo $u = e^{-f}$ possiamo scrivere

$$(28) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0.$$

Risulta così che le unità e_i di un'algebra hanno le stesse proprietà rispetto ad una trasformazione di variabili, che le derivate $\frac{\partial u}{\partial x^i}$, mentre il prodotto di e_k per e_j ha le proprietà di $\frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial u}{\partial x^k}$ e cioè abbiamo

$$(29) \quad (e_j e_k) = \Gamma_{jk}^i e_i.$$

Le formule (28) diventano le formule (6) di moltiplicazione dell'algebra $\mathcal{A}_n$ nel caso in cui le unità corrispondano alle derivate della funzione

$$u = e^{-\alpha_i x^i}.$$

Le formule (28) hanno un carattere invariante qualunque sia la funzione u e rispetto ad una trasformazione qualunque di variabili (1), se le Γ_{jk}^i soddisfanno alle formule (2) e cioè se costituiscono le componenti di una connessione affine. Tenendo conto dal fatto che le e_i hanno le proprietà delle $\frac{\partial u}{\partial x^i}$ risulta che rispetto ad una trasformazione (1) dobbiamo avere

$$e_s = \frac{\partial x'^i}{\partial x^s} e'_i.$$

Moltiplicando le formule (2) per e'_i e tenendo conto dalle (29) possiamo scrivere

$$(29') \quad \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^j \partial x^k} e'_i = (e'_r e'_s) \frac{\partial x'^r}{\partial x^j} \frac{\partial x'^s}{\partial x^k} - (e_j e_k)$$

dove $(e_r e_s)'$ sono prodotti di e'_s per e'_r dunque abbiamo

$$e'_r e'_s = \Gamma_{rs}^i e'_i.$$

Le formule (29') definiscono dunque la legge di trasformazione dei prodotti $(e_j e_k)$ rispetto ad una trasformazione di variabili.

Partendo dalla legge di moltiplicazione (29) la legge di associazione si definisce nel modo conosciuto se le Γ_{jk}^i sono delle costanti. Altrimenti dobbiamo tener presente il fatto che $(e_j e_k)$ si comporta come $-\frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial u}{\partial x^k}$.

Dunque abbiamo

$$(29'') \quad [e_l (e_j e_k)] = \left(\frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial x^l} + \Gamma_{sl}^i \Gamma_{jk}^s \right) e_i$$

$$[(e_l e_j) e_k] = \Gamma_{sk}^i \Gamma_{jl}^s e_i$$

Possiamo considerare le cose da un punto di vista più generale e cioè supporre di avere nello spazio A_n un sistema di congruenze indipendenti (λ) i cui differenziali degli archi sono definiti dalle n forme di Pfaff

$$ds^a = \lambda_i^a dx^i, \quad dx^i = \mu_a^i ds^a$$

dove λ_i^a sono i momenti e μ_a^i i parametri delle n congruenze indipendenti (λ) .

Per una trasformazione di congruenze

$$(30) \quad d\bar{s}^a = c_b^a ds^b$$

dove c_b^a sono funzioni delle variabili $x^1, \dots, x^n$ a determinante $|c_b^a|$ diverso da zero corrisponde una trasformazione delle unità

$$(31) \quad \frac{\partial u}{\partial s^a} = c_b^a \frac{\partial u}{\partial \bar{s}^b}.$$

Quanto alle formule di moltiplicazione (28) dell'algebra $\mathcal{A}_n$ esse si scrivono

$$(32) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial s^b \partial s^c} + \gamma_{bc}^a \frac{\partial u}{\partial s^a} = 0$$

dove γ_{bc}^a sono le componenti della connessione sopra le congruenze (λ) ⁽⁴⁾. Possiamo d'altra parte considerare come unità invece di $\frac{\partial u}{\partial s^a}$ le componenti di un vettore covariante qualunque $u_1, \dots, u_n$ e le formule (31) ci dicono che queste componenti subiscono una trasformazione lineare i cui coefficienti c_a^b dipendono dal punto considerato $(x^1, \dots, x^n)$. Quanto alle formule (32) esse si possono scrivere

$$\frac{\partial u_b}{\partial s^c} + \gamma_{bc}^a u_a = 0, \left(\frac{\partial}{\partial s^a} = \frac{\partial}{\partial x_i} \mu_a^i \right)$$

Moltiplicando per ds^c possiamo scrivere

$$du_b + \gamma_{bc}^a u_a ds^c = 0,$$

fatto che ci dice che il vettore u_b si trasporta dal punto $P(x^1, \dots, x_n)$ al punto $Q(x^1 + dx^1, \dots, x^n + dx^n)$ per parallelismo nello spazio a connessione affine A_n .

Ne risulta dunque che nell'algebra generale per cui $u_1, \dots, u_n$ sono delle unità, il prodotto $(u_b u_c)$ di una unità u_c per una unità u_b è definito dalla formula

$$(33) \quad (u_b u_c) = \gamma_{bc}^a u_a$$

dunque il prodotto $(u_b u_c)$ è definito con l'aiuto del trasporto parallelo di A_n .

Per una trasformazione lineare (30) di congruenze, le unità $u_1, \dots, u_n$ si trasformano secondo le formule

$$(34) \quad u_a = c_a^b \overline{u_b}$$

e le quantità γ_{bc}^a si trasformano secondo le formule

$$(35) \quad \frac{\partial c_b^a}{\partial s^c} = \overline{\gamma_{rs}^a} c_b^r c_c^s - \gamma_{bc}^s c_s^a.$$

(4) G. VRANCEANU, *Leçons de géométrie différentielle*, Bucarest, vol. I, 1947, 1959, capitole IV.

Si tratta dunque di vedere come si trasformano i prodotti $(u_b u_c)$. Per questo osserviamo che tenendo conto dalle (34) le formule (33) si scrivono

$$(u_b u_c) = \gamma_{bc}^s c_s^a \bar{u}_a.$$

Moltiplicando le formule (35) per $\bar{u}_a$ possiamo scrivere

$$(36) \quad \frac{\partial c_b^a}{\partial s^c} \bar{u}_a = (\bar{u}_r \bar{u}_s) c_b^r c_c^s - (u_b u_c)$$

formule che ci danno la legge di trasformazione dei prodotti $(u_b u_c)$ della nostra algebra di unità $u_1, \dots, u_n$ per una trasformazione qualunque di congruenze (30).

Inversamente date le equazioni (33), per le quali sono valide, rispetto ad una trasformazione (30), le formule (34) e (36), ne risultano facilmente le formule (35), dunque γ_{bc}^a sono le componenti di una connessione affine. Ne risulta dunque il teorema:

Essendo dato uno spazio a connessione affine A_n rapportato ad un sistema di congruenze (λ) si può sempre associare a questo spazio una algebra generale la cui legge di moltiplicazione è definita dalle formule (33), dove $(u^b u_c)$ si trasformano per una trasformazione di congruenze (30), secondo le formule (36). Inversamente data una tale algebra ne risulta uno spazio A_n associato.

In questa algebra generale la legge di associatività dei prodotti ha le stesse proprietà delle formule (29'') e cioè fa intervenire le derivate delle componenti γ_{bc}^a se queste non sono costanti. Ne risulta dunque che nel caso in cui le γ_{cb}^a sono delle costanti, l'algebra associata è una vera algebra rispetto a delle trasformazioni di congruenze (30) a coefficienti c_b^a costanti.

Ne risulta dunque il teorema:

Ad uno spazio a connessione affine A_n si può associare una vera algebra, se esiste nello spazio un sistema di congruenze per il quale le componenti γ_{bc}^a della connessione siano delle costanti.

È conosciuto il fatto che uno spazio di Riemann V_n ammette un sistema di congruenze ortogonali a coefficienti di rotazioni γ_{bc}^a di Ricci costanti se lo spazio V_n ammette un gruppo semplicemente transitivo di trasformazioni in se e inversamente.

Si ha altresì che tutti gli spazi V_n a curvatura costante negativa possiedono un gruppo semplicemente transitivo, dunque a questi spazi si può associare un algebra.

Si ha altresì che gli spazi V_2 a curvatura costante positiva non possiedono un gruppo semplicemente transitivo reale, mentre gli spazi V_3 a

curvatura costante positiva, possiedono due gruppi semplicemente transitivi reali, coi quali si definisce il parallelismo di Clifford.

Per il caso degli spazi V_3 di Riemann a gruppo transitivo si mostra che essi ammettono almeno un gruppo semplicemente transitivo reale, dunque almeno una algebra reale, salvo il caso in cui lo spazio è il prodotto diretto di una retta e di un V_2 a curvatura costante positiva ⁽⁵⁾.

⁽⁵⁾ G. VRANCEANU, *Lecons de géométrie différentielle*, Bucarest, vol. I, 1957, ch. V, § 15.