ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

MAURO PAGNI

Su un problema al contorno tipico per l'equazione del calore

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 11, nº 1-2 (1957), p. 73-115

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1957_3_11_1-2_73_0>

SU UN PROBLEMA AL CONTORNO TIPICO PER L'EQUAZIONE DEL CALORE

Memoria di MAURO PAGNI (a Modena)

Sia data l'equazione lineare parabolica del secondo ordine

$$L(u) - \frac{\partial u}{\partial y} = f \tag{I}$$

($L(u)$ operatore lineare ellittico nelle variabili spaziali $x_1, \ldots, x_n$) nell'interno di un dominio τ il quale sia o un cilindro retto determinato dalla base D, dominio sufficientemente regolare dello spazio $(x_1, \ldots, x_n)$, e dal segmento $0 \leq y \leq y_0$ oppure l'insieme che si ottiene mantenendo fisso D e l'iperpiano $y = y_0$ e deformando con continuità la ipersuperficie laterale in modo tale che essa risulti ancora una ipersuperficie sufficientemente regolare, con iperpiano tangente in ogni suo punto che formi con gli iperpiani caratteristici $y =$ cost un angolo maggiore di un numero $\theta > 0$, ed avente il contorno negli iperpiani $y = 0$, $y = y_0$. È noto che i problemi tipici maggiormente studiati sono quelli che consistono nell'assegnare sulla base D la soluzione u e sulla superficie laterale s la u oppure la sua derivata conormale $\frac{\partial u}{\partial \nu}$.

Recentemente G. FICHERA [5] in uno studio indirizzato a determinare i problemi al contorno tipici per ogni equazione lineare ellittico-parabolica del secondo ordine, ha richiamato l'attenzione anche su un altro problema tipico per la (I), quello consistente nel dare la u su D e la $\frac{\partial u}{\partial l}$ (derivata secondo un asse obliquo « regolare ») su s. Attraverso i procedimenti del Fichera si può infatti dimostrare l'esistenza di una soluzione « debole » di detto problema.

Attraverso l'uso della trasformata di Laplace (v. ad es. PICONE [16], J. L. LIONS [20]) si può studiare dal punto di vista esistenziale il problema nel caso che il dominio τ sia il cilindro retto e che i coefficienti di $L(u)$, f, l'asse l e il dato $\frac{\partial u}{\partial l}$ non dipendono dalla variabile y.

Dal punto di vista del teorema di unicità il problema era stato già considerato da M. Picone [15] nei suoi ben noti Lavori sulle maggiorazioni delle soluzioni delle equazioni lineari ellittico-paraboliche.

Non mi consta però che il problema sia stato studiato a fondo sotto tutti i punti di vista, in particolare sia mai stata dimostrata l'esistenza in ipotesi generali anche sul dominio τ di una soluzione forte analogamente a quanto è stato fatto per i primi due problemi tipici sopra richiamati. Sorgono infatti qui difficoltà di ordine nuovo connesse anche ad integrali singolari ed equazioni integrali singolari di tipo fin'ora non studiato.

Lo scopo del presente lavoro è appunto quello di intraprendere uno studio sistematico del suddetto problema. Considererò il caso più semplice e significativo della (I), quello dell'equazione del calore in tre variabili, cioè il problema

$$\text{(II)} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}-\frac{\partial u}{\partial y}=f \quad \text{in} \quad \tau-\sigma$$

$$\text{(III)} \qquad u=\varphi \quad \text{su} \quad D\,,\ \frac{\partial u}{\partial l}=g \quad \text{su} \quad s$$

in cui l'asse l e g dipendono dalle tre variabili x_1, x_2, y.

Con ciò mi sembra che saranno messe ugualmente in luce e superate le difficoltà concettuali nuove che si presentano, e l'estensione a più dimensioni non dovrebbe presentare nuove forti difficoltà.

Perverrò anzitutto all'esistenza della soluzione « debole » applicando il procedimento esistenziale di G. Fichera (n. 2); la « regolarizzazione » di questa soluzione porta alla considerazione di un teorema di inversione della formula di Green (n. 3) analogo a quello dimostrato da L. AMERIO [1] per i primi due problemi tipici relativi alla (II). Si dimostra così che la u è una soluzione « forte » della (II) nell'interno di τ e verifica le (III) quasi dappertutto, e quindi ancora in senso « debole ». L'ulteriore regolarizzazione della u sulla frontiera presenta però difficoltà relative allo studio di un nuovo tipo di integrali singolari e di equazioni integrali singolari (n. 11), difficoltà che compaiono anche se si vuole impostare lo studio di (II)-(III) attraverso l'ordinaria teoria dei cosiddetti potenziali di superficie e di dominio costruiti con la soluzione fondamentale della (II) e di uso ben noto nel caso dei due primi problemi tipici.

Ho superato queste difficoltà (n. 4, 5, 6) in modo analogo a quanto fatto per le equazioni ellittiche nei Lavori di OSEEN [14], GIRAUD [7], MAGENES [12] costruendo un opportuno nucleo $H(M, N)$ dipendente da (II), dal dominio τ e dall'asse l, attraverso il quale è possibile la traduzione del problema (II)-

(III) in equazione integrale ordinaria del tipo di Volterra e pervenire così alla soluzione « forte » del problema.

Numerose conseguenze di questa costruzione vengono tratte nei n. 7, 8, 9 e 10, quali la caratterizzazione della classe di funzioni in cui vale il teorema di inversione del n. 3, nuovi teoremi di unicità per (II)-(III), teoremi di completezza di certi sistemi di funzioni, in particolare dei polinomi parabolici, utili in vari metodi di calcolo approssimato della soluzione quale ad esempio il noto metodo del Picone, ed infine alcune prime proprietà degli integrali singolari di cui ho prima detto.

1. — **Preliminari e un primo teorema di unicità.**

Tratteremo da prima il caso che τ sia un cilindro retto. Passeremo in seguito (vedi n. 12) al caso più generale per il dominio τ.

Sia D un dominio del piano (x_1, x_2) limitato dalla curva semplice e chiusa c_0 e dalle k curve semplici e chiuse $c_1, \ldots, c_k$, a due a due prive di punti comuni, esterne l'una all'altra ed interne tutte a c_0; $c_0, c_1, \ldots, c_k$ essendo inoltre di classe 2 in ogni loro punto.

Fissato $y_0 > 0$, indichiamo, per $0 \leq y' \leq y_0$, con $\tau(y')$ il dominio cilindrico dello spazio (x_1, x_2, y) costituito dai punti (x_1, x_2, y) tali che (x_1, x_2) appartenga ad D e $0 \leq y \leq y'$; con $\sigma(y')$ la frontiera di $\tau(y')$ con $p(0)$ e $p(y')$ rispettivamente la base inferiore e la base superiore di $\tau(y')$, con $s(y')$ la superficie laterale di $\tau(y')$ (sicchè risulta $\sigma(y') = p(0) + p(y') + s(y')$) con $c(y')$ la frontiera di $p(y')$. Poniamo poi più brevemente: $\tau(y_0) = \tau$, $\sigma(y_0) = \sigma$, $s(y_0) = s$.

Per ogni punto M di s sia definito un asse $l(M)$, giacente sul piano passante per M e parallelo al piano (x_1, x_2), penetrante in τ; inoltre i coseni direttori di $l(M)$ siano funzioni di classe 1 del punto M su s.

Poniamo per $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $M \equiv (x_1, x_2, y)$ e $N \equiv (x'_1, x'_2, y')$ essendo due punti dello spazio tali che $y' > y$

$$h_{\alpha,\beta}(M, N) = \frac{r^\alpha}{(y'-y)^\beta} e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}}, \quad r = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2};$$

e più in generale essendo $\lambda > 0$

$$h^{(\lambda)}_{\alpha,\beta}(M, N) = \frac{r^\alpha}{(y'-y)^\beta} e^{-\frac{\lambda r^2}{4(y'-y)}}.$$

Sia poi $F(M, N)$ la funzione così definita

$$\begin{cases} F(M, N) = h_{0,1}(M, N) & \text{per} \quad y' > y \\ F(M, N) = 0 & \text{per} \quad y' \leq y\,. \end{cases}$$

Si ponga ancora

$$E(u) = \Delta_2 u - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad \left(\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)$$

$$E^*(u) = \Delta_2 u + \frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Considereremo il seguente problema al contorno:

$$(1) \qquad \begin{cases} E(u) = 0 & \text{in} \quad \tau - \sigma \\ u = 0 & \text{su} \quad p(0) \\ \dfrac{\partial u}{\partial l} = g & \text{su} \quad s \end{cases}$$

g essendo un'assegnata funzione su s.

Incominciamo col dare per il problema (1) un primo teorema [1] di unicità, che si ottiene come caso particolare [2] da ricordati lavori di M. Picone [15]:

I. *Del problema* (1) *v'è al più una soluzione regolare* [3] *in* τ.

2. — Esistenza della « soluzione debole » e regolarizzazione all'interno di τ.

Verrà detta soluzione « debole » del problema (1) ogni funzione u di quadrato sommabile in τ a cui resta associata una funzione ψ di quadrato som-

---

(1) Altri teoremi di unicità saranno dati nel n. 8.

(2) I teoremi di unicità che conseguono dalle formule di maggiorazione di [15] valgono per problemi più generali del problema (1) e sono stabilite nell' ipotesi dell'esistenza di una funzione ω che soddisfa a determinate condizioni quantitative; queste nel caso qui trattato si riducono alle seguenti: $\omega > 0$ in τ, $E(\omega)$ limitato snperiormente in τ, $\dfrac{\partial \omega}{\partial l} < 0$ su s. L'esistenza di una tale ω è ovvia.

(3) Una funzione u si dirà regolare in τ rispetto a (1) se, essendo continua in ogni punto interno a τ e in ogni punto di $p(y_0) - c(y_0)$ con le sue derivate dei primi due ordini che compaiono in $E(u)$, riesce inoltre continua in τ ed ammette in ogni punto di s la $\dfrac{\partial u}{\partial l}$.

mabile su s tale che la

$$\int_s a^{(l)} vg\, ds = \int_s \psi \left(a_*^{(l)} \frac{\partial v}{\partial l_*} - b^{(l)} v \right) ds + \int_\tau u\, E^*(v)\, d\tau \tag{2}$$

sia verificata per ogni v di classe 2 in τ e tale che $v = 0$ su $p(y_0)$ ([4]).

Proveremo l'esistenza della soluzione debole per il problema (1).

Se w è una funzione di classe 2 in τ verificante

$$w < 0 \text{ in } \tau\,,\ E(\omega) \geq 0 \text{ in } \tau,\ a^{(l)} \frac{\partial w}{\partial l} - b^{(l)} w > 0 \text{ su } s\,, \tag{3}$$

sussiste per ogni v di classe 2 in τ e tale che $v = 0$ su $p(y_0)$ la formula di maggiorazione

$$\int_s (a^{(l)} v)^2\, ds \leq k \left\{ \int_s \left(a_*^{(l)} \frac{\partial v}{\partial l_*} - b^{(l)} v \right)^2 ds + \int_\tau (E^*(v))^2\, d\tau \right\}, \tag{4}$$

dove k è una quantità positiva dipendente esclusivamente da w. La (4) è una facile conseguenza della formula di Green (cfr. [17])

$$\int_\tau (v\, E(u) - u\, E^*(v))\, d\tau + \int_\sigma \left(a^{(l)} v \frac{\partial u}{\partial l} - a_*^{(l)} u \frac{\partial v}{\partial l_*} + b^{(l)} uv \right) d\sigma = 0$$

scritta per w e v^2.

D'altra parte non è difficile constatare l'esistenza di una w verificante le condizioni (3) ([5]): si ha così la (4).

Dalla (4), per il principio esistenziale di G. Fichera [3] si ha la [2]. Da quest'ultima discende poi con gli stessi ragionamenti usati da Amerio nel n. 4 di [1] (pag. 112) che per Q esterno a τ

$$0 = \int_s a_*^{(l)} \psi(M) \frac{\partial F(M, Q)}{\partial l_M^*}\, d_M s - \int_s g(M)\, a^{(l)} F(M, Q)\, d_M s - \int_s b^{(l)} \psi(M)\, F(M, Q)\, d_M s, \tag{5}$$

([4]) Per la definizione di $a^{(l)}$, $a_*^{(l)}$, l_*, $b^{(l)}$ vedasi [17] oppure [16] pag. 739 e seg.

([5]) Si può infatti procedere ad es. come segue: sia w' una funzione negativa di classe 2 in τ soddisfacente alla $a^{(l)} \dfrac{\partial w}{\partial l} - b^{(l)} w > 0$ su s, posto $w = e^{cy} w'$ si soddisfa alla $E(w) \geq 0$ prendendo c sufficientemente grande.

e per P interno a τ

$$(5') \quad 4\pi u(P) = \int_s \psi(M)\, a_*^{(l)} \frac{\partial F(M,P)}{\partial l_M^*} d_M s - \int_s g(M) a^{(l)} F(M,P) d_M s - \int_s b^{(l)} \psi(M) F(M,P) d_M s .$$

Ottenendo così la regolarizzazione della u all'interno di τ.

Si apre ora il problema di interpretare le condizioni al contorno per la u così trovata. Una prima interpretazione la otterremo col teorema di inversione del numero successivo.

3. — Formule limiti e teorema di inversione.

Sia $\varphi(Q)$ una assegnata funzione sommabile su s, e si ponga

$$(6) \qquad u(P) = \int_s \varphi(Q)\, F(Q, P)\, d_Q s .$$

Sia P un punto sulla conormale positiva ad s in M ν_M (6) e P' il simmetrico rispetto ad M. Ricordiamo che, come è stato provato da L. Amerio [1] e E. Magenes [11], per quasi tutti i punti M di s risulta

$$(7) \qquad \lim_{P \to M\, (\text{su}\, \nu_M)} (u(P) - u(P')) = 0 .$$

Vogliamo ora provare che per quasi tutti i punti M di s si ha

$$(8) \qquad \lim_{P \to M\, (\text{su}\, \nu_M)} \left(\frac{\partial u(P)}{\partial l_M} - \frac{\partial u(P')}{\partial l_M} \right) = - \frac{4\pi \cos(n_M, l_M)}{\cos^2(n_M, \nu_M)} \varphi(M) = - \frac{4\pi}{a_{(M)}^{(l)}} \varphi(M) .$$

Arriveremo alla (8) sfruttando sostanzialmente un teorema di di B. Jessen, J. Marcinkiewicz, A. Zygmund [8], secondo un'idea gia usata per analoga questione da L. Amerio [1].

Cominciamo coll'osservare che per l'ipotesi fatte, nell'intorno di ogni suo punto M, s si può rappresentare prendendo la terna (ξ_1, ξ_2, η) avente origine in M e dove il piano (ξ_2, η) è tangente in M a s, η ha la stessa direzione e verso di y e ξ_2 è l'asse n_M, normale interna ad s in M, mediante l'equazione

$$(9) \qquad \xi_2 = f(\xi_1)$$

dove $f(\xi_1)$ è funzione continua con la sua derivata prima e seconda in un intorno dello zero.

---

(6) La conormale ν_M è la proiezione sul piano caratteristico per M della normale n_M. Nel caso del cilindro retto $\nu_M = n_M$; si è qui preferito introdurre sin d'ora la conormale affinchè le formule scritte rimangono immutate anche nel caso del dominio più generale che verrà considerato nel n. 12.

Sia Q un punto di s e z un numero posivo. Si indichi con $T(Q, z)$ il rettangolo situato sul piano tangente ad s nel punto Q, di centro Q ed avente un lato, parallelo alla generatrice del cilindro, di lunghezza $4z^2$, e il rimanente lato di lunghezza $2z$. Si denoti con $s(Q, z)$ la porzione di s che ha per proiezione, secondo la normale in Q sul piano tangente in Q, $T(Q, z)$. Mostriamo che per quasi tutti i punti $\overline{Q}$ di s si ha

$$\lim_{z\to 0} \frac{\displaystyle\int_{s(\overline{Q},z)} |\varphi(Q) - \varphi(\overline{Q})| \, d_Q s}{\text{area } s(\overline{Q}, z)} = 0. \tag{10}$$

Preso comunque un punto M di s sia C_R un cerchio del piano (ξ_1, η) di centro l'origine e di raggio R in cui valga la (9). Detta $s(C_R)$ la porzione di s che ha per proiezione secondo ξ_2 sul piano (ξ_1, η), C_R; per provare la (10) basterà far vedere che questa sussiste per quasi tutti i punti $\overline{Q}$ di $s(C_R)$.

Posto $\varphi(\xi_1, \eta) = \varphi(Q)$ se Q è un punto di coordinate $(\xi_1, f(\xi_1), \eta)$ rispetto alla terna (ξ_1, ξ_2, η) la funzione $\varphi(\xi_1, \eta)$ risulta sommabile su C_R. Dette $\overline{\xi}_1, \overline{\eta}$ le coordinate di un punto interno a C_R e $\gamma(z)$ e $\mu(z)$ due funzioni continue crescenti per $z \geq 0$ e nulle per $z = 0$, per il teorema sopra ricordato di B. Jessen, J. Marcinkiewicz e A. Zygmund, risulta

$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{\gamma(z)\,\mu(z)} \int_{\overline{\xi}_1-\gamma(z)}^{\overline{\xi}_1+\gamma(z)} d\xi_1 \int_{\overline{\eta}-\mu(z)}^{\overline{\eta}+\mu(z)} |\varphi(\xi_1 \eta) - \psi(\overline{\xi}_1, \overline{\eta})| \, d\eta = 0 \tag{11}$$

per quasi tutti i punti $(\overline{\xi}_1, \overline{\eta})$ di C_R.

D'altra parte se con $T_z(\overline{\xi}_1, \overline{\eta})$ si indica il rettangolo del piano (ξ_1, η) dato da $|\xi_1 - \overline{\xi}_1| \leq z$, $|\eta - \overline{\eta}| \leq z^2$ e con B il massimo di $\sqrt{1 + f_{\xi_1}^2}$ in C_R, si ha per z abbastanza piccolo:

$$\frac{\displaystyle\int_{s(\overline{Q},z)} |\varphi(Q) - \varphi(\overline{Q})| \, d_Q s}{\text{area } s(\overline{Q}, z)} \leq \frac{B \displaystyle\int_{T_{2z}(\overline{\xi}_1,\overline{\eta})} |\varphi(\xi_1, \eta) - \varphi(\overline{\xi}_1, \overline{\eta})| \, d\xi_1 \, d\eta}{\text{area } s(\overline{Q}, z)} \leq \tag{12}$$

$$\leq \frac{B}{\text{area } T_z(\overline{\xi}_1, \overline{\eta})} \int_{\overline{\xi}_1-2z}^{\overline{\xi}_1+2z} d\xi_1 \int_{\overline{\eta}-4z^2}^{\overline{\eta}+4z^2} |\varphi(\xi_1, \eta) - \varphi(\overline{\xi}_1, \overline{\eta})| \, d\eta .$$

Passando al limite per $z \to 0$ nella (12) e tenendo presente la (11) ove si faccia $\gamma(z) = 2z$, $\mu(z) = 4z^2$ si ha la (10) per quasi tutti i punti $\overline{Q}$ di $s(C_R)$.

Sia M un punto di s in cui valga la (10) e supponiamo per semplicità, senza per questo ledere la generalità, (7) che sia $\varphi(M) = 0$.
Assunta nell'intorno di M la rappresentazione (9), per le proprietà ammesse per la $f(\xi_1)$ è possibile determinare tre numeri positivi $R < 1$, H, q tali che per ogni ξ_1, η di C_R e qualunque sia il numero x, riesca

$$(13) \quad \begin{cases} |f(\xi_1)| \leq H\xi_1^2 < H|\xi_1|, \; |f_{\xi_1}(\xi_1)| \leq H|\xi_1|, \\ \frac{1}{2}(\xi_1^2 + x^2) < \xi_1^2 + [x - f(\xi_1)]^2 < q(\xi_1^2 + x^2). \end{cases}$$

Sia E_a il circuito del piano ξ_1, η così definito (8)

$$\begin{cases} \xi_1 = 8a \,\mathrm{sen}\,\theta \sqrt{\log \dfrac{1}{\mathrm{sen}^2\theta}} & -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \eta = -a^2 \,\mathrm{sen}^2\theta & a > 0 \end{cases}$$

che, prendendo a sufficientemente piccolo, può pensarsi interno a C_R.
Indichiamo con D_a il dominio del piano ξ_1, η che ha E_a per completa frontiera e con s_a la porzione di s che si proietta ortogonalmente su D_a. (9) Si ha

$$\frac{\partial u(P)}{\partial l_M} - \frac{\partial u(P')}{\partial l_M} = \int_{s-s_a} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q,P)}{\partial l_M} d_Q s - \int_{s-s_a} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q,P')}{\partial l_M} d_Q s +$$

$$+ \int_{s_a} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q,P)}{\partial l_M} d_Q s - \int_{s_a} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q,P)}{\partial l_M} d_Q s.$$

---

(7) Basta ricordare che la (8) vale se φ è costante (come segue dalla formula di Green) e scomporre $u(P)$ nella somma

$$\int_s [\varphi(Q) - \varphi(M)] F(Q,P) d_Q s + \int_s \varphi(M) F(Q,P) d_Q s.$$

(8) Queste curve sono state introdotte da B. Pini [18].

(9) D_a potrebbe essere sostituito dal rettangolo $T_z(0,0)$ (vedi ad es. Amerio [1]) per quanto riguarda le considerazioni di questo numero. L'opportunità della scelta fatta è legata alle considerazioni svolte nel n. 11.

Occupiamoci dapprima della differenza dei due integrali estesa s_a. Detti α e β i coseni direttori di l_M rispetto agli assi ξ_1, ξ_2 e posto $P \equiv (0, x, 0), (P' \equiv (0, -x, 0)$, riesce essendo ξ_1, ξ_2, η le coordinate di Q

$$\frac{\partial F(Q,P)}{\partial l_M} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\xi_1}{\eta^2}\alpha(M) + \frac{\xi_2 - x}{\eta^2}\beta(M)\right\} e^{-\frac{\xi_1^2+(x-\xi_2)^2}{-4\eta}}.$$

Si ha allora, posto per brevità $\varphi(\xi_1, \eta) = \varphi(Q)$ se Q ha coordinate $(\xi_1, f(\xi_1), \eta)$

$$\left|\int_{s_a}\varphi(Q)\frac{\partial F(Q,P)}{\partial l_M}d_Q s - \int_{s_a}\varphi(Q)\frac{\partial F(Q,P')}{\partial l_M}d_Q s\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\left|\int_{D_a}\varphi(\xi_1,\eta)\sqrt{1+f_{\xi_1}^2}\frac{\xi_1}{\eta^2}\alpha\left\{e^{-\frac{\xi_1^2+(x-f(\xi_1))^2}{-4\eta}} - e^{-\frac{\xi_1^2+(x+f(\xi_1))^2}{-4\eta}}\right\}d\xi_1\, d\eta + \right.$$

$$+ \int_{D_a}\varphi(\xi_1,\eta)\sqrt{1+f_{\xi_1}^2}\,\beta\left\{\frac{f(\xi_1)-x}{\eta^2}e^{-\frac{\xi_1^2+(x-f(\xi_1))^2}{}} - \right.$$

$$\left. - \frac{f(\xi_1)+x}{\eta^2}e^{-\frac{\xi_1^2+(x+f(\xi_1))^2}{-4\eta}}\right\}d\xi_1\, d\eta\Bigg| \leq \frac{1}{2}\left|\iint_{D_a}\left|\varphi(\xi_1,\eta)\sqrt{1+f_{\xi_1}^2}\right|\frac{|\xi_1|}{\eta^2}\right|e^{-\frac{\xi_1^2+(x-f(\xi_1))^2}{-4\eta}} -$$

$$- e^{-\frac{\xi_1^2+(x+f(\xi_1))^2}{-4\eta}}\Bigg|d\xi_1 d\eta\Bigg| + \frac{1}{2}\left|\iint_{D_a}\left|\varphi(\xi,\eta)\sqrt{1+f_{\xi_1}^2}\right|\left\{\frac{\left|f(\xi_1)e^{-\frac{\xi_1^2+(x-f(\xi_1))^2}{-4\eta}} - f(\xi_1)e^{-\frac{\xi_1^2+(x+f(\xi_1))^2}{-4\eta}}\right|}{\eta^2} + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{|x|}{\eta^2}\left[e^{-\frac{\xi_1^2+(x-f(\xi_1))^2}{-4\eta}} + e^{-\frac{\xi_1^2+(x+f(\xi_1))^2}{-4\eta}}\right]\right\}d\xi_1\, d\eta\Bigg|.$$

Indichiamo rispettivamente con I_1 e I_2 gli integrali ora scritti e vediamo come possano essere maggiorati.

Riesce detto $\tilde{\xi}_1$ un opportuno numero compreso fra $-|\xi_1|$ e $|\xi_1|$

$$\left|e^{-\frac{(x-f(\xi_1))^2}{-4\eta}} - e^{-\frac{(x+f(\xi_1))^2}{-4\eta}}\right| = \left|\frac{f(\xi_1)(x - f(\tilde{\xi}_1))}{-\eta}e^{-\frac{(x-f(\tilde{\xi}_1))^2}{-4\eta}}\right|;$$

d'altra parte, tenuto conto delle (13), si ha in C_R:

$$\xi_1^2 + (x - f(\tilde{\xi}_1))^2 = \xi_1^2 + (x - f(\tilde{\xi}_1))^2 + \tilde{\xi}_1^2 - \tilde{\xi}_1^2 \geq \frac{1}{2}(\tilde{\xi}_1^2 + x^2) +$$

$$+ \xi_1^2 - \tilde{\xi}_1^2 = \xi_1^2 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{\tilde{\xi}_1^2}{2} \geq \frac{1}{2}(\xi_1^2 + x^2).$$

Per quanto sopra visto e per le (13) si ha allora

$$I_1 \leq \frac{1}{2}\left|\int_{D_a} |\varphi\sqrt{1+f_{\xi_1}^2}|\frac{H^2|\xi_1|^5}{-\eta^3} e^{-\frac{(x^2+\xi_1^2)}{-8\eta}} d\xi_1\, d\eta\right| +$$

$$+ \frac{1}{2}\left|\int_{D_a} |\varphi\sqrt{1+f_{\xi_1}^2}|\frac{|x|\,\xi_1^3}{-\eta^3} H\, e^{-\frac{(x^2+\xi_1^2)}{-8\eta}} d\xi_1\, d\eta\right|;$$

$$I_2 \leq \frac{1}{2}\left|\int_{D_a} |\varphi\sqrt{1+f_{\xi_1}^2}|\frac{H^3\,\xi_1^6}{-\eta^3} e^{-\frac{(x^2+\xi_1^2)}{-8\eta}} d\xi_1\, d\eta\right| +$$

$$+ \frac{1}{2}\left|\int_{D_a} |\varphi\sqrt{1+f_{\xi_1}^2}|\frac{|x|H^2\,\xi_1^4}{-\eta^3} e^{-\frac{(\xi_1^2+x^2)}{-8\eta}} d\xi_1\, d\eta\right| +$$

$$+ \left|\int_{D_a} |\varphi\sqrt{1+f_{\xi_1}^2}|\frac{|x|}{\eta^2} e^{-\frac{(\xi_1^2+x^2)}{-8\eta}} d\xi_1\, d\eta\right|.$$

Eseguiamo la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} \xi_1 = 8\,\varrho\,\operatorname{sen}\theta\,\sqrt{\log\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}} & \varrho \geq 0 \\[2ex] \eta = -\varrho^2\operatorname{sen}^2\theta & -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

e indichiamo con $\chi(\varrho, \theta)$ la funzione $|\varphi\sqrt{1+f_{\xi_1}^2}|$ espressa mediante le variabili ϱ e θ e con $J(\varrho, \theta)$ lo jacobiano della trasformazione. Si ha

$$I_1 \leq \bar{K}_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \chi(\varrho, \theta) \frac{|\operatorname{sen}\theta|^{15}}{\varrho} \left(\log \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)^{5/2} e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2 \operatorname{sen}^2\theta}} J(\varrho, \theta)\, d\varrho\, d\theta +$$

$$+ \bar{K}_2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \chi(\varrho, \theta) \frac{|x|\,|\operatorname{sen}\theta|^{13}}{\varrho^3} \left(\log \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)^{3/2} e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2 \operatorname{sen}^2\theta}} J(\varrho, \theta)\, d\varrho\, d\theta .$$

Osservato che le espressioni $|\operatorname{sen}\theta|^{15} \left(\log \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)^{5/2}$, $|\operatorname{sen}\theta|^{13} \left(\log \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}\right)^{3/2}$ si mantengono limitate e che $e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2 \operatorname{sen}^2\theta}} \leq e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}}$, indicate con K_1 e K_2 due opportune costanti, si ottiene

$$I_1 \leq K_1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \frac{\chi(\varrho, \theta)}{\varrho} e^{\frac{x^2}{8\varrho^2}} J(\varrho, \theta)\, d\varrho\, d\theta +$$

$$+ K_2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \frac{\chi(\varrho, \theta)}{\varrho^3} e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}} |x|\, J(\varrho, \theta)\, d\varrho\, d\theta .$$

Analogamente dette K_3, K_4, K_5 altre opportune costanti, risulta:

$$I_2 \leq K_3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \chi(\varrho, \theta)\, e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}} J(\varrho, \theta)\, d\varrho\, d\theta +$$

$$+ K_4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \frac{\chi(\varrho, \theta)}{\varrho^2} e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}} |x|\, J(\varrho, \theta)\, d\varrho\, d\theta +$$

$$+ K_5 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \frac{1}{\varrho^4} e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}} |x|\, \chi(\varrho, \theta)\, J(\varrho, \theta)\, d\varrho\, d\theta .$$

Posto

$$\psi(\varrho) = \int_0^{\varrho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \chi(\varrho, \theta)\, J(\varrho, \theta)\, d\varrho\, d\theta, \text{ si ha } \lim_{\varrho \to 0} \frac{\psi(\varrho)}{\varrho^3} = 0.$$

Infatti detto B il massimo di $8 \operatorname{sen} \theta \sqrt{\log \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta}}$ ed osservato che il dominio D_ϱ, di cui E_ϱ è completa frontiera, è contenuto nel rettangolo $|\xi_1| \leq B\varrho$, $|\eta| \leq B^2 \varrho^2$, si ha

$$\frac{1}{\varrho^3} \int_0^{\varrho} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \chi(\varrho, \theta)\, J(\varrho, \theta)\, d\theta = \frac{1}{\varrho^3} \int_{s_\varrho} |\varphi(Q)|\, d_Q s \leq$$

$$\leq \frac{\displaystyle\int_{s(0, B\varrho)} |\varphi(Q)|\, d_Q s}{\text{area } s(0, B\varrho)} \cdot \frac{\text{area } s(0, B\varrho)}{\varrho^3};$$

passando al limite per $\varrho \to 0$ nelle relazioni ora scritte, per la (10) e per essere la quantità $\frac{\text{area } s(0, B\varrho)}{\varrho^3}$ limitata, si ottiene l'asserto.

Per maggiorare I_1 e I_2 basterà ovviamente maggiorare i seguenti due integrali:

$$\overline{I}_1 = \int_0^a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\chi(\varrho, \theta)}{\varrho}\, e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}}\, J(\varrho, \theta)\, d\varrho\, d\theta,$$

$$\overline{I}_2 = \int_0^a \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\chi(\varrho, \theta)}{\varrho^4} |x|\, e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}}\, J(\varrho, \theta)\, d\varrho\, d\theta.$$

Notato che $\psi'(\varrho) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \chi(\varrho, \theta)\, J(\varrho, \theta)\, d\theta$, si ha, indicato con $\varepsilon(a)$

un infinitesimo con a:

$$\overline{I}_1 = \int_0^a \frac{\psi'(\varrho)}{\varrho} e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}} d\varrho = \frac{\psi(a)}{a} e^{-\frac{x^2}{8a^2}} - \frac{1}{4}\int_0^a \frac{x^2}{\varrho^4} e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}} \psi(\varrho)\, d\varrho +$$

$$+ \int_0^a \frac{\psi(\varrho)}{\varrho^2} e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}} d\varrho = \varepsilon(a) + \varepsilon(a) \int_0^a \frac{x^2}{\varrho^2} e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}} d\varrho + \varepsilon(a),$$

$$\overline{I}_2 = \int_0^a \frac{|x|\, \psi'(\varrho)}{\varrho^4} e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}} d\varrho = \frac{\psi(a)}{a^4} |x|\, e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}} - \frac{1}{4}\int_0^a \frac{|x^3|}{\varrho^7} e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}} \psi(\varrho)\, d\varrho +$$

$$+ 4\int_0^a \frac{|x|}{\varrho^5} e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}} \psi(\varrho)\, d\varrho = \varepsilon(a) + \varepsilon(a) \int_0^a \frac{|x|^3}{\varrho^4} e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}} d\varrho + \varepsilon(a) \int_0^a \frac{|x|}{\varrho^2} e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}} d\varrho.$$

Ricordato che per n intero ≥ 2

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}}}{\varrho^n} d\varrho = 2^{3n-5}\, \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) (x)^{-(n-1)},$$

si ottiene, per $|x| < 1$, $\overline{I}_1 + \overline{I}_2 = \varepsilon(a)$, e quindi

$$I_1 + I_2 = \varepsilon(a). \tag{14}$$

Prendiamo ora in esame la differenza

$$\int_{s-s_a} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q, P)}{\partial l_M} d_Q s - \int_{s-s_a} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q, P')}{\partial l_M} d_Q s:$$

proveremo che

$$\lim_{P \to M (\text{su } \nu_M)} \left\{ \int_{s-s_a} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q, P)}{\partial l_M} d_Q s - \int_{s-s_a} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q, P')}{\partial l_M} d_Q s \right\} = 0. \tag{15}$$

Detto C_{a^2} il cerchio del piano (ξ_1, η) di raggio $\dfrac{a^2}{4}$ e centro l'origine, e indicata con s_{a^2} la porzione di s che si proietta ortogonalmente su C_{a^2}, si osservi che, essendo

$$\int\limits_{(s-s_a)-s_{a^2}} \varphi(Q)\frac{\partial F(Q\,,P)}{\partial l_M}\,d_Q s$$

funzione continua di P in M, basterà, per provare la (15), mostrare che, posto $\omega=(s-s_a)\cdot s_{a^2}$, si ha

$$\lim_{P\to M(\text{su }\nu_M)}\int\limits_{\omega}\varphi(Q)\frac{\partial F(Q\,,P)}{\partial l_M}\,d_Q s=\int\limits_{\omega}\varphi(Q)\frac{\partial F(Q\,,M)}{\partial l_M}\,d_Q s\,. \tag{16}$$

Infatti

$$\int\limits_{\omega}\varphi(Q)\frac{\partial F(Q\,,P)}{\partial l_M}\,d_Q s=\frac{1}{2}\int\limits_{C_{a^2}-D_a}\varphi(\xi_1\,,\eta)\sqrt{1+f_{\xi_1}^2}\left\{\frac{\xi_1}{\eta^2}\alpha+\frac{f-x}{\eta^2}\beta\right\}e^{-\frac{\xi_1^2+(x-f)^2}{-4\eta}}\,d\xi_1 d\eta.$$

Per tutti i punti $(\xi_1\,,\eta)$ tali che $\eta<0$ di C_{a^2}, riesce, supposto $|x|\leq 1$ e indicata con k una opportuna costante,

$$\left|\frac{1}{2}\left\{\frac{\xi_1}{\eta^2}\alpha+\frac{f-x}{\eta^2}\beta\right\}e^{-\frac{\xi_1^2+(x-f)^2}{-4\eta}}\right|\leq\frac{k}{\eta^2}e^{-\frac{\xi_1^2}{-4\eta}}\,;$$

osservato che uno qualunque dei detti punti può porsi sotto la forma

$$\xi_1=8\,a\,\text{sen}\,\theta_1\sqrt{\log\frac{1}{\text{sen}^2\,\theta}}$$

$$\eta=-\,a^2\,\text{sen}\,\theta_2$$

con $|\theta_2|\leq|\theta_1|<\frac{\pi}{6}$, si ha

$$\frac{k}{\eta^2}e^{-\frac{\xi_1^2}{-4\eta}}=\frac{k}{a^4\,\text{sen}^4\theta_2}e^{-\frac{16\,\text{sen}^2\theta_1\log\frac{1}{\text{sen}^2\theta_1}}{\text{sen}^2\theta_2}}\leq\frac{k}{a^4\,\text{sen}^4\theta_2}e^{-\frac{16\,\text{sen}^2\theta_2\log\frac{1}{\text{sen}^2\theta_2}}{\text{sen}^2\theta_2}}\leq\frac{k}{a^4}\,.$$

Riesce allora per ogni $P\equiv(0\,,x\,,0)$, $|x|\leq 1$; $\left|\varphi(Q)\frac{\partial F(Q\,,P)}{\partial l_M}\right|\leq\frac{k}{a^4}|\varphi(Q)|$ e quindi la (16).

Preso $\sigma>0$ arbitrario si determini un $a>0$ tale che $|\varepsilon(a)|<\frac{\sigma}{2}$; fissato così a esisterà per la (15) un δ positivo <1 tale che per ogni

$P \equiv (0\,, x\,, 0)$, con $0 < x < \delta$, riesca

$$\left| \int\limits_{s-s_a} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q\,, P)}{\partial l_M} d_Q s - \int\limits_{s-s_a} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q\,, P')}{\partial l_M} d_Q s \right| < \frac{\sigma}{2}\,.$$

Ciò prova completamente la (8).

Conservando le notazioni già introdotte, si ponga

$$w(P) = \int\limits_{s} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q\,, P)}{\partial l_Q} d_Q s\,.$$

In modo perfettamente analogo a quanto fatto per provare la (8) si trova che per quasi tutti i punti M di s è:

$$\text{(8')} \qquad \lim_{P \to M (\text{su } \nu_M)} \{w(P) - w(P')\} = \frac{4\pi}{a^{(l)}(M)} \varphi(M)\,.$$

Mostriamo infine che per quasi tutti i punti M di s è

$$\text{(17)} \qquad \lim_{P \to M (\text{su } \nu_M)} \left\{ \frac{\partial w(P)}{\partial l_M^*} - \frac{\partial w(P')}{\partial l_M^*} \right\} = -\frac{4\pi}{(a^{(l)}(M))^2} b^{(l)}(M)\, \varphi(M)\,.$$

Sia M un punto di s ove valga la (10) e supponiamo per semplicità $\varphi(M) = 0$ [10]. Si ha

$$\frac{\partial w(P)}{\partial l_M^*} - \frac{\partial w(P')}{\partial l_M^*} = \int\limits_{s-s_a} \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial l_M^*} \frac{\partial F(Q\,, P)}{\partial l_Q} d_Q s - \int\limits_{s-s_a} \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial l_M^*} \frac{\partial F(Q\,, P')}{\partial l_Q} d_Q s +$$
$$+ \int\limits_{s_a} \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial l_M^*} \frac{\partial F(Q\,, P)}{\partial l_Q} d_Q s - \int\limits_{s_a} \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial l_M^*} \frac{\partial F(Q\,, P')}{\partial l_Q} d_Q s\,.$$

Osserviamo che le stesse considerazioni svolte per stabilire la (15) provano che

$$\text{(18)} \qquad \lim_{P \to M (\text{su } \nu_M)} \left\{ \int\limits_{s-s_a} \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial l_M^*} \frac{\partial F(Q\,, P)}{\partial l_Q} d_Q s - \int\limits_{s-s_a} \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial l_M^*} \frac{\partial F(Q\,, P')}{\partial l_Q} d_Q s \right\} = 0\,.$$

([10]) Cfr. nota ([7]).

Detti $\alpha(Q)$, $\beta(Q)$ i coseni direttori dell'asse $l(Q)$ rispetto agli assi ξ_1, ξ_2 e $\alpha^*(M)$, $\beta^*(M)$ i coseni direttori, rispetto agli stessi assi, di l_M^* si ha

$$\left|\int_{s_a} \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial l_M^*} \frac{\partial F(Q,P)}{\partial l_Q} d_Q s - \int_{s_a} \varphi(Q) \frac{\partial}{\partial l_M^*} \frac{\partial F(Q,P')}{\partial l_Q} d_Q s\right| \leq$$

$$\frac{1}{2}\left|\int_{D_a} \varphi(\xi_1,\eta) \frac{\alpha\alpha^* + \beta\beta^*}{\eta^2}\left[e^{-\frac{\xi_1^2+(x-f)^2}{-4\eta}} - e^{-\frac{\xi_1^2+(x+f)^2}{-4\eta}}\right]\sqrt{1+f_{\xi_1}^2}\, d\xi_1\, d\eta\right| +$$

$$\frac{1}{4}\left|\int_{D_a} \varphi(\xi_1,\eta) \frac{\xi_1^2\alpha\alpha^*}{-\eta^3}\left[e^{-\frac{\xi_1^2+(x-f)^2}{-4\eta}} - e^{-\frac{\xi_1^2+(x+f)^2}{-4\eta}}\right]\sqrt{1+f_{\xi_1}^2}\, d\xi_1\, d\eta\right| +$$

$$\frac{1}{4}\left|\int_{D_a} \varphi(\xi_1,\eta) \frac{\beta\beta^*}{-\eta^3}\left[(x-f)\, e^{-\frac{\xi_1^2+(x-f)^2}{-4\eta}} - (x+f)\, e^{-\frac{\xi_1^2+(x+f)^2}{-4\eta}}\right]\sqrt{1+f_{\xi_1}^2}\, d\xi_1\, d\eta\right| +$$

$$\frac{1}{4}\left|\int_{D_a} \varphi(\xi_1,\eta) \frac{(\beta\alpha^* + \alpha\beta^*)}{-\eta^3}\, \xi_1\,(x-f)\, e^{-\frac{\xi_1^2+(x-f)^2}{-4\eta}}\sqrt{1+f_{\xi_2}^2}\, d\xi_1\, d\eta\right| +$$

$$\frac{1}{4}\left|\int_{D_a} \varphi(\xi_1,\eta) \frac{(\beta\alpha^* + \alpha\beta^*)}{-\eta^3}\, \xi_1\,(x+f)\, e^{-\frac{\xi_1^2+(x+f)^2}{-4\eta}}\sqrt{1+f_{\xi_1}^2}\, d\xi_1\, d\eta\right| .$$

Con considerazioni perfettamente analoghe a quelle già usate per le maggiorazioni di I_1 e I_2 si mostra che i primi tre integrali che figurano al secondo membro della relazione ora scritta sono infinitesimi con a. In quanto agli ultimi due integrali, che indicheremo con J_1, J_2, basterà osservare quanto segue. Posto $\alpha(\xi_1,\eta) = \alpha(Q)$, $\beta(\xi_1,\eta) = \beta(Q)$, se Q è un punto di coordinate $(\xi_1, f(\xi_1), \eta)$, si ha $\beta(\xi_1,\eta)\alpha^*(0,0) + \alpha(\xi_1,\eta)\beta^*(0,0) = -\beta(\xi_1,\eta)\alpha(0,0) + \alpha(\xi_1,\eta)\beta(0,0)$; e ricordando le ipotesi fatte sull'asse l, riesce

$$|\beta(\xi_1,\eta)\alpha^*(0,0) + \alpha(\xi_1,\eta)\beta^*(0,0)| = |\alpha(\xi_1,\eta)\beta(0,0) - \beta(\xi_1,\eta)\alpha(0,0)| =$$
$$= |[\alpha(\xi_1,\eta) - \alpha(0,0)]\beta(\xi_1,\eta) + [\beta(0,0) - \beta(\xi_1,\eta)]\alpha(\xi_1,\eta)| \leq$$
$$\leq |\alpha(\xi_1,\eta) - \alpha(0,0)|\,|\beta(\xi_1,\eta)| + |\beta(0,0) - \beta(\xi_1,\eta)|\,|\alpha(\xi_1,\eta)| \leq k(|\xi_1| + |\eta|)$$

(k costante opportuna).

Si ha allora, tenendo presenti le (13),

$$J_1 + J_2 \leq k\left|\int_{D_a} |\varphi\sqrt{1+f_{\xi_1}^2}|\, \frac{(|\xi_1| + |\eta|)\,(H\xi_1^2 + |x|)|\xi_1|}{-\eta^3}\, e^{-\frac{\xi_1^2+x^2}{-8\eta}}\, d\xi_1\, d\eta\right| ,$$

e col solito procedimento è facile vedere che l'integrale ora scritto è infinitesimo con a. Resta così provata la (17).

Ponendo

$$w^*(P) = \int_s \varphi(Q) \frac{\partial F(Q, P)}{\partial l_Q^*} d_Q s$$

gli stessi ragionamenti provano che per quasi tutti i punti M di s è

$$(17') \qquad \lim_{P \to M (\text{su } \nu_M)} \left\{ \frac{\partial w^*(P)}{\partial l_M} - \frac{\partial w^*(P')}{\partial l_M} \right\} = - \frac{4\pi}{(a^{(l)}(M))^2} b^{(l)} \varphi(M) .$$

Dalle formule limiti ora dimostrate segue facilmente il teorema di inversione che ora preciseremo.

Indichiamo con Γ l'insieme delle funzioni $u(P)$ che soddisfano alle seguenti proprietà:

a) è soddisfatta la $E(u) = 0$ nei punti interni di τ;

b) preso quasi ovunque su σ un punto M esiste finito il limite

$$(19) \qquad \lim_{P \to M (\text{su } \nu_M +)} u(P) = A(M) \quad \text{e} \quad A(M) = 0 \ \text{su} \ p(0) ;$$

c) preso quasi ovunque su s un punto M esiste finito il limite

$$(20) \qquad \lim_{P \to M (\text{su } \nu_M +)} \frac{\partial u(P)}{\partial l_M} = B(M) ;$$

d) $A(M)$ e $B(M)$ sono funzioni sommabili su σ e s rispettivamente, e risultano soddisfatte le equazioni

$$(21) \qquad 0 = \int_s A(M) a_*^{(l)} \frac{\partial F(M, Q)}{\partial l_M^*} d_M s - \int_s B(M) a^{(l)} F(M, Q) d_M s -$$
$$- \int_{s+p(y_0)} A(M) b^{(l)} F(M, Q) d_M \sigma$$

se Q è esterno a τ, e

$$(22) \quad 4\pi u(P) = \int_s A(M) a_*^{(l)} \frac{\partial F(M, P)}{\partial l_M^*} d_M s - \int_s B(M) a^{(l)} F(M, P) d_M s -$$
$$- \int_s A(M) b^{(l)} F(M, P) d_M s$$

se P è interno a τ.

II. *Se* $A(M)$, $B(M)$ *sono due funzioni sommabili rispettivamente su* σ *e su* s *e soddisfacenti alla equazione* (21) *per ogni* Q *esterno a* τ, *allora la funzione* $u(P)$ *definita per* P *interno a* τ *dalla* (22) *appartiene alla classe* Γ.

Ricordiamo che L. Amerio [1] ha dato lo stesso teorema nel caso di $l \equiv \nu$, ν essendo la conormale.

Il teorema II dà un'interpretazione dei dati del caso del n. 2. Osserviamo anzi che la soluzione debole trovata nel n. 2 appartiene ad una sottoclasse Γ^* di Γ, precisamente a quella in cui $A(M)$ e $B(M)$ sono di quadrato sommabile.

Si pone ora il problema di sapere se vale il teorema di unicità nella classe Γ^* (o addirittura in Γ) per il nostro problema. In secondo luogo se g è sufficientemente regolare, per esempio continua o hoelderiana, la u sarà soluzione forte del problema, cioè sarà essa stessa più regolare sulla frontiera e assumerà i dati nel senso classico? Sorgono allora difficoltà collegate a certi tipi di integrali singolari e di equazioni integrali singolari (come abbiamo già detto nell'introduzione) che non mi risulta siano stati fin'ora studiati. Nei prossimi numeri risponderemo alle questioni poste cercando di evitare le difficoltà segnalate.

4. — Funzione $H(M, N)$ associata al dominio τ e all'asse l.

Ci proponiamo di dare relativamente all'equazione $E(u) = 0$, al dominio τ e all'asse l un nucleo $H(M, N)$ che permetta di tradurre il problema di derivata obliqua per l'equazione del calore in un'equazione integrale ordinaria.

Supporremo dapprima che il dominio τ soddisfi alla seguente ulteriore ipotesi:

i) in ogni punto M di s l'asse opposto ad l non abbia altro punto che M a comune con τ (11).

Posto per ogni x reale $\Phi(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$, è ben noto che $\Phi(+\infty) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Indicati con $\alpha_1(M), \alpha_2(M)$ i coseni direttori dell'asse $l(M)$, $\beta_1(M)$, $\beta_2(M)$ quelli della conormale $\nu(M)$ diretta verso l'interno, e detti $M \equiv (x_1, x_2, y)$ un punto di s e $N \equiv (x_1', x_2', y')$ un punto qualunque dello spazio, poniamo:

$$\bar{H}(M, N) = \frac{\alpha_1(M)\beta_1(M) + \alpha_2(M)\beta_2(M)}{y' - y} e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}} +$$
$$+ \frac{[\beta_1(M)\alpha_2(M) - \beta_2(M)\alpha_1(M)][\alpha_1(M)(x_2' - x_2) - \alpha_2(M)(x_1' - x_1)]}{(y' - y)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}}.$$

(11) Si osservi che questa ipotesi è sicuramente verificata se τ è convesso.

$$\left\{\frac{\Phi\left(\dfrac{\alpha_1(M)(x_1'-x_1)+\alpha_2 M)(x_2'-x_2)}{2(y'-y)^{1/2}}\right)-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}{e^{-\frac{[\alpha_1(M)(x_1'-x_1)+\alpha_2(M)(x_2'-x_2)]^2}{4(y'-y)}}}\right\} \qquad \text{per } y'>y\,,$$

$$\overline{H}(M\,,N)=0 \qquad \text{per } y'\leq y\,.$$

Detti $\mathbf{l}\,,\mathbf{v}$ rispettivamenre i vettori unitari su $l(M)\,,\nu(M)$, $\mathbf{m}$ il vettore unitario uscente da M e di coseni direttori $-\alpha_2\,,\alpha_1\,,$ $\mathbf{r}$ il segmento orientato che unisce $(x_1\,,x_2\,,0)$ con $(x_1'\,,x_2'\,,0)$, la $\overline{H}(M\,,N)$ per $y'>y$ può essere scritta più concisamente come segue:

$$\overline{H}(M\,,N)=\frac{\mathbf{l}\times\mathbf{v}}{y'-y}\,e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}}-\frac{(\mathbf{m}\times\mathbf{v})(\mathbf{m}\times\mathbf{r})}{(y'-y)^{3/2}}\,e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}}\left\{\frac{\Phi\left(\dfrac{\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{2(y'-y)^{\frac{1}{2}}}\right)-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}{e^{-\frac{(\mathbf{l}\times\mathbf{r})^2}{4(y'-y)}}}\right\}.$$

La funzione $\overline{H}(M\,,N)$ gode delle seguenti proprietà:

1) per $l=\nu$, $\overline{H}(M\,,N)$ coincide con $F(M\,,N)$;

2) fissato comunque M su s, $\overline{H}(M\,,N)$ come funzione di N è continua insieme alle sue derivate prime e seconde in $\tau-\sigma$ ed è ivi soluzione della equazione $E(u)=0$.

3) per M su s e N di τ tali che $M\neq N$, vale la limitazione

$$|\,\overline{H}(M\,,N)\,|\leq A\,h_{0,1}(M\,,N)+B\,h^{(\lambda)}_{1,\frac{2}{3}}(M\,,N);$$

($A\,,B\,,\lambda$ costanti indipendenti da M e da N).

La 1) si verifica immediatamente ponendo nella espressione di $\overline{H}(M,N)$ $\alpha_1(M)=\beta_1(M)$, $\alpha_2(M)=\beta_2(M)$.

Proviamo la 2). Incominceremo col mostrare che, fissato $M\equiv(x_1,x_2,y)$ su s, $\overline{H}(M\,,N)$, è come funzione di $N\equiv(x_1'\,,x_2'\,,y')$, continua in tutto $\tau-\sigma$. Si osservi che potremo limitarci a studiare il comportamento del secondo addendo perchè è evidente la continuità del primo addendo. Il secondo addendo

$$-\frac{(\mathbf{m}\times\mathbf{v})(\mathbf{m}\times\mathbf{r})}{(y'-y)^{\frac{3}{2}}}\,e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}}\left\{\frac{\Phi\left(\dfrac{\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{2(y'-y)^{\frac{1}{2}}}\right)-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}{e^{-\frac{[\mathbf{l}\times\mathbf{r}]^2}{4(y'-y)}}}\right\}=$$

$$-\frac{(\mathbf{m}\times\mathbf{v})(\mathbf{m}\times\mathbf{r})}{(y'-y)^{\frac{3}{2}}}\,e^{-\frac{(\mathbf{r}\times\mathbf{m})^2}{4(y'-y)}}\left\{\Phi\left(\frac{\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{2(y'-y)^{\frac{1}{2}}}\right)-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right\}$$

può diventare singolare in $\tau - \sigma$ quando il punto N tende ad un qualunque punto P di $p(y) - s$. Se il punto P è un qualunque punto di $p(y) - s$ non appartenente all'asse $l(M)$, il prodotto $[\mathbf{r} \times \mathbf{m}]^2$ tende al tendere di N e P ad un numero positivo e questo basta per dire che il secondo addendo ha, in questo caso, per limite lo zero. Se P è un qualunque punto dell'asse $l(M)$ e diverso da M, per l'ipotesi fatta su τ e sull'asse l, quando N tende a P la quantità $\mathbf{l} \times \mathbf{r}$ è definitivamente positiva e quindi quando $\dfrac{[\mathbf{l} \times \mathbf{r}]^2}{4(y'-y)} \to +\infty$, $\dfrac{\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{2(y'-y)^{\frac{1}{2}}} \to +\infty$. Si ha allora, posto, $z = \dfrac{\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{2(y'-y)^{\frac{1}{2}}}$,

$$\lim_{z \to +\infty} \frac{\Phi(z) - \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}{e^{-z^2}} = \lim_{z \to \infty} \frac{e^{-z^2}}{-2z\, e^{-z^2}} = 0$$

e ciò prova la continuità della funzione presa in esame.

Le stesse considerazioni permettono di stabilire la continuità delle derivate prime e seconde della $\overline{H}(M, N)$ dato che, come è subito visto, queste hanno la stessa composizione di $\overline{H}$, cioè sono somme di due addendi uno dei quali ovviamente continuo in $\tau - \sigma$ e l'altro del tipo ora visto.

Che $\overline{H}(M, N)$, fissato M in s, come funzione di N sia soluzione di $E(u) = 0$ in $\tau - \sigma$ si verifica facendo il calcolo.

Per stabilire la 3) studiamo il comportamento di $\overline{H}(M, N)$ quando il punto $N \equiv (x_1', x_2', y')$ di τ tende al punto $M \equiv (x_1, x_2, y)$ di s.

Il primo addendo di $\overline{H}(M, N)$ si comporta in maniera nota essendo in modulo $\leq A\, h_{0,1}(M, N)$ (A costante opportuna indipendente da M e da N). Il secondo addendo è maggiorabile con $B_1\, h_{1, \frac{3}{2}}(M, N)$ (B_1 costante opportuna indipendente da M e da N) se la coppia M, N è tale che $\mathbf{l} \times \mathbf{r} > 0$; se invece $\mathbf{l} \times \mathbf{r} \leq 0$, riesce per le ipotesi fatte ($\widehat{lv} < \delta < \dfrac{\pi}{2}$ e la i)) $(\mathbf{r} \times \mathbf{m})^2 \geq \lambda r^2$ con λ costante positiva minore di 1, indipendente da M e N, e quindi

$$\left| \frac{(\mathbf{m} \times \mathbf{v})(\mathbf{m} \times \mathbf{r})}{(y'-y)^{3/2}}\, e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}} \frac{\left\{ \Phi\left(\dfrac{\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{2(y'-y)^{\frac{1}{2}}} \right) - \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \right\}}{e^{-\frac{(\mathbf{l} \times \mathbf{r})^2}{4(y'-y)}}} \right| =$$

$$= \left| \frac{(\mathbf{m} \times \mathbf{v})(\mathbf{m} \times \mathbf{r})}{(y'-y)^{3/2}}\, e^{-\frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{m})^2}{4(y'-y)}} \left\{ \Phi\left(\frac{\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{2(y'-y)^{1/2}} \right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right\} \right| \leq B_2 \frac{r}{(y'-y)^{3/2}}\, e^{-\frac{\lambda r^2}{4(y'-y)}}.$$

Osservato che

$$h_{1,\frac{3}{2}}(M,N)=\frac{r}{(y'-y)^{3/2}}e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}}\leq\frac{r}{(y'-y)^{3/2}}e^{-\frac{\lambda r^2}{4(y'-y)}},\ (0<\lambda<1),$$

e detto B il più grande fra B_1 e B_2, si ha la voluta maggiorazione.

Studiamo il comportamento delle derivate $\dfrac{\partial\,\overline{H}(M,N)}{\partial\,x_i'}$ $(i=1,2)$.

Per $M\equiv(x_1,x_2,y)$ di s e $N\equiv(x_1'x_2',y')$ di $\tau-\sigma$ e $y'>y$, si ha:

$$\frac{\partial\,\overline{H}(M,N)}{\partial\,x_1'}=-\frac{1}{2}\left[\frac{(\mathbf{l}\times\mathbf{v})(x_1'-x_1)}{(y'-y)^2}+\frac{\alpha_1(M)(\mathbf{m}\times\mathbf{v})(\mathbf{m}\times\mathbf{r})}{(y'-y)^2}\right]e^{-\frac{r^2}{4(y^1-y)}}+$$

$$+e^{-\frac{r^2}{4(y^1-y)}}\left[\frac{\alpha_2(M)(\mathbf{m}\times\mathbf{v})}{(y'-y)^{3/2}}-\frac{\alpha_2(M)(\mathbf{m}\times\mathbf{v})(\mathbf{m}\times\mathbf{r})^2}{2(y'-y)^{5/2}}\right]\left\{\frac{\Phi\left(\dfrac{\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{2(y'-y)^{\frac{1}{2}}}\right)-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}{e^{-\frac{(\mathbf{l}\times\mathbf{r})^2}{4(y'-y)}}}\right\},$$

$$\frac{\partial\,\overline{H}(M,N)}{\partial\,x_2'}=-\frac{1}{2}\left[\frac{(\mathbf{l}\times\mathbf{v})(x_2'-x_2)}{(y'-y)^2}+\frac{\alpha_2(M)(\mathbf{m}\times\mathbf{v})(\mathbf{m}\times\mathbf{r})}{(y'-y)^2}\right]e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}}+$$

$$+e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}}\left[\frac{-\alpha_1(M)(\mathbf{m}\times\mathbf{v})}{(y'-y)^{3/2}}+\frac{\alpha_1(M)(\mathbf{m}\times\mathbf{v})(\mathbf{m}\times\mathbf{r})^2}{2(y'-y)^{5/2}}\right]\left\{\frac{\Phi\left(\dfrac{\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{2(y'-y)^{\frac{1}{2}}}\right)-\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}}{e^{-\frac{(\mathbf{l}\times\mathbf{r})^2}{4(y'-y)}}}\right\},$$

risultano le ulteriori seguenti proprietà:

4) $$\frac{\partial\,\overline{H}(M,N)}{\partial\,l_M}=\alpha_1(M)\frac{\partial\,\overline{H}}{\partial\,x_1'}+\alpha_2(M)\frac{\partial\,\overline{H}}{\partial\,x_2'}=\frac{\partial\,F(M_1N)}{\partial\,\mathrm{v}_M};$$

5) per $M\equiv(x_1,x_2,y)$ di s e $N\equiv(x_1',x_2',y')$ di τ, $M\neq N$ è

$$\left|\frac{\partial\,\overline{H}(M,N)}{\partial\,x_i'}\right|\leq\overline{A}\,h_{1,2}(M,N)+\overline{B}\,h^{(\overline{\lambda})}_{0,\frac{3}{2}}(M,N)+\overline{C}\,h^{(\overline{\lambda})}_{2,\frac{5}{2}}(M,N),\ (i=1,2),$$

($\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{\lambda}$ costanti indipendenti da M e da N).

La 4) è di immediata verifica.

La 5) si prova con le stesse considerazioni usate per la 3).

Abbandoniamo l'ipotesi i): mostreremo come si possa pervenire ad un nucleo che abbia le proprietà di quello ora visto.

Incominciamo coll'osservare che, per essere s di classe 2, in ogni suo punto M l'asse opposto ad $l(M)$ incontrerà la s in un insieme di punti che ha un primo elemento M_1. La distanza $\overline{M\,M_1}$ è una funzione del punto M sulla superficie che ha un estremo inferiore positivo che indichiamo con $2d$.

Detti $M \equiv (x_1\,,\ x_2\,,\ y)$ un punto di s e $N \equiv (x_1'\,,\ x_2'\,,\ y')$ un punto dello spazio, poniamo

$$H(M\,,\ N) = \frac{\mathbf{l}\times\mathbf{v}}{y'-y}\, e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}} - \frac{(\mathbf{m}\times\mathbf{v})\,(\mathbf{m}\times\mathbf{r})}{(y'-y)^{3/2}}\, e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}} \cdot \left\{ \frac{\Phi\left(\dfrac{\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{2\,(y'-y)^{\frac{1}{2}}}\right) - \Phi\left(\dfrac{\mathbf{l}\times\mathbf{r}+d}{2\,(y'-y)^{\frac{1}{2}}}\right)}{e^{-\frac{(\mathbf{l}\times\mathbf{r})^2}{4(y'-y)}}} \right\} \quad \text{per } y' > y\,,$$

$$H(M\,,\ N) = 0 \qquad \text{per } y' \leq y\,.$$

$H(M\,,\ N)$ è come funzione di N continua insieme alle sue derivate prime e seconde in tutto lo spazio, salvo che sul segmento di equazioni

$$\left\{\begin{aligned} x_1' &= x_1 - \alpha_1(M)\,t \\ x_2' &= x_2 - \alpha_2(M)\,t \qquad\qquad 0 \leq t \leq d. \\ y' &= y \end{aligned}\right. \tag{23}$$

Infatti le singolarità della H possono trovarsi solo sul piano per M parallelo al piano $x_1\,,\ x_2$. Per N tendente ad un qualunque punto di detto piano diverso da M e non situato sulla semiretta uscente da M e di coseni direttori $-\alpha_1\,,\ -\alpha_2\,,\ 0$, considerazioni perfettamente analoghe a quelle fatte per stabilire la 2) provano quanto affermato. Se invece N tende a un punto $\overline{N}$ appartenente alla semiretta suddetta, ma non al segmento di equazioni (23), riesce

$$\lim_{N\to\overline{N}} H(M\,,\ N) = \lim_{N\to\overline{N}} \frac{\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{y'-y}\, e^{-\frac{r^2}{4(y'-y)}} -$$

$$\lim_{N\to\overline{N}} \frac{(\mathbf{m}\times\mathbf{v})(\mathbf{m}\times\mathbf{r})}{(y'-y)^{3/2}}\, e^{-\frac{(\mathbf{m}\times\mathbf{r})^2+(\mathbf{l}\times\mathbf{r}+d)^2}{4\,(y'-y)}} \left\{ \frac{\Phi\left(\dfrac{\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{2\,(y'-y)^{\frac{1}{2}}}\right) - \Phi\left(\dfrac{\mathbf{l}\times\mathbf{r}+d}{2\,(y'-y)^{\frac{1}{2}}}\right)}{e^{-\frac{(\mathbf{l}\times\mathbf{r}+d)^2}{4(y'-y)}}} \right\} =$$

$$= -\lim_{N\to\overline{N}} \frac{(\mathbf{m}\times\mathbf{v})(\mathbf{m}\times\mathbf{r})}{(y'-y)^{3/2}}\, e^{-\frac{(\mathbf{m}\times\mathbf{r})^2+(\mathbf{l}\times\mathbf{r}+d)^2}{4(y'-y)}} \left\{ \Phi\left(\frac{\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{2\,(y'-y)^{\frac{1}{2}}}\right) - \Phi\left(\frac{\mathbf{l}\times\mathbf{r}+d}{2\,(y'-y)^{\frac{1}{2}}}\right) \right\}.$$

Posto $z = \dfrac{1}{2\,(y' - y)^{\frac{1}{2}}}$ ed osservato che, detta $2\,d_1$ la distanza di N dal punto di coordinate $(x_1 - \alpha_1\, d_1, x_2 - \alpha_2\, d, y)$, è definitivamente $\mathbf{l} \times \mathbf{r} + d < -d_1 < 0$, si ha

$$\lim_{N \to \overline{N}} \frac{(\mathbf{m}\times\mathbf{v})\,(\mathbf{m}\times\mathbf{r})}{(y' - y)^{3/2}}\, e^{-\frac{(\mathbf{m}\times\mathbf{r})^2 + (\mathbf{l}\times\mathbf{r}+d)^2}{(4y'-y)}} = 0\,,$$

$$\lim_{N \to \overline{N}} \frac{\left\{ \Phi\left(\dfrac{(\mathbf{l}\times\mathbf{r})}{2\,(y'-y)^{\frac{1}{2}}}\right) - \Phi\left(\dfrac{\mathbf{l}\times\mathbf{r}+d}{2\,(y'-y)^{\frac{1}{2}}}\right)\right\}}{e^{-\frac{(\mathbf{l}\times\mathbf{r}+d)^2}{4(y'-y)}}} = \lim_{z \to +\infty} \frac{\Phi\,[(\mathbf{l}\times\mathbf{r})z] - \Phi\,[(\mathbf{l}\times\mathbf{r}+d)z]}{e^{-[(\mathbf{l}\times\mathbf{r}+d)z]^2}} = 0.$$

Considerazioni dello stesso tipo provano quanto affermato per le derivate.

$H(M, N)$ come funzione di N è, come si verifica col calcolo, soluzione dell'equazione $E(u) = 0$ in tutto lo spazio tranne che sul segmento di equazioni (23).

Osserviamo ancora che se M è un punto di s, per N di τ vicino ad M la $H(M, N)$, come funzione di N, si comporta come $\overline{H}(M, N)$.

Infatti, posto

$$H_1(M, N) = \frac{(\mathbf{m}\times\mathbf{v})\,(\mathbf{m}\times\mathbf{r})}{(y' - y)^{3/2}}\, e^{-\frac{(\mathbf{m}\times\mathbf{r})^2}{4\,(y'-y)}} \left\{ \Phi\left(\frac{\mathbf{l}\times\mathbf{r}+d}{2\,(y'-y)^{1/2}}\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \right\}$$

si ha $H(M, N) = \overline{H}(M, N) + H_1(M, N)$ ed è, come è facile vedere con considerazioni analoghe alle precedenti, $\lim\limits_{\substack{N \to M \\ (N \in \tau)}} H_1(M, N) = 0$.

Da tutto ciò segue che valgono per $H(M, N)$ le seguenti proprietà [12]:

1 bis) per $l = v$ la $H(M, N)$ coincide con $F(M, N)$;

2 bis) fissato comunque M su s la $H(M, N)$ pensata funzione di N, è continua insieme alle sue derivate prime e seconde in $\tau - \sigma$ ed è ivi soluzione dell'equazione $E(u) = 0$;

3 bis) per M su s e N di τ tali che $M \neq N$, vale la limitazione

$$|\,H(M, N)\,| \leq A\, h_{0,1}(M, N) + B\, h^{(\lambda)}_{1,3/2}(M, N)$$

---

(12) Il nucleo $H(M, N)$ può sostituire $\overline{H}(M, N)$ anche nel caso che valga la i): si potrà allora prendere per d un qualunque numero positivo. È evidente che nel caso generale in $H(M, N)$ si possa prendere invece di d un qualunque numero positivo minore di $2d$.

(A, B, λ costanti opportune indipendenti da M, N);

4 bis)

$$\frac{\partial H(M,N)}{\partial l_M} = \frac{\partial F(M,N)}{\partial \nu_M} + L(M,N),$$

dove $L(M,N)$ è una funzione continua e limitata per M su s e N in $\tau - N$;

5 bis)

$$\left| \frac{\partial H(M,N)}{\partial x_i'} \right| = \bar{A}\, h_{1,2}(M,N) + \bar{B}\, h_{0,3/2}^{(\lambda)}(M,N) + \bar{C}\, h_{2,5/2}^{(\lambda)}(M,N) + \bar{D}$$

$$(i = 1, 2)$$

($\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$, λ costanti indipendenti da M, N).

5. — Alcune considerazioni sull'integrale $\int_s \delta(M)\, H(M,N)\, d_M s$.

Sia $\delta(M)$ una funzione continua su s e si consideri la funzione

$$v(N) = \int_s \delta(M)\, H(M,N)\, d_M s, \tag{24}$$

mostriamo che la $v(N)$ è continua in τ. Incominciamo che l'osservare che per la 3 bis) e per il fatto che $h_{0,1}(M,N)$, $h_{1,3/2}^{(\lambda)}(M,N)$ sono per tutti gli N funzioni di M sommabili (13) su s (vedi Levi [9]), la $v(N)$ è definita in τ. La continuità nei punti di $\tau - s$ è ovvia; limitiamoci a considerarla nei punti di s. Sia P un punto di s, preso $\varepsilon > 0$ arbitrario, si determini una sfera γ di centro P tale che detta s_γ la sua intersezione con s riesca qua-

(13) Le funzioni $h_{\alpha,\beta}(M,N)$ e $h_{\alpha,\beta}^{(\lambda)}(M,N)$ riescono sommabili su s come funzioni di M, per qualunque fissato N, non appena sia $3 + \alpha - 2\beta > 0$. L'integrale $\int_s h_{\alpha,\beta}(M,N)\, d_M s$ è una funzione continua di $N \equiv (x_1', x_2', y')$ in tutto lo spazio appena $3 + \alpha - 2\beta > 0$; se si pone $3 + \alpha - 2\beta = q$ e si fa l'ipotesi che M e N siano su s e $y' - y < d$, si ha $\int_s h_{\alpha,\beta}(M,N)\, d_M s \leq \mathcal{L}\, d^{q/2}$ con $\mathcal{L}$ costante dipendente da α, β. Lo stesso dicasi per $\int_s h_{\alpha,\beta}^{(\lambda)}(M,N)\, d_M s$. Vedi Levi [9], [10].

lunque sia N di $\gamma \cdot \tau$: $\int_{s_1} |\delta(M) H(M, N)| \, d_M s < \varepsilon$; e questo è possibile in virtù della 3 bis) e delle maggiorazioni che si trovano in Levi (vedi nota (13)). D'altra parte la funzione di N, $\int_{s-s_1} \delta(M) H(M, N) \, d_M s$ è continua in P. Si ha allora

$$\left| \int_s \delta(M) H(M, N) \, d_M s - \int_s \delta(M) H(M, P) \, d_M s \right| \leq$$

$$\left| \int_{s-s_1} \delta(M) H(M, N) \, d_M s - \int_{s-s_1} \delta(M) H(M, P) \, d_M s \right| + \left| \int_{s_1} \delta(M) H(M, N) \, d_M s \right| +$$

$$+ \left| \int_{s_1} \delta(M) H(M, P) \, d_M s \right| < 3\varepsilon$$

non appena il punto N di τ è sufficientemente vicino a P.

Si ha così

$$\lim_{N \to Q} v(N) = \int_s \delta(M) H(M, Q) \, d_M s .$$

La $v(N)$ è evidentemente derivabile in $\tau - \sigma$; preso un punto $Q \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y})$ di s si ha per N di τ: $\dfrac{\partial v(N)}{\partial l_Q} = \displaystyle\int_s \delta(M) \frac{\partial H(M, N)}{\partial l_Q} \, d_M s$. Studiamo ora il limite $\displaystyle\lim_{N \to Q \, (\text{su } \nu_Q +)} \frac{\partial v(N)}{\partial l_Q}$.

Dato che per la 4 bis)

$$\frac{\partial v(N)}{\partial l_Q} = \int_s \delta(M) \frac{\partial H(M, N)}{\partial l_Q} \, d_M s = \int_s \delta(M) \frac{\partial F(M, N)}{\partial \nu_M} \, d_M s +$$

$$\int_s \delta(M) L(M, N) \, d_M s + \int_s \delta(M) \left\{ \left[\alpha_1(Q) \frac{\partial H(M, N)}{\partial x_1'} + \alpha_2(Q) \frac{\partial H(M, N)}{\partial x_2'} \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\alpha_1(M) \frac{\partial H(M, N)}{\partial x_1'} + \alpha_2(M) \frac{\partial H(M, N)}{\partial x_2'} \right] \right\} d_M s$$

per studiare il $\displaystyle\lim_{N \to Q} \frac{\partial v(N)}{\partial l_Q}$ basterà occuparci solo del terzo addendo essendo ben noto il comportamento degli altri due quando $N \to Q$ su ν_{Q+}.

Mostriamo che l'integrale che costituisce il terzo addendo ha senso anche quando $N \equiv Q$. Infatti si ha per $M \neq Q$ (14)

$$\left| \left[\alpha_1(Q)\frac{\partial H(M,Q)}{\partial x_1'} + \alpha_2(Q)\frac{\partial H(M,Q)}{\partial x_2'}\right] - \left[\alpha_1(M)\frac{\partial H(M,Q)}{\partial x_1'} + \alpha_2(M)\frac{\partial H(M,Q)}{\partial x_2'}\right]\right| =$$

$$\left| [\alpha_1(Q) - \alpha_1(M)]\frac{\partial H(M,Q)}{\partial x_1'} + [\alpha_2(Q) - \alpha_2(M)]\frac{\partial H(M,Q)}{\partial x_2'}\right| \leq$$

$$2k(\bar{r} + |\bar{y} - y|)[\bar{A}\, h_{1,2}(M,Q) + \bar{B}\, h^{(\lambda)}_{0,3/2}(M,Q) + \bar{C}\, h^{(\lambda)}_{2,5/2}(M,Q) + \bar{D}] \leq$$

$$A\,\{h_{2,2}(M,Q) + h^{(\lambda)}_{1,3/2}(M,Q) + h^{(\lambda)}_{3,5/2}(M,Q) + h_{1,1}(M,Q) +$$

$$h^{(\lambda)}_{0,1/2}(M,Q) + h^{(\lambda)}_{2,3/2}(M,Q)\} + B$$

con A, B costanti opportune. Per noti risultati (vedi Levi [9], [10] o nota (13)) esisterà l'integrale

$$\int_s \left\{[\alpha_1(Q) - \alpha_1(M)]\frac{\partial H(M,Q)}{\partial x_1'} + [\alpha_2(Q) - \alpha_2(M)]\frac{\partial H(M,Q)}{\partial x_2'}\right\}\delta(M)\, d_M s\,. \tag{25}$$

Ed anzi, se assumiamo come campo d'integrazione invece di s una sua parte compresa fra due piani paralleli distanti di una quantità arbitrariamente piccola d, l'integrale medesimo sarà (vedi nota (13)) infinitesimo di ordine uguale a quello di $d^{1/2}$.

Se invece il punto $N \equiv (x_1', x_2', y')$ di τ non appartiene ad s ma è un punto di ν_{Q+}, seguiamo un ragionamento fatto dal Levi [10] che riportiamo per comodità del lettore. Si divida il campo s in due parti, l'una s_1 tutta interna ad una striscia compresa fra due piani paralleli al piano $x_1\,x_2$ di altezza arbitrariamente piccola in cui si abbia sempre per N su ν_{Q+} e sufficientemente vicino a Q, posto $\bar{r} = \sqrt{(\bar{x}_1 - x_1)^2 + (\bar{x}_2 - x_2)^2}$, $r = \sqrt{(x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2}$,

$$r \geq k\,\bar{r}\,; \tag{26}$$

---

(14) Infatti è

$$\left.\begin{array}{l}|\alpha_1(Q) - \alpha_1(M)|\\ |\alpha_2(Q) - \alpha_2(M)|\end{array}\right\} \leq k\,(\bar{r} + |\bar{y} - y|) \qquad (\bar{r} = \sqrt{(\bar{x}_1 - x_1)^2 + (\bar{x}_2 - x_2)^2})$$

per ogni coppia di punti di s: $M \equiv (x_1, x_2, y)$, $Q \equiv (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{y})$.

e la parte restante $s - s_1$. Si spezzi allora l'integrale da studiarsi nelle due parti relative a s_1 e $s \quad s_1$. In quanto al primo integrando, per la (26) e la 5 bis) si ottiene

$$\left| [\alpha_1(Q) - \alpha_1(M)] \frac{\partial H(M,N)}{\partial x_1'} + [\alpha_2(Q) - \alpha_2(M)] \frac{\partial H(M,N)}{\partial x_2'} \right| \leq$$

$$\left[|\alpha_1(Q) - \alpha_1(M)| \left| \frac{\partial H(M,N)}{\partial x_1'} \right| + |\alpha_2(Q) - \alpha_2(M)| \left| \frac{\partial H(M,N)}{\partial x_2'} \right| \right] \leq$$

$$(27) \qquad k(\overline{r} + |\overline{y} - y|) \left\{ \left| \frac{\partial H(M,N)}{\partial x_1'} \right| + \left| \frac{\partial H(M,N)}{\partial x_2'} \right| \right\} \leq$$

$$k_1 \{(r + |\overline{y} - y|)(h_{1,2}(M,N) + h_{0,3/2}^{(\lambda)}(M,N) + h_{2,5/2}^{(\lambda)}(M,N) + \overline{D}\} \leq$$

$$k_1 \{h_{2,2}(M,N) + h_{1,3/2}^{(\lambda)}(M,N) + h_{3,5/2}^{(\lambda)}(M,N)\} +$$

$$k_1 \{h_{1,1}(M,N) + h_{0,1/2}^{(\lambda)}(M,N) + h_{2,3/2}^{(\lambda)}(M,N)\} + k_2 ,$$

onde il primo integrale diventerà infinitesimo con d. Quanto alla parte residua, osserviamo che l'integrando è sempre continuo e quindi, preso $\varepsilon > 0$ si può, una volta fissato d, determinare un numero $\sigma > 0$ tale che per $r < \sigma$ si abbia qualunque sia il punto Q di s

$$\left| \int_{s-s_1} \left\{ [\alpha_1(Q) - \alpha_1(M)] \frac{\partial H(M,N)}{\partial x_1'} + [\alpha_2(Q) - \alpha_2(M)] \frac{\partial H(M,N)}{\partial x_2'} \right\} \delta(M)\, d_M s - \right.$$

$$\left. \int_{s-s_1} \left\{ [\alpha_1(Q) - \alpha_1(M)] \frac{\partial H(M,Q)}{\partial x_1'} + [\alpha_2(Q) - \alpha_2(M)] \frac{\partial H(M,Q)}{\partial x_2'} \right\} \delta(M)\, d_M s \right| < \varepsilon .$$

Se ricordiamo ora che, come si è sopra osservato, l'integrale (25) esteso a s_1 è infinitesimo con d, si ha

$$\lim_{N \to Q\,(\text{su } \nu_Q +)} \int_s \delta(M) \left\{ \left[\alpha_1(Q) \frac{\partial H(M,N)}{\partial x_1'} + \alpha_2(Q) \frac{\partial H(M,N)}{\partial x_2'} \right] - \right.$$

$$\left. - \left[\alpha_1(M) \frac{\partial H(M,N)}{\partial x_1'} + \alpha_2(M) \frac{\partial H(M,N)}{\partial x_2'} \right] \right\} d_M s =$$

$$\int_s \delta(M) \left\{ [\alpha_1(Q) - \alpha_1(M)] \frac{\partial H(M,Q)}{\partial x_1'} + [\alpha_2(Q) - \alpha_2(M)] \frac{\partial H(M,Q)}{\partial x_2'} \right\} d_M s$$

e che *la convergenza al variare di Q è uniforme.* L'integrale che costituisce il primo membro della relazione ora scritta è continuo in τ.

Tenendo presente che, com'è noto

$$\lim_{N\to Q+}\int_s \delta(M)\,L(M,N)\,d_M s=\int_s \delta(M)\,L(M,Q)\,d_M s,$$

$$\lim_{N\to Q+}\int_s \delta(M)\,\frac{\partial F(M,N)}{\partial \nu_M}\,d_M s=\int_s \delta(M)\,\frac{\partial F(M,Q)}{\partial \nu_M}\,d_M s+2\pi\,\delta(Q)$$

si ottiene per quanto visto

$$\lim_{N\to Q(\text{su } \nu_Q+)}\frac{\partial v(N)}{\partial l_Q}=\lim_{N\to Q(\text{su } \nu_Q+)}\int_s \delta(M)\,\frac{\partial H(M,N)}{\partial l_Q}\,d_M s=$$

$$2\pi\delta(Q)+\int_s \delta(M)\left\{\alpha_1(M)\,\frac{\partial H(M,Q)}{\partial x_1'}+\alpha_2(M)\,\frac{\partial H(M,Q)}{\partial x_2'}\right\}d_M s+$$

$$(28)\qquad \int_s \delta(M)\left\{[\alpha_1(Q)-\alpha_1(M)]\,\frac{\partial H(M,Q)}{\partial x_1'}+[\alpha_2(Q)-\alpha_2(M)]\,\frac{\partial H(M,Q)}{\partial x_2'}\right\}d_M s=$$

$$2\pi\delta(Q)+\int_s \delta(M)\left\{\alpha_1(Q)\,\frac{\partial H(M,Q)}{\partial x_1'}+\alpha_2(Q)\,\frac{\partial H(M,Q)}{\partial x_2'}\right\}d_M s=$$

$$2\pi\,\delta(Q)+\int_s \frac{\partial H(M,Q)}{\partial l_Q}\,\delta(M)\,d_M s.$$

Le considerazioni svolte permettono, per l'uniformità rispetto a Q messa in evidenza, di dire di più, cioè che

$$(28\text{ bis})\qquad \lim_{N\to Q+}\frac{\partial v(N)}{\partial l_Q}=2\pi\delta(Q)+\int \frac{\partial H(M,Q)}{\partial l_Q}\,\delta(M)\,d_M s.$$

La $\dfrac{\partial H(M,Q)}{\partial l_Q}$ è, come visto, per ogni Q di s funzione di M sommabile su s. Tenuto presente che per M e Q entrambi su $s\,(M \neq Q)$ sussiste (vedi Levi [10]) la maggiorazione $\left|\dfrac{\partial F(M,Q)}{\partial \nu_M}\right| \leq \overline{B}\,[h_{2,2}(M,Q)+h_{0,1}(M,Q)]$, e tenute presenti le maggiorazioni date a pag. 99 si ha per $M \neq Q$ ed entrambi su s

$$
(29)\quad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial H(M, Q)}{\partial l_Q}\right| \leq A\,[h_{2,2}(M\,.\,Q) + h_{0,1}(M, Q) \\ &+ h^{(\lambda)}_{\frac{1}{2},3}(M, Q) + h^{(\lambda)}_{\frac{3}{2},5}(M, Q) + h_{1,1}(M, Q) + h^{(\lambda)}_{\frac{0}{2},1}(M, Q) + h^{(\lambda)}_{\frac{2}{2},3}(M, Q)] + B \end{aligned}
$$

(A, B, λ costanti opportune indipendenti da M, Q).

Si osservi che se $\delta(M)$ è hoelderiana rispetto ad x_1, x_2 uniformemente in y su s allora $v(N)$ ammette le $\frac{\partial v}{\partial x'_1}$, $\frac{\partial v}{\partial x'_2}$ continue in τ. La dimostrazione di ciò è del tutto analoga a quella fatta dal Gevrey [6] (a pag. 410 e seg.) per provare nelle stesse ipotesi su δ la continuità di $\frac{\partial u}{\partial x'_1}$, $\frac{\partial u}{\partial x'_2}$ in τ, essendo

$$
u(M) = \int_s \delta(M)\, F(M, N)\, d_M s.
$$

Vogliamo ora studiare l'integrale

$$
(24)\qquad v(N) = \int_s \delta(M)\, H(M, N)\, d_M s
$$

con $\delta(M)$ soltanto sommabile su s.

Incominciamo con l'osservare che *se $\delta(M)$ è sommabile su s per quasi tutti gli N di s, la funzione di M, $\delta(M)\, h_{\alpha,\beta}(M, N)$ è sommabile su s non appena* $3 + \alpha - 2\beta > 0$. Ciò si dimostra immediatamente seguendo un'idea di G. Fichera. È noto che l'integrale $\int_s h_{\alpha,\beta}(M, N)\, d_N s$ esiste per ogni M ed è funzione continua in tutto lo spazio e in particolare su s e pertanto essendo $h_{\alpha.\beta}(M, N) \geq 0$, per un criterio di sommabilità di L. Tonelli, la funzione, di M ed N, $\delta(M)\, h_{\alpha.\beta}(M, N)$ è sommabile sul prodotto topologico di s per sè stesso. Per il teorema di Fubini di riduzione degli integrali multipli segue allora che per quasi tutti gli N di s la funzione (di M) $\delta(M)\, h_{\alpha,\beta}(M, N)$ è sommabile su s. È poi evidente che lo stesso può dirsi della funzione $\delta(M)\, h^{(\lambda)}_{\alpha,\beta}(M, N)$ $(\lambda > 0)$.

Quanto sopra visto e lo studio fatto di $H(M, N)$ ci assicurano la sommabilità per quasi tutti gli N di s delle funzioni $\delta(M)\, H(M, N)$ e di $\delta(M)\, \frac{\partial H(M, N)}{\partial l_N}$. Le considerazioni svolte per la $\frac{\partial v(N)}{\partial l_Q}$ con $\delta(M)$ continua e considerazioni del tipo noto ([15]) permettono di asserire che se $\delta(M)$ è sommabile su s, per quasi tutti i Q di s risulta

$$\lim_{N \to Q\,(\mathrm{su}\,\nu_{Q+})} v(N) = \int_s (M)\, H(M, Q)\, d_M s\,,$$

$$(28') \qquad \lim_{N \to Q\,(\mathrm{su}\,\nu_{Q+})} \frac{\partial v(N)}{\partial l_Q} = \lim_{N \to Q\,(\mathrm{su}\,\nu_{Q+})} \int_s \delta(M) \frac{\partial H(M, N)}{\partial l_Q}\, d_M s =$$

$$= 2\pi\, \delta(Q) + \int_s \delta(M) \frac{\partial H(M, Q)}{\partial l_Q}\, d_M s\,.$$

6. — Traduzione del problema al contorno in equazione integrale ordinaria del tipo di Volterra; teorema di esistenza e di unicità.

La traduzione del problema (1) in equazione integrale che ora daremo serve anche a rispondere ai quesiti posti sulla regolarizzazione della soluzione debole.

Indichiamo rispettivamente con $\{v\}_c$ e con $\{v\}$ le classi delle funzioni v date dalla (24) con $\delta(M)$ continua e con $\delta(M)$ sommabile in s. Se si cerca la soluzione del problema (1) con g continua nella classe $\{v\}_c$, poichè tali v verificano la $E(u)$ in $\tau - \sigma$ e la $v = 0$ su $p(0)$, basterà solo imporre alla funzione $\delta(Q)$ di soddisfare alla seguente equazione integrale

$$(30) \qquad 2\pi\, \delta(Q) + \int_s \frac{\partial H(M, Q)}{\partial l_Q}\, \delta(M)\, d_M s = g(Q).$$

La (30) è, nella funzione incognita δ un'equazione lineare di seconda specie di tipo misto di Volterra-Fredholm. Introduciamo la successione dei nuclei iterati del nucleo $\dfrac{\partial H(M, Q)}{\partial l_Q}$.

$$(31) \qquad \begin{cases} G_n(M, Q) = \displaystyle\int_s G_{n-1}(M, N) \frac{\partial H(N, Q)}{\partial l_Q}\, d_N s\,, \\[2ex] G_0(M, Q) = \dfrac{\partial H(M, Q)}{\partial l_Q}\,. \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

([15]) Vedi L. Amerio [1] ed E. Magenes [11]: di quest'ultimo in particolare la nota 10.

La maggiorazione (29) permette di fare ragionamenti perfettamente analoghi a quelli svolti da E. Magenes [11] (16) e provare che: *per ogni coppia di punti* $Q \equiv (x_1', x_2', y')$, $M \equiv (x_1'', x_2'', y'')$ *di* s *risulta per ogni* $y' \neq y''$

$$(32) \qquad |G_1(M, Q)| \leq \frac{k_1}{(y'-y'')^{\frac{1}{2}}}\,; \quad \int_s \left| \frac{\partial H(M,N)}{\partial l_N} \frac{\partial H(N,Q)}{\partial l_Q} \right| d_N s \leq \frac{k_1}{(y'-y'')^{\frac{1}{2}}}$$

(k_1 *costante indipendente da* M *e* Q); *gli integrali* $G_2(M, Q)$ *e*

$$\int_s \left| G_1(M, N) \frac{\partial H(N, Q)}{\partial l_Q} \right| d_N s$$

sono funzioni continue della coppia (M, Q) *di punti di* s.

Mediante calcoli analoghi a quelli fatti dal Levi si può allora dimostrare la convergenza uniforme della serie $\sum_{n=2}^{\infty} G_n(M, Q)$ e di ottenere così lo sviluppo del nucleo risolvente di $\frac{1}{2\pi} \frac{\partial H(M, Q)}{\partial l_Q}$

$$K(M, Q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} G_n(M, Q).$$

La (30) ha dunque una ed una sola soluzione data da

$$(33) \qquad \delta(Q) = \frac{1}{2\pi} \left(g(Q) + \int_s g(M) K(M, Q) d_M s \right).$$

Il problema (1) *con* g *funzione continua su* s *ammette quindi la soluzione*

$$v(N) = \int_s H(M, N) \delta(M) d_M s$$

con $\delta(M)$ *data dalla* (33); per i risultati del n. 5 e in virtù del teorema di unicità del n. 1 *si ha anche l'unicità nella classe delle funzioni regolari in* τ. *Resta così dimostrato il teorema di esistenza e di unicità per il problema* (1) *nella classe delle funzioni regolari in* τ.

---

(16) Vedi anche Pogorzelski [19].

Se si cerca la soluzione nella classe $\{v\}$ del problema (1) con g sommabile, si perviene all'equazione integrale

$$2\pi\,\delta(Q) + \int_s \frac{\partial H(M, Q)}{\partial l_Q}\,\delta(M)\,d_M s = g(Q). \tag{30'}$$

Constatata col solito ragionamento la sommabilità su s per quasi tutti i Q di s, della funzione $g(M)\,K(M, Q)$ e che l'integrale è funzione di Q sommabile su s, si considera la funzione $\delta(Q)$ data dalla (33). Con procedimenti ben noti nella teoria delle equazioni integrali si verifica poi che tale $\delta(Q)$ è soluzione (anzi l'unica soluzione della (30')). Si è così pervenuti ad un *teorema di esistenza per il problema* (1) *nella ipotesi della sola sommabilità per la* $g(Q)$ *e di un teorema di unicità nella classe* $\{v\}$.

OSSERVAZIONE: Allo stesso modo si può trattare il problema aggiunto

$$\begin{cases} E^*(v) = 0 \text{ in } \tau - \sigma, \\[2ex] a_*^{(l)} \dfrac{\partial v}{\partial l_*} - b^{(l)}\, v = g^* \text{ su } s, \\[2ex] v = 0 \quad \text{su } p(y_0), \end{cases} \tag{1*}$$

pervenendo agli stessi risultati.

7. — Equivalenza fra le classi $\{u\}$ e $\{v\}$.

Posto

$$u(N) = \int_s \mu(M)\,F(M, N)\,d_M s, \tag{34}$$

indichiamo con $\{u\}_c$ e $\{u\}$ rispettivamente le classi di funzioni u date dalla (34) con μ continua e con μ sommabile su s. Mostreremo che le classi $\{u\}$ e $\{v\}$ sono equivalenti.

Infatti le (34) e le (24) possono essere considerate come due trasformazioni T_1 e T_2 lineari e continue nello spazio Σ delle funzioni sommabili su s in quello Σ' delle funzioni soluzioni di $E(u) = 0$ in $\tau - \sigma$ e sommabili in τ che si normalizzano ponendo rispettivamente $\|\mu\| = \int_s |\mu|\,ds$, $\|u\| = \int_\tau |u|\,d\tau$.

Diciamo V_h la varietà di Σ costituita dalle funzioni hoelderiane; V_h è una base di Σ. Presa una μ di V_h si consideri la corrispondente u; il problema $E(v) = 0$ in $\tau - \sigma$, $\dfrac{\partial v}{\partial l} = \dfrac{\partial u}{\partial l}$ su s, $v = 0$ su $p(0)$, per la continuità della $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ in τ (17) e quindi su s, ha una soluzione v in $\{v\}_c$ e tale v coincide colla u considerata in virtù del teorema di unicità del n. 1. Si ha così $T_1(V_h) \subset \{v\}_c$. Viceversa, sia δ appartenente a V_h e si consideri la v corrispondente e il problema $E(u) = 0$ in $\tau - \sigma$, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \dfrac{\partial v}{\partial \nu}$ su s, $u=0$ su $p(0)$. Tale problema è, poichè $\dfrac{\partial v}{\partial \nu}$ è continua su s (vedi quanto osservato a pag. 101) risolubile in $\{u\}_c$ (vedi Levi (10)) e detta u la soluzione per il teorema di unicità del n. 1 (preso sul caso $l = \nu$) u coincide con v.

Si ha così $T_2(V_h) \subset \{u\}_c$. Avendo $\{u\}$ e $\{v\}$ una base propria comune, si ha l'asserita equivalenza.

8. — Teorema di unicità nella classe Γ.

Sia $N(M, P)$ la funzione di Neumann relativa al problema (1), la cui esistenza è assicurata dai risultati del n. 6; mostriamo che ogni funzione di Γ può rappresentarsi così

$$4\pi\, u(P) = \int_s B(M)\, a^{(l)}\, N(M, P)\, d_M s\,. \tag{35}$$

Invero, per mostrare la (35) basterà far vedere che, posto $N(M, P) - F(M, P) = g(M, P)$ vale la

$$\int_s A(M)\, a_*^{(l)} \frac{\partial g(M, P)}{\partial l_*}\, d_M s - \int_s a^{(l)} B(M)\, g(M, P)\, d_M s - \int_s A(M)\, b^{(l)}\, g(M, P)\, d_M s = 0\,. \tag{36}$$

La (36) si consegue applicando un teorema analogo a quello di L. Amerio [1] (pag. 110-111), applicato alla funzione $g(M, P)$ prolungata,

---

(17) Vedi Gevrey [6] pag. 410 e seg. dove è dimostrata la continuità in τ delle derivate $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ o $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$.

in un dominio τ' contenente nel suo interno τ, in una funzione di classe 2. Detto prolungamento è possibile se i coseni direttori di l sono di classe 2; nel caso generale detti α e β i coseni direttori di l si approssimino questi uniformemete con i coseni direttori di α_n, β_n di $l^{(n)}$ che siano di classe 2 in modo che detto $H^{(n)}(M, N)$ il nucleo relativo all'asse $l^{(n)}$, $H^{(n)}$ tenda uniformemente ad H. Passando al limite si ottiene allora anche in questo caso la (36). *Dalla* (35) *segue evidentemente un teorema di unicità nella classe Γ per il problema* (1).

9. — Equivalenza fra le classi $\{u\}$ e $\{v\}$ e Γ.

L'equivalenza fra $\{u\}$ e $\{v\}$ è stata dimostrata al n. 7.

Che ogni v di $\{v\}$ appartenga a Γ segue facendo un ragionamento perfettamente analogo a quello usato per stabilire il teorema V da E. Magenes in [12].

Viceversa, se u è di Γ, posto $B(M) = \lim\limits_{P \to M (\text{su } \nu_M +)} \dfrac{\partial u}{\partial l_M}$, si risolva il problema (1) con $g = B$ nella classe $\{v\}$. La v che così si trova appartiene alla Γ per quanto ora visto, e per il teorema di unicità in Γ, v coincide con una u di $\{u\}$. Resta così provata l'equivalenza tra $\{u\}$, $\{v\}$, Γ.

10. — Teoremi di completezza.

Sia τ' un dominio limitato contenente τ nel suo interno, e sia $\{g_r(Q)\}$ una successione di funzioni continue nel dominio $\bar{\tau} = \tau' - \tau + \sigma$ chiusa rispetto alla totalità delle funzioni continue nei punti interni a $\bar{\tau}$, per esempio sia $g_r(Q) = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} y^{\mu_3}$ $(\mu_k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Posto $f_r(M) = \int_{\bar{\tau}} g_r(Q) F(M, Q) \, d_Q \bar{\tau}$ con ben note considerazioni (vedi [1] e [11]), indicata con $\{\Omega_r\}$ una successione di vettori dello spazio S_2 di componenti f_r in $p(y_0)$ e $\left(b^{(l)} f_r - a_*^{(l)} \dfrac{\partial f_r}{\partial l_M^*}\right)$ su s, si consegue in virtù del n. 8 il seguente teorema:

III. *Il sistema $\{\Omega_r\}$ è completo nella totalità dei vettori G di componenti g_1, g_2 di quadrato sommabile rispettivamente in $p(y_0)$ e su s.*

Si consideri ora la funzione

$$f = e^{p_1 x_1 + p_2 x_2 - (p_1^2 + p_2^2) y}$$

p_1 e p_2 essendo parametri arbitrari. e si considerino i polinomi parabolici omogenei

$$w_r(M) = w_r(x_1, x_2, y) = \left(\frac{\partial^\mu f}{\partial p_1^{\mu_1} \partial p_2^{\mu_2}}\right)_{\substack{p_1=0\\p_2=0}} \qquad \mu_1 + \mu_2 = \mu \quad (\mu_k = 0, 1, 2, \ldots)$$

e il sistema dei vettori $\{\omega_r\}$ di componenti w_r su $p(y_0)$ e $b^{(l)} w_r - a_*^{(l)} \frac{\partial w_r}{\partial l_M^*}$ su s; vale allora il seguente teorema:

IV. *Nell'ipotesi che D sia semplicemente connesso, il sistema $\{\omega_r\}$ è completo nella totalità dei vettori di componenti g_1 e g_2 di quadrato sommabile rispettivamente su $p(y_0)$ e su s.*

11. — Considerazioni sulla derivata obliqua delle funzioni di $\{u\}$ e sugli integrali singolari relativi.

Sia $\varphi(Q)$ una funzione continua su s ed ivi hoelderiana rispetto a x_1, x_2 uniformemente rispetto a y, e si ponga

$$u(P) = \int_s \varphi(Q) F(Q, P) d_Q s. \tag{34}$$

Allora, com'è noto (vedi Gevrey [6]), esistono continue in τ le derivate $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ e quindi il $\lim_{P \to M} \frac{\partial u(P)}{\partial l_M}$ per ogni M di s.

Mostreremo come tale limite possa esprimersi con un « integrale principale ». Assunta nell'intorno di M la rappresentazione (9) di s, sia $\mathcal{D}_a$ il dominio che ha per completa frontiera il circuito del piano (ξ_1, η) $\mathcal{E}_a$ di equazioni

$$\begin{cases} \xi_1 = 2a \operatorname{sen} \theta \sqrt{\log \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta}} & -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \eta = -a^2 \operatorname{sen}^2 \theta & a > 0 \end{cases}$$

e sia s_a la porzione di s che si proietta ortogonalmente su $\mathcal{D}_a$.

Chiameremo « integrale principale » della funzione $\varphi(Q) \frac{\partial F(Q, M)}{\partial l_M}$ esteso ad s e relativo alle regioni di esclusione s_a il limite, se esiste finito per $a \to 0$, dell'integrale $\int\limits_{s-s_a} \varphi(Q) \dfrac{\partial F(Q, M)}{\partial l_M} d_Q s$ e lo indicheremo col simbolo $\int\limits_{s}^{*} \varphi(Q) \dfrac{\partial F(Q, M)}{\partial l_M} d_Q s.$

Si cominci coll'osservare che detti α_M, β_M i coseni direttori dell'asse l_M rispetto a ξ_2 e ξ_1, riesce

$$\frac{\partial u(P)}{\partial l_M} = \frac{\partial u(P)}{\partial_P \xi_2} \alpha_M + \frac{\partial u(P)}{\partial_P \xi_1} \beta_M . \text{[18]}$$

Essendo ben noto il comportamento quando $P(0, x, 0) \to M(0, 0, 0)$ del primo termine del secondo membro basterà studiare il secondo addendo.

Si ha

$$\frac{\partial u(P)}{\partial_P \xi_1} = \int\limits_{s-s_a} \frac{\partial F(Q, P)}{\partial_P \xi_1} \beta_M \varphi(Q) d_Q s + \int\limits_{s_a} \frac{\partial F(Q, P)}{\partial_P \xi_1} \beta_M \varphi(Q) d_Q s .$$

Siano A, B gli estremi del segmento dell'asse ξ_1 su cui il circuito $\mathcal{C}_a$ si proietta ortogonalmente, $-b$ e b le loro ascisse; diciamo C e D i punti di $\mathcal{C}_a$ che hanno proiezione A e B, e π_a la figura piana delimitata dai segmenti AB, BD, AC e dall'arco di $\mathcal{C}_a$ CMD; diciamo infine c_a la porzione di s che si proietta su π_a.

Poniamo

$$\mathcal{I}(P) = \int\limits_{s-s_a} \frac{\partial F(Q, P)}{\partial_P \xi_1} \beta_M \varphi(Q) d_Q s , \quad I(P) = \int\limits_{s_a} \frac{\partial F(Q, P)}{\partial_P \xi_1} \beta_M \varphi(Q) d_Q s$$

$$\mathcal{I}_1(P) = \int\limits_{s-s_a-c_a} \frac{\partial F(Q, P)}{\partial_P \xi_1} \beta_M \varphi(Q) d_Q s , \quad \mathcal{I}_2(P) = \int\limits_{c_a} \frac{\partial F(Q, P)}{\partial_P \xi_1} \varphi(Q) d_Q s$$

$$I_1(P) = \int\limits_{s_a} \frac{\partial F(Q, P)}{\partial_P \xi_1} d_Q s , \quad I_2(P) = \int\limits_{s_a} \frac{\partial F(Q, P)}{\partial_P \xi_1} [\varphi(Q) - \varphi(M)] d_Q s$$

$$\mathcal{I}(P) = \mathcal{I}_1(P) + \beta_M \mathcal{I}_2(P) , \quad I(P) = \beta_M \{\varphi(M) I_1 + I_2(P)\} .$$

---

[18] Il simbolo $\dfrac{\partial}{\partial_P \xi_1}$ indica la derivata secondo la direzione di ξ_1 fatta rispetto a P. Si noti che ξ_2 e ξ_1 sono rispettivamente la normale e la tangente alla curva $c(M)$ nel punto M.

Per giungere a quanto propostoci basterà provare:

1) che fissato a esiste $\mathcal{I}_2(M)$ ed è uguale al limite di $\mathcal{I}_2(P)$ per $P \equiv (0, x, 0) \to M$

2) $I(P)$ è infinitesimo con a uniformemente rispetto a $P \equiv (0, x, 0)$.

Proviamo la 1). Osservato che

$$\mathcal{I}_2(P) = \frac{1}{2} \iint_{\pi_a} \frac{\xi_1}{\eta^2} e^{-\frac{\xi_1^2 + [x - f(\xi_1)]^2}{-4\eta}} \varphi(\xi_1, \eta) \sqrt{1 + f_{\xi_1}^2}\, d\xi_1\, d\eta$$

per la continuità di φ basterà provare che la

$$\left| \frac{\xi_1}{\eta^2} e^{-\frac{\xi_1^2 + [x - f(\xi_1)]^2}{-4\eta}} \right|. \tag{37}$$

si può maggiorare con una funzione sommabile non dipendente da P, cioè da x: infatti la (37) è $\leq \frac{|\xi_1|}{\eta^2} e^{-\frac{\xi_1^2}{-4\eta}}$ che è sommabile su π_a come vedremo:

$$\iint_{\pi_a} \frac{|\xi_1|}{\eta^2} e^{-\frac{\xi_1^2}{-4\eta}} d\xi_1\, d\eta = 2 \int_0^b d\xi_1 \int_{\varrho(\xi_1)}^0 \frac{\xi_1}{\eta^2} e^{-\frac{\xi_1^2}{-4\eta}} d\eta$$

dove $\varrho(\xi_1)$ è il valore di η del punto sulla $\mathcal{C}_a$ corrispondente a ξ_1; con semplici calcoli si ha $\left(\theta_1 < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\int_0^b d\xi_1 \int_{\varrho(\xi_1)}^0 \frac{\xi_1}{\eta^2} e^{-\frac{\xi_1^2}{-4\eta}} d\eta = 4 \int_0^b \frac{e^{-\frac{\xi_1^2}{-4\varrho(\xi_1)}}}{\xi_1} d\xi_1 = 4 \int_0^{\theta_1} \cos\theta \left\{ \operatorname{sen}\theta + \frac{\operatorname{sen}\theta}{\log \operatorname{sen}^2\theta} \right\} d\theta = K$$

il che prova la 1).

Proviamo la 2). Incominciamo col mostrare che $I_1(P)$ è infinitesimo con a uniformemente rispetto a x. Si ha

$$I_1(P) = \frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_a} \frac{\xi_1}{\eta^2} \left\{ e^{-\frac{\xi_1^2 + [x - f(\xi_1)]^2}{-4\eta}} - e^{-\frac{\xi_1^2 + x^2}{-4\eta}} \right\} \sqrt{1 + f_{\xi_1}^2}\, d\xi_1\, d\eta +$$

$$\frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}_a} \frac{\xi_1}{\eta^2} e^{-\frac{\xi_1^2 + x^2}{-4\eta}} (\sqrt{1 + f_{\xi_1}^2} - 1)\, d\xi_1\, d\eta\,,$$

e con semplici calcoli, detto $\varepsilon(a)$ un infinitesimo con a,

$$|I_1(P)| \leq K \left\{ \int_{\mathfrak{D}_a} \frac{|x||\xi_1|^3}{-\eta^3} e^{-\frac{\xi_1^2+x^2}{-8\eta}} d\xi_1 \, d\eta + \int_{\mathfrak{D}_a} \frac{|\xi_1|^5}{-\eta^3} e^{-\frac{\xi_1^2+x^2}{-8\eta}} d\xi_1 \, d\eta \right\} + \varepsilon(a) \, .$$

Eseguendo la solita trasformazione di coordinate si prova in modo analogo a quanto fatto nel n. 3 che $I_1 \to 0$ con a, uniformemente rispetto ad x. In quanto a I_2, tenendo conto della hoelderianità di φ, si prova facilmente che tende a zero allo stesso modo.

I ragionamenti fatti nelle nostre ipotesi sulla φ provano l'esistenza per tutti i punti M di s dell'integrale singolare e che vale la relazione

$$\lim_{P \to M \, (\mathrm{su} \, \nu_M +)} \frac{\partial u(P)}{\partial l_M} = \lim_{P \to M \, (\mathrm{su} \, \nu_M +)} \int_s \varphi(Q) \frac{\partial F(Q, P)}{\partial l_M} d_Q s = \tag{38}$$

$$= - \frac{2\pi \cos(n_M, l_M)}{\cos^2(n_M, \nu_M)} \varphi(M) + \int_s^* \varphi(Q) \frac{\partial F(Q, M)}{\partial l_M} d_Q s \, .$$

Ci proponiamo in quel che segue di estendere la (38) al caso che $\varphi(Q)$ sia soltanto *sommabile* su s. Si pongono allora anzitutto due problemi: l'esistenza del limite che figura a primo membro della (38) e l'esistenza dell'integrale singolare che si trova a secondo membro della (38). I due fatti non sono indipendenti perchè come proveremo per quasi tutti i punti M di s l'esistenza del limite e quella dell'integrale singolare sono fatti equivalenti. Incominciamo con l'osservare che la 1) seguita a sussistere per quasi tutti gli M di s nella sola ipotesi della sommabilità di $\varphi(Q)$; infatti l'esistenza di $\mathcal{J}_2(M)$ per quasi tutti gli M di s segue ripetendo il ragionamento fatto a pag. 101 e tenendo presente che $\int_{c_a} \left| \frac{\partial F(Q, M)}{\partial_Q x_1} \right| d_M s$ è come funzione di Q limitata su s. Così pure dalla sommabilità di $\left| \frac{\xi_1}{\eta^2} e^{-\frac{\xi_1^2}{-8\eta}} \right|$ su π_a, che si consegue come fatto per provare quella di $\left| \frac{\xi_1}{\eta^2} e^{-\frac{\xi_1^2}{-4\eta}} \right|$, segue che l'integrando di $\mathcal{J}_2(P)$ è maggiorabile con una funzione sommabile su c_a indipendente da P. Da ciò la validità di 1). Sia M in un punto in cui valga la 1) e contemporaneamente la (10). Supponiamo per semplicità, senza per questo ledere la generalità, che sia $\varphi(M) = 0$.

Indicato con $\mathcal{D}_{a,x}$ $(a > x)$ il dominio del piano (ξ_1, η) che ha per completa frontiera i circuiti $\mathcal{E}_a$, $\mathcal{E}_x$ si ha .

$$\frac{\partial u(P)}{\partial l_M} = \int\limits_{s-s_a} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q,P)}{\partial l_M} d_Q s + \frac{1}{2} \iint\limits_{\mathcal{D}_{a,x}} \varphi(\xi_1,\eta) \sqrt{1+f_{\xi_1}^2} \left[\frac{\xi_1}{\eta^2}\beta_M + \frac{f(\xi_1)-x}{\eta^2}\alpha_M\right] \cdot$$

$$e^{-\frac{\xi_1^2+[f(\xi_1)-x]^2}{-4\eta}} d\xi_1\, d\eta +$$

$$+ \frac{1}{2} \iint\limits_{\mathcal{D}_x} \varphi(\xi_1,\eta) \sqrt{1+f_{\xi_1}^2} \left[\frac{\xi_1}{\eta^2}\beta_M + \frac{f(\xi_1)-x}{\eta^2}\alpha_M\right] e^{-\frac{\xi_1^2+[f(\xi_1)-x]^2}{-4\eta}} d\xi_1\, d\eta \,.$$

Si osservi poi, che per definizione l'integrale principale $\int\limits_s^* \varphi(Q) \frac{\partial F(Q,M)}{\partial l_M} d_Q s$ è il limite, se esiste finito,

$$\lim_{x\to 0} \int\limits_{s-s_x} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q,M)}{\partial l_M} d_Q s$$

cioè anche

$$\lim_{x\to 0} \left\{ \int\limits_{s-s_a} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q,M)}{\partial l_M} d_Q s + \frac{1}{2} \iint\limits_{\mathcal{D}_{a,x}} \varphi(\xi_1,\eta) \sqrt{1+f_{\xi_1}^2} \left[\frac{\xi_1}{\eta^2}\beta_M + \frac{f(\xi_1)}{\eta^2}\alpha_M\right] \cdot\right.$$

$$\left. e^{-\frac{\xi_1^2+f(\xi_1)^2}{-4\eta}} d\xi_1\, d\eta \right\}.$$

La voluta equivalenza sarà allora dimostrata quando avremo provato quanto segue

a) che $$\lim_{x\to 0} \int\limits_{s-s_a} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q,P)}{\partial l_M} d_Q s = \int\limits_{s-s_a} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q,M)}{\partial l_M} d_Q s \,;$$

b) che valgono le due seguenti relazioni

$$\lim_{x\to 0} \iint\limits_{\mathcal{D}_x} \varphi(\xi_1,\eta) \sqrt{1+f_{\xi_1}^2} \left[\frac{\xi_1}{\eta^2}\beta_M + \frac{f(\xi_1)-x}{\eta^2}\alpha_M\right] e^{-\frac{\xi_1^2+[f(\xi_1)-x]^2}{-4\eta}} d\xi_1\, d\eta = 0 \,, \tag{39}$$

$$\lim_{x\to 0} \iint\limits_{\mathcal{D}_{a,x}} \varphi(\xi_1,\eta) \sqrt{1+f_{\xi_1}^2} \left\{ \left(\frac{\xi_1}{\eta^2}\beta_M + \frac{f(\xi_1)-x}{\eta^2}\alpha_M\right) e^{-\frac{\xi_1^2+[f(\xi_1)-x]^2}{-4\eta}} - \right. \tag{40}$$

$$\left. - \left(\frac{\xi_1}{\eta^2}\beta_M + \frac{f(\xi_1)}{\eta^2}\alpha_M\right) e^{-\frac{\xi_1^2+f(\xi_1)^2}{-4\eta}} \right\} d\xi_1\, d\eta = 0.$$

Proviamo la *a*). Osservato che riesce

$$\int_{s-s_a} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q,P)}{\partial l_M} d_Q s = \int_{s-s_a} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q,P)}{\partial_P \xi_2} \alpha_M d_Q s +$$

$$+ \int_{s-s_a-c_a} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q,P)}{\partial_P \xi_1} \beta_M d_Q s + \int_{c_a} \varphi(Q) \frac{\partial F(Q,P)}{\partial_P \xi_1} \beta_M d_Q s ,$$

e sussistendo la *a*) per i primi due addendi del secondo membro basterà limitarci a considerare il suo terzo addendo; d'altronde come sopra rilevato è $\lim\limits_{x\to 0} \mathcal{J}_2(P) = \mathcal{J}_2(M)$ e ciò prova la *a*).

Per quanto riguarda la (39) si osservi che basterà ovviamente mostrare che

$$\lim_{x\to 0} \iint_{\mathfrak{D}_x} \varphi(\xi_1\, \eta) \sqrt{1+f_{\xi_1}^2} \left(\frac{\xi_1}{\eta^2} \beta_M\right) e^{-\frac{\xi_1^2+[f(\xi_1)-x]^2}{-4\eta}} d\xi_1\, d\eta = 0.$$

Eseguendo la trasformazione di coordinate

$$\begin{cases} \xi_1 = 2\varrho \operatorname{sen}\theta \sqrt{\log \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}} & -\dfrac{\pi}{2} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ \eta = -\varrho^2 \operatorname{sen}^2\theta \end{cases}$$

riesce indicato con $J(\varrho, \theta)$ l'Jacobiano della trasformazione

$$\iint_{\mathfrak{D}_x} \varphi(\xi_1, \eta) \sqrt{1+f_{\xi_1}^2} \frac{|\xi_1|}{\eta^2} e^{-\frac{\xi_1^2+[f(\xi_1)-x]^2}{-4\eta}} d\xi_1\, d\eta \le$$

$$\int_0^x \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \chi(\varrho, \theta) \frac{2\varrho\,|\operatorname{sen}\theta| \sqrt{\log \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta}}}{\varrho^4 \operatorname{sen}^4\theta} J(\varrho, \theta)\, |\operatorname{sen}\theta|\, e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2 \operatorname{sen}^2\theta}} d\varrho\, d\theta.$$

Osservato che per $\varrho \le x$ $\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2\operatorname{sen}^2\theta}} \le K_1\, e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}}$, con K_1 costante, e posto $\psi(\varrho) = \int\limits_0^{\varrho} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \chi(\varrho, \theta)\, J(\varrho, \theta)\, d\theta$ si ha

$$\iint\limits_{\mathfrak{D}_x} \varphi(\xi_1, \eta) \sqrt{1 + f_{\xi_1}^2}\, \frac{|\xi_1|}{\eta^2}\, e^{-\frac{\xi_1^2 + [f(\xi_1) - x]^2}{-4\eta}}\, d\xi_1\, d\eta \leq K \int\limits_0^x \frac{\psi'(\varrho)}{\varrho^3}\, e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}}\, d\varrho$$

dove K è una costante.

Ricordato che $\dfrac{\psi(\varrho)}{\varrho^3} \to 0$ per $\varrho \to 0$, con calcoli elementari si ottiene che

$$\lim_{x \to 0} \int\limits_0^x \frac{\psi'(\varrho)}{\varrho^3}\, e^{-\frac{x^2}{8\varrho^2}}\, d\varrho = 0\,.$$

In modo del tutto analogo si consegue la (40). Resta così provata l'asserita equivalenza.

Ci si può dunque limitare a studiare o l'esistenza del limite a primo membro della (38) o quella dell'integrale singolare a secondo membro; una volta dimostrata una delle due esistenze è immediato ricavare la validità della (38), in virtù della sua validità quando φ è costante e della equivalenza provata. L'esistenza del limite

$$\lim_{P \to M\, (\text{su } \nu_M +)} \frac{\partial u(P)}{\partial l_M}$$

per quasi tutti gli M di s consegue dalla (28′) e dalla equivalenza delle classi $\{u\}$, $\{v\}$ provata nel n. 7. Si ha così l'esistenza per quasi tutti i punti M di s dell'integrale singolare

$$\overset{*}{\int\limits_s} \varphi(Q)\, \frac{\partial F(Q, M)}{\partial l_M}\, d_Q s$$

e la validità, per quasi tutti i punti M di s, della (38).

12. — Il problema (1) nel caso che τ sia più generale di un cilindro retto.

Tutto quanto abbiamo detto si estende al caso in cui il dominio τ sia più generale del cilindro retto sinora considerato (vedi n. 1), e precisamente sia ottenuto da questo con deformazione continua in modo da rimanere limitato dai piani $y = 0$ e $y = y_0$, che le sezioni coi piani $y = t$ $(0 \leq t \leq y_0)$ siano domini dello stesso tipo di D; e che inoltre la superficie laterale s sia di classe 2 in ogni suo punto, con piano tangente che formi con i piani caratteristici $y = \text{cost.}$ un angolo maggiore di un numero $\theta > 0$.

Il teorema di unicità del n. 1 e quanto è detto nel n. 2 non subiscono alcuna modifica perchè là non si è tenuto conto della particolare ipotesi fatta su τ.

Anche le formule limiti del n. 3 rimangono immutate; però i calcoli da farsi per stabilirle divengono formalmente più laboriosi (si veda per una questione sostanzialmente analoga L. Amerio [1]). Quindi anche il teorema II (di inversione della formula di Green) rimane invariato.

Il n. 4 rimane del tutto immutato perchè indipendente dal fatto che τ sia un cilindro retto piuttosto che un dominio del tipo più generale ora considerato.

Restano pure inalterati i discorsi fatti al n. 5 sull'integrale $\int_s \delta(M)\, H(M, N)\, d_M s$, discorsi che si basano sulle proprietà del nucleo $H(M, N)$ (n. 4) e sul comportamento degli integrali $\int_s h_{\alpha,\beta}(M, N)\, d_M s$, $\int_s h^{(\lambda)}_{\alpha,\beta}(M, N)\, d_M s$ studiato dal Levi (vedi nn. 2, 3, 4, 5 di [10]) proprio nell'ipotesi che s sia una superficie tipo ora precisato.

La traduzione del problema al contorno in equazione integrale e i conseguenti teoremi di esistenza e di unicità del n. 6. non subiscono modifica perchè non vengono a mutare le proprietà dei nuclei iterati là considerati (si veda in proposito anche quanto è esplicitamente osservato da E. Magenes a pag. 154 di [11]).

I nn. 7, 8, 9, 10 conservano evidentemente la loro validità, senza alcuna modifica, anche di carattere formale.

Infine rileviamo che i risultati esposti al n. 11 rimangono, anche formalmente, immutati; i calcoli delle dimostrazioni però dovranno subire delle modifiche, inessenziali nella sostanza, che ne appesantiscono l'esposizione.

Le uniche modifiche, in ogni caso semplici e soltanto di calcolo, da apportare quando il cilindro retto è sostituito dal dominio τ più generale qui considerato, sono dunque relative soltanto ai nn. 3 (teorema di inversione della formula di Green) e 11 (integrali singolari).

BIBLIOGRAFIA

[1] - L. Amerio, *Sull'equazione di propagazione del calore,* Rend. di Mat. e delle sue appl., (5), vol. 5, 1946, pp. 84-120.

[2] - G. Fichera, *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni,* Ann. di Mat. pura e appl., (4), t. XXVII, 1948, pp. 1-28.

[3] - G. Fichera, *Alcuni recenti sviluppi della teoria dei problemi al contorno per le equazioni alle derivate parziali lineari,* Atti del Conv. int. sulle equaz. alle deriv. parz. di Trieste, pp. 174-227.

[4] - G. Fichera, *Sulla teoria generale dei problemi al contorno per le equazioni differenziali lineari,* Nota I e II, Rend. Acc. Naz. Lincei, (8), vol. XXI, 1956, pp. 46-55 e pp. 166-172.

[5] - G. Fichera, *Sulle equazioni differenziali lineari ellittico-paraboliche del secondo ordine,* Mem. Acc. Naz. Lincei, (8), vol. V, 1956, fascicolo I.

[6] - M. Gevrey, *Sur les équations aux derivées partielles du type parabolique,* Journal de math., (6), t. 9, 1913, pp. 305-471; (6), t. 10, 1914, pp. 105-148.

[7] - G. Giraud, *Nouvelle méthode pour traiter certaines problèmes relatifs aux équations du type elliptique,* Journ. de Math. pures et appl, (9), t. XVIII, 1939, pp. 111-143.

[8] - B. Jessen-J Marcinkiewicz-A. Zygmund, *Note of the differentiability of multiple in tegrals,* Fund. Math., vol. 25, 1935.

[9] - E. E. Levi, *Sull'equazione del calore,* Ann. di Mat. pura e appl., (3), t. 14, 1908, pp. 187-264.

[10] - E. E. Levi, *Sul problema di Fourier,* Atti Acc. Scienze di Torino, vol. 43, 1908, pp. 435-453.

[11] - E. Magenes, *Sull'equazione del calore: teoremi di unicità e teoremi di completezza connessi col metodo di integrazione di M. Picone,* nota I e II, Sem. mat. Università di Padova, vol. XXI, 1952, pp. 99-123 e pp. 136-170.

[12] - E. Magenes, *Sui problemi di derivata obliqua regolare per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico,* Ann. di Mat. pura e appl.. (4), t. XL, 1955, pp. 143-160.

[13] - E. Magenes, *Sulla teoria del potenziale,* Rend. Sem. mat. Università di Padova, vol. XXIV, 1955, pp. 510-522.

[14] - C. W. Oseen, *Contributions à la théorie analitique des marées,* Arkiv for Math. Astr. Fys., b. 25 A, n. 24, 1937, pp. 1-39.

[15] - M. Picone, *Nuove formule di maggiorazione per gli integrali delle equazioni linearc a derivate parziali del secondo ordine ellittico paraboliche,* Rend. Acc. Lincei, 28, 1938, pp. 331-338.

[16] - M. Picone, *Appunti di Analisi superiore,* ed. Rondinella, Napoli, 1940, I ed.

[17] - M. Picone-C. Miranda, *La formula di Green per i problemi con arbitraria derivata obliqua,* Rend. Acc. Lincei, 29, 1939, pp. 160-165.

[18] - B. Pini, *Un problema di valori al contorno generalizzato per l'equaziane a derivate parziali lineare parabolica del secondo ordine,* Riv. di Mat. della Università di Parma, vol. 3, 1952, pp. 153-187.

[19] - Pogorzelski, *Sur la solution de l'équation intégrale dans le probleme de Fourier,* Ann. Soc. Polon. Math., 24, 1952, pp. 56-74.

[20] - J. L. Lions, *Sur les problémes aux limites du type dérivée oblique,* Ann. of Math., vol. 64, 1956, pp. 207-239.