

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

FERNANDO BERTOLINI

**La teoria algebrica della misura e della integrazione, e
suo rapporto con la teoria classica**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 11,
n° 3-4 (1957), p. 225-247

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1957_3_11_3-4_225_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

LA TEORIA ALGEBRICA DELLA MISURA E DELLA INTEGRAZIONE, E SUO RAPPORTO CON LA TEORIA CLASSICA

FERNANDO BERTOLINI (a Roma).

In un'opera postuma di recente pubblicazione ([1]), C. CARATHÉODORY espone una teoria «algebrica» della misura e della integrazione, che risulta più generale (almeno potenzialmente) della ordinaria teoria quale s'è venuta configurando in questi ultimi anni (cfr. ad es. [2], [3], [4], [5], ecc.); la differenza essenziale tra le due teorie può esser formulata, nei suoi termini più semplici, così:

dato un σ -anello $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi d'un dato insieme ambiente, la teoria ordinaria studia le funzioni d'insieme non negative e numerabilmente additive definite su $\mathcal{A}$ (funzioni «misura»), nonché certe funzioni di punto individuate da $\mathcal{A}$ (funzioni «misurabili»);

dato un reticolo booleano generalizzato $\mathcal{R}$, numerabilmente completo e dotato d'elemento nullo, la teoria algebrica studia le funzioni definite su $\mathcal{R}$, non negative e numerabilmente additive, nonché certi enti [detti «funzioni di luogo» = «Ortsfunktionen», ed introdotti con i soli mezzi della teoria dei reticoli] l'ufficio dei quali è analogo a quello delle funzioni misurabili di punto nella teoria ordinaria.

È evidente a prima lettura che la teoria ordinaria rientra (almeno potenzialmente) in quella algebrica come caso particolare; un controesempio dello stesso C. CARATHÉODORY mostra poi che le due teorie non sono equivalenti. Si pone allora la questione: *come va modificata la teoria ordinaria per ottenere, ove sia possibile, una teoria equivalente o magari più generale di quella algebrica?*

Nel presente lavoro si risponde completamente a tale domanda; precisamente si fa vedere che, per ottenere una teoria equivalente a quella di C. CARATHÉODORY, basta indebolire opportunamente le ipotesi sul sistema d'insiemi $\mathcal{A}$, e modificare in conformità la definizione di funzione misura-

bile. La teoria così ottenuta pare altrettanto semplice di quella ordinaria, e dà un'idea esatta della entità della generalizzazione conseguita da C. CARATHÉODORY.

Veniamo ad esporre ora a grandi linee la teoria ordinaria della misura e della integrazione, generalizzata al modo accennato dianzi, e confrontiamola passo per passo con la teoria algebrica.

1. Il sistema fondamentale d'insiemi. È assegnato un insieme ambiente X (il cui elemento o « punto » generico indicheremo con x) ed un sistema $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di X (insiemi « fondamentali ») verificante le proprietà seguenti :

1) $\mathcal{A}$ è chiuso alle operazioni di unione ($\cup$) e di intersezione ($\cap$) finite, nonché rispetto alla operazione di differenza ($-$) ;

2) data una successione $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'insiemi fondamentali, esiste sempre un insieme fondamentale contenente $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, e tra gl'insiemi fondamentali contenenti $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ve n'è uno « minimo » $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ (« congiunzione » della successione $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$), ossia tale che :

$$\text{i)} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A},$$

$$\text{ii)} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n,$$

$$\text{iii)} \quad \text{se } (A \in \mathcal{A}) \text{ ed } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset A, \text{ allora } \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset A$$

(tale congiunzione è univocamente determinata da $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Si osservi quanto segue.

a) *L'insieme vuoto* $\emptyset$ *è fondamentale*; infatti, se è $A \in \mathcal{A}$, si ha $\emptyset = A - A \in \mathcal{A}$.

b) *Data una successione* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *d'insiemi fondamentali, tra gl'insiemi fondamentali contenuti in* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ *ve n'è uno « massimo »* $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ (« interferenza » della successione $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$); difatti, detto B un insieme $\in \mathcal{A}$ e contenente $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$, abbiamo :

$$\text{i)} \quad B - \bigcap_{n=1}^{\infty} (B - A_n) \in \mathcal{A};$$

$$\text{ii)} \quad B - \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (B - A_n) \subset B - \bigcup_{n=1}^{\infty} (B - A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n;$$

$$\text{iii)} \quad \text{se } A \in \mathcal{A} \text{ ed } A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ allora si ha, successivamente,}$$

$$A \subset B - \bigcup_{n=1}^{\infty} (B - A_n), \bigcup_{n=1}^{\infty} (B - A_n) \subset B - A,$$

$$\bigsqcup_{n=1}^{\infty} (B - A_n) \subset B - A, A \subset B - \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (B - A_n),$$

il che appunto prova che l'interferenza cercata è $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = B - \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (B - A_n)$;

in modo analogo potrebbe provarsi che è $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n = B - \bigcap_{n=1}^{\infty} (B - A_n)$.

c) *Nel caso che la successione $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ consti di non più di due elementi distinti A e B , appartenenti a $\mathcal{A}$, avremo $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \sqcup B = A \cup B$,*

$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A \sqcap B = A \cap B$; ossia congiunzione e interferenza finite coincidono, rispettivamente, con unione e intersezione finite.

d) *Dati l'insieme fondamentale A e la successione d'insiemi, pure fondamentali, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, si ha:*

$$\text{i)} \quad A \sqcup \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \sqcup A_n),$$

$$\text{ii)} \quad A \sqcap \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (A \sqcap A_n).$$

Dimostro la (ii), la dimostrazione della (i) essendo analoga. In primo luogo si ha $A_k \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, e quindi $A \cap A_k \subset A \cap \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, per ogni indice k ; ne segue $\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n) \subset A \cap \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ed infine $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n) \subset A \cap \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$. In secondo luogo, posto $B = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)$, $C = A \cup \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, si ha successivamente

$$A \cap A_k \subset B, (A \cap A_k) \cup (C - A) \subset B \cup (C - A),$$

$$A_k \cup (C - A) \subset B \cup (C - A), A_k \subset B \cup (C - A)$$

per ogni indice k ; quindi $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset B \cup (C - A)$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset B \cup (C - A)$ ed infine $A \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \subset A \cap [B \cup (C - A)] = A \cap B \subset B = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)$.

Con ciò la (ii) è completamente dimostrata.

e) *Gli assiomi (1) e (2), dunque, in virtù delle osservazioni precedenti, caratterizzano $\mathcal{A}$ come un reticolo d'insiemi* (rispetto alla relazione d'inclusione $\subset$ intesa come relazione d'ordine E del reticolo, e rispetto alle operazioni $\sqcup$ e $\sqcap$ di congiunzione ed interferenza) *booleano generalizzato, dotato d'elemento nullo e numerabilmente completo*; inoltre, in $\mathcal{A}$ l'elemento nullo è l'insieme vuoto, e nel caso finito le operazioni $\sqcap$, $\sqcup$ si identificano colle operazioni $\cap$, $\cup$ rispettivamente.

2. Confronto tra il sistema fondamentale d'insiemi $\mathcal{A}$ e l'anello fondamentale di somi di C. Carathéodory. A base della sua teoria, C. CARATHÉODORY considera⁽¹⁾ un reticolo booleano generalizzato $\mathcal{R}$, numerabilmente completo e dotato di elemento nullo⁽²⁾. Gli elementi del reticolo $\mathcal{R}$ (« somi ») possono essere di natura qualsiasi, in particolare si può assumere come reticolo $\mathcal{R}$ il sistema d'insiemi $\mathcal{A}$ introdotto al paragrafo precedente: la teoria algebrica può dunque essere particolarizzata al caso $\mathcal{R} = \mathcal{A}$.

Vogliamo dimostrare in questo paragrafo che tale particolarizzazione è solo apparente, e che supponendo sistematicamente $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ la teoria non sarebbe meno generale.

In base ad un noto risultato di teoria dei reticoli⁽³⁾, al reticolo distributivo $\mathcal{R}$ (quale che sia la sua natura) può sempre associarsi un insieme ambiente X' ed un sistema $\mathcal{A}'$ di sottoinsiemi di X' , in modo che:

i) assunta in $\mathcal{A}'$ come relazione d'ordine E l'inclusione $\subset$, $\mathcal{A}'$ risulta un reticolo isomorfo ad $\mathcal{R}$ rispetto a tale relazione, e quindi rispetto alle operazioni di interferenza e congiunzione;

ii) in $\mathcal{A}'$ l'interferenza e la congiunzione finite si identificano rispettivamente con la intersezione e l'unione finite.

Dimostriamo ora che $\mathcal{A}'$ può essere preso in modo da soddisfare le condizioni (1) e (2) che nel paragrafo 1 sono imposte al sistema $\mathcal{A}$.

⁽¹⁾ Cfr. [1], assiomi 1 — 4, pp. 18, 19, 20 e 24, che appunto caratterizzano i reticoli booleani generalizzati, numerabilmente completi, con elemento nullo.

⁽²⁾ In [1] la congiunzione tra A e B è indicata con $A \dot{+} B$, anzichè $A \sqcup B$, l'interferenza con AB anzichè $A \sqcap B$; nel caso numerabile è usato $\sum_k \dot{+} A_k$ invece di $\bigcup_k A_k$, $\prod_k A_k$ invece di $\bigcap_k A_k$; la relazione d'ordine E del reticolo $\mathcal{R}$ è indicata con $\subseteq$.

⁽³⁾ Cfr. [6], teor. 20·1, p. 106. Si può prendere come X' la totalità degli ultrafiltri propri di $\mathcal{R}$, associando ad ogni $A \in \mathcal{R}$ l'insieme A' degli ultrafiltri propri contenenti A .

1) In primo luogo, $\mathcal{A}'$ possiede un elemento nullo O' (in quanto $\mathcal{R}$ ne è dotato), ossia un sottoinsieme di X' contenuto in tutti gli insiemi appartenenti ad $\mathcal{A}'$; questo elemento nullo è univocamente determinato. Ad ogni insieme $A' \in \mathcal{A}'$ associamo l'insieme $A' - O'$; al variare di A' , l'insieme $A' - O'$ descrive un sistema d'insiemi $\mathcal{A}''$, tale che:

i) assunta come relazione d'ordine $\subset$ l'inclusione $\subset$, esso risulta un reticolo isomorfo ad $\mathcal{A}'$ e quindi ad $\mathcal{R}$ (difatti, per $A' \in \mathcal{A}'$, $B' \in \mathcal{A}'$ si ha $A' \subset B'$ quando e solo quando è $A' - O' \subset B' - O'$, essendo O' contenuto sia in A' che in B');

ii) in esso l'interferenza e la congiunzione finite si identificano rispettivamente con la intersezione e l'unione finite (difatti, per $A' \in \mathcal{A}'$, $B' \in \mathcal{A}'$, si ha

$(A' - O') \cap (B' - O') = (A' \cap B') - O' \in \mathcal{A}''$, $(A' - O') \cup (B' - O') = (A' \cup B') - O' \in \mathcal{A}''$, e quindi necessariamente si ha $A'' \cap B'' = A'' \cap B''$, $A'' \cup B'' = A'' \cup B''$ per $A'' \in \mathcal{A}''$, $B'' \in \mathcal{A}''$);

iii) il suo elemento nullo O'' non è che l'insieme vuoto $\emptyset$ (difatti è $\emptyset = O' - O'$).

Si conclude che, senza alcuna restrizione, possiamo supporre eguale all'insieme vuoto già l'elemento nullo di $\mathcal{A}'$ (in caso contrario basterà sostituire $\mathcal{A}'$ con $\mathcal{A}''$ in ciò che segue).

2) La proprietà (ii) implica che il sistema $\mathcal{A}'$ sia chiuso alla unione ed alla intersezione finite; avendo poi supposto $O' = \emptyset$, ne segue che $\mathcal{A}'$ è chiuso anche rispetto alla differenza (difatti la differenza tra due insiemi, $C' = A' - B'$, è caratterizzata dalla proprietà $C' \cap B' = \emptyset$, $C' \cup B' = A' \cup B'$; detti A e B i somi corrispondenti in $\mathcal{R}$ rispettivamente ad A' e B' , posto $D = A - B$, avremo $D \cap B = \emptyset$, $D \cup B = A \cup B$, e quindi $D' \cap B' = \emptyset$, $D' \cup B' = B' \cup A'$ per il corrispondente di D in $\mathcal{A}'$, D' : si conclude $C' = D' \in \mathcal{A}'$).

3) Data una successione $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$ di insiemi del sistema $\mathcal{A}'$, detto A_n il soma che in $\mathcal{R}$ corrisponde ad A'_n ($n = 1, 2, \dots$), detto A' l'insieme che in $\mathcal{A}'$ corrisponde al soma $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$, avremo:

i) $A' \in \mathcal{A}'$;

ii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n \subset A'$, in quanto dalla $A_k \subset \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ segue $A'_k \subset A'$, per ogni indice k ;

iii) se $B' \in \mathcal{A}'$ ed è $\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n \subset B'$, detto B il soma che in $\mathcal{R}$ corrisponde all'insieme B' , avremo $A_n \subset B$ per ogni indice n , e quindi $\bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset B$, da cui $A' \subset B'$.

Si conclude che A' è congiunzione (in $\mathcal{A}'$) della successione $\{A'_n\}_{n=1}^{\infty}$.

In conclusione:

non soltanto è vero che *il sistema di insiemi $\mathcal{A}$ soddisfa gli assiomi che C. CARATHÉODORY impone al reticolo di somi astratti $\mathcal{R}$* ;

ma è vero altresì che *qualunque reticolo di somi astratti soddisfacente gli assiomi di C. CARATHÉODORY è isomorfo (rispetto alla relazione d'ordine E , e quindi rispetto alla interferenza $\perp$ ed alla congiunzione $\sqcup$) ad un sistema d'insiemi $\mathcal{A}'$ verificante gli assiomi (1) e (2) del paragrafo 1 (nel sistema $\mathcal{A}'$ come relazione d'ordine va intesa l'inclusione $\subset$)*.

L'assunto è pienamente provato.

3. Funzioni d'insieme fondamentale e funzioni misura. Dopo quanto esposto al paragrafo 2, è evidente che le definizioni ed i risultati esposti in [1] possono applicarsi e (rispettivamente) dedursi supponendo sistematicamente $\mathcal{R} = \mathcal{A}$, senza perder di generalità. Per quanto riguarda il contenuto dei capitoli I, II e V di [1] (funzioni di somi = funzioni d'insieme fondamentale, e funzioni misura) non si ottengono con ciò sostanziali semplificazioni logiche (a differenza di quanto riguarda il contenuto dei capitoli III, IV, VI, e *sgg.* di [1]), ma soltanto una maggiore intuitività del discorso. Le definizioni e i risultati principali sono i seguenti.

DEFINIZIONE. Una funzione reale d'insieme, $\mu(A)$, definita sul sistema $\mathcal{A}$ (e suscettibile anche dei valori $-\infty$, $+\infty$) si dice una *funzione misura* quando:

i) $\mu(\emptyset) = 0$;

ii) dati ad arbitrio l'insieme $B \in \mathcal{A}$ e la successione $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'insiemi pure $\in \mathcal{A}$, dalla relazione $B \subset \bigsqcup_{n=1}^{\infty} A_n$ segue sempre la disuguaglianza $\mu(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ ⁽⁴⁾.

Dalle condizioni (i) ed (ii) segue subito che *ogni funzione misura è non negativa e monotona*.

DEFINIZIONE. Data una funzione misura $\mu(A)$, si dice *misurabile* (μ) ogni insieme $U \in \mathcal{A}$, che goda della proprietà seguente: preso ad arbitrio un insieme $A \in \mathcal{A}$, se è $\mu(A) < +\infty$, allora è $\mu(A) = \mu(A \cap U) + \mu(A - U)$.

Si dimostra che:

(a) *gli insiemi misurabili (μ) costituiscono un sistema $\mathcal{A}_\mu$, chiuso alle operazioni di differenza nonché di congiunzione e interferenza numerabili, su $\mathcal{A}$; pertanto il sistema $\mathcal{A}_\mu$ verifica gli assiomi (1) e (2) del paragrafo 1;*

(4) Ammesso, beninteso, che la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ converga, o diverga, assolutamente

(b) altrettanto può dirsi per il sistema $\mathcal{N}_\mu$ degli insiemi $A \in \mathcal{A}$ per i quali è $\mu(A) = 0$, nonché per il sistema $\mathcal{F}_\mu$ degli insiemi di misura σ -finita (ossia eguali alla congiunzione d'una successione d'insiemi misurabili (μ) , per ciascuno dei quali μ è finita);

(c) inoltre, i sistemi $\mathcal{N}_\mu$ e $\mathcal{F}_\mu$ sono contenuti nel sistema $\mathcal{A}_\mu$, e su $\mathcal{A}_\mu$ sono chiusi alla relazione d'inclusione $\supset$ (sistemi « ereditari » su $\mathcal{A}_\mu$);

(d) la funzione misura $\mu(A)$ risulta numerabilmente additiva su $\mathcal{A}_\mu$: ossia, data una successione $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ d'insiemi mutuamente disgiunti e misurabili (μ) , si ha $\mu\left(\bigsqcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n)$.

Eccetera.

Si deve osservare in tutto ciò soprattutto una cosa: questa teoria è perfettamente analoga a quella ordinaria, con la sola avvertenza di sostituire « congiunzione » e « interferenza » numerabili lì dove nella teoria ordinaria sono l'unione e la intersezione numerabili.

Una seconda osservazione è questa. La teoria ordinaria è stata costruita anche partendo da un δ -anello d'insiemi (sistema numerabilmente $\cap$ -completo) anziché partendo da un σ -anello (sistema numerabilmente completo, ossia $\cup$ - $\cap$ -completo)⁽⁵⁾. L'analogo consisterebbe nel porre in luogo dell'assioma 2 del paragrafo 1 il seguente, più debole,

2') data una successione $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ d'insiemi fondamentali, tra gli insiemi fondamentali contenuti in $\bigcap_{n=1}^\infty A_n$ ve n'è uno massimo $\bigcap_{n=1}^\infty A_n$ (« interferenza » della successione data), e modificare in conformità i risultati (a), (b), (c) e (d) di questo paragrafo.

La cosa è perfettamente fattibile, come osserva lo stesso C. CARATHÉODORY (v. [1], pp. 148-149); ci siamo attenuti alla formulazione (2) del paragrafo 1 al solo scopo di ottenere una teoria direttamente confrontabile con quella effettivamente costruita in [1].

Una osservazione più o meno dello stesso tenore della precedente va fatta a proposito dell'introduzione di funzioni misura di segno qualsiasi (cfr. però [1], cap. X, p. 274 e sgg.).

4. Le funzioni di punto fondamentali. Per definire l'operazione di integrazione, C. CARATHÉODORY si serve della nozione (piuttosto artificiosa e poco intuitiva) di « funzione di luogo » = « Ortsfunktion », di cui tratta

⁽⁵⁾ Cfr. [5].

⁽⁶⁾ $A[f < y]$ indica, al solito, quel sottoinsieme di A su cui è $f < y$; analogamente $A[f \leq y]$, ecc.

⁽⁷⁾ $f \cap g$ ($f \cup g$) rappresenta quella funzione che, per ciascun $x \in A$, ha valore eguale al minimo (al massimo) dei due numeri $f(x)$ e $g(x)$.

in [1], capp. III e IV. Se si prende $\mathcal{R} = \mathcal{A}$, si ha il notevole vantaggio di poter impiegare, invece di queste «funzioni di luogo», certe funzioni di punto individuate del sistema $\mathcal{A}$, ciò che consente una maggiore intuitività nella trattazione, facendosi a meno dei faticosi algoritmi introdotti in [1], cap. IV.

Introdotta al paragrafo 1 il sistema $\mathcal{A}$ degli insiemi fondamentali, introduciamo in corrispondenza la classe $\mathcal{M}$ delle funzioni di punto «fondamentali».

Una funzione di punto f si dirà «fondamentale» se:

- 1) *il suo insieme di definizione A è fondamentale;*
- 2) *per ogni numero reale (improprio) y esiste almeno un insieme fondamentale $A_f(y)$ tale che*

$$A[f < y] \subset A_f(y) \subset A[f \leq y] \quad (6)$$

ovvero, in altre parole, *tale che*

$$f(x) < y \text{ implichi } x \in A_f(y) \text{ ed } x \in A_f(y) \text{ implichi } f(x) \leq y.$$

Sussistono i teoremi seguenti:

I. *È fondamentale ogni funzione costante, definita su un insieme fondamentale. Banale.*

II. *Dato un numero finito di insiemi fondamentali, $A_1, A_2, \dots, A_n$, è fondamentale qualsiasi funzione definita su $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ e costante su ciascuno degli insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n$. Banale.*

III. *Date due funzioni f e g , entrambe fondamentali e definite sull'insieme A , risultano fondamentali anche le funzioni $f \cap g$ e $f \cup g$ ⁽⁷⁾. Difatti si ha, per ogni y reale,*

$$A[f \cap g < y] = A[f < y] \cup A[g < y] \subset A_f(y) \cup A_g(y) \subset A[f \leq y] \cup A[g \leq y] = A[f \cap g \leq y],$$

$$A[f \cup g < y] = A[f < y] \cap A[g < y] \subset A_f(y) \cap A_g(y) \subset A[f \leq y] \cap A[g \leq y] = A[f \cup g \leq y],$$

ed è

$$A_f(y) \cup A_g(y) \in \mathcal{A}, \quad A_f(y) \cap A_g(y) \in \mathcal{A}.$$

IV. *Date due funzioni f e g , entrambe fondamentali e finite sull'insieme A di definizione, risultano fondamentali le funzioni $f \div g$ ed $f \cdot g, -f$, e (se è $g(x) \neq 0$ in tutto A) $1/g$ ⁽⁸⁾.*

⁽⁸⁾ Con $f + g, f \cdot g, -f$ ed $1/g$ si intendono quelle funzioni che, per ciascun $x \in A$, hanno rispettivamente il valore $f(x) + g(x), f(x) \cdot g(x), -f(x)$ e $1/g(x)$. Analogamente per $f - g$ ed f/g .

1) $-f \in \mathcal{M}$; difatti si ha, per ogni y reale,

$$A[f < -y] \subset A_f(-y) \subset A[f \leq -y]$$

e quindi

$$A[-f < y] \subset A - A_f(-y) \subset A[-f \leq y], \quad A - A_f(-y) \in \mathcal{A}.$$

2) $1/g \in \mathcal{M}$; difatti, si ha (essendo sempre $g(x) \neq 0$)

$$A[g < 0] = A_g(0) = A[g \leq 0]$$

e quindi

$$A[1/g < 0] = A_g(0) = A[1/g \leq 0], \quad A_g(0) \in \mathcal{A}, \text{ per } y = 0,$$

$$A[1/g < y] \subset A_g(0) \cup [A - A_g(1/y)] \subset A[1/g \leq y], \quad A_g(0) \cup [A - A_g(1/y)] \in \mathcal{A}, \text{ per } y > 0,$$

$$A[1/g < y] \subset A_g(0) \cap [A - A_g(1/|y|)] \subset A[1/g \leq y], \quad A_g(0) \cap [A - A_g(1/|y|)] \in \mathcal{A}, \text{ per } y < 0.$$

3) $f + g \in \mathcal{M}$; per dimostrarlo fissiamo ad arbitrio il numero reale y . Prendiamo in primo luogo un $x \in A$, tale che sia $f(x) + g(x) < y$; possiamo allora trovare due numeri razionali u e v tali da aversi $f(x) < u$, $g(x) < v$, $u + v < y$; ne segue che è $x \in A_f(u) \cap A_g(v)$, $u + v < y$, e quindi

$$A[f + g < y] \subset \bigcup_{u,v}^{u+v < y} [A_f(u) \cap A_g(v)] \subset \bigcup_{u,v}^{u+v < y} [A_f(u) \cap A_g(v)] \in \mathcal{A} (u, v \text{ razionali}).$$

In secondo luogo, prendiamo a piacere quattro numeri razionali u, v, r, s , con $u + v < y < r + s$; necessariamente sarà $u < r$ ovvero $v < s$, e quindi $A_f(u) \subset A_f(r)$ ovvero $A_g(v) \subset A_g(s)$, in ogni caso $A_f(u) \cap A_g(v) \subset A_f(r) \cup A_g(s)$; data l'arbitrarietà di u, v, r, s , avremo successivamente

$$\bigcup_{u,v}^{u+v < y} [A_f(u) \cap A_g(v)] \subset A_f(r) \cup A_g(s),$$

$$\bigcup_{u,v}^{u+v < y} [A_f(u) \cap A_g(v)] \subset A_f(r) \cup A_g(s),$$

$$\bigcup_{u,v}^{u+v < y} [A_f(u) \cap A_g(v)] \subset \bigcap_{r,s}^{r+s > y} [A_f(r) \cup A_g(s)],$$

$$\bigcup_{u,v}^{u+v < y} [A_f(u) \cap A_g(v)] \subset \bigcap_{r,s}^{r+s > y} [A_f(r) \cup A_g(s)] (u, v, r, s, \text{ razionali}).$$

Quest'ultima relazione permette di completare la dimostrazione della tesi (3), provando che è

$$\bigsqcup_{u, v}^{u+v < y} [A_f(u) \sqcap A_g(v)] \subset A[f + g \leq y] \quad (u, v \text{ razionali}):$$

difatti, se in un punto x di A si ha $f(x) + g(x) > y$, possiamo trovare due numeri razionali r ed s tali da aversi

$$f(x) > r, \quad g(x) > s, \quad r + s > y, \quad \text{da cui } x \notin A_f(r), \quad x \notin A_g(s), \quad r + s > y,$$

poi $x \notin A_f(r) \cup A_g(s)$, $r + s > y$, quindi $x \notin \bigcap_{r, s}^{r+s > y} [A_f(r) \cup A_g(s)]$, ed infine

$$x \notin \bigsqcup_{u, v}^{u+v < y} [A_f(u) \sqcap A_g(v)] \quad (u, v, r, s \text{ razionali}).$$

In conclusione per ogni numero reale y si ha (con u, v, r, s razionali)

$$A[f + g < y] \subset \bigsqcup_{u, v}^{u+v < y} [A_f(u) \sqcap A_g(v)] \subset \bigcap_{r, s}^{r+s > y} [A_f(r) \cup A_g(s)] \subset A[f + g \leq y].$$

4) $f \cdot g \in \mathcal{M}$. Se le due funzioni f e g sono entrambe non negative su A , la dimostrazione è analoga a quella della tesi (3); se ciò non accade, ponendo $f_+ = f \cup 0$, $g_+ = g \cup 0$, $f_- = -(f \cap 0)$, $g_- = -(g \cap 0)$ ⁽⁹⁾ si ha $f_+ \in \mathcal{M}$, $f_- \in \mathcal{M}$, $g_+ \in \mathcal{M}$, $g_- \in \mathcal{M}$, $f \cdot g = f_+ \cdot g_+ + f_- \cdot g_- - f_+ \cdot g_- - f_- \cdot g_+$, e quindi $f \cdot g \in \mathcal{M}$.

Il teorema IV dimostra in sostanza che la totalità delle funzioni finite fondamentali, definite su un dato insieme A , è chiusa alle operazioni $+$, $-$, $\times$, $:$, definite nel modo più ovvio, con la solita eccezione, per la divisione, che il divisore non assuma in A il valore zero.

Il teorema III dimostra che la totalità $\mathcal{M}^A$ delle funzioni fondamentali su un dato insieme $A \in \mathcal{A}$, costituisce un reticolo rispetto alla relazione d'ordine $\sqsubseteq$ così definita (in modo ovvio):

$$f \sqsubseteq g \text{ significa } f \leq g, \text{ ossia } f(x) \leq g(x) \text{ per ogni } x \in A.$$

In tale reticolo la congiunzione $\sqcap$ e l'interferenza $\sqcap$ finite s'identificano rispettivamente con le operazioni $\cup$ e $\cap$.

⁽⁹⁾ Con 0 s'è indicata, al solito, la funzione identicamente nulla; è ovvio che f_+ , f_- , g_+ , g_- sono non negative.

Il reticolo $\mathcal{M}^A$ risulta anche completo numerabilmente, come dimostra il seguente teorema

V. Data una successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ di funzioni fondamentali, definite sullo stesso insieme A ,

tra le funzioni fondamentali su A maggioranti la successione ve n'è una minima $\bigcap_{n=1}^{\infty} f_n$ (« congiunzione » della successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$);

tra le funzioni fondamentali su A minoranti la successione ve n'è una massima $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n$ (« interferenza » della successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$).

In altre parole esistono due funzioni fondamentali e definite su A , $\bigcap_{n=1}^{\infty} f_n$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n$ tali che

$$i) \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n \leq \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \leq \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \quad (10);$$

ii) se $f \in \mathcal{M}^A$ ed è $f \leq \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n$ ovvero $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \leq f$, ne segue, rispettivamente, $f \leq \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n$, ovvero $\bigcap_{n=1}^{\infty} f_n \leq f$.

Dimostriamo la metà del teorema, e precisamente la $\bigcap$ -completezza numerabile del reticolo $\mathcal{M}^A$, l'altra metà essendo analoga.

Per costruire la funzione $\bigcap_{n=1}^{\infty} f_n$, consideriamo per ogni punto $x \in A$, il gruppo $\mathcal{G}(x)$ degli insiemi fondamentali contenuti in A e contenenti x ⁽¹¹⁾, e poniamo

$$g(x) = \lim''_{z \text{ su } \mathcal{G}(x)} \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(z).$$

1) $g \in \mathcal{M}^A$. Fissato il numero reale y , dalla disuguaglianza $g(x) < y$ segue l'esistenza d'un insieme fondamentale B , contenuto in A e contenente x , tale che sia $B \subset A \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n < y \right] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A[f_n < y] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{f_n}(y)$, e quindi $B \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{f_n}(y)$ ed infine $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{f_n}(y)$;

(10) Con $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n$ ($\bigcap_{n=1}^{\infty} f_n$) s'intende quella funzione che, per ciascun $x \in A$, assume valore eguale all'estremo superiore (inferiore) della successione numerica $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$.

(11) Cfr. [5], pag. 6 e sgg.

dunque

$$A [g < y] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{f_n}(y) \in \mathcal{A}.$$

In secondo luogo, fissato il numero reale y , dalla

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{f_n}(y) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{f_n}(y)$$

segue subito, per ogni indice n , e per ogni $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{f_n}(y)$, $f_n(z) \leq y$ e quindi

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(z) \leq y, \text{ da cui, immediatamente,}$$

$$g(x) = \lim''_{z \text{ su } \mathcal{G}(x)} \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(z) \leq y;$$

dunque $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{f_n}(y) \subset A [g \leq y]$ c. d. d.

2) $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \leq g$. Fissiamo ad arbitrio $x \in A$ ed il numero reale y maggiore di $g(x)$; come abbiamo visto al punto precedente, dalla $g(x) < y$ segue $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{f_n}(y)$ e da questa segue $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(z) \leq y$: per la arbitrarietà di y , l'assunto è provato.

3) Se $f \in \mathcal{M}^A$ ed è $\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \leq f$, allora è anche $g \leq f$. Per provar ciò, essendo $\lim''_{z \text{ su } \mathcal{G}(x)} \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(z) \leq \lim''_{z \text{ su } \mathcal{G}(x)} f(z)$ su tutto A , basterà mostrare che è

$$\lim''_{z \text{ su } \mathcal{G}(x)} f(x) \leq f(x) \text{ su tutto } A.$$

Ma, con lo stesso ragionamento del punto (1), per ogni numero y maggiore di $f(x)$ abbiamo $x \in A_f(y) \subset A [f \leq y]$, e quindi $\lim''_{z \text{ su } \mathcal{G}(x)} f(z) \leq y$: per la arbitrarietà di y segue l'assunto.

In conclusione ponendo $\bigcap_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim''_{z \text{ su } \mathcal{G}(x)} \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ si soddisfano le condizioni dell'enunciato, le quali d'altronde non ammettono più d'una funzione che le soddisfi.

$$\text{In modo analogo avremo } \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim'_{z \text{ su } \mathcal{G}(x)} \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n(z).$$

OSSERVAZIONE. Si noti, che nel dimostrare il punto (3) del teor. V, nonchè l'analogo relativo alla funzione $\bigcap_{n=1}^{\infty} f_n$, si è provato che:

VI. Se $f \in \mathcal{M}^A$, allora si ha $f(x) = \lim_{z \text{ su } \mathcal{G}(x)} f(z)$ per ogni $x \in A$.

OSSERVAZIONE. Si noti ancora che il teorema V consente di introdurre le seguenti nozioni di limite, per qualunque successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ di funzioni fondamentali sullo stesso insieme A :

$$\text{Lim}' f_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} f_k, \quad \text{Lim}'' f_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} f_k.$$

Il teorema V ha dimostrato che, dato un insieme fondamentale A , il reticolo $\mathcal{M}^A$ è numerabilmente completo; il teorema seguente dimostra che esso è (a meno di isomorfismi) il minimo reticolo numerabilmente completo contenente come elementi le funzioni fondamentali «costanti a tratti» su A .

VII. Dato l'insieme fondamentale A e la funzione $f \in \mathcal{M}^A$, esiste una successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ di funzioni $\in \mathcal{M}^A$ tali che:

i) per ciascun indice n , si può decomporre A nell'unione finita d'insiemi fondamentali, su ciascuno dei quali f_n sia costante;

$$\text{ii) } f = \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n.$$

VII'. Dato l'insieme fondamentale A e la funzione $f \in \mathcal{M}^A$, esiste una successione $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ di funzioni $\in \mathcal{M}^A$, tali che:

i) per ciascun indice n , si può decomporre A nella unione finita di insiemi fondamentali, su ciascuno dei quali f_n sia costante;

$$\text{ii) } f = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n.$$

Dimostro solo il teorema VII, l'altro essendo analogo. A questo fine, sia $\{y_n\}$ una successione di numeri reali densa su tutto l'asse reale, e poniamo, per ciascun indice n ,

$$f_n(x) = -\infty \text{ su } A_f(y_n), \quad f_n(x) = y_n \text{ su } A - A_f(y_n).$$

È immediato che per ciascun indice n si ha

$$f_n \leq f, \text{ e quindi } \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n \leq f.$$

D'altra parte, per ogni $x \in A$ e per ogni numero y minore di $f(x)$, esiste un indice k tale da aversi $y < y_k < f(x)$, e quindi (teor. VI) esiste un insieme fondamentale B , contenente x e contenuto in A , tale da aversi $y_k < f(z)$ per ogni $z \in B$; ne segue

$B \subset A - A_f(y_k)$ e quindi $f_k(z) = y_k$ su B ,

da cui

$$y < y_k = f_k(x) \leq \bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(x) \leq \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n(x);$$

data l'arbitrarietà di y , si conclude $\bigcap_{n=1}^{\infty} f_n = f$, c. d. d. .

È opportuno qui osservare che l'insieme delle funzioni fondamentali «costanti a tratti» su un dato insieme fondamentale A , è chiuso alle operazioni di intersezione e di unione finite, e quindi costituisce un reticolo subordinato a $\mathcal{M}^A$.

Concludiamo questo paragrafo notando che la teoria qui delineata delle funzioni fondamentali è perfettamente analoga alla teoria ordinaria delle funzioni misurabili, con la sola avvertenza di sostituire «funzione interferenza» e «funzione congiunzione», lì dove nella teoria ordinaria compaiono, rispettivamente, «funzione estremo inferiore» e «funzione estremo superiore» d'una successione di funzioni.

5. Funzioni fondamentali e funzioni di luogo: confronto. Veniamo ora a dimostrare l'equivalenza tra la nozione di «funzione di luogo» di C. CARATHÉODORY e quella di «funzione fondamentale» introdotta al paragrafo 4, sempre ammettendo di aver posto $\mathcal{A}$ in luogo di $\mathcal{R}$ nella teoria «algebrica».

Secondo C. CARATHÉODORY, una funzione di luogo φ , definita sul soma (= insieme fondamentale) A si individua assegnando una scala di somi $[S_\varphi(y)]$ contenuti in A , ossia una legge che ad ogni numero reale improprio y faccia corrispondere un insieme fondamentale $S_\varphi(y) \subset A$, con la proprietà che

$$\text{dalla } y' \leq y'' \text{ segua sempre } S_\varphi(y') \subset S_\varphi(y'').$$

Cominciamo con lo stabilire il lemma:

I. *Fissato in A il punto x , e data la scala di somi $[S_\varphi(y)]$ contenuti in A , si ha*

$$\inf \{y: x \in S_\varphi(y)\} = \sup \{y: x \notin S_\varphi(y)\}^{(12)}.$$

⁽¹²⁾ Al solito, $\sup \{y: x \notin S_\varphi(y)\}$ designa l'estremo superiore dell'insieme dei numeri (reali impropri) y tali che $x \notin S_\varphi(y)$; ecc. .

Poniamo per abbreviazione: $\bar{y} = \inf \{y: x \in S_\varphi(y)\}$, $\underline{y} = \sup \{y: x \notin S_\varphi(y)\}$.

1) Se fosse $\bar{y} > \underline{y}$, preso un valore y tale che $\bar{y} > y > \underline{y}$, avremmo $x \notin S_\varphi(y)$ e contemporaneamente $x \in S_\varphi(y)$.

2) Se d'altra parte fosse $\bar{y} < \underline{y}$, esisterebbe un numero $u < \underline{y}$ con $x \in S_\varphi(u)$, e di conseguenza un altro numero v maggiore di u con $x \notin S_\varphi(v)$; avremmo allora

$$u < v \text{ e } S_\varphi(u) \not\subset S_\varphi(v)$$

il che è assurdo.

Si conclude $\bar{y} = \underline{y}$, c. d. d. .

Ne segue il teorema

II. *Data la scala di somi $[S_\varphi(y)]$ contenuti in $A \in \mathcal{A}$, è fondamentale la funzione f , definita su A , la quale sul generico punto x di A assume il comune valore di*

$$\sup \{y: x \notin S_\varphi(y)\} = \inf \{y: x \in S_\varphi(y)\}.$$

Difatti per ciascun punto $x \in A$ avremo che

$$y < f(x) \quad \text{implica} \quad x \notin S_\varphi(y),$$

$$y > f(x) \quad \text{implica} \quad x \in S_\varphi(y);$$

ne segue, con le notazioni del paragrafo 4,

$$A[f < y] \subset S_\varphi(y) \subset A[f \leq y]$$

ed il teorema è dimostrato ponendo $A_f(y) = S_\varphi(y)$.

Dalla definizione stessa di funzione fondamentale segue che

III. *Data un'arbitraria funzione fondamentale f definita su A , essa può ottenersi sempre da una opportuna scala di somi (contenuti in A) al modo indicato dal teorema precedente.*

Date su un medesimo insieme fondamentale A due scale di somi, $[S_\varphi(y)]$ e $[S_\psi(y)]$, C. CARATHÉODORY dice che è

$$[S_\varphi(y)] \leq [S_\psi(y)]$$

quando, per ogni coppia y' ed y'' di numeri reali (impropri), dalla disuguaglianza $y' < y''$ segue l'inclusione $S_\psi(y') \subset S_\varphi(y'')$.

Ebbene, sussiste il teorema:

IV. *Date due scale di somi $[S_\varphi(y)]$, $[S_\psi(y)]$ contenuti nell'insieme fondamentale A , siano f e g le due funzioni che si ottengono rispettivamente da $[S_\varphi(y)]$ e $[S_\psi(y)]$ con il procedimento del teorema II.*

Dalla $[S_\varphi(y)] \leq [S_\psi(y)]$ segue allora $f \leq g$, e viceversa.

Per dimostrarlo premettiamo il lemma:

V. *Nelle ipotesi del teorema IV, la condizione*

(a) «per ogni coppia di numeri reali $u < v$, si ha $S_\psi(u) \subset S_\varphi(v)$ » *equivale alla condizione*

(b) «per ogni coppia di numeri reali $u < v$ e per ogni $x \in A$, $g(x) \leq u$ implica $f(x) \leq v$ ».

1) (a) implica (b); difatti, se (b) fosse falso, vi sarebbe un punto $x \in A$ ed una coppia di numeri reali $u < v$ con $g(x) < u$ e $v < f(x)$, quindi $x \in S_\psi(u)$ ed $x \notin S_\varphi(v)$: ne seguirebbe $S_\psi(u) \not\subset S_\varphi(v)$ con $u < v$, e la (a) sarebbe falsa.

2) (b) implica (a); difatti, se (a) fosse falso vi sarebbe un punto $x \in A$ ed una coppia di numeri reali $u < v$ tali che $x \in S_\psi(u)$ e $x \notin S_\varphi(v)$ e quindi $g(x) \leq u$, $v \leq f(x)$, ed infine $g(x) < f(x)$; ne seguirebbe l'esistenza di altri due numeri reali $r < s$ con $g(x) < r$, $s < f(x)$, e la (b) risulterebbe falsa.

Con ciò il lemma V è dimostrato.

Veniamo ora alla dimostrazione del teorema IV. La relazione $[S_\varphi(y)] \leq [S_\psi(y)]$ equivale a dire che, per ogni coppia di numeri reali $u < v$ si ha $S_\psi(u) \subset S_\varphi(v)$; per il lemma V ciò equivale a dire che, in ciascun punto $x \in A$, la $g(x) \leq u$ implica $f(x) \leq v$ per ogni coppia di numeri reali $u < v$; per l'arbitrarietà di u e v , ciò equivale a dire che è $f(x) \leq g(x)$ su tutto A , c. d. d..

Possiamo venire, infine, al risultato fondamentale di questo paragrafo.

Considerando equivalenti due scale di somi $[S_\varphi(y)]$ ed $[S_\psi(y)]$ (contenuti nello stesso insieme $A \in \mathcal{A}$) quando si ha ad un tempo

$$[S_\varphi(y)] \leq [S_\psi(y)] \quad \text{e} \quad [S_\psi(y)] \leq [S_\varphi(y)],$$

C. CARATHÉODORY chiama «funzioni di luogo» definite su $A \in \mathcal{A}$, le classi di equivalenza in cui la totalità delle scale di somi contenuti in A viene ripartita. Ma il teorema IV dimostra che due scale di somi sono equivalenti se e solo se il procedimento indicato dal teorema II associa loro la stessa funzione fondamentale; quindi si ha:

VI. *Fissato l'insieme $A \in \mathcal{A}$, la totalità delle funzioni di luogo definite su A forma, rispetto alla relazione di ordine $\leq$, un reticolo isomorfo a quello delle funzioni fondamentali definite in A .*

OSSERVAZIONI. 1). Poichè la definizione di limite di una successione di funzioni reali fondamentali ovvero di luogo può esser data mercè il solo uso della relazione d'ordine $\leq$, dal teorema VI segue che il sistema delle funzioni di luogo definite su $A \in \mathcal{A}$ è isomorfo ad $\mathcal{M}^A$, anche rispetto alle operazioni $\lim'_{n \rightarrow \infty}$ e $\lim''_{n \rightarrow \infty}$ (che in $\mathcal{M}^A$ sono state definite nella osservazione prima del teorema VII del paragrafo 4).

2). Per analoga ragione il sistema $\mathcal{M}^A$ è isomorfo al sistema delle funzioni di luogo su A , anche rispetto alle operazioni « modulo di », « parte positiva di » e « parte negativa di ».

3). Data una funzione di luogo φ definita su $A \in \mathcal{A}$, ed un insieme fondamentale $B \subset A$, la teoria algebrica chiama « funzione traccia della φ su B » quella funzione ψ di luogo che è definita su B ed ammette la scala di somi $[B \cap S_\varphi(y)]$; ma alla ψ il procedimento del teorema II associa una funzione g , che sull'insieme B coincide con la f . Ciò dimostra che l'isomorfismo che ci interessa sussiste anche rispetto alla operazione di « traccia ».

6. Ancora sul confronto tra funzioni di luogo e funzioni fondamentali. Resta ormai da dimostrare nient'altro che l'isomorfismo aritmetico (ossia rispetto alle operazioni $+$, $-$, $\times$, $:$) tra il sistema delle funzioni finite di luogo e quelle delle funzioni finite fondamentali, tutte aventi lo stesso insieme di definizione $A \in \mathcal{A}$.

Per le funzioni di luogo, C. CARATHÉODORY introduce le operazioni valendosi del concetto di estremo superiore (ed inferiore) sul soma $B \subset A$, d'una funzione di luogo definita nel soma A , secondo la definizione seguente :

Data una funzione di luogo φ , definita in $A \in \mathcal{A}$, si dice « estremo superiore (inferiore) di φ nell'insieme fondamentale $B \subset A$ » il numero $\beta_\varphi(B)$ (il numero $\alpha_\varphi(B)$) dato dall'eguaglianza

$$\beta_\varphi(B) = \begin{cases} \inf \{y : B \subset S_\varphi(y)\} & \text{se è } < +\infty, \\ \sup \{y : B \not\subset S_\varphi(y)\} & \text{se è } > -\infty \end{cases}$$

$$\left(\alpha_\varphi(B) = \begin{cases} \sup \{y : B \cap S_\varphi(y) = \emptyset\} & \text{se è } > -\infty, \\ \inf \{y : B \cap S_\varphi(y) \neq \emptyset\} & \text{se è } < +\infty. \end{cases} \right)^{(13)}.$$

⁽¹³⁾ Al solito, $[S_\varphi(y)]$ indica una scala di somi relativa alla φ .

Dimostriamo dunque il teorema:

I. *Data una funzione di luogo φ , definita in $A \in \mathcal{A}$, detta f la corrispondente funzione fondamentale⁽¹⁴⁾, si ha*

$$\beta_{\varphi}(B) = \sup \{f(x) : x \in B\},$$

$$\alpha_{\varphi}(B) = \inf \{f(x) : x \in B\},$$

per ogni insieme fondamentale B contenuto in A .

Basterà ovviamente dimostrare la prima eguaglianza, l'altra essendo analoga.

1) Se fosse $\sup \{f(x) : x \in B\} < \beta_{\varphi}(B) < +\infty$, si potrebbero trovare due numeri reali u, v tali che

$$\sup \{f(x) : x \in B\} < u < v < \inf \{y : B \subset S_{\varphi}(y)\},$$

da cui segue sia la relazione $B \subset A_f(u) = S_{\varphi}(u)$, sia l'implicazione «se $B \subset S_{\varphi}(y)$ allora $v < y$ »; si concluderebbe dunque $v < u$, che è assurdo.

2) Se fosse

$$\sup \{f(x) : x \in B\} < \beta_{\varphi}(B) = +\infty,$$

esisterebbe un numero reale u tale che

$$\sup \{f(x) : x \in B\} < u, \quad B \not\subset S_{\varphi}(u),$$

e quindi nuovamente

$$B \subset A_f(u) = S_{\varphi}(u), \quad B \not\subset S_{\varphi}(u),$$

il che è assurdo.

3) Se fosse

$$\beta_{\varphi}(B) < \sup \{f(x) : x \in B\},$$

esisterebbe un numero reale u tale che

$$B \subset S_{\varphi}(u), \quad u < \sup \{f(x) : x \in B\},$$

e quindi esiste un punto $x \in B$ per cui

$$B \subset S_{\varphi}(u), \quad u < f(x), \quad \text{e quindi } x \notin A_f(u) = S_{\varphi}(u):$$

ne seguirebbe di nuovo $B \subset S_{\varphi}(u)$ e $B \not\subset S_{\varphi}(u)$, il che è assurdo.

Il teorema è dimostrato.

⁽¹⁴⁾ Con le notazioni dei paragrafi 4 e 5 possiamo porre $A_f(y) = S_{\varphi}(y)$, per ogni y .

OSSERVAZIONE. Questo teorema I giustifica la definizione di C. CARATHÉODORY per $\alpha_\varphi(B)$ e $\beta_\varphi(B)$. Si osservi come venga eliminata naturalmente una bizzarria notevole della teoria algebrica: *l'esistenza di funzioni di luogo sprovviste di valori*.

Secondo la teoria algebrica, una funzione di luogo φ assume il valore y quando si ha $\bigsqcup_{k=1}^{\infty} S_\varphi\left(y - \frac{1}{k}\right) \neq \bigsqcup_{k=1}^{\infty} S_\varphi\left(y + \frac{1}{k}\right)$, ossia quando v'è un insieme fondamentale su cui la corrispondente funzione f sia identica ad y : perchè φ non assuma alcun valore (secondo C. CARATHÉODORY), basta dunque che in ciascun insieme di livello della f non sia contenuto alcun insieme fondamentale $\neq \emptyset$.

Dopo il teorema I, la dimostrazione dell'isomorfismo aritmetico tra le funzioni fondamentali finite è a portata di mano. Mi limito al solo caso della operazione $+$, gli altri essendo analoghi (con qualche difficoltà dovuta al segno, nel caso della $\times$ e della $:$, che però si risolve separando parti positive e parti negative).

Siano date due funzioni di luogo finite, φ e ψ , sullo stesso insieme fondamentale A , siano f e g le corrispondenti funzioni fondamentali. Per un teorema di C. CARATHÉODORY ⁽¹⁶⁾, esiste una ed una sola funzione di luogo χ , definita su A , verificante la condizione

$$\alpha_\varphi(B) + \alpha_\psi(B) \leq \alpha_\chi(B) \leq \beta_\chi(B) \leq \beta_\varphi(B) + \beta_\psi(B)$$

per ogni B fondamentale e contenuto in A ; ciò significa, per il teorema I, e per i risultati del paragrafo precedente, che esiste una ed una sola funzione fondamentale h , definita su A , verificante la condizione

$$\alpha_\varphi(B) + \alpha_\psi(B) \leq h(x) \leq \beta_\varphi(B) + \beta_\psi(B)$$

per ogni B fondamentale e contenuto in A , per ogni $x \in B$; h , naturalmente, è la funzione che in $\mathcal{M}^A$ corrisponde a χ . Ma la funzione $f + g$ verifica la condizione imposta ad h , dunque si ha $f + g = h$.

L'isomorfismo rispetto alla operazione $+$ è dimostrato. Analogamente per le altre tre operazioni, con le dovute cautele.

OSSERVAZIONI FINALI. Nel capitolo IV, pag. 121 e sgg., di [1], vengono considerate altre maniere di « comporre » tra loro più funzioni di luogo, oltre le quattro operazioni dell'aritmetica; ma è ormai banale, che il discorso

⁽¹⁵⁾ Cfr. [1], p. 86.

⁽¹⁶⁾ [1], p. 108.

tenuto in questo paragrafo a proposito della operazione $+$ si può applicare in generale a tutte le altre «leggi di composizione» considerate da C. CARATHÉODORY: non vi insisterò più a lungo.

7. Le funzioni misurabili (μ) e la nozione di integrale. I due paragrafi 5 e 6 ci consentono di sbarazzarci della nozione di funzione di luogo (e quindi, del contenuto dei capitoli III e IV di [1]), e rimpiazzarle con le funzioni fondamentali, con i teoremi del paragrafo 4.

Seguendo ora le tracce del cap. VI di [1], dedicato alla integrazione, avremo le definizioni e i risultati seguenti.

DEFINIZIONE. *Assegnata la funzione misura μ , si dirà misurabile (μ) ogni funzione di punto f verificante le seguenti proprietà:*

- i) *è definita su un insieme A misurabile (μ) ;*
- ii) *per ogni numero reale (improprio) y esiste un insieme $A_f(y)$ misurabile (μ) tale che*

$$A[f < y] \subset A_f(y) \subset A[f \leq y].$$

Chiamiamo $\mathcal{M}_\mu$ ($\mathcal{M}_\mu^A$) l'insieme delle funzioni misurabili (μ) (definite su A). È evidente che

- 1) *Ogni funzione misurabile (μ) è fondamentale, ossia $\mathcal{M}_\mu \subset \mathcal{M}$.*
- 2) *Per i risultati del paragrafo 2 e le definizioni del paragrafo 4, le funzioni misurabili (μ) non sono altro che le funzioni «fondamentali» rispetto al sistema $\mathcal{A}_\mu$ degli insiemi misurabili (μ) , assunto come «fondamentale».*
- 3) *Per i risultati del paragrafo 3, la interferenza e la congiunzione numerabili, nonchè la differenza su $\mathcal{A}$ subordinano le operazioni di egual nome su $\mathcal{A}_\mu$; di conseguenza, in virtù dell'osservazione precedente:*
 - i) *Dato un numero finito d'insiemi misurabili (μ) $A_1, A_2, \dots, A_n$, è misurabile (μ) qualunque funzione definita su $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ e costante su ciascun insieme $A_1, A_2, \dots, A_n$ (cfr. teorr. I e II del paragrafo 4).*
 - ii) *L'insieme $\mathcal{M}_\mu^A$, delle funzioni misurabili (μ) su A , è chiuso alle operazioni di interferenza e di congiunzione numerabili, e quindi a quella di passaggio al limite, su $\mathcal{M}^A$, (cfr. teorema III e V del paragrafo 4).*
 - iii) *Qualunque funzione misurabile (μ) è eguale alla congiunzione (interferenza) numerabile, su $\mathcal{M}^A$, di una successione di funzioni misurabili (μ) «costanti a tratti» (cfr. teor. VII e VII' del paragrafo 4).*
 - iv) *Il sistema delle funzioni finite, misurabili (μ) su A , è chiuso alle operazioni $+$, $\times$, $-$, $:$ (con la solita eccezione che il divisore non deve essere mai nullo su A ; cfr. Teor. IV del paragrafo 4).*

Come si vede, la teoria delle funzioni misurabili (μ) è perfettamente analoga a quella ordinaria, con la solita sostituzione delle operazioni $\sqcup$ e $\sqcap$ rispettivamente al posto delle $\cup$ e $\cap$.

Ciò premesso, la definizione di integrale si presenta come segue:

1) Sia f una funzione misurabile (μ) e non negativa sull'insieme A_0 di misura σ -finita; si prendano in A_0 , ad arbitrio, un numero finito n di insiemi mutuamente disgiunti $A_1, A_2, \dots, A_n$ di misura finita⁽¹⁷⁾ ed in corrispondenza n numeri reali (finiti) $y_1, y_2, \dots, y_n$ tali che sia

$$y_k \leq \inf \{ f(x) : x \in A_k \}, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

e consideriamo il numero

$$I = \sum_{k=1}^n y_k \mu(A_k);$$

al variare di $n, A_1, A_2, \dots, A_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ con le condizioni indicate, il numero I descrive un insieme, il cui estremo superiore si chiama *integrale di f esteso ad A_0 , rispetto a μ* , e si scrive

$$\int_{A_0} f d\mu.$$

2) Sia f una funzione misurabile (μ) sull'insieme A_0 di misura σ -finita; posto

$$f_+ = f \sqcup 0, \quad f_- = -[f \sqcap 0],$$

entrambe le funzioni f_+ ed f_- risultano misurabili (μ) e non negative su A_0 ; posto

$$\psi_+(A_0) = \int_{A_0} f_+ d\mu, \quad \psi_-(A_0) = \int_{A_0} f_- d\mu,$$

se le due quantità $\psi_+(A_0)$ e $\psi_-(A_0)$ non sono entrambe infinite, si dice che f è *integrabile su A_0 rispetto a μ* , e la quantità

$$\int_{A_0} f d\mu = \int_{A_0} f_+ d\mu - \int_{A_0} f_- d\mu$$

viene chiamata *integrale di f su A , rispetto a μ* .

⁽¹⁷⁾ Ossia, tali che $\mu(A_k) < +\infty$ ($k = 1, 2, \dots, n$).

Non è difficile riconoscere che la definizione qui adottata, perfettamente analoga a quella classica (cfr. [2], pp. 19 e 20), coincide, salvo il diverso linguaggio, con la definizione di C. CARATHÉODORY⁽¹⁸⁾, suppostovi $\mathcal{R} = \mathcal{A}$. I risultati della teoria «algebrica» contenuti nei capitoli VI e seguenti di [1], restano pertanto validi; si ha però il vantaggio di poterli conseguire con metodi simili a quelli classici (cfr. ancora [2], pg. 21 e segg.) con la sola sostituzione di «interferenza» al posto di «intersezione» e di «congiunzione» al posto di «unione» (e la conseguente alterazione del significato di «limite per una successione d'insiemi, o di funzioni, misurabili (μ) »)

Si riottengono così in modo del tutto naturale e spontaneo la *completa* (numerabile) *additività*⁽¹⁹⁾, la *assoluta continuità* (rispetto alla misura adottata), la *linearità* (rispetto all'integrando) dell'integrale e così la *decomposizione* di LEBESGUE e quella di JORDAN, nonché il *teorema* di RADON-NIKODYM, ecc. ecc. Ma non vogliamo dilungarci su ciò.

8. Osservazioni finali e conclusione. Ci sia lecito ora concludere con qualche osservazione.

1) La teoria sommariamente delineata in questo lavoro si riduce immediatamente a quella classica, ammettendo che il sistema di insiemi fondamentali $\mathcal{A}$ sia chiuso rispetto alla intersezione ad alla unione numerabili: allora i segni $\sqcap$, $\sqcup$ vengono ad esser del tutto equivalenti ai segni $\cap$, $\cup$ (rispettivamente) in tutta la trattazione sopra svolta. Questo mostra, per così dire, «di quanto» la teoria algebrica è più generale di quella ordinaria.

2) La teoria classica è stata di recente ampliata⁽²⁰⁾ non solo considerando misure con segno, ma permettendo al sistema degli insiemi misurabili di essere solo un δ -anello anzichè un σ -anello: quest'ultima circostanza permette di considerare integrali e misure con segno che non sono a variazione unilateralmente limitata su tutto il δ -anello. Non c'è difficoltà (come s'è già detto al paragrafo 3) ad ampliare la teoria qui esposta, in modo da includere anche questo caso.

3) Resta incompiuta la trattazione «algebrica» della derivazione delle funzioni d'insieme (di soma).

4) Restano anche aperte le questioni riguardanti il «prolungamento» di una funzione misura. Ossia; data sul sistema d'insiemi fondamentali $\mathcal{A}$ la funzione misura μ , caratterizzare, i reticoli $\mathcal{A}_\mu^*$ subordinati ad $\mathcal{A}$ e mi-

⁽¹⁸⁾ La definizione (1) del testo equivale alla (159.6) di p. 179 di [1]; la definizione (2) del testo è identica a quella di p. 184 di [1].

⁽¹⁹⁾ Intesa nel senso spiegato in (d) al paragrafo 3.

⁽²⁰⁾ Vedi [5].

nimali rispetto alla proprietà seguente: la traccia di μ su $\mathcal{A}_\mu^*$, e la additività numerabile di μ sul reticolo $\mathcal{A}_\mu$ degli insiemi misurabili (μ), determinano la funzione μ su tutto $\mathcal{A}_\mu$.

5) La teoria delineata in questo lavoro è, in un certo senso, duale di quella algebrica, gli enti «punto» ed «insieme di punti» della prima essendo risp. duali degli enti «soma» e «luogo = ultrafiltro proprio di somi» della seconda, allo stesso modo che nella Geometria Proiettiva piana gli enti «punto» e «punteggiata» sono risp. duali degli enti «retta» e «fascio di rette» (Cfr. nota (3))

È intenzione dello scrivente ritornare su questi argomenti.

FERNANDO BERTOLINI

BIBLIOGRAFIA CITATA

- [1] C. CARATHÉODORY, *Mass und Integral und ihre Algebraisierung*, Birkhäuser Verlag, 1956.
- [2] S. SAKS, *Theory of Integral*, Varsavia 1937.
- [3] P. HALMOS, *Measure Theory*, Londra 1950.
- [4] K. MAYRHOFER, *Inhalt und Mass*, Springer Verlag, Wien 1952
- [5] G. FICHERA, *Lezioni sulle trasformazioni lineari*, Trieste 1954.
- [6] H. HERMES, *Einführung in die Verbandstheorie*, Springer Verlag, Berlin 1955.

ELENCO DEI SIMBOLI PRINCIPALI

E ; relazione d'ordine del reticolo («precede»).

$\sqcap, \sqbar$; operazione d'interferenza del reticolo («l'ultimo precedente comune»).

$\sqcup, \sqcup$; operazione di congiunzione del reticolo («il primo seguente comune»).

$\subset$; relazione d'inclusione tra insiemi («è contenuto in»).

$\cap, \cap$; operazione di intersezione tra insiemi, o di estremo inferiore tra funzioni.

$\cup, \cup$; operazione di unione tra insiemi, o di estremo superiore tra funzioni.

$\mathcal{R}$; reticolo fondamentale di somi della teoria algebrica.

$\mathcal{A}$; reticolo degli insiemi fondamentali [con E eguale ad $\subset$].

$\mathcal{A}_\mu$; reticolo degli insiemi misurabili (μ). [con E eguale ad $\subset$].

$\mathcal{M}, (\mathcal{M}^A)$; reticolo delle funzioni fondamentali (definite su A). [con E eguale a $\leq$].

$\mathcal{M}_\mu, (\mathcal{M}_\mu^A)$; reticolo delle funzioni misurabili (μ) (definite su A) - [con E eguale a $\leq$].