

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LIONELLO LOMBARDI

Sulla semicontinuità degli integrali di Fubini-Tonelli

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 12, n° 1-2 (1958), p. 129-153

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1958_3_12_1-2_129_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1958, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLA SEMICONTINUITÀ DEGLI INTEGRALI DI FUBINI - TONELLI

di LIONELLO LOMBARDI (Milano)

I n t r o d u z i o n e

La teoria degli integrali di Fubini-Tonelli è stata oggetto di ricerche dei proff. Faedo e Magenes. Al Faedo si debbono le condizioni necessarie e sufficienti per la continuità di tali funzionali, nonché alcune condizioni necessarie per la loro semicontinuità. Il Magenes si è occupato, in uno studio sistematico, di dare condizioni sufficienti per la semicontinuità e l'esistenza dell'estremo, trattando anche le corrispondenti equazioni di Eulero: queste ricerche concernono una classe di integrali di Fubini-Tonelli, «quasi-regolari positivi», secondo la definizione data dal Magenes stesso.

Nel presente lavoro, che costituisce una rielaborazione della mia tesi di laurea presso l'Università di Pisa, sull'argomento «Integrali di Fubini-Tonelli» propostomi dal prof. Faedo, io do un'altra definizione di integrale quasi-regolare positivo. Con tale definizione, e con un'ipotesi ausiliaria, dimostro che *ogni integrale quasi-regolare positivo è semicontinuo inferiormente*. Non mi sembra che i miei risultati siano riconducibili a quelli del Magenes; nè d'altra parte conosco esempi in cui, pur avendosi la quasi-regolare positività, l'ipotesi ausiliaria introdotta non sia verificata.

§ 1. — Definizioni.

1. *Campo A*: Insieme aperto dello spazio cartesiano $S_4(x, z, y_1, y_2)$.
2. *Punti P, Q, Q₀*: P è il generico punto del campo A , e Q il generico punto del piano cartesiano (y'_1, y'_2) di cui chiamo Q_0 l'origine.
3. *Funzione f(P, Q)*: funzione continua assieme alle sue derivate

$$f_{y'_1}, f_{y'_2}, f_{y'_1 y'_1}, f_{y'_2 y'_2}, f_{y'_1 x}, f_{y'_2 z}.$$

4. *Bilinea C*: è una coppia di funzioni $y_1 = y_1(x)$ ($a \leq x \leq b$), $y_2 = y_2(z)$ ($c \leq z \leq d$), reali ed assolutamente continue, tali che tutti i punti del tipo $(x, z, y_1(x), y_2(z))$, che appunto chiameremo «punti della bilinea», siano

contenuti in A . Una bilinea è pertanto una superficie dello spazio $S_4(x, z, y_1, y_2)$.

5. *Ordinarietà*. Una bilinea si dice *ordinaria* se esiste finito l'integrale (di Lebesgue)

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f[x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z)] dx dz.$$

Nel seguito ometteremo per brevità, quando non vi sia possibilità di equivoco, l'indicazione dei limiti nell'integrale.

6. *Classe 1, 2, lipschizianità*. Una bilinea C si dice di classe 1 [di classe 2], [lipschiziana], se le funzioni $y_1(x)$ e $y_2(y)$, che chiameremo «componenti della C », hanno continue le derivate prime [hanno continue le derivate prime e seconde], [sono lipschiziane]. Tutte queste bilinee sono ordinarie, qualunque sia la funzione f .

7. *Topologia*. Se C è una bilinea e ϱ un numero > 0 , diremo *intorno ϱ della C* l'insieme dei punti di A la cui distanza in S_4 dai punti della bilinea è $\leq \varrho$. Per brevità, chiameremo $\bar{C}$ una bilinea le cui componenti siano $\bar{y}_1(x)$ ($\bar{a} \leq x \leq \bar{b}$), e $\bar{y}_2(z)$ ($\bar{c} \leq z \leq \bar{d}$). Una bilinea C si dirà *appartenente propriamente all'intorno ϱ della $\bar{C}$* , se è

$$a) \quad |a - \bar{a}| < \varrho/4, \quad |b - \bar{b}| < \varrho/4, \quad |c - \bar{c}| < \varrho/4, \quad |d - \bar{d}| < \varrho/4.$$

b) Per ogni x comune ai segmenti ab e $\bar{a}\bar{b}$ è

$$|y_1(x) - \bar{y}_1(x)| < \varrho/2$$

c) Per ogni z comune ai segmenti cd e $\bar{c}\bar{d}$ è

$$|y_2(z) - \bar{y}_2(z)| < \varrho/2$$

d) Per ogni $x < \bar{a}$ ed appartenente ad ab e per ogni $z < \bar{c}$ ed appartenente a $\bar{c}\bar{d}$ è

$$|y_1(x) - \bar{y}_1(\bar{a})| < \varrho/4 \quad |y_2(z) - \bar{y}_2(\bar{c})| < \varrho/4$$

e) Per ogni $x > \bar{b}$ ed appartenente a ab e per ogni $z > \bar{d}$ ed appartenente a $\bar{c}\bar{d}$ è

$$|y_1(x) - \bar{y}_1(\bar{b})| < \varrho/4 \quad |y_2(z) - \bar{y}_2(\bar{d})| < \varrho/4.$$

Tutti i punti della C appartengono quindi all'intorno ϱ della $\bar{C}$.⁽¹⁾

(1) Problemi di Calcolo d. V. concernenti funzionali che presentano analogie con gli integrali di F. T. sono stati studiati mediante metriche diverse:

v. ad esempio M. PICONE, *Lez. di Analisi Funzionale* (Cap. II, § 2-3), Tumminelli Roma, 1946.

G. FICHERA 1) *Sull'ubicazione e l'unicità delle estremanti del polinomiale quadratico nella sfera di Hilbert* (Pubbl. INAC n. 160, 1949).

G. FICHERA: *Sui funzionali continui con la metrica di Fréchet*. (Atti Lincei, 1947, vol. II, fasc. 2).

8. $I(y_1, y_2)$, sua semicontinuità. Se $\bar{C}$ è una bilinea ordinaria, l'integrale $I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = \int_a^b \int_c^d f[x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}'_1(x), \bar{y}'_2(z)] dx dz$, che il Faedo [1] ⁽¹⁾ ha chiamato *integrale di Fubini-Tonelli*, si dirà semicontinuo inferiormente [superiormente] [continuo], su $\bar{C}$ se, nella topologia dello spazio delle bilinee testè introdotta, si ha, considerando $I(y_1, y_2)$ come un funzionale definito sulle bilinee ordinarie,

$$\min_{\bar{C} \rightarrow \bar{C}} \lim I(y_1, y_2) \geq I(y_1, y_2) \quad [\max_{\bar{C} \rightarrow \bar{C}} \lim I(y_1, y_2) \leq I(y_1, y_2)]$$

$$[\lim_{\bar{C} \rightarrow \bar{C}} I(y_1, y_2) = I(y_1, y_2)].$$

Se su $\bar{C}$ risulta $I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = +\infty$, si dirà che $I(y_1, y_2)$ è semicontinuo inferiormente su $\bar{C}$ se è $\lim_{\bar{C} \rightarrow \bar{C}} I(y_1, y_2) = +\infty$.

9. *Funzione* $S(P, Q)$: è una funzione arbitraria, reale e continua con S_{xx} .

10. $B_S^f(P, Q, \bar{Q})$. Se $\bar{Q} \equiv (\bar{y}'_1, \bar{y}'_2)$ è un altro generico punto del piano (y'_1, y'_2) , definiamo

$$1.1 \quad B_S^f(P, Q, \bar{Q}) = f(P, \bar{Q}) + (\bar{y}'_1 - y'_1) f_{y'_1}(P, Q) + (\bar{y}'_2 - y'_2) f_{y'_2}(P, Q) +$$

$$+ (\bar{y}'_1 - y'_1) (\bar{y}'_2 - y'_2) S(P, Q).$$

La funzione B_S^f è bilineare nelle $\bar{y}'_1, \bar{y}'_2$.

11. *Funzione* $\mathcal{E}_S^f(P, Q, \bar{Q})$ di Weierstrass: è definita da

$$1.2 \quad \mathcal{E}_S^f(P, Q, \bar{Q}) = f(P, \bar{Q}) - B_S^f(P, Q, \bar{Q}).$$

12. *Integrali Sq r p e q r p*. Diremo che $I(y_1, y_2)$ è *Sq r p* (quasi-regolare positivo rispetto ad S) se è sempre

$$1.3 \quad \mathcal{E}_S^f(P, Q, \bar{Q}) \geq 0$$

Diremo che $I(y_1, y_2)$ è *q r p* (quasi-regolare positivo) se esiste almeno una funzione S tale che $I(y_1, y_2)$ sia *Sq r p* ⁽²⁾.

⁽¹⁾ V. bibliografia finale per i numeri tra [].

⁽²⁾ Il Magenes chiama invece *q r p* un integrale quando esso soddisfa alle seguenti 3 condizioni

$$1. \quad f_{y'_1 y'_1} \geq 0 \quad 2. \quad f_{y'_2 y'_2} \geq 0$$

3. $f(P, Q)$ è la somma di una funzione non negativa e di una del tipo

$$A(P) + y'_1 B(P) + y'_2 C(P) + y'_1 \cdot y'_2 D(P).$$

13. *Funzione* $f_S(P, Q)$. Se $I(y_1, y_1)$ e $Sq r p$, definiamo

$$f_S(P, Q) = \mathcal{E}_S^f(P, Q_0, Q) = f(P, Q) - B_S^f(P, Q_0, Q)$$

La f_S si ottiene cioè sottraendo da $f(P, Q)$ la funzione bilineare $B_S^f(P, Q_0, Q)$ relativa all'origine Q_0 . Per la 1.3 è $f_S(P, Q) \geq 0$.

Inoltre, posto

$$\bar{S}(P, Q) = S(P, Q) - S(P, Q_0),$$

$$\bar{I}(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f_S dx dz$$

$\bar{I}(y_1, y_2)$ è $\bar{S}q r p$. Infatti è

$$\mathcal{E}_S^{f_S}(P, Q, \bar{Q}) = f_S(P, Q) - B_S^{f_S}(P, Q, \bar{Q}) = \mathcal{E}_S^f(P, Q, \bar{Q}).$$

È poi, avendosi $B_S^f(P, Q_0, Q_0) = f(P, Q_0)$,

$$f_S(P, Q_0) = 0$$

per ogni P .

14. *Funzione* φ^R . Sia dato un integrale $I(y_1, y_2) q r p$. Consideriamo un nuovo integrale $\bar{I}(y_1, y_2) = \iint f_S dx dz$ dedotto da esso secondo la definizione N. 13. Se R è un numero > 0 indicheremo con φ^R una funzione di P e Q soddisfacente alle condizioni seguenti

1) Sia continua con $\varphi_{y_1'}^R, \varphi_{y_2'}^R, \varphi_{y_1' y_1'}^R, \varphi_{y_2' y_2'}^R, \varphi_{y_1' x}^R, \varphi_{y_2' x}^R$.

2) Sia tale che l'integrale $\iint \varphi^R dx dz$ sia $q r p$.

3) Risulti sempre $0 \leq \varphi^R \leq f_S$ ed inoltre, per $y_1'^2 + y_2'^2 \leq R$, $\varphi^R = f_S$.

4) Esista almeno una funzione $S(P, Q)$, tale che $I_R(y_1, y_2) = \iint \varphi^R dx dz$ sia $Sq r p$, ed almeno un numero W , tali che sia sempre

a) $\left| \varphi_{y_1'}^R \right| < W(1 + |y_2'|)$

b) $\left| \varphi_{y_2'}^R \right| < W(1 + |y_1'|)$

c) $|S| < W$.

OSSERVAZIONE. Ponendo $\varphi^R = f_S$, sarebbero soddisfatte le condizioni 1), 2) e 3), ma in generale la 4) non lo è: basta considerare l'esempio $f = y_1'^2 + y_2'^2$ per sincerarsene. Il significato della funzione φ^R è quello di una funzione avente tutte le proprietà della f_S , coincidente con la f_S stessa per P qualsiasi e per Q nel cerchio di centro Q_0 e di raggio R , ed avente, fuori di questo cerchio, un comportamento all'infinito simile a quello di una funzione bilineare nelle y_1' e y_2' : se la f è bilineare in questi suoi argomenti, ponendo $\varphi^R = f_S$ si verifica subito che è verificata una condizione del tipo 4): infatti la bilinearità della f implica quella della f_S .

15. *Integrale a. b.* $I(y_1, y_2)$ si dice *a. b.* (asintoticamente bilinearizzabile) se, per ogni numero reale positivo R , si conosce un procedimento per costruire una φ^R .

OSSERVAZIONE. Come vedremo in seguito, un integrale $I(y_1, y_2)$ può essere contemporaneamente $Sq r p$ e $S^* q r p$, in cui $S(P, Q)$ e $S^*(P, Q)$ sono due funzioni diverse. Si possono quindi dedurre da $\iint f dx dz$ due diversi integrali $\bar{I}(y_1, y_2)$: cioè $\iint f_S dx dz$ e $\iint f_{S^*} dx dz$. Ora, se si conosce un procedimento di asintotica bilinearizzazione a partire da f_S , se ne deduce immediatamente un altro a partire da f_{S^*} : basta a tal fine notare che la funzione $f_S - f_{S^*}$ è bilineare nelle y_1', y_2' . L'asintotica bilinearizzabilità è quindi intrinseca all'integrale considerato, e non dipende da una particolare scelta della funzione $S(P, Q)$.

§ 2. — Alcuni criteri e critiche alle definizioni.

Faccio ora alcune osservazioni atte a motivare la definizione di integrale $q \cdot r \cdot p$.

Base del mio studio è il seguente teorema, dovuto a S. Faedo [2]

Se $A(P)$, $B(P)$, $C(P)$, $D(P)$ sono funzioni continue in tutto il campo A assieme alle loro derivate B_x , C_x e D_{xz} , allora

$$2.1 \quad I(y_1, y_2) = \iint [A(D) + y_1'(x)B(P) + y_2'(z)C(P) + y_1'(x) \cdot y_2'(z)D(P)] dx dz$$

è continuo su ogni bilinea del campo⁽⁴⁾. Inoltre ogni integrale continuo ha la forma 2.1 [S. Faedo, [1], [2].]

(4) Non è necessario dire « bilinea ordinaria » dato che questo particolare integrale esiste finito su ogni bilinea. Quest'osservazione ci sarà utile in seguito.

Tonelli, trattando il problema della semicontinuità dell'integrale $\mathcal{J}(y) = \int f[x, y(x), y'(x)] dx$, ha dato la seguente definizione di integrale $\mathcal{J}(y)$ quasi regolare positivo [1, vol. 1]: « $\mathcal{J}(y)$ si dice *q r p* quando, per x, y nel campo A e per y' qualunque, è

$$\mathcal{E}(x, y, y', \bar{y}') = f(x, y, \bar{y}') - f(x, y, y') - (\bar{y}' - y') \cdot f_{y'}(x, y, y') \geq 0. »$$

Ricordiamo che Tonelli chiama « figurativa » di $\mathcal{J}(y)$ la funzione $f(x, y, y')$, considerata però come funzione della sola y' , per x e y fissati. La definizione di integrale *q r p* si può quindi dare in questi termini, perfettamente equivalenti ai precedenti.

« $\mathcal{J}(y)$ si dice *q . r . p* quando, comunque fissati x e y nel campo A , la figurativa di $\mathcal{J}(y)$ è una funzione concava verso l'alto (in senso debole) ».

Sempre Tonelli, nella stessa opera, ha dimostrato che

Condizione caratteristica affinché un integrale $\mathcal{J}(y)$ sia continuo è che la sua figurativa, per ogni (x, y) in A , sia una funzione lineare⁽¹⁾ della y' .

Osserviamo che il fatto che $f(y')$ sia una funzione concava verso l'alto, significa che per ogni $\bar{y}'$ esiste una funzione lineare di y' , che chiameremo $\bar{L}y'(y')$, tale che sia $\bar{L}y'(y') = f(\bar{y}')$, e soddisfacente per ogni y' alla condizione $\bar{L}y'(y') \leq f(y')$. Ora gli integrali che hanno una figurativa di tipo $\bar{L}y'(y')$ sono appunto quelli continui, e quindi possiamo dare questa terza definizione, equivalente alle due precedenti, di quasi-regolare positività.

« L'integrale $\mathcal{J}(y)$ si dice *q r p*, quando, comunque fissati $\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'$, con $(\bar{x}, \bar{y})$ in A , esiste un integrale $\bar{\mathcal{J}}(y) = \int \bar{f}(\bar{x}, y, y') dx$ continuo, tale che sia $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}') = \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}')$, ed inoltre si abbia $f(\bar{x}, \bar{y}, y') \geq \bar{f}(\bar{x}, \bar{y}, y')$ per ogni y' ».

Partendo dal concetto di quasi regolare positività, Tonelli ha dimostrato il suo fondamentale

TEOREMA: *Ogni integrale $\mathcal{J}(y)$ q r p è semicontinuo inferiormente.*

L'ultima forma data alla definizione di integrale $\mathcal{J}(y)$ *q r p* mette in rilievo il legame esistente fra quasi-regolare positività e continuità.

Il teorema di Faedo ci dice quali sono gli integrali $I(y_1, y_2)$ continui: sono cioè quelli la cui figurativa (la f cioè considerata come funzione della sola Q) è una funzione bilineare, per ogni P fissato, delle y'_1, y'_2 .

Ho quindi dato la definizione di integrale $I(y_1, y_2)$ *q r p*, in modo che fra quasi-regolare positività e continuità degli integrali di Fubini-Tonelli corra la stessa relazione che vi è nel caso di $\mathcal{J}(y)$. Infatti la definizione 12, tenuto conto delle definizioni 10 e 11, equivale alla seguente

(1) In generale non omogenea.

« $I(y_1, y_2)$ si dice $q r p$, quando, comunque fissati $\bar{P}$ e $\bar{Q} \equiv (\bar{y}_1, \bar{y}_2)$, esiste un integrale continuo $\bar{I}(y_1, y_2) \equiv \iint \bar{f}(P, Q) dx dz$, che in generale dipenderà da $\bar{P}$ e da $\bar{Q}$, tale che si abbia

$$a) \quad f(\bar{P}, \bar{Q}) = \bar{f}(\bar{P}, \bar{Q})$$

$$b) \quad f(\bar{P}, Q) \geq \bar{f}(\bar{P}, Q) \quad \text{per ogni } Q \gg.$$

OSSERVAZIONE. Si noti che la definizione di integrale $I(y_1, y_2) q r p$ dipende da un elemento indeterminato: la funzione S . Questo fatto non trova riscontro nel caso di $\mathcal{J}(y)$. Infatti, nel caso di $\mathcal{J}(y)$ la figurativa di integrale continuo $\bar{L}y'(y')$, di cui si è parlato, è perfettamente determinata: il suo grafico non può essere altro che la tangente nel punto $(\bar{y}', f(\bar{y}'))$ al grafico della figurativa di $\mathcal{J}(y)$. Nel caso di $I(y_1, y_2)$ la cui figurativa è una superficie, succede invece che, fissati $\bar{P}$ e $\bar{Q}$, possono esistere varie funzioni bilineari di y'_1, y'_2 , soddisfacenti alle condizioni a) e b). Per esempio, se è $f = y_1'^2 + y_2'^2$, ponendo

$$f = f(y'_1, y'_1) + 2y'_1(y'_1 - y'_1) + 2y'_2(y'_2 - y'_2) + k(y'_1 - y'_1)(y'_2 - y'_2),$$

le a) e b) sono soddisfatte per qualunque k soddisfacente alla $|k| \leq 2$. (Si veda anche l'osservazione dopo il 3° criterio di $q r p$ pag. 139).

In altri termini, se $S_0(P, Q)$ è una qualunque funzione continua con S_{0xx} , soddisfacente in più alla $|S_0| \leq 2$, allora l'integrale

$$I(y_1, y_2) = \iint (y_1'^2 + y_2'^2) dx dz$$

e $S_0 q r p$.

Concludiamo quindi che la necessità di introdurre un elemento indeterminato nella definizione di integrale di Fubini-Tonelli $q r p$ è dovuta alla natura di questi funzionali, e non ad una sostanziale diversità fra questa trattazione e quella che Tonelli ha svolto per il problema della semicontinuità di $\mathcal{J}(y)$.

Darò ora alcuni criteri, tutti di immediata dimostrazione, atti a verificare la $q r$ positività di $I(y_1, y_2)$. Premetto il seguente

TEOREMA: Condizione necessaria affinché l'integrale $I(y_1, y_2)$ sia $q r p$ è che si abbia contemporaneamente

$$2.2 \quad a) \quad f_{y'_1 y'_1} \geq 0 \quad b) \quad f_{y'_2 y'_2} \geq 0.$$

Infatti, per le 1.1, 1.2, 1.3, fissati P e Q e posto $\bar{y}'_2 = y'_2$, si ha

$$f(P, \bar{Q}) - f(P, Q) - (\bar{y}'_1 - y'_1) \cdot f_{y'_1}(P, Q) \geq 0,$$

il che significa che, fissati comunque P e y'_2 , la $f(P, Q)$ considerata come funzione della sola y'_1 , è concava verso l'alto: ne segue la 2.2 a). Analogamente si ottiene la 2.2 b). Queste condizioni non sono però sufficienti a garantire la $q r$ positività. Consideriamo infatti l'esempio

$$f \equiv e^{2(y'_1 - y'_2)^2} + 1/2 (y_1'^4 + y_2'^4) + 1/3 (y_1'^3 y'_2 + y'_1 y_2'^3) - 2y_1'^2 y_2'^2 - 1$$

Si ha

$$f_{y'_1 y'_1} > 22 y_2'^2 - 30 y'_1 y'_2 + 12 y_1'^2 \geq 0$$

$$f_{y'_2 y'_2} > 22 y_1'^2 - 30 y'_1 y'_2 + 12 y_2'^2 \geq 0.$$

Prendiamo $\bar{Q} = (\bar{y}'_1, \bar{y}'_2)$ sulla retta di equazione $y'_1 = y'_2$. Se esistesse una funzione S tale che $I(y_1, y_2)$ fosse $S q r p$, essendo $f(P, Q_0) = f_{y'_1}(P, Q_0) = f_{y'_2}(P, Q_0) = 0$, dovrebbe aversi, essendo $\mathcal{E}_S^f(P, Q_0, Q) \geq 0$,

$$2.3 \quad f(P, Q) \geq y_1'^2 S(P, Q_0)$$

per ogni Q tale che sia $y'_1 = y'_2$.

Per P fissato, $S(P, Q_0)$ è un numero.

Si noti che, sulla retta $y'_1 = y'_2$ è sempre

$$f = -1/2 y_1'^4$$

e quindi

$$\lim_{\bar{y}'_1 \rightarrow \infty} f(\bar{Q}) - y_1'^2 S(P, Q) = -\infty;$$

non potrebbe pertanto esser sempre vera la 2.3 ⁽¹⁾.

¹⁰ *Criterio di quasi regolare positività.* Se f ha la forma $A(P, Q) + y'_1 B(P, Q) + y'_2 C(P, Q) + y'_1 y'_2 D(P, Q)$, $I(y_1, y_2)$ è $S q r p$ con $S = D(P, Q)$.

Infatti, per la 1.1, è

$$B_S^f(P, Q, \bar{Q}) \equiv f(P, \bar{Q})$$

⁽¹⁾ Questo integrale è già stato preso in considerazione dal Magenes, il quale ha dimostrato che esso non è semicontinuo.

e quindi per la 1.2

$$\mathcal{E}_S^f(P, Q, \bar{Q}) \equiv 0.$$

OSSERVAZIONE. Notiamo il fatto, di immediata verifica, che, detto $Sqrn$ (quasi regolare negativo) un integrale per cui sia sempre $\mathcal{E}_S^f \leq 0$, se un integrale è contemporaneamente $S_1 qrp$ e $S_2 qrn$, ha una figurativa bilineare nelle y'_1, y'_2 : quindi, per il Teorema di Faedo, esso è continuo.

Si può facilmente verificare che, in questo caso, è necessariamente $S_1 \equiv S_2$.

2° *Criterio di quasi regolare positività*: Se la figurativa di $I(y_1, y_2)$ è, per ogni P , una funzione convessa verso l'alto in senso debole, $I(y_1, y_2)$ è $Sqrp$ con $S \equiv 0$.

Infatti B_S^f , considerata come funzione della sola Q , ha come grafico il piano tangente alla figurativa di $I(y_1, y_2)$ nel punto P, Q . Per la supposta convessità di questa figurativa, il piano tangente non si trova mai al di sopra di essa. Quindi, per la 1.2, è sempre $\mathcal{E}_S^f \geq 0$.

OSSERVAZIONE. Questa condizione di convessità, della figurativa, che, com'è noto [Tonelli 1, vol. 1; 2. S. Cinquini [1]] è necessaria e sufficiente a garantire la semicontinuità degli integrali semplice $\mathcal{J}(y)$ e doppio $\mathcal{J}_D(z)$ del calcolo delle variazioni, è invece sufficiente (dato che, come vedremo in seguito, la qr positività ha come conseguenza la semicontinuità) ma non già necessaria, per la semicontinuità di $I(y_1, y_2)$. Per sincerarcene basta considerare l'esempio

$$\iint y'_1 \cdot y'_2 dx dz.$$

Quest'integrale è qrp per il nostro 1° criterio, ed è inoltre continuo per il Teorema di Faedo. La sua figurativa non è però una funzione convessa: si ha infatti

$$f_{y'_1 y'_1} \cdot f_{y'_2 y'_2} - f_{y'_1 y'_2}^2 \equiv -1.$$

In altri termini, la convessità della figurativa, che caratterizza la semicontinuità di $\mathcal{J}(y)$ e di $\mathcal{J}_D(z)$, è stata assunta da Tonelli come definizione di quasi-regolare positività. Nel caso di $I(y_1, y_2)$, gli integrali con figurativa convessa non sono invece che un caso particolare di integrali semicontinui; la nostra definizione di integrale $I(y_1, y_2)$ qrp comprende quindi altri casi, oltre a quelli relativi a figurative convesse: ad esempio quello testè considerato.

COROLLARIO. Se è $f_x \equiv f_{y_1} \equiv f_{y_1'} \equiv 0$, ossia se $I(y_1, y_2)$ non dipende dalla prima componente, e se inoltre è sempre

$$2.4 \quad f_{y_2 y_2'} \geq 0$$

$I(y_1, y_2)$ è qrp .

Infatti è in questo caso $f_{y_1' y_1'} \equiv f_{y_1' y_2'} \equiv 0$. Per la 2.4 la figurativa è quindi convessa verso l'alto.

Si noti che, tenendo conto della definizione data da Tonelli di integrale $\mathcal{I}(y)$ qrp , e del fatto che un integrale $\mathcal{I}(y)$ può sempre essere considerato come un particolare integrale di Fubini-Tonelli, soddisfacente appunto alle

$$f_x \equiv f_{y_1} \equiv f_{y_1'} \equiv 0,$$

questo corollario si può enunciare così:

Un integrale semplice di linea $\mathcal{I}(y)$ qrp , è qrp anche considerato come integrale di bilinea, ossia come integrale di Fubini-Tonelli.

Un analogo corollario si ottiene scambiando il ruolo delle (x, y_1, y_1') con quello delle (z, y_2, y_2') .

3° Criterio di quasi regolare positività. Se le f_i ($i = 1 \dots n$) sono funzioni tali che gli integrali $I_i(y_1, y_2) = \iint f_i dx dz$ siano S_i qrp , e se $V_i(P)$ sono funzioni reali non negative, continue con le loro derivate rispetto ad x ed a z , allora, posto

$$f = \sum_1^n f_i \cdot V_i, \quad S = \sum_1^n S_i \cdot V_i$$

l'integrale $I(y_1, y_2) = \iint f dx dz$ è S qrp .

La dimostrazione si ottiene semplicemente scrivendo la 1.3 per ciascuna f_i , moltiplicandone i membri per V_i (conservando il senso delle disuguaglianze in virtù dell'ipotesi $V_i \geq 0$) e sommando membro a membro.

1° Esempio di integrale qrp . $I(y_1, y_2) = \iint [y_1'^2 + y_2'^2] dx dz$ è qrp .

Infatti $\iint y_1'^2 dx dz$ e $\iint y_2'^2 dx dz$ sono qrp in conseguenza del corollario al 2° criterio. Applicando il 3° criterio, con $V_1 \equiv V_2 \equiv 1$, si ottiene l'asserto.

Lo stesso può vedersi osservando che $y_1'^2 + y_2'^2$ è una funzione convessa verso l'alto, ed applicando direttamente il 2° criterio.

OSSERVAZIONE. Si noti che la funzione S , rispetto a cui l'integrale dell'esempio 1° è $Sqr p$, non è determinata in maniera univoca. Infatti qualunque sia la funzione S , purchè soddisfi alla $|S| \leq 2$, si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_S^f &= y_1'^2 + y_2'^2 - y_1'^2 - y_2'^2 - 2y_1'(y_1' - y_1') - 2y_2'(y_2' - y_2') - \\ &- S(y_1' - y_1')(y_2' - y_2') = (y_1' - y_1')^2 + (y_2' - y_2')^2 - \\ &- S(y_1' - y_1')(y_2' - y_2') \geq 0. \end{aligned}$$

In altri casi invece, esiste una sola S tale da rendere $Sqr p$ un dato integrale. Se per esempio è $f \equiv y_1' y_2'$, $I(y_1, y_2)$ è $Sqr p$ allora ed allora soltanto che è

$$S \equiv f_{y_1' y_2'} \equiv 1.$$

2°. *Esempio di integrale qrp* . Gli integrali finora considerati sono tutti $S^*qr p$, ove si ponga $S^* \equiv f_{y_1' y_2'}$. Diamo un esempio in cui questo non avviene. Sia

$$I(y_1, y_2) = \iint [y_1'^2 \cdot y_2'^2] dx dz.$$

Quest'integrale è $S^0qr p$, in cui $S^0 \equiv 2y_1' \cdot y_2' = 1/2 f_{y_1' y_2'}$. Si ha infatti, eseguendo i conti

$$\mathcal{E}_{S^0}^f \equiv (y_1' y_2' - y_1' y_2')^2 \geq 0.$$

Ma esso non è $S^*qr p$. Si verifica infatti che è

$$\mathcal{E}_{S^*}^f(P; 1, 1; 0, 0) = -1.$$

3°. *Esempio di integrale qrp* . Se $A_i(P)$ ($i = 1 \dots 7$) sono funzioni continue con le loro derivate rispetto a x ed a z , e se inoltre A_5, A_6 e A_7 non sono mai negative, il polinomio

$$2.5 \quad p(P, Q) = A_1 + A_2 y_1' + A_3 y_2' + A_4 y_1' y_2' + A_5 y_1'^2 + A_6 y_2'^2 + A_7 y_1'^2 y_2'^2$$

è tale che

$$I(y_1, y_2) = \iint p dx dz$$

è qrp .

Infatti $\iint [A_1 + A_2 y_1' + A_3 y_2' + A_4 y_1' y_2'] dx dz$ è qrp per il 1° criterio. $\iint y_1'^2 dx dz$ e $\iint y_2'^2 dx dz$ lo sono per il corollario al 2° criterio. $\iint y_1'^2 y_2'^2 dx dz$

lo è per quanto si è visto nel 2° esempio. Applicando il 3° criterio con $V_1 \equiv 1$, $V_2 \equiv A_5$, $V_3 \equiv A_6$, $V_4 \equiv A_7$ si trova l'asserto.

Criteri di asintotica bilinearizzabilità.

Com'è noto, un problema che possiamo chiamare di « asintotica linearizzazione » si presenta già per gli integrali semplici di linea $\mathcal{J}(y)$ [v. Tonelli, 1, vol. 1, pag. 398]. Si tratta in questo caso di sostituire alla funzione f un'altra funzione g , avente le stesse proprietà di differenziabilità di f , con figurativa convessa, tale che sia sempre $f \geq g \geq 0$ e, per $|y'| < R$, $f = g$, la quale, inoltre, abbia limitata in tutto il campo la derivata g'_y . Esiste anzi una trasformazione del tutto generale, che ci permette di trasformare qualsiasi f , e per ogni fissato R , in una funzione g . Ossia ogni integrale $\mathcal{J}(y)$ *q r p* è asintoticamente linearizzabile. Nel nostro caso invece, non ho trovato alcuna costruzione valida in ogni caso, che ci permetta di trasformare qualsiasi f_S in una φ_R . Poichè, di conseguenza, bisognerà procedere caso per caso, darò alcuni criteri di asintotica in bilinearizzabilità, atti a servire di indicazione per il metodo da seguire.

1°. *Criterio di asintotica bilinearizzabilità.* Se la figurativa di $I(y_1, y_2)$ è, per ogni P , una superficie di rivoluzione, cioè se, posto $\varrho = \sqrt{y_1'^2 + y_2'^2}$, è $f(P, Q) = F(P, \varrho)$, $I(y_1, y_2)$ se è *q r p* è *a · b*.

La f_S viene in questo caso ad avere a sua volta una figurativa di rivoluzione. Sarà cioè $f_S(P, Q) = F(P, \varrho)$: infatti sarà $f_S(P, Q) = f(P, Q) - f(P, Q_0)$: e questo per ogni S tale che $I(y_1, y_2)$ sia *S q r p*.

La φ_R si può sempre costruire ponendo

$$\varphi_R(P, Q) = \begin{cases} F(P, \varrho) & \text{per } \varrho \leq R \\ F(P, R) + (\varrho - R) \frac{\partial F}{\partial \varrho}(P, R) + \int_R^{\varrho} \frac{\partial^2 F}{\partial^2 \varrho}(P, \xi) \cdot \left(2 - \frac{\xi}{R}\right) \cdot (\varrho - \xi) d\xi & \text{per } R \leq \varrho \leq 2R \\ F(P, R) + R \frac{\partial F}{\partial \varrho}(P, R) + \int_R^{2R} \frac{\partial^2 F}{\partial^2 \varrho}(P, \xi) \cdot \left(2 - \frac{\xi}{R}\right) \cdot (\varrho - \xi) d\xi + \\ + (\varrho - 2R) \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial \varrho}(P, R) + \int_R^{2R} \frac{\partial^2 F}{\partial^2 \varrho}(P, \xi) \left(2 - \frac{\xi}{R}\right) d\xi\right) & \text{per } \varrho \geq 2R. \end{cases}$$

Si noti che la φ_R così definita ha a sua volta come figurativa una superficie di rivoluzione: la quale, per $\varrho \geq 2R$, è un cono. Sono quindi soddisfatte le condizioni 4 della definizione 14. Le condizioni 1 lo sono per i teoremi di derivazione sotto il segno. Essendo per ipotesi $I(y_1, y_2)$ $q r p$, sarà sempre $\frac{\partial_2 F}{\partial \varrho^2} \geq 0$, da cui segue, come si verifica, $\frac{\partial_2 \varphi_R}{\partial \varrho^2} \geq 0$. Ossia la figurativa della φ_R è concava verso l'alto. Si verifica facilmente che è soddisfatta anche la 3) condizione della definizione 14.

2° Criterio di $a \cdot b$. Se $I(y_1, y_2)$ è $q r p$ ed inoltre è $f_x \equiv f_{y'_1} \equiv f_{y_1} \equiv 0$ (oppure $f_z \equiv f_{y_2} \equiv f_{y'_2} \equiv 0$), l'integrale è $a \cdot b$.

In questo caso infatti il nostro funzionale, come abbiamo già osservato, può essere trattato come un integrale di linea $\mathcal{J}(y)$: gli si può applicare senz'altro la trasformazione indicata da Tonelli per la linearizzazione di $\mathcal{J}(y)$ [vedi Tonelli I, vol. 1, pag. 398].

3° Criterio di $a \cdot b$. Se è $f \equiv A(P) + B(P)y'_1 + C(P)y'_2 + D(P)y'_1 y'_2$, $I(y_1, y_2)$ è $a \cdot b$.

Si ha in questo caso $S \equiv 0$, e basta quindi porre $\varphi_R \equiv f_S$.

4° Criterio di $a \cdot b$. Se $V_i(P)$ sono funzioni continue con le loro derivate rispetto ad x e a z , e non negative, e se $f_i(P, Q)$ ($i = 1 \dots n$) sono funzioni tali che $I_i(y_1, y_2) = \iint f_i dx dz$ siano integrali $q r p$ e $a \cdot b$, allora anche

$$I(y_1, y_2) = \iint \sum_1^n V_i f_i dx dz \text{ è } q r p \text{ e } a \cdot b.$$

Tenuto conto del 3° criterio di $q r p$, basterà notare che la condizione 4) della definizione 14 si conserva per sommazione: ossia, se φ_{Ri} è la trasformata della f_i , basterà porre $\varphi_R = \sum_1^n V_i \varphi_i$.

§ 3. — Semicontinuità.

a) La semicontinuità sulle bilinee lipschiziane.

1° Teorema di semicontinuità. Se $I(y_1, y_2)$ è $q r p$ esso è semicontinuo su ogni bilinea lipschiziana.

Precisiamo innanzi tutto che l'essere $I(y_1, y_2)$ semicontinuo su di una bilinea lipschiziana significa essere semicontinuo su di essa rispetto a tutto

l'insieme delle bilinee del campo, e non già rispetto al solo sottoinsieme delle bilinee lipschiziane.

Sia ora $C_0(y_{10}(x), y_{01}(z), a_0 \leq x \leq b_0, c_0 \leq z \leq d_0)$ una bilinea lipschiziana qualunque. Essa è certamente ordinaria ⁽¹⁾.

In conseguenza dell'assoluta continuità delle funzioni $y_{01}(x)$, $y_{01}(z)$, comunque fissato ε , con $0 < \varepsilon < 1$, si può trovare una bilinea $\pi \equiv (\pi_1(x), \pi_2(z), a_0 - \varepsilon/4 \leq x \leq b_0 + \varepsilon/4, c_0 - \varepsilon/4 \leq z \leq d_0 + \varepsilon/4)$ di classe 2 appartenente propriamente all'intorno ε della C_0 , tale che risulti, se R è il maggiore fra i moduli di lipschizianità delle $y_{01}(x)$, $y_{02}(z)$

$$3.1 \quad |\pi'_1(x)| < R \quad |\pi'_2(z)| < R.$$

Si può supporre inoltre che detti rispettivamente E_1 e E_2 gli insiemi misurabili degli intervalli $a_0 b_0$ [risp. $c_0 d_0$], in cui non esiste finita la y'_{01} [y'_{02}] oppure non è

$$|\pi'_1(x) - y'_{01}(x)| < \varepsilon \quad ||\pi'_2(z) - y'_{02}(z)| < \varepsilon]$$

sia

$$3.2 \quad \text{mis } E_1 < \varepsilon \quad \text{mis } E_2 < \varepsilon.$$

Per la definizione di $\mathcal{E}_S^f$ si ha, per ogni P appartenente all'intorno ϱ della C_0 , con $0 < \varrho \leq \varepsilon$, e per ogni Q ,

$$3.3 \quad \begin{aligned} f(P, Q) = & \mathcal{E}_S^f[P; \pi'_1(x), \pi'_2(z); y'_1, y'_2] + f(P; \pi'_1(x), \pi'_2(z)) + \\ & + [y'_1 - \pi'_1(x)] \cdot f_{y'_1}[P; \pi'_1(x), \pi'_2(z)] + [y'_1 - \pi'_2(z)] \cdot f_{y'_2}[P; \pi'_1(x), \pi'_2(z)] + \\ & + [y'_1 - \pi'_1(x)] \cdot [y'_2 - \pi'_2(z)] \cdot S[P; \pi'_1(x), \pi'_2(z)]. \end{aligned}$$

La 3.3 è vera qualunque sia la funzione S . Facciamo ora intervenire l'ipotesi che $I(y_1, y_2)$ sia $Sqr p$, ossia che sia sempre $\mathcal{E}_S^f \geq 0$. Allora, se C è una bilinea ordinaria qualsiasi appartenente propriamente all'intorno ϱ della C_0 , è

$$3.4 \quad \int_a^b \int_c^d \mathcal{E}_S^f[x, z, y_1(x), y_2(z); \pi'_1(x), \pi'_2(z); y'_1(x), y'_2(z)] dx dz \geq 0.$$

⁽¹⁾ È bene notare che la quasi regolare positività di un integrale implica che se una bilinea non è ordinaria, su di essa è $I(y_1, y_2) = +\infty$. Si ha infatti, per la $Sqr p$ positività

$$f(P, Q) \geq f(P, Q_0) + y'_1 f_{y'_1}(P, Q_0) + y'_2 f_{y'_2}(P, Q_0) + y'_1 y'_2 S(P, Q_0) = g(P, Q)$$

Ora $\iint g dx dz$ esiste finito su qualunque bilinea: ne segue quanto volevamo dimostrare.

Sia M un numero maggiore di massimi moduli delle funzioni

$$f_{y_1'}[P, Q], \quad f_{y_2'}[P, Q], \quad S[P, Q]$$

per P variabile sulla bilinea C_0 e per Q variabile nel quadrato del piano y_1', y_2' in cui è $|y_1'| \leq R, |y_2'| \leq R$.

Per ogni coppia di numeri x, z , con $a_0 \leq x \leq b_0, c_0 \leq z \leq d_0$, ma tali che x non appartenga a E_1 e z non appartenga a E_2 , essendo, per il teorema del valor medio, se P è sulla bilinea C_0

$$|f(P, Q) - f(P; \pi_1'(x), \pi_2'(z))| < 2\varepsilon M,$$

si avrà

$$\mathcal{E}_S^f[x, z, y_{01}(x), y_{02}(z); \pi_1'(x), \pi_2'(z); y_{01}'(x), y_{02}'(z)] < M(\varepsilon^2 + 4\varepsilon).$$

Quindi, tenendo conto delle 3.1, è

$$\begin{aligned} 3.5 \quad & \int_{a_0}^{b_0} \int_{c_0}^{d_0} \mathcal{E}_S^f[x, z, y_{01}(x), y_{02}(z); \pi_1'(x), \pi_2'(z); y_{01}'(x), y_{02}'(z)] dx dz < \\ & < 5\varepsilon M(b_0 - a_0)(d_0 - c_0) + \\ & + M(8R + 4R^2)[\text{mis } E_1(b_0 - a_0) + \text{mis } E_2(d_0 - c_0) + \text{mis } E_1 \cdot \text{mis } E_2]. \end{aligned}$$

Allora, per le 3.2 e 3.4 è

$$\begin{aligned} 3.6 \quad & \int_a^b \int_c^d \mathcal{E}_S^f[x, z, y_1(x), y_2(z); \pi_1'(x), \pi_2'(z); y_1'(x), y_2'(z)] dx dz - \\ & - \int_{a_0}^{b_0} \int_{c_0}^{d_0} \mathcal{E}_S^f[x, z, y_{01}(x), y_{02}(z); \pi_1'(x), \pi_2'(z); y_{01}'(x), y_{02}'(z)] dx dz > -k\varepsilon \end{aligned}$$

in cui

$$k = M[5(b_0 - a_0)(d_0 - c_0) + (8R + 4R^2)(1 + b_0 + d_0 - a_0 - c_0)]$$

è numero positivo che non dipende da ε né dalla bilinea C .

Per le 3.3 e 3.6, posto $\lambda \equiv [x, z, y_1(x), y_2(z); \pi_1'(x), \pi_2'(z)]$ e $\lambda_0 \equiv [x, z, y_{01}(x), y_{02}(z), \pi_1'(x), \pi_2'(z)]$, sarà

$$I(y_1, y_2) - I(y_{01}, y_{02}) > -k\varepsilon + \int_a^b \int_c^d \{f(\lambda) - \pi_1'(x) \cdot f_{y_1'}(\lambda) - \pi_2'(y) \cdot f_{y_2'}\lambda -$$

$$\begin{aligned}
& - [y'_1(x) \pi'_2(z) + y'_2(z) \pi'_1(x)] \cdot S(\lambda) + y'_1(x) f_{y'_1}(\lambda) + y'_2(z) f_{y'_2}(\lambda) + \\
& + [y'_1(x) y'_2(z) + \pi'_1(x) \pi'_2(z)] S(\lambda) \} dx dz - \\
& - \int_{a_0}^{b_0} \int_{c_0}^{d_0} \{ f'(\lambda_0) - \pi'_1(x) f_{y'_1}(\lambda_0) - \pi'_2(z) f_{y'_2}(\lambda_0) - [y'_{01}(x) \pi'_2(z) + y'_{02}(z) \pi'_1(x)] \cdot S(\lambda_0) + \\
& + y'_{01}(x) f_{y'_1}(\lambda_0) + y'_{02}(z) f_{y'_2}(\lambda_0) + [y'_{01}(x) y'_{02}(z) + \pi'_1(x) \pi'_2(z)] S(\lambda_0) \} dx dz .
\end{aligned}$$

Per la continuità delle funzioni $\pi'_1(x)$, $\pi''_1(x)$, $\pi'_2(z)$, $\pi''_2(z)$, possiamo applicare il teorema di Faedo al primo integrale al secondo membro dell'ultima disuguaglianza: il quale integrale risulta pertanto essere continuo: ossia possiamo determinare un numero $\bar{\varrho}(\varepsilon) > 0$, tale che, purchè si abbia $\varrho \leq \bar{\varrho}(\varepsilon)$, la differenza fra i due integrali al secondo membro sia minore di ε . Sarà quindi, per ogni bilinea ordinaria appartenente propriamente all'intorno ϱ della C_0 ,

$$I(y_1, y_2) - I(y_{01}, y_{02}) > -\varepsilon(1+k)$$

il che prova l'asserto.

OSSERVAZIONE. Questa dimostrazione è indipendente dall'operazione di asintotica bilinearizzazione.

b) La semicontinuità sulle bilinee ordinarie.

Nel precedente teorema l'ipotesi della lipschizianità della bilinea C_0 era servita a scrivere le 3.1, a determinare il numero M , ed in conclusione a stabilire la 3.6.

Ora vedremo che ad una relazione del tipo della 3.6 possiamo arrivare senza alcuna ipotesi sulla C_0 , ma valendoci però di una ipotesi limitativa sulla f . Vale infatti il seguente

II^o Teorema di semicontinuità: Se $I(y_1, y_2)$ è $Sqr p$, e se per ogni parte chiusa e limitata A' di A si può trovare un numero W , tale che, per $P \in A'$ e Q qualunque sia

$$|f_{y'_1}(P, Q)| < W(1 + |y'_2|); \quad |f_{y'_2}(P, Q)| < W(1 + |y'_1|); \quad |S(P, Q)| < W,$$

allora $I(y_1, y_2)$ è semicontinuo inf. su ogni bilinea.

OSSERVAZIONE. Si noti che le ipotesi poste su $I(y_1, y_2)$ implicano che ogni bilinea è ordinaria.

DIMOSTRAZIONE. Sia C_0 una qualunque bilinea, e ϱ' la distanza in S_4 fra i suoi punti (che costituiscono un insieme chiuso e limitato di S_4) e la frontiera del campo A . Sia ε un numero arbitrario, soddisfacente alle $0 < \varepsilon < 1$, $\varepsilon < \varrho'/2$.

Come nel caso precedente, costruiamo la bilinea π , con le stesse proprietà, tranne, naturalmente quella espressa dalle 3.1, che dipende dalla lipschizianità della C_0 . Possiamo anzi supporre che gli insiemi E_1 e E_2 , anzichè alle 3.2, soddisfino alle relazioni

$$3.2' \quad \int_{E_1} [|\gamma'_{01}(x)| + |\pi'_1(x)|] dx < \varepsilon \int_{E_2} [|\gamma'_{02}(z)| + |\pi'_2(z)|] dz < \varepsilon,$$

e che inoltre la variazione totale di $\pi_1(x) [\pi_2(z)]$ su $a_0 b_0 [c_0 d_0]$ non superi quella di $\gamma_{01}(x) [\gamma_{02}(z)]$.

Per ogni P contenuto nell'intorno di raggio ε della C_0 e per ogni Q sarà di nuovo valida la 3.3, e quindi, per ogni bilinea C appartenente propriamente a quell'intorno, varrà la 3.4.

Sia ora A' l'insieme dei punti dell'intorno chiuso di raggio $\varrho'/2$ della C_0 . Esso è un insieme limitato. Sia W il numero di cui all'enunciato, corrispondente a A' . Per tutti gli x di $a_0 b_0$ non appartenenti ad E_1 e per tutti gli z di $c_0 d_0$ non appartenenti ad E_2 sarà

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_S^f[x, z, \gamma_{01}(x), \gamma_{02}(z); \pi'_1(x), \pi'_2(z); \gamma'_{01}(x), \gamma'_{02}(z)] &< \\ &< 2\varepsilon [W(1 + |\gamma'_{01}(x)| + 1 + |\gamma'_{02}(z)|) + \varepsilon^2 W < \\ &< 2\varepsilon W(3 + |\gamma'_{01}(x)| + |\gamma'_{02}(z)|). \end{aligned}$$

Quindi, chiamando $V_{01} [V_{02}]$ la variazione totale della funzione $\gamma_{01}(x) [\gamma_{02}(z)]$ sull'intervallo $a_0 b_0 [c_0 d_0]$, tenendo conto delle 3.2', è

$$\begin{aligned} 3.5' \quad \int_{a_0}^{b_0} \int_{c_0}^{d_0} \mathcal{E}_S^f[x, z, \gamma_{01}(x), \gamma_{02}(z); \pi'_1(x), \pi'_2(z); \gamma'_{01}(x), \gamma'_{02}(z)] dx dz &< \\ &< \varepsilon \{2W[3(b_0 - a_0)(d_0 - c_0) + V_{01} + V_{02}] + \\ &+ 4W[d_0 + b_0 - a_0 - c_0 + V_{01} + V_{02}] + 1/2 W(V_{01} + V_{02})\} = k_1 \varepsilon \end{aligned}$$

in cui k_1 è un numero che non dipende da ε nè dalle C e π , ma solo dalla C_0 . Si deduce quindi una relazione analoga alla 3.6, in cui soltanto al posto di k figura k_1 .

Indi, proseguendo il ragionamento esattamente come nella dimostrazione del 1° teorema di semicontinuità, si arriva all'asserto.

Esempio 1°. Un caso elementare in cui sono verificate le ipotesi di questo teorema è quello in cui è $f = A(P) + y'_1 B(P) + y'_2 C(P) + y'_1 y'_2 D(P)$; in questo caso si può porre

$$W = 1 + \max_{A'} [|B(P)| + |C(P)| + |D(P)|].$$

Esempio 2°. Un caso non banale di integrale che rientra nelle ipotesi di questo teorema è quello in cui è

$$f = \theta_1(P) \sqrt{\theta_2(P) + \theta_3(P) \cdot y_1'^2},$$

ove $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sono funzioni reali non negative, continue assieme alle derivate $\theta_{1x}, \theta_{2x}, \theta_{3x}, \theta_{1z}, \theta_{2z}, \theta_{3z}$. Infatti $I(y_1, y_2)$ è in questo caso *S q r p* per il 2° criterio, con $S_0 \equiv 0$. Basta poi porre $W(A') = \max_{A'} [\theta_1(P) \cdot \theta_3(P)]$.

OSSERVAZIONE. Le condizioni del II° teorema non sono necessarie per la semicontinuità: infatti se è $f = y_1'^2$, $I(y_1, y_2)$ è semicontinuo, in quanto rientra nell'ipotesi del 3° teorema di semicontinuità, che dimostreremo nelle pagine seguenti. Tuttavia è, per ogni P ed ogni y'_2 fissati

$$\lim \frac{\partial f}{\partial y'_1} = +\infty$$

il che contrasta con le ipotesi del 2° teorema.

Si tratta ora di eliminare le ipotesi sulla f , che abbiamo testè visto essere restrittive. Ciò si ottiene dimostrando il seguente

III° Teorema di semicontinuità: « Ogni integrale *q r p* ed *a.b.* è semicontinuo inferiormente su ogni bilinea ordinaria ».

OSSERVAZIONE 1ª. Se $I(y_1, y_2)$ è un integrale *S q r p*, l'integrale $\bar{I}(y_1, y_2) = \iint f_S dx dz$ esiste finito su tutte e sole le bilinee ordinarie per $I(y_1, y_2)$: infatti $I(y_1, y_2) - \bar{I}(y_1, y_2) = \iint [f - f_S] dx dz$ esiste finito su ogni bilinea, dato che, secondo la definizione 13, la funzione $f - f_S$ è bilineare nelle y'_1, y'_2 ⁽¹⁾.

Inoltre, per lo stesso motivo e per il teorema di Faedo, l'integrale $\iint [f - f_S] dx dz$ è continuo. Pertanto, al fine di dimostrare che su di una

(1) Vedi anche nota (1) a pag. 8.

data bilinea è semicontinuo $I(y_1, y_2)$, è sufficiente far vedere che vi è semicontinuo $\bar{I}(y_1, y_2)$.

OSSERVAZIONE 2. Per quanto si è detto nell'osservazione che segue la definizione 14, non sarà necessario, ove vi sia ambiguità, specificare la scelta della funzione S nel passare dalla f alla f_S ed alla φ_S .

DIMOSTRAZIONE. Per quanto è stato testè osservato, basta dimostrare che è semicontinuo su ogni curva ordinaria l'integrale $\bar{I}(y_1, y_2)$. Sia C_0 una curva ordinaria. Fissato $\varepsilon > 0$, si può trovare un numero R , tale che detto $A_1, [A_2]$ l'insieme misurabile del segmento $a_0 b_0 [c_0 d_0]$ in cui non esiste finita la $y'_{01} [y'_{02}]$ oppure non è verificata la

$$|y'_{01}| < R \quad [|y'_{02}| < R],$$

detto T l'insieme dei punti (x, z) del rettangolo $a_0 b_0 \times c_0 d_0$ in cui è $x \in A_1$ oppure $z \in A_2$, e $C(T)$ il complementare di T rispetto al rettangolo, sia

$$\iint_T f_S [x, z, y_{01}(x), y_{02}(z); y'_{01}(x), y'_{02}(z)] dx dz < \varepsilon/2 \quad (1).$$

Ne segue, essendo $f_S \geq 0$

$$3.7 \quad I(y_{01}, y_{02}) - \iint_{C(T)} f_S [x, z, y_{01}(x), y_{02}(z); y'_{01}(x), y'_{02}(z)] dx dz < \varepsilon/2.$$

Passiamo ora a considerare la φ_R , e notiamo che l'integrale $I_R(y_1, y_2) = \iint \varphi_R dx dz$ soddisfa alle condizioni del secondo teorema di semicontinuità; avendosi sempre

$$3.8 \quad 0 \leq \varphi_R \leq f_S$$

$I_R(y_1, y_2)$ esiste finito sulla C_0 . Si può cioè trovare un numero $\varrho > 0$, tale che, se C è una qualunque bilinea ordinaria appartenente propriamente all'intorno ϱ della C_0 , è

$$I_R(y_1, y_2) > I_R(y_{01}, y_{02}) - \varepsilon/2.$$

(1) L'esistenza del numero R segue all'essere C_0 una bilinea ordinaria.

Per le 3.7 e 3.8 è poi

$$\bar{I}(y_{01}, y_{02}) - I_R(y_{01}, y_{02}) < \varepsilon/2,$$

e quindi

$$\bar{I}(y_1, y_2) > \bar{I}(y_{01}, y_{02}) - \varepsilon$$

per ogni bilinea C appartenente propriamente al detto intorno: ossia $\bar{I}(y_1, y_2)$ è semicontinuo sulla C_0 .

c) La semicontinuità in tutto il campo.

Sia ora C_0 una bilinea non ordinaria per l'integrale $I(y_1, y_2)$ q r p. Per quanto abbiamo osservato (v. nota a pag. 142) è certamente

$$I(y_{01}, y_{02}) = +\infty.$$

Concluderemo quindi la nostra trattazione della semicontinuità degli integrali di Fubini-Tonelli, provando che, supposta l'asintotica bilinearizzabilità di $I(y_1, y_2)$, è

$$\lim_{C \rightarrow C_0} I(y_1, y_2) = +\infty,$$

ossia dimostrando il seguente

IV⁰ Teorema di semicontinuità: *Ogni integrale q r p e a b è semicontinuo inf. su ogni bilinea non ordinaria.*

A questo si arriva modificando opportunamente il ragionamento seguito nella dimostrazione del II⁰ e III⁰ teorema di semicontinuità.

Si noti intanto che l'integrale

$$\iint [f - f_s] \, dx \, dz$$

esiste finito ed è continuo anche sulla C_0 , e che pertanto è

$$3.9 \quad \bar{I}(y_{01}, y_{02}) = +\infty.$$

Basterà cioè anche in questo caso dimostrare la semicontinuità di $\bar{I}(y_1, y_2)$, ossia che è

$$\lim_{C \rightarrow C_0} (\bar{I}(y_1, y_2)) = +\infty.$$

La 3.9 implica che, comunque fissato $R > 0$, detto T' l'insieme dei punti del rettangolo $a_0 b_0 \times c_0 d_0$ in cui è

$$|y'_{01}(x)| > R \quad \text{oppure} \quad |y'_{02}(z)| > R,$$

esso è misurabile e che, detto $C(T')$ il suo complementare rispetto al rettangolo, è

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \iint_{C(T')} f_S[x, z, y_{01}(x), y_{02}(z); y'_{01}(x), y'_{02}(z)] dx dz = +\infty.$$

Sia ora k un numero positivo arbitrario, e R tale che sia

$$3.10 \quad \iint_{C(T')} f_S[x, z, y_{01}(x), y_{02}(z); y'_{01}(x), y'_{02}(z)] dx dz > k + 1.$$

Riprendendo il ragionamento col quale si è dimostrato il III^o Teorema di semicontinuità, consideriamo la funzione φ_R . Notiamo che, per le condizioni 4 cui soddisfa la φ_R , e per il 2^o teorema di semicontinuità, $I_R(y_1, y_2)$ esiste finito ed è semicontinuo inferiormente sulla C_0 . Si può trovare cioè un numero $\varrho > 0$ tale che, se C è una qualunque bilinea ordinaria appartenente propriamente all'intorno ϱ della C_0 , è

$$I_R(y_1, y_2) > I_R(y_{01}, y_{02}) - 1.$$

Essendo sempre $f_S \geq \varphi_R$, è

$$\begin{aligned} I_R(y_{01}, y_{02}) &\geq \iint_{C(T')} \varphi_R(x, z, y_{01}(x), y_{02}(z); y'_{01}(x), y'_{02}(z)) dx dz = \\ &= \iint_{C(T')} f_S[x, z, y_{01}(x), y_{02}(z), y'_{01}(x), y'_{02}(z)] dx dz \end{aligned}$$

e per la 3.10

$$I(y_1, y_2) > k. \quad \text{c. v. d.}$$

Da questo teorema segue il seguente corollario di ovvia dimostrazione

COROLLARIO I. *Se C è un insieme di bilinee ordinarie per un integrale $I(y_1, y_2)$ q r p e a b, e C_0 una bilinea d'accumulazione per esse, e se esiste un numero H tale che per ogni C è $I(y_1, y_2) \leq H$, allora C_0 è ordinaria.*

Potremo dire che $I(y_1, y_0)$ è « semicontinuo inferiormente in tutto il campo », quando lo è su tutte le bilinee, ordinarie o no. I teoremi III^o e

IV⁰ si possono quindi riassumere nel seguente

Teorema generale di semicontinuità: Se $I(y_1, y_2)$ è q r p e a b esso è semicontinuo inferiormente in tutto il campo.

COROLLARIO II. Nelle ipotesi del corollario I, è

$$I(y_{01}, y_{02}) \leq H.$$

§ 4. — L'integrale $I(y, y)$.

Diciamo «simmetrica» una bilinea $C \equiv [y_1(x), y_2(z); a \leq x \leq b; c \leq z \leq d]$, se è contemporaneamente

$$a = c \qquad b = d$$

$$y_1(x) = y_2(x),$$

ossia se le sue componenti sono uguali.

Chiameremo $I(y, y)$ un integrale $I(y_1, y_2)$ considerato però definito solamente sulle bilinee simmetriche del campo A . Se C_0 è una bilinea simmetrica ordinaria per un certo integrale $I(y, y)$, si dirà che questo è semicontinuo inferiormente su di essa, se per ogni $\varepsilon > 0$, si può trovare un $\varrho > 0$, tale che ogni bilinea ordinaria simmetrica, appartenente propriamente, nel senso della topologia delle bilinee in generale, all'intorno ϱ della C_0 , soddisfa alla

$$4.1 \qquad I(y, y') > I(y_0, y_0) - \varepsilon.$$

Se invece C_0 non è ordinaria, la 3.1 sarà sostituita dalla

$$4.1' \qquad I(y, y) > \varepsilon.$$

Essendo $I(y, y)$ un particolare $I(y_1, y_2)$, tutte le condizioni atte ad assicurare la semicontinuità di $I(y_1, y_2)$ valgono a fortiori a garantire quella di $I(y, y)$.

Dai teoremi del II paragrafo possiamo quindi dedurre direttamente altrettanti corollari di semicontinuità di $I(y, y)$, che enuncio, sottintendendo che, quando si tratta di $I(y, y)$, con la parola « bilinea » s'intende indicare una bilinea simmetrica.

I^o Corollario di semicontinuità. « Se $I(y, y)$ è q r p esso è semicontinuo inferiormente su ogni bilinea lipschiziana ».

II⁰ Corollario di semicontinuità. « Se $I(y, y)$ è $Sqr p$, e se per ogni parte chiusa e limitata A' di A si può trovare un numero W , tale che per $P \in A'$ e Q qualunque sia sempre

$$|f_{y'_1}| < W[1 + |y'_2|] \quad |f_{y'_2}| < W[1 + |y'_1|] \quad |S| < W$$

$I(y, y)$ è semicontinuo in tutto il campo ».

OSSERVAZIONE 1. Anche qui, come nel caso del II⁰ Teorema, ogni bilinea è ordinaria.

OSSERVAZIONE 2. Si noti che il fatto di trattare con integrali $I(y, y)$ anzichè $I(y_1, y_2)$ non comporta alcuna semplificazione dell'enunciato del II⁰ corollario rispetto a quello del II⁰ teorema.

III Corollario di semicontinuità. « Ogni $I(y, y)$ qrp e $a \cdot b$ è semicontinuo inferiormente su ogni bilinea ordinaria ».

IV Corollario di semicontinuità. « Ogni $I(y, y)$ qrp e $a \cdot b$ è semicontinuo inferiormente su ogni bilinea C_0 per cui sia

$$4.2 \quad I(y_0, y_0) = +\infty.$$

Osservando che se $I(y, y)$ è qrp , ogni bilinea non ordinaria soddisfa alla 3.2 (vedi nota pag. 22), concludiamo col seguente

Corollario generale di semicontinuità. « Ogni $I(y, y)$ qrp e $a \cdot b$ è semicontinuo inferiormente in tutto il campo ».

§ 5.

Viene del tutto naturale di passare dal concetto di « bilinea » a quello di « trilinea »: essa sarà costituita da una terna di funzioni $[y_1(x), y_2(z), y_3(t), a \leq x \leq b, c \leq z \leq d, e \leq t \leq f]$ assolutamente continue. Analogamente potremo prendere in considerazione la classe delle n -linee, la cui definizione è l'ovvia estensione di quella delle classi delle bilinee e trilinee.

Potremo considerare integrali di Fubini-Tonelli estesi alle n -linee. Nel caso delle trilinee questi funzionali saranno definiti dalla

$$I(y_1, y_2, y_3) = \int_a^b \int_c^d \int_e^f f[x, y, z, y_1(x), y_2(z), y_3(t); y'_1(x), y'_2(z), y'_3(t)] dx dz dt.$$

Se la trilinea è « simmetrica » (vedi paragrafo precedente) si scriverà

$$I(y, y, y) = \int_a^b \int_a^b \int_a^b f[x, z, t, y(x), y(z), y(t); y'(x), y'(z), y'(t)] dx dz dt.$$

Analogamente per $n > 3$.

Tutti i risultati ottenuti nei precedenti paragrafi si estendono facilmente dai funzionali di bilinea a quelli di n -linea, senza sostanzialmente incontrare difficoltà maggiori di quelle che si incontrano, nell'analisi elementare, passando dallo studio delle funzioni di 2 a quelle di n variabili reali. Ometterò di conseguenza le definizioni e gli enunciati dei teoremi concernenti le n -linee e gli integrali dipendenti da esse, e mi limiterò ad indicare come va esteso il concetto di « $q r$ positività » di un funzionale, che è alla base di questo lavoro, quando si passi da una bilinea ad una trilinea.

Nel caso delle trilinee, porremo, com'è naturale

$$P = [x, y, t, y_1, y_2, y_3]; \quad Q = [y'_1, y'_2, y'_3]; \quad \bar{Q} = [\bar{y}'_1, \bar{y}'_2, \bar{y}'_3].$$

DEFINIZIONE: Noi diremo che $I(y_1, y_2, y_3)$ è $q r p$, se esistono 4 funzioni $S_1(P)$, $S_2(P)$, $S_3(P)$ e $T(P)$, reali e continue con le loro derivate S_{1xz} , S_{1xt} , S_{2xt} , T_{xzt} , tali che, per ogni $P, Q, \bar{Q}$ sia

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{S_1, S_2, S_3, T}^f(P, Q, \bar{Q}) &= f(P, \bar{Q}) - B_{S_1, S_2, S_3, T}^f(P, Q, Q) = \\ &= f(P, Q) - [f(P, Q) + (y'_1 - \bar{y}'_1) f_{y'_1}(P, Q) + (y'_2 - \bar{y}'_2) f_{y'_2}(P, Q) + \\ &\quad + (y'_3 - \bar{y}'_3) f_{y'_3}(P, Q) + (y'_1 - \bar{y}'_1)(y'_2 - \bar{y}'_2) S_3(P, Q) + \\ &\quad + (y'_2 - \bar{y}'_2)(y'_3 - \bar{y}'_3) S_1(P, Q) + (y'_1 - \bar{y}'_1)(y'_3 - \bar{y}'_3) S_2(P, Q) + \\ &\quad + (y'_1 - \bar{y}'_1)(y'_2 - \bar{y}'_2)(y'_3 - \bar{y}'_3) T(P, Q)] \geq 0. \end{aligned}$$

B I B L I O G R A F I A

- S. CINQUINI: « Condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali doppi del Calcolo delle Variazioni », Ann. Mat. pura ed Appl., S. IV, T. X, 1932.
- S. FAEDO: 1. *Cond. nec. per la semicontinuità di un nuovo tipo di funzionali.* (Ann. mat. pura ed appl., 1944).
 2. *Un nuovo tipo di funzionali continui* (Rend. di Mat. e delle sue applicazioni, Roma, IV, fasc. III-IV, 1943).
 3. *Sulle cond. di Legendre e di Weierstrass per gli integrali di Fubini-Tonelli.* (Rend. di Padova, 1950).
- E. MAGENES: *Intorno agli integrali di Fubini-Tonelli.*
 1. « *Cond. suff. per la semicontinuità* » (Ann. Sc. Norm., 1948).
 2. « *Teoremi di esistenza dell'estremo* » (Ann. Sc. Norm., 1949).
 3. *Sul minimo relativo degli integrali di F.-T.* (Giornale di Battaglini, S. IV, vol. 79, 1949-50).
 4. *Sulle cond. di Eulero relative ai problemi di calcolo delle variazioni degli integrali di F.-T.* (Rend. del sem. Mat. di Padova, 1950).
 5. *Un'osservazione sulle cond. necessarie per la semicontinuità degli integrali di F.-T.* (Rend. di Padova, 1950).
 6. *Sul minimo semi-forte degli integrali di F.-T.* (Rend. di Padova, 1951).
- L. TONELLI: 1. « *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* » (Ed. Zanichelli, Bologna, voll. I e II).
 2. « *Sur la semicontinuité des intégrales doubles du calcul des variations* » (Acta Math., Uppsala, 1929).