ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LIONELLO CANTONI

Nuovi tipi di trasformazioni birazionali nella teoria delle varietà abeliane reali

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 9, nº 3-4 (1955), p. 207-233

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1955_3_9_3-4_207_0>

NUOVI TIPI DI TRASFORMAZIONI BIRAZIONALI NELLA TEORIA DELLE VARIETÀ ABELIANE REALI

di LIONELLO CANTONI (Bologna)

INTRODUZIONE

Nella teoria delle varietà abeliane reali, hanno notevole importanza le trasformazioni quasi-reali e fra esse le trasformazioni pseudoordinarie definite e studiate da S. CHERUBINO in diversi suoi lavori (cfr. bibliografia annessa).

È noto che le trasformazioni quasi reali mutano una simmetria di una varietà abeliana V_p in una simmetria della stessa schiera.

È quindi abbastanza naturale il pensare di studiare, per analogia, quelle trasformazioni che mutano una simmetria ammessa dalla varietà, in una simmetria della schiera associata e che possono chiamarsi quasi-immaginarie pure (e del resto un accenno a queste trasformazioni viene dato dallo stesso S. CHERUBINO in [1] ([1])). In quest'ordine di idee nasce spontaneo il problema di vedere se esistono trasformazioni che godano, rispetto all'insieme delle trasformazioni quasi-immaginarie pure, di proprietà che sono, almeno dal punto di vista formale, le analoghe di quelle delle trasformazioni pseudoordinarie rispetto al gruppo delle trasformazioni quasi-reali ed è questo appunto lo scopo del presente lavoro del quale diamo qui appresso il riassunto.

Nei primi tre numeri del § 1, vengono studiate alcune proprietà delle trasformazioni quasi-immaginarie pure e nel successivo n. 4 vien data la definizione di un particolare tipo di trasformazioni quasi-immaginarie pure, che ho chiamato semiordinarie e che son caratterizzate dalla proprietà di scambiare le prime p righe con le ultime in una matrice caratteristica minima ammessa dalla simmetria in esame. Al n. 5, si generalizza il con-

([1]) I numeri posti in parentesi quadre si riferiscono alla bibliografia riportata alla fine.

cetto di trasformazione semiordinaria, mediante la definizione di trasformazione semipseudoordinaria [2] quale trasformazione birazionale e quasi-immaginaria pura che produce lo scambio predetto a meno di una congruenza mod. 2 ; i numeri successivi, fino alla fine del § sono dedicati allo studio delle proprietà più importanti delle trasformazioni così definite. Fra esse, una delle più significative è quella che afferma la dipendenza della loro definizione dalla particolare matrice caratteristica minima considerata, fatto questo che non ha l'analogo fra le trasformazioni pseudoordinarie e che rende necessario suddividere l'insieme di tutte le trasformazioni semipseudoordinarie in sottoinsiemi (che ho chiamato pseudoschiere) per la cui definizione rimando allo stesso n. 5.

Il § 2 è dedicato alla classificazione nel caso iperellittico, delle trasformazioni semipseudoordinarie di una particolare pseudoschiera, servendosi del noto modello reale $V^{(0)}$ della varietà abeliana in questione. Dalla classificazione emerge come fatto più saliente la non esistenza delle trasformazioni semipseudoordinarie se non per particolari varietà abeliane, ciò che mette in evidenza un'altra differenza tra le mie trasformazioni e quelle di CHERUBINO. Infine nel § 3 ho studiato le condizioni di esistenza delle trasformazioni semiordinarie e ho aggiunto la classificazione delle trasformazioni semipseudoordinarie (sempre nel caso iperellittico) ammesse dalle varietà abeliane che posseggono anche trasformazioni semiordinarie. Per questa ristretta classe di varietà, le trasformazioni semipseudoordinarie appaiono come generalizzazioni effettive di quelle semiordinarie. È questo forse il caso più interessante perchè evidentemente per queste trasformazioni si presenterà più marcata l'analogia con quelle di CHERUBINO.

Essendomi sempre limitato allo studio delle trasformazioni appartenenti ad una stessa pseudoschiera, è chiaro che rimangono aperti molti problemi e principalmente quello di trovare le relazioni che intercorrono tra trasformazioni che appartengono a pseudoschiere diverse; su questo mi propongo di ritornare in un futuro lavoro.

---

(2) La ragione del nome adottato per queste trasformazioni, sta nel fatto che il quadrato di una di esse è una trasformazione pseudoordinaria.

§ 1. Proprietà generali delle trasformazioni semipseudoordinarie.

1. — Le trasformazioni quasi-immaginarie pure.

Sia V_p una varietà abeliana di tipo reale, ω una matrice di Riemann cui essa appartiene e consideriamo una simmetria S di V_p di equazione:

$$(1) \qquad v' \equiv \overline{v} + c \qquad c + \overline{c} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega)$$

e la simmetria dia luogo alla relazione:

$$(2) \qquad \overline{\omega} = \omega \, S_{-1}$$

ove S è la matrice dell'antiinvoluzione riemanniana corrispondente a detta simmetria.

Sia ora T una trasformazione birazionale (in sè) ammessa dalla V_p di equazione:

$$(3) \qquad v' \equiv i \pi v + \gamma \qquad (\text{mod. } \omega)$$

ed essa dia luogo alla relazione:

$$(4) \qquad i \pi \omega = \omega \, T_{-1} \qquad i = \sqrt{-1}$$

ove T è la matrice dell'omografia riemanniana corrispondente. Diremo allora *quasi-immaginarie pure*, quelle trasformazioni birazionali T (quando esistono) per effetto delle quali la S si muta in una simmetria della schiera associata (cfr. [1] n. 3), cioè assegnata dalla relazione:

$$(5) \qquad v' \equiv -\overline{v} + d \qquad d - \overline{d} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega)$$

Si vede immediatamente che π deve essere reale e viceversa, se è reale, allora la trasformazione è quasi-immaginaria pura.

In questa ipotesi, trasformando la (1) mediante la (3), si ottiene per la nuova simmetria la condizione di involutorietà:

$$(6) \qquad i \pi^{-1} (c + \overline{c}) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega)$$

In base alla $(1)_2$ poniamo ora $c + \overline{c} = h \, \omega_{-1}$ con h caratteristica di un periodo reale. Si ha allora, per la (6) $i \pi^{-1} \omega h_{-1} \equiv 0$ (mod. ω) e quindi, essendo ωk_{-1} un'altro periodo, ma ora immaginario puro, si ha dalla (4): $\omega h_{-1} = i \pi \omega k_{-1} = \omega T_{-1} k_{-1}$, e infine, poichè ω è a righe tutte linearmente indipendenti:

$$h = k\,T \tag{7}$$

dunque la T muta le caratteristiche dei periodi immaginari puri in quelle di periodi reali. Poichè si dimostra in modo del tutto analogo che essa scambia caratteristiche di periodi reali in quelle di periodi immaginari puri, si può concludere che:

a) *La T scambia fra loro e in modo completo, i due insiemi costituiti rispettivamente dalle caratteristiche dei periodi reali ed immaginari puri.*

Con ragionamento del tutto analogo a quello fatto da S. Cherubino per le trasformazioni quasi reali (cfr. [1] p. I, n. 10), si vede poi che se una trasformazione birazionale T muta *una* matrice caratteristica minima per S in *una* matrice caratteristica minima per $-S$, T è quasi-immaginaria pura. Si può quindi concludere che:

b) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una trasformazione birazionale di V_p sia quasi-immaginaria pura rispetto ad una schiera S di simmetrie (e quindi rispetto alla schiera associata $-S$) ammessa da V_p, è che l'omografia riemanniana relativa alla trasformazione, muti una matrice caratteristica minima di S (di $-S$) in una di $-S$ (di S).*

Come subito si vede, il prodotto di due trasformazioni quasi-immaginarie pure è una trasformazione quasi-reale, anzi si ha che:

c) *L'insieme delle trasformazioni birazionali quasi-reali e quasi-immaginarie pure rispetto ad una stessa simmetria, è un gruppo (di cui l'insieme delle sole trasformazioni quasi-reali è un sottogruppo invariante).*

2. — Le trasformazioni immaginarie pure.

I risultati del precedente numero, e del resto anche la via seguita per ottenerli, confrontati con quelli ottenuti da Cherubino in [1] specialmente al n. 10 della p. I, mostrano la grande analogia che intercorre tra le trasformazioni quasi reali e quelle quasi-immaginarie pure. Si presenta quindi spontaneo a questo punto il problema di definire certe trasformazioni, che potremo chiamare senz'altro *immaginarie pure*, che siano un caso particolare di quelle definite al n. prec. e che godano rispetto a queste ultime di proprietà analoghe a quelle delle trasformazioni birazionali reali, rispetto a quelle quasi-reali. Accenneremo soltanto qui, dato che lo svolgere una trattazione in questo senso non rientra negli scopi del presente lavoro, alla possibilità di far questo.

Consideriamo una varietà abeliana V_p di tipo reale, che ammetta trasformazioni birazionali del tipo

$$v' \equiv \pm i\, v + \gamma \qquad (\text{mod. } \omega) \tag{8}$$

le quali diano luogo alla relazione (di Hurwitz)

$$i\, \omega = \omega\, \sigma_{-1}\,. \tag{9}$$

(Per brevità, chiameremo nel seguito *antiordinaria*, una trasformazione come quella data dalla (8)).

In base alla (9) si può asserire che:

Se $\omega\, h_{-1}$ è un periodo, lo è anche $i\, \omega\, h_{-1}$ ed inoltre che se $\omega\, h_{-1}$ è un periodo reale (immaginario puro), $i\, \omega\, h_{-1}$ è un periodo immaginario puro (reale). Diamo allora la seguente definizione:

Data una varietà abeliana V_p di tipo reale con trasformazioni antiordinarie, diremo *opposta* di una simmetria S assegnata dalla equazione:

$$v' \equiv \bar{v} + c \qquad c + \bar{c} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega) \tag{10}$$

la simmetria della schiera associata

$$v' \equiv -\,\bar{v} - i\, c \qquad (\text{mod. } \omega) \tag{11}$$

(si noti che la condizione di involutorietà è certo soddisfatta).

Analogamente data la simmetria di $-S$:

$$v' \equiv -\,\bar{v} + d \qquad d - \bar{d} \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \omega) \tag{12}$$

definiamo per sua opposta la simmetria della schiera di S

$$v' \equiv \bar{v} + i\, d \qquad (\text{mod. } \omega)$$

(Anche in questo caso è soddisfatta la condizione di modularità).

Ciò premesso, diamo la seguente:

DEFINIZIONE: *Una trasformazione birazionale T, quasi-immaginaria pura, la diremo immaginaria pura, se essa muta una simmetria nella sua opposta.*

3. — Le trasformazioni semiordinarie.

Consideriamo sopra la nostra V_p di tipo reale, una simmetria S ed una matrice caratteristica minima $\left[\dfrac{m}{n}\right]$ di S.

Diremo allora *semiordinaria* rispetto ad S (o meglio alla schiera di S) e relativamente a $\left[\dfrac{m}{n}\right]$ una trasformazione birazionale T tale che, indicata al solito con T la matrice della corrispondente sostituzione riemanniana, si abbia:

$$\left[\frac{m}{n}\right] T = \pm \left[\frac{n}{m}\right] \tag{13}$$

e se in questa relazione vale il segno superiore (inferiore) diremo che la nostra trasformazione è di *2ª specie* (*di 1ª specie*).

Possiamo notare fin d'ora che la (13) può sussistere solo per p pari. Infatti in essa, passando ai determinanti, si ha $|T| = (-1)^p$ mentre, come è noto, T deve risultare in ogni caso modulare.

Quindi d'ora in poi, parlando di trasformazioni semiordinarie, sottintenderemo sempre che p sia pari.

Sia ora $\left[\dfrac{m'}{n'}\right]$ un'altra matrice caratteristica minima ammessa dalla considerata simmetria, e legata alla precedente dalla relazione (cfr. [1] p. I n. 5 e segg.):

$$\left[\frac{m'}{n'}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right] \left[\frac{m}{n}\right] \tag{14}$$

con a e b matrici unimodulari di ordine p. Dimostriamo allora che:

Supposta verificata la (13), *condizione necessaria e sufficiente affinchè valga anche la relazione:*

$$\left[\frac{m'}{n'}\right] T = \pm \left[\frac{n'}{m'}\right] \tag{15}$$

è che nella (14) *sia* $a = b$.

Infatti se è $a = b$, la (14) si riscrive $\left[\dfrac{m'}{n'}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right] \left[\dfrac{m}{n}\right]$ e quindi anche $\left[\dfrac{n'}{m'}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right] \left[\dfrac{n}{m}\right]$; perciò, moltiplicando ambo i membri della (13), a sinistra, per la matrice $\left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right]$, si ottiene per le due ultime relazioni trovate, proprio la (15). Viceversa, se valgono assieme le (14) - (15), si ottiene, introducendo la (14) nella (15):

$$\left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right] \left[\frac{m}{n}\right] T = \pm \left[\begin{array}{c|c} b & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right] \left[\frac{n}{m}\right] \quad \text{cioè} \quad \left[\frac{m}{n}\right] T = \pm \left[\begin{array}{c|c} a^{-1} b & 0 \\ \hline 0 & b^{-1} a \end{array}\right] \left[\frac{n}{m}\right]$$

e perchè questa relazione sia compatibile con la (13), deve essere $a^{-1}\,b =$ $= b^{-1}\,a = I$ e cioè $a = b$ come avevamo annunciato; si può quindi intanto affermare che:

a) *Trasformazioni semiordinarie possono esistere solo quando p è pari.*

b) *Se una trasformazione è semiordinaria rispetto ad una determinata matrice caratteristica minima, essa lo è anche rispetto a tutte e sole le matrici caratteristiche minime che si ottengono dalla data, moltiplicandola a sinistra per una qualunque matrice del tipo:*

$$\left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right]$$

essendo a un'arbitraria matrice unimodulare di ordine p, e 0 *la matrice nulla dello stesso ordine.*

Dal fatto che la (13) determina univocamente (a meno del segno) la matrice T che in essa compare, segue che:

c) *Considerata una matrice caratteristica minima (o una qualunque altra che si ottenga dalla data al modo detto in* b)), *e l'insieme R delle trasformazioni semiordinarie che ad essa appartengono e detto T un qualunque elemento di R, l'elemento generico T′ di detto insieme si può sempre esprimere come segue:*

$$T' = OT = TO'$$

O e O′ essendo due convenienti trasformazioni ordinarie.

Viceversa è chiaro che

d) *Il prodotto di una trasformazione ordinaria con una trasformazione semiordinaria appartenente alla schiera di una certa matrice caratteristica minima* [3] *è una trasformazione semiordinaria appartenente alla stessa schiera.*

Pertanto si ha:

e) *L'insieme di tutte le trasformazioni ordinarie e delle trasformazioni semiordinarie della stessa schiera, è un gruppo del quale l'insieme delle sole trasformazioni ordinarie costituisce un sottogruppo (invariante).*

4. — Nelle ipotesi del n. precedente, supponiamo che esistano due matrici caratteristiche minime per la simmetria S, fra loro legate dalla relazione (14) e siano T e T' due trasformazioni semiordinarie che ad esse

---

[3] Con questa locuzione abbreviata intenderemo dire qui e nel seguito « appartenente ad una certa matrice caratteristica minima e a tutte le altre che si ottengono dalla data nel modo detto in b) ».

rispettivamente appartengono. Si abbia cioè:

$$(16) \qquad \left[\frac{m}{n}\right] T = \pm \left[\frac{n}{m}\right]$$

$$(17) \qquad \left[\frac{m'}{n'}\right] T' = \pm \left[\frac{n'}{m'}\right].$$

Introducendo la (14) nella (17) si ha:

$$\left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right] \left[\frac{m}{n}\right] T' = \pm \left[\begin{array}{c|c} b & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right] \left[\frac{n}{m}\right]$$

e quindi:

$$(18) \qquad \left[\frac{m}{n}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c|c} a^{-1}\, b & 0 \\ \hline 0 & b^{-1}\, a \end{array}\right] \left[\frac{n}{m}\right] = \pm\, T'$$

oppure, per la (16):

$$(19) \qquad \pm\, T' = \left[\frac{m}{n}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c|c} a^{-1}\, b & 0 \\ \hline 0 & b^{-1}\, a \end{array}\right] \left[\frac{m}{n}\right] T$$

Intendendo di scegliere il segno $+$ se entrambe le trasformazioni sono della stessa specie e il segno $-$ se sono di specie diversa.

Viceversa, se T è una trasformazione semiordinaria, e T' è birazionale e se fra le corrispondenti matrici vale una relazione come la (19), ove $\left[\frac{m}{n}\right]$ è una qualunque matrice caratteristica minima rispetto alla quale la T è semiordinaria, posto $\left[\frac{m'}{n'}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right] \left[\frac{m}{n}\right]$, si ha immediatamente dalla (19) (o anche dalla (18)),

$$\left[\frac{m'}{n'}\right] T' = \pm \left[\frac{n'}{m'}\right]$$

e quindi anche T' è semiordinaria.

5. — Le trasformazioni semipseudoordinarie [4].

Come nei precedenti numeri, consideriamo una varietà abeliana V_p di tipo reale e sia S una sua simmetria. Se $\left[\frac{m}{n}\right]$ è una matrice caratteristica

[4] Nel seguito chiameremo per brevità trasformazione s. p. o. una trasformazione semipseudoordinaria.

minima di S, una trasformazione birazionale T di V_p, quasi-immaginaria pura rispetto ad S, la diremo s. p. o. rispetto ad S e relativamente ad $\left[\frac{m}{n}\right]$, se, indicata al solito con T la matrice della corrispondente sostituzione riemanniana, accade che:

$$\left[\frac{m}{n}\right] T \equiv \left[\frac{n}{m}\right] \pmod{2} \tag{20}$$

Sia ora $\left[\frac{m'}{n'}\right]$ un'altra matrice caratteristica minima di S legata alla $\left[\frac{m}{n}\right]$ dalla relazione:

$$\left[\frac{m'}{n'}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right] \left[\frac{m}{n}\right] \tag{21}$$

con a e b matrici unimodulari di ordine p. È facile dimostrare che:

a) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè, assieme alla* (20) *valga anche la:*

$$\left[\frac{m'}{n'}\right] T \equiv \left[\frac{n'}{m'}\right] \pmod{2} \tag{22}$$

è che sia, per le matrici a e b che compaiono nella (21):

$$a \equiv b \pmod{2} \tag{23}$$

Infatti, supposto che valga, oltre naturalmente alla (20), anche la (22), si ha da quest'ultima e dalla (21):

$$\left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right] \left[\frac{m}{n}\right] T \equiv \left[\begin{array}{c|c} b & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right] \left[\frac{n}{m}\right] \pmod{2}$$

cioè per la (20):

$$\left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right] \left[\frac{n}{m}\right] \equiv \left[\begin{array}{c|c} b & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right] \left[\frac{n}{m}\right] \pmod{2}$$

la quale dà luogo alle due congruenze:

$$\begin{aligned} a\, n &\equiv b\, n \\ b\, m &\equiv a\, m \end{aligned} \pmod{2}$$

che, per essere m ed n due matrici a caratteristica massima (mod. 2) sono soddisfatte allora e solo che sia $a \equiv b$ (mod. 2) (cfr. [2] pag. 7, n. 3).

Viceversa, se vale la (23), si ha anche

$$\left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right] \equiv \left[\begin{array}{c|c} b & 0 \\ \hline 0 & a \end{array}\right] \qquad (\text{mod. } 2)$$

e quindi, moltiplicando membro a membro, a sinistra, quest'ultima per la (20), si ottiene la (22). Analogamente a quanto fatto per le trasformazioni semiordinarie, eseguiremo una ripartizione dell'insieme di tutte le matrici caratteristiche minime di S, ponendo in uno stesso sottoinsieme (che chiameremo *pseudoschiera*), due matrici caratteristiche minime che siano legate tra loro da una relazione come la (21) con a e b matrici soddisfacenti alla (23). Per semplicità diremo poi che anche due trasformazioni birazionali appartengono alla stessa pseudoschiera, quando sono s. p. o. relativamente alle matrici caratteristiche minime appartenenti alla stessa pseudoschiera. È quasi immediato poi che:

b) *Il prodotto di due trasformazioni semipseudoordinarie appartenenti alla stessa pseudoschiera, è una trasformazione pseudoordinaria* (*della simmetria considerata*).

Si ha anzi che:

c) *Data su una varietà abeliana V_p una simmetria S, l'insieme di tutte le trasformazioni pseudoordinarie di S e di tutte le trasformazioni semipseudoordinarie di S appartenenti ad una stessa pseudoschiera, è un gruppo* (*del quale è un sottogruppo invariante l'insieme delle sole trasformazioni pseudoordinarie*).

6. — Nelle ipotesi e con le notazioni dei precedenti numeri, fissiamo una volta per tutte, una ben determinata matrice caratteristica minima $\left[\begin{array}{c} m \\ \hline n \end{array}\right]$ per la simmetria considerata. Allora, potremo ottenere tutte le altre matrici caratteristiche minime ammesse dalla stessa simmetria, facendo variare a e b nella formula

$$\left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} m \\ \hline n \end{array}\right] \tag{24}$$

nel campo di tutte le matrici unimodulari, di ordine p (5). In particolare, se a e b variano nel modo ora detto e soddisfacendo alla (23),

(5) Si veda, [1] p. I, § 2.

la (24) ci dà tutte e sole le matrici caratteristiche minime appartenenti alla pseudoschiera individuata da $\left[\frac{m}{n}\right]$.

L'insieme di tutte le matrici come la $\left[\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right]$, è un gruppo rispetto all'operazione di prodotto ordinario di matrici, gruppo che indicheremo con G. Se di G consideriamo il sottogruppo G_1 di quelle matrici per cui è soddisfatta la (23), ad esso, come abbiamo appena detto, viene a corrispondere, mediante la (24), l'insieme di tutte le matrici caratteristiche minime della pseudoschiera di $\left[\frac{m}{n}\right]$. Rispetto a G_1, gli elementi di G vengono a ripartirsi in sistemi laterali (destri) tali che:

I) *Due elementi dello stesso sistema laterale danno luogo, mediante la* (24), *a matrici caratteristiche minime appartenenti alla stessa pseudoschiera.*

II) *Due elementi appartenenti a sistemi laterali diversi, danno luogo, sempre mediante la* (24), *a matrici caratteristiche minime che appartengono a pseudoschiere diverse.*

Se consideriamo due matrici caratteristiche minime

$$\left[\frac{m_1}{n_1}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & 0 \\ \hline 0 & b_1 \end{array}\right] \left[\frac{m}{n}\right]$$

$$\left[\frac{m_2}{n_2}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a_2 & 0 \\ \hline 0 & b_2 \end{array}\right] \left[\frac{m}{n}\right]$$

esse, come si vede immediatamente, sono legate dalla relazione

$$\left[\frac{m_2}{n_2}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a_2\, a_1^{-1} & 0 \\ \hline 0 & b_2\, b_1^{-1} \end{array}\right] \left[\frac{m_1}{n_1}\right]$$

e quindi apparterranno a due pseudoschiere diverse allora e solo che sia:

$$a_2\, a_1^{-1} \not\equiv b_2\, b_1^{-1} \qquad (\text{mod. } 2)$$

cioè quando:

$$b_2\, a_2^{-1} \not\equiv b_1\, a_1^{-1} \qquad (\text{mod. } 2)$$

Ma i prodotti $b_2^{-1}\, a_2$, $b_1^{-1}\, a_1$, rappresentano due matrici unimodulari qualunque del considerato ordine p; dunque:

d) *L'indice di G_1 in G (e quindi il numero delle pseudoschiere distinte) è finito ed eguaglia il numero delle matrici unimodulari di ordine p e tutte fra loro incongrue (mod. 2).*

7. — Supponiamo di aver ridotto la matrice della simmetria che stiamo considerando alla forma tipica di Comessatti I_λ ([1] p. I, n. 4) e consideriamo il modello di tipo reale di V_p, già noto col nome di $V^{(0)}$ ([1], p. II, n. 12), costruita mediante l'isomorfismo:

$$\omega^{(0)} = \omega \left[\frac{m}{n}\right]_{-1} \tag{25}$$

essendo ω una matrice di Riemann (reale) attaccata alla nostra V_p e $\left[\frac{m}{n}\right]$ la matrice caratteristica minima per I_λ:

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline I^{(\lambda)} & I - 3 \cdot I^{(\lambda)} \end{array}\right]^{(6)} . \tag{26}$$

L'isomorfismo (25), muta la I_λ di V_p, nella simmetria (a carattere reale zero) di $V^{(0)}$:

$$I_0 = \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & -I \end{array}\right] . \tag{27}$$

Consideriamo allora su V_p la trasformazione s. p. o. T:

$$v'_{-1} \equiv i\,\pi\, v_{-1} + \gamma_{-1} \qquad (\text{mod. } \omega)$$

la quale dia luogo alla relazione di Hurwitz:

$$i\,\pi\,\omega = \omega\, T'_{-1} .$$

La T induce sulla $V^{(0)}$ una trasformazione $T^{(0)}$ di equazioni:

$$v^{(0)\prime}_{-1} \equiv i\,\pi\, v^{(0)}_{-1} + \gamma_{-1} \qquad (\text{mod. } \omega)$$

che dà luogo alla relazione di Hurwitz:

$$i\,\pi\,\omega^{(0)} = \omega^{(0)}\, T^{(0)}_{-1}$$

---

(6) Nel seguito, ci occuperemo di preferenza delle trasformazioni s. p. o. della pseudoschiera individuata dalla (26) e ciò per analogia (e per rendere più significativi i confronti) con i lavori di S. Cherubino sulle trasformazioni pseudoordinarie. In quel che segue quindi, a meno che non sia avvertito esplicitamente il contrario, parlando di trasformazioni s. p. o. si intenderà che esse siano esclusivamente quelle della pseudoschiera della (26).

e si ricavano, con ragionamenti del tutto analoghi a quelli di S. Cherubino in [3], p. II, n. 15 e tenendo conto che fra le matrici T e $T^{(0)}$ sussiste la relazione:

$$\left[\frac{m}{n}\right] T = T^{(0)} \left[\frac{m}{n}\right] \tag{28}$$

per le matrici stesse, rispettivamente le forme:

$$T = \left[\begin{array}{cc|cc} \alpha_1 & 0 & -\alpha_1 & 2\beta_2 \\ 2\alpha_3 & 0 & -4\alpha_3 & \beta_4 \\ \hline \gamma_1 & \gamma_2 & -\alpha_1 & \beta_2 \\ 2\gamma_3 & \gamma_4 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad T^{(0)} = \left[\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{0} & \alpha_1 & 2\beta_2 \\ & & 2\alpha_3 & \beta_4 \\ \hline \alpha_1 - 2\gamma_1 & -2\gamma_2 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ 2\gamma_3 & \gamma_4 & & \end{array}\right] \tag{29}$$

nelle quali tutte le matrici $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, sono intere e soddisfacenti alle relazioni $\alpha_1 \equiv I_\lambda$; $\beta_4 \equiv \gamma_4 \equiv I_{p-\lambda}$ (mod. 2). Inoltre β_2 e γ_2 sono di tipo $(\lambda, p-\lambda)$ mentre α_3 e γ_3 sono di tipo $(p-\lambda, \lambda)$ e γ_1 è di ordine λ. Essendo $T^{(0)}$ intiera, è per la (28) anche modulare. Si ha poi subito dalla $(29)_2$:

$$I_{2p}\, T^{(0)} \equiv \left[\begin{array}{c|c} 0 & I_p \\ \hline I_p & 0 \end{array}\right] \quad \text{(mod. 2)} \tag{30}$$

e cioè $T^{(0)}$ è s. p. o. (dato che I è matrice caratteristica minima per la simmetria (27) di $V^{(0)}$). È poi quasi immediato il viceversa. Raccogliendo si ha dunque:

e) *Le trasformazioni semipseudoordinarie di V_p della pseudoschiera corrispondente alla matrice:*

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline I^{(\lambda)} & I - 3 \cdot I^{(\lambda)} \end{array}\right]$$

inducono su $V^{(0)}$ trasformazioni semipseudoordinarie (rispetto a I_0) della pseudoschiera di I_{2p} e viceversa.

8. — Osservazione. Nel trattare il prec. n. ci siamo riferiti senz'altro alla forma tipica del Comessatti; per questo val la pena di far rilevare il seguente fatto:

f) *Un cambiamento di un sistema di periodi primitivi in un altro sistema di periodi primitivi, conserva la proprietà caratteristica delle trasformazioni semipseudoordinarie (che è quella espressa dalla* (20)).

Infatti, sia ω il primitivo sistema di periodi e ω' quello nuovo. Poniamo:

$$\omega = \omega' R_{-1} \tag{31}$$

con R matrice unimodulare di ordine $2p$. T sia poi una trasformazione s. p. o., della quale considereremo la relazione di Hurwitz:

$$i\,\pi\,\omega = \omega\,T_{-1} \tag{32}$$

e indichiamo con $\left[\frac{m}{n}\right]$ una matrice caratteristica minima della pseudo-schiera corrispondente a T cioè tale che:

$$\left[\frac{m}{n}\right] T \equiv \left[\frac{n}{m}\right] \qquad (\text{mod. } 2) \tag{33}$$

Infine, la simmetria S che stiamo considerando, dia luogo alla relazione:

$$\bar{\omega} = \omega\,S_{-1}\,. \tag{34}$$

Inoltre poichè $\left[\frac{m}{n}\right]$ è matrice caratteristica (minima) di S, si avrà:

$$\left[\frac{m}{n}\right] S = I_0 \left[\frac{m}{n}\right]. \tag{35}$$

Introducendo la (31) nelle (32) - (34) si ottiene:

$$i\,\pi\,\omega' = \omega'(R^{-1}\,T\,R)_{-1}$$

$$\bar{\omega}' = \omega'(R^{-1}\,S\,R)_{-1}$$

cioè, se indichiamo con T' (con S') la matrice della sostituzione (antisostituzione) riemanniana corrispondente alla T (alla S) dopo aver eseguito il cambiamento di cicli (31), si ha

$$T' = R^{-1}\,T\,R \qquad\qquad S' = R^{-1}\,S\,R \tag{36}$$

$$T = \quad R\,T'\,R^{-1} \qquad\qquad S = \quad R\,S'\,R^{-1} \tag{37}$$

Introducendo allora la $(37)_2$ nella (35), si ha

$$\left[\frac{m}{n}\right] R\,S' = I_0 \left[\frac{m}{n}\right] R$$

il che dimostra che $\left[\frac{m'}{n'}\right] = \left[\frac{m}{n}\right] R$ è matrice caratteristica per la simmetria presa nella forma S'. Detta matrice caratteristica è poi anche minima per il fatto che R è unimodulare. Si ha infine, per la $(36)_1$:

$$\left[\frac{m'}{n'}\right] T' = \left[\frac{m}{n}\right] R \cdot R^{-1}\, T\, R = \left[\frac{m}{n}\right] T\, R \equiv \left[\frac{n}{m}\right] R = \left[\frac{n'}{m'}\right] \qquad (\mathrm{mod.}\ 2)$$

il che dimostra l'asserto.

§ 2. - Classificazione delle trasformazioni semipseudoordinarie nel caso iperellittico.

1. — Come è stato avvertito sin dal n. 7 del § prec. ci occuperemo particolarmente anche in questo § di una sola pseudoschiera di trasformazioni s. p. o., e precisamente di quella che corrisponde alla pseudoschiera di matrici caratteristiche minime individuata dalla (33) del § prec. (A questa pseudoschiera corrisponde biunivocamente su $V^{(0)}$, come già sappiamo, quella individuata dalla matrice I_4 che è caratteristica minima per la simmetria I_0 ammessa da $V^{(0)}$ (7).

2. — Tenendo conto dell'enunciato con il quale si chiude il n. 7 del § prec. procediamo alla classificazione delle trasformazioni s. p. o. di $V^{(0)}$ appartenenti alla pseudoschiera corrispondente alla matrice caratteristica minima I_4 ammessa da I_0. Possiamo senz'altro supporre ([4] n. 2) che la matrice di Riemann attaccata alla nostra $V^{(0)}$ sia del tipo:

$$(1) \qquad [e^{-1} \mid i\,\tau] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & i\,\tau_{11} & i\,\tau_{12} \\ 0 & \dfrac{1}{n} & i\,\tau_{21} & i\,\tau_{22} \end{array}\right] \qquad \tau_{21} = \tau_{12}$$

e che (n. 7 § prec.) la matrice della sostituzione riemanniana corrispondente alla generica trasformazione s. p. o. (della considerata pseudoschiera) abbia l'aspetto:

$$(2) \qquad T = \left[\begin{array}{c|c} 0 & b \\ \hline c & 0 \end{array}\right]$$

(7) La lettura del presente par. e del successivo esige la previa conoscenza dei lavori [3] - [4] che sono di essi la necessaria premessa. Proprio per questo ci asterremo dal citarli in seguito, tranne che in casi specialissimi.

con b e c matrici unimodulari di ordine due e congrue alla matrice identica mod. 2. Le matrici (1) - (2) debbono soddisfare alla relazione di Hurwitz relativa alla trasformazione considerata: $i \pi \omega = \omega T_{-1}$ e da questa, esplicitando, si trovano le relazioni ad essa equivalenti:

$$
(3) \qquad \begin{aligned}
& n(\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2) = \pm 1 \\
& \tau_{12}(c_{11} \mp b_{22}) = \tau_{11}(c_{12} \pm b_{12}) \\
& \tau_{12}(c_{22} \mp b_{11}) = \tau_{22}(c_{21} \pm b_{21}) \\
& n(c_{12} \pm b_{12}) = c_{21} \pm b_{21} \\
& \tau_{12}(nc_{12} \mp b_{21}) = n\tau_{22}c_{11} \pm \tau_{11}b_{11} \\
& \tau_{12}(c_{21} \mp nb_{12}) = \tau_{11}c_{22} \pm nb_{22}\tau_{22}
\end{aligned}
$$

Si possono allora considerare i seguenti possibili casi: ([4])

a) $\tau_{12} = \tau_{21} = 0$; $\dfrac{\tau_{22}}{\tau_{11}}$ razionale:

ponendo $n \dfrac{\tau_{22}}{\tau_{11}} = \dfrac{r}{s}$ con r, s, intieri e primi fra loro, le (3) ci danno subito: $c_{11} = \pm \dfrac{s}{r} b_{11}$; $c_{12} = \mp b_{12}$; $c_{21} = \mp b_{21}$; $c_{22} = \mp \dfrac{r}{s} b_{22}$; ponendo quindi, come è necessario, $b_{11} = rx$, $b_{12} = \xi$, $b_{21} = \eta$, $b_{22} = sy$, con x, y, ξ, η, numeri intieri, si ha che le matrici T intiere che soddisfano alla relazione:

$$
(4) \qquad T I_0 = - I_0 T
$$

sono tutte e sole quelle per cui è:

$$
(5) \qquad b = \begin{bmatrix} rx & \xi \\ \eta & sy \end{bmatrix} \qquad c = \mp \begin{bmatrix} sx & \xi \\ \eta & ry \end{bmatrix}
$$

e se si vogliono fra esse quelle birazionali, dobbiamo soddisfare alla condizione di modularità:

$$
(6) \qquad rsxy - \xi\eta = \pm 1
$$

che si verifica con x ed y arbitrari e scegliendo ξ, η divisori complementari del numero $r s x y \pm 1$. Inoltre, affinchè sia $b \equiv c \equiv I_2 \pmod{2}$ dovrà essere $r \equiv s \equiv x \equiv y \equiv \xi + 1 \equiv \eta + 1 \equiv 0 \pmod{2}$. Allora potremo scrivere, al posto di ξ, η rispettivamente $2\xi, 2\eta$, con il che le (5)-(6) potranno riscriversi:

$$(7) \qquad b = \begin{bmatrix} r x & 2\xi \\ 2\eta & s y \end{bmatrix} \qquad c = \mp \begin{bmatrix} s x & 2\xi \\ 2\eta & r y \end{bmatrix}$$

$$(8) \qquad r s x y - 4 \xi \eta = \pm 1$$

Si osservi ora che l'equazione appena scritta è risolubile allora e solo che i numeri r, s, x, y, siano dispari e in quest'ipotesi essa ammette infinite soluzioni. Riassumendo si ha quindi:

Il caso a) presenta soluzioni allora e solo che i numeri n, τ_{11}, τ_{22} soddisfino alla $(3)_1$ e che inoltre posto $n \frac{\tau_{22}}{\tau_{11}} = \frac{r}{s}$ con r, s, intieri e primi fra loro, questi due numeri risultino dispari. In questa ipotesi tutte le soluzioni sono date dalle (7) nelle quali x, y, ξ, η, souo intieri che debbono soddisfare alla (8) ma del resto arbitrari. Nella $(7)_2$ si deve scegliere il segno superiore o inferiore concordemente alla $(3)_1$.

a′) $\tau_{11} = \tau_{22} = 0$
Si ha subito dalla (3):

$$c_{11} = \pm b_{22}; \; c_{22} = \pm b_{11}; \; c_{12} = \pm \frac{b_{21}}{n}; \; c_{21} = \pm n b_{12}$$

e quindi, posto $b_{11} = x$, $b_{12} = \xi$, $b_{21} = n\eta$, $b_{22} = y$, con x, y, ξ, η numeri intieri, si ha che le T intiere che soddisfano alla (4) sono tutte e sole quelle per cui è:

$$(9) \qquad b = \begin{bmatrix} x & \xi \\ n\eta & y \end{bmatrix} \qquad c = \pm \begin{bmatrix} y & \eta \\ n\xi & x \end{bmatrix}$$

con x, y, ξ, η, intieri arbitrari, e tra esse, quelle modulari debbono soddisfare alla condizione:

$$(10) \qquad x y - n \xi \eta = \pm 1$$

che può soddisfarsi dando a ξ, η valori (intieri) arbitrari e scegliendo per x, y una qualsiasi coppia di divisori complementari del numero $n \xi \eta \pm 1$. Volendo poi le trasformazioni s. p. o. bisognerà verificare le condizioni $b \equiv c \equiv I_2$ (mod. 2) e con ragionamento del tutto analogo a quello del caso precedente si trova che deve essere:

$$b = \begin{bmatrix} x & 2\xi \\ 2n\eta & y \end{bmatrix} \qquad c = \pm \begin{bmatrix} y & 2\eta \\ 2n\xi & x \end{bmatrix} \tag{11}$$

ove ξ, η sono intieri arbitrari, mentre x, y è una qualunque coppia di divisori complementari del numero $4 n \xi \eta \pm 1$. La scelta del segno nella $(11)_2$ è concorde a quella che si fa nella $(3)_1$

a″) $\quad \tau_{22} = 0$; $\tau_{11} \neq 0$; $\dfrac{\tau_{11}}{\tau_{12}}$ razionale.

Ponendo $\dfrac{\tau_{11}}{\tau_{12}} = \dfrac{r}{s}$ con r, s, intieri primi fra loro, si ha subito dalle (3):

$$c_{11} \mp b_{22} = \frac{r}{s}(c_{12} \pm b_{12}) \, ; \qquad c_{22} = \pm b_{11} \, ;$$

$$n\, c_{12} \mp b_{21} = \pm \frac{r}{s} b_{11} \, ; \qquad c_{21} \mp n\, b_{12} = \frac{r}{s} c_{22}$$

Causa la terza relazione dovremo porre $b_{11} = s x$, con x intiero, mentre dalla prima si ha:

$$c_{11} = \pm b_{22} + r \eta$$

$$c_{12} = \mp b_{12} + s \eta$$

con η intiero. Da queste e dalle precedenti si ha: $b_{21} = - r x - n b_{12} \pm$ $\pm ns\eta$ e quindi, ponendo ancora $b_{12} = \xi$, $b_{22} = y$ (ξ e y intieri), si ha che le matrici T intiere che soddisfano alla (4), sono tutte e sole quelle per cui si ha:

$$b = \begin{bmatrix} s x & \xi \\ -(rx + n\xi \mp ns\eta) & y \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} \pm y + r \eta & \mp \xi + s \eta \\ \pm (r x + n \xi) & \pm s x \end{bmatrix} \tag{12}$$

Passando alla ricerca delle trasformazioni s. p. o., dalle congruenze $b \equiv c \equiv I_2$ (mod. 2) discende immediatamente che i numeri x, y, s, debbono essere dispari, mentre debbono essere pari i numeri ξ, η, r.

Sostituendo allora $2\xi, 2\eta$ rispettivamente al posto di ξ, η si ha la condizione di modularità:

(13) $$s\,x\,(y \pm 2\,r\,\eta) - 2\,(r\,x + 2\,n\,\xi)\,(-\xi \pm s\,\eta) = \pm 1$$

Poniamo allora $X = \pm s\,x\,\eta$; $Y = \pm y + 2\,r\,\eta$ e inoltre

(14) $$4\,A = \pm 2\,(r\,x + 2\,n\,\xi)\,(\mp \xi + s\,\eta)$$

(A risulta intiero dato che r è pari).

X ed Y si ottengono come radici dell'equazione in Z:

$$Z^2 - [(\pm s\,x + 2\,r\,\eta) \pm y]\,Z + 4\,A \pm 1 = 0$$

che dobbiamo risolvere per intieri. Per questo occorre porre:

$$Z = \frac{\pm s\,x + 2\,r\,\eta \pm y \pm \nu}{2}$$

ove ν è un intiero paritario al numero $\pm s\,x + 2\,r\,\eta \pm y$ dato dalla relazione:

$$\nu^2 = (\pm s\,x + 2\,r\,\eta)^2 + y^2 \pm 2\,(\pm s\,x + 2\,r\,\eta)\,y + 4\,(4\,A \pm 1),$$

la quale, interpretata come equazione in y, è risolubile per intieri allora e solo che:

(15) $$y = \mp 2\,r\,\eta - s\,x \pm \mu$$

ove μ è un intiero dato dalla relazione

$$\mu^2 = (\mp 2\,r\,\eta - s\,x)^2 - (\pm s\,x + 2\,r\,\eta)^2 + 4\,(4\,A \pm 1) - \nu^2$$

che si riduce alla:

(16) $$\mu^2 - \nu^2 = 4\,(4\,A \pm 1)\,.$$

Posto allora, $\mu + \nu = 2\,\mu'$, $\mu - \nu = 2\,\nu'$, con μ', ν' numeri intieri, si ha subito dalle (15)-(16):

(17) $$y = \mp r\,\eta - s\,x \pm (\mu' + \nu')$$

(18) $$\mu'\,\nu' = 4\,A \pm 1\,.$$

Da tutto ciò si ha che per ottenere tutte le trasformazioni s. p. o. basta dare nella (14) a ξ e η valori intieri arbitrari e scegliere x dispari (ma quanto al resto arbitrariamente). Si scelga poi, in base alla (18) per μ', ν' una coppia di divisori complementari del numero $4\,A \pm 1$. La y si determina subito mediante la (17) (e risulta necessariamente dispari). Il problema, come abbiamo già rilevato, ammette soluzioni nel caso attuale, solo se le τ_{ij} soddisfano alla $(3)_1$ ed inoltre se si ha $r \equiv s + 1 \equiv 0$ (mod. 2).

a''') $\tau_{11} = 0$; $\tau_{22} \neq 0$; $\frac{\tau_{22}}{\tau_{12}}$ razionale. Se si pone: $n\frac{\tau_{22}}{\tau_{12}} = \frac{r'}{s'}$ con r' ed s' intieri primi fra loro, si ha, con ragionamento del tutto simile a quello fatto nel caso precedente, che esistono trasformazioni s. p. o. allora e solo che le τ_{ij} soddisfano alla $(3)_1$ ed inoltre che si abbia $r' \equiv s' + 1 \equiv 0$ (mod. 2). In quest'ipotesi, le relative matrici T sono fornite dalle formule:

$$(19)\qquad b = \begin{bmatrix} x & 2\,\eta \\ -(r'y + 2n\eta \mp ns'\xi) & s'\,y \end{bmatrix} \quad c = \pm \begin{bmatrix} s'y & 2\,(-\,\eta \pm s'\,\xi) \\ r'y + 2n\eta & x \pm 2\,r'\,\xi \end{bmatrix}$$

in cui $\xi\,,\eta$ sono intieri arbitrari, y è un intiero dispari pure arbitrario, mentre x è dato dalla relazione: $x = \mp\, 2\,r'\,\xi - s'\,y \pm (\mu + \nu)$ con $\mu\,,\nu$ divisori complementari del numero $2\,(-\,\eta \pm s'\,\xi)\,(r'\,y + 2\,n\,\eta)$. Se invece si vogliono semplicemente le T intiere che soddisfano alla (4), allora, sempre supposta verificata la $(3)_1$, si ha che esse sono date dalle (19) in cui però si pensino soppressi tutti i 2 che in esse compaiono.

a$^{\text{IV}}$) I quattro periodi sono tutti non nulli e i due rapporti $\frac{\tau_{11}}{\tau_{12}}, \frac{\tau_{22}}{\tau_{12}}$ sono razionali. Poniamo $\frac{\tau_{11}}{\tau_{12}} = \frac{r}{s}$; $n\frac{\tau_{22}}{\tau_{12}} = \frac{r'}{s'}$ con $r\,,r'$ intieri rispettivamente primi con gli intieri $s\,,s'$. Indichiamo inoltre con d e d' il M. C. D. di r e r' e di s e s' rispettivamente. Infine poniamo $r = r_1\,d$; $r' = r_1'\,d$; $s = s_1\,d'$; $s' = s_1'\,d'$. Allora, considerazioni simili a quelle fatte nei precedenti casi sulle equazioni (3) conducono al seguente risultato: per l'esistenza delle trasformazioni s. p. o. è necessario che (i periodi siano legati dalla $(3)_1$ ed inoltre) s_1 ed s_1' siano entrambi dispari. Inoltre, se d è dispari, r_1 e r_1' devono risultare anch'essi dispari. Soddisfatte queste condizioni, e indicata con $(\alpha\,,\beta)$ una arbitraria soluzione dell'equazione diofantea: $r_1'\,u \pm r_1\,v = 1$, si ha che tutte e sole le soluzioni del presente caso sono costituite dalle matrici T per cui si ha:

$$
(20)\qquad
\begin{aligned}
b &= \begin{bmatrix} s_1(\beta x + r_1' y) & 2\xi \\ \mp d x + 2n(-\xi \pm s s_1' \eta) & \pm s_1'(\alpha x \mp r_1 y) - 2 r \eta \end{bmatrix} \\
c &= \begin{bmatrix} s_1'(\alpha x \mp r_1 y) & 2(\mp \xi + s s_1' \eta) \\ d x \pm 2 n \xi & s_1[\pm(\beta x + r_1' y) + r' \eta] \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

in cui, per quel che riguarda le condizioni di congruenza, ξ e η sono qualunque, mentre: 1) se d è dispari, vanno scelti x pari e y dispari. 2) se d è pari si prenderà x dispari se uno ed uno solo dei due numeri r_1', r_1' è dispari (ed $y \equiv 1 + \alpha$, oppure $y \equiv 1 + \beta$, a seconda che è dispari r_1' oppure r_1); x ed y si prenderanno invece entrambi dispari se sono dispari i numeri r_1 ed r_1'. Poniamo:

$$
(21)\qquad 2A = (\mp \xi + s s_1' \eta)(d x \pm 2 n \xi)
$$

(con A intiero, date le condizioni di congruenza). Discutendo al solito modo la condizione di modularità per le (20) si osserva che: 1) per ogni determinazione di x, ξ, η, risulta fissato mediante la (21) un valore di A. 2) Se, in corrispondenza ad esso, si considerano le coppie μ, ν di divisori complementari del numero

$$
\pm \alpha \beta s_1 s_1' (4A \pm 1)
$$

tutte e sole le soluzioni del problema (cioè tutte e sole le determinazioni della y), si ottengono dalla equazione

$$
s_1 s_1' y \mp 2 \alpha r_1' s_1' \eta = \pm (\mu + \nu)
$$

in corrispondenza a quelle coppie μ, ν che rendono, sempre in forza della precedente equazione, il numero y intiero e soddisfacente alle prescritte condizioni di parità.

b) $\quad \tau_{12} = \tau_{21} = 0$; $\dfrac{\tau_{22}}{\tau_{11}}$ irrazionale.

Dalle (3) si ha tra l'altro $b_{11} = 0$ e ciò esclude che esistano trasformazioni s. p. o.. Del tutto analogamente si riconosce che non ammettono soluzioni i casi b'); b''); b''') e b$^{\mathrm{IV}}$)

b^{v}) I quattro periodi τ_{ij} $(i, j = 1, 2)$ sono non nulli, i due rapporti $\frac{\tau_{11}}{\tau_{12}}, \frac{\tau_{22}}{\tau_{12}}$ sono entrambi irrazionali e l'equazione

$$\frac{\tau_{11}}{\tau_{12}} x + n \frac{\tau_{22}}{\tau_{12}} y = z \tag{22}$$

ammette soluzioni (intere) non nulle.

Sia $[r', r'', r''']$ la minima soluzione della (22). Allora è noto (8) che tutte le altre soluzioni sono date dalla $x[r', r'', r''']$ con x intiero arbitrario. Da questa osservazione e dalle (3) si ha subito:

$$c_{11} = \pm b_{22}, \quad c_{12} = \mp b_{12}, \quad c_{21} = \mp b_{21}, \quad c_{22} = \pm b_{11}$$

$$b_{11} = r' x, \quad b_{22} = r'' x, \quad -(nb_{12} + b_{21}) = r''' x$$

per cui, posto $b_{12} = \xi$ si ha che le matrici T intiere che soddisfano alla (4) sono tutte e sole quelle per cui si ha:

$$b = \begin{bmatrix} r' x & \xi \\ -(r''' x + n \xi) & r'' x \end{bmatrix} \quad c = \pm \begin{bmatrix} r'' x & -\xi \\ r''' x + n \xi & r' x \end{bmatrix} \tag{23}$$

Si vede subito dalle (23) che per avere le trasformazioni s. p. o. è necessario che sia $r' \equiv r'' \equiv r''' + 1 \equiv 1 \pmod{2}$. In questa ipotesi, bisognerà nelle (23) stesse scegliere $x \equiv \xi + 1 \equiv 1 \pmod{2}$.

Quindi, saranno s. p. o. tutte e sole quelle trasformazioni T per cui si ha:

$$b = \begin{bmatrix} r' x & 2\xi \\ -(r''' x + 2n\xi) & r'' x \end{bmatrix} \quad c = \pm \begin{bmatrix} r'' x & -2\xi \\ r''' x + 2n\xi & r' x \end{bmatrix} \tag{24}$$

in cui le variabili x e ξ sono legate dalla relazione

$$r' r'' x^2 + 2 r''' \xi x + 4 n \xi^2 = \pm 1$$

con x dispari.

---

(8) Cfr. [4] pag. 720 nella nota (27).

c) I periodi sono tutti diversi dallo zero e non soddisfano a nessuna delle precedenti relazioni.

Si ha subito dalle (3) $b_{11} = 0$ e ciò esclude che possano esistere trasformazioni s. p. o.

§ 3. - Ricerca delle varietà $V_2^{(0)}$ che ammettono trasformazioni semiordinarie.

1. — Affinchè una $V_2^{(0)}$ ammetta trasformazioni semiordinarie (relativamente alla matrice caratteristica minima I_4) occorre e basta che le (3) del § prec. siano risolubili con:

$$b_{11} = b_{22} = c_{11} = c_{22} = \pm 1 ; \qquad b_{12} = b_{21} = c_{12} = c_{21} = 0$$

cioè che si abbia: $\tau_{11} = - n\,\tau_{22}$; $n\,(\tau_{12}^2 + n\,\tau_{22}^2) = -1$. È conveniente, per ragioni di semplicità formale, cambiare nelle precedenti relazioni (e quindi in tutti i successivi ragionamenti), n in $-n$, con il che si ha dunque:

$$\tau_{11} = n\,\tau_{22} \qquad n\,(\tau_{12}^2 - n\,\tau_{22}^2) = 1 \tag{1}$$

che sono le condizioni cercate. Possiamo ora dare una classificazione delle trasformazioni s. p. o. ammesse dalle $V^{(0)}$ per le quali sono verificate le (1). Le trasformazioni s. p. o. che così si ottengono, possono pensarsi come generalizzazioni di quelle semioordinarie e avranno quindi una più stretta analogia con le trasformazioni pseudoordinarie di S. Cherubino

2. — Ed ecco la classificazione:

a) $\tau_{12} = 0$, $\dfrac{\tau_{22}}{\tau_{11}}$ razionale. Dalla $(1)_2$ segue $-\,n^2\,\tau_{22}^2 = 1$ il che è assurdo poichè n e τ_{22} sono reali. Non si hanno trasformazioni semioordinarie (e quindi neanche semipseudoordinarie).

a′) $\tau_{11} = \tau_{22} = 0$

Il sistema (1) è risolubile scegliendo $\tau_{12} = \dfrac{1}{\pm\sqrt{n}}$ e la matrice di Riemann è del tipo

$$\omega^{(0)} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{\pm i}{\sqrt{n}} \\ 0 & -\dfrac{1}{n} & \pm\dfrac{i}{\sqrt{n}} & 0 \end{array}\right]$$

e si ha immediatamente che sono s. p. o. tutte e sole quelle trasformazioni per cui è:

$$b = \left|\begin{matrix} x & 2\xi \\ -2n\eta & y \end{matrix}\right| \qquad c = \left[\begin{matrix} y & 2\eta \\ -2n\xi & x \end{matrix}\right]$$

in cui ξ e η sono intieri arbitrari mentre x, y vanno scelte fra le coppie di divisori complementari del numero $-4n\xi\eta \pm 1$.

a″) e a‴) La $(1)_1$ esclude che uno ed uno solo dei due periodi τ_{11}, τ_{22} possa essere nullo. Non si hanno quindi trasformazioni semiordinarie.

a$^{\text{IV}}$) Ponendo $\dfrac{\tau_{11}}{\tau_{12}} = \dfrac{r}{s}$ con r, s intieri e primi fra loro, si ha subito:

$$\tau_{11} = \frac{\pm r}{\sqrt{n\,s^2 - r^2}}\,;\ \tau_{22} = \frac{\pm r}{n\sqrt{n\,s^2 - r^2}}\,;\ \tau_{12} = \frac{\pm s}{\sqrt{n\,s^2 - r^2}}\,;$$

e dalle (3) del § precedente, si ha poi:

$$(2)\quad \begin{aligned} s\,(c_{11} - b_{22}) &= r\,(c_{12} + b_{12}) \\ -s\,(c_{22} - b_{11}) &= r\,(c_{12} + b_{12}) \\ -n\,(c_{12} + b_{12}) &= c_{21} + b_{21} \\ s\,(n\,c_{12} + b_{21}) &= r\,(b_{11} - c_{11}). \end{aligned}$$

Dalle prime tre si ha, con η intiero qualunque:

$$c_{11} = b_{22} + r\,\eta\,;\ c_{12} = -b_{12} + s\,\eta\,;\ c_{21} = -b_{21} - n\,s\,\eta\,;\ c_{22} = -b_{22} - n\,s\eta\,;$$

e quindi, dalla $(2)_4$ e dalle precedenti si ha:

$$b_{21} = n\,(b_{12} - s\,\eta) + r\,y\,;\ b_{22} = b_{12} + s\,y - r\,\eta$$

con y intiero qualunque; allora, poichè b_{11} e b_{12} restano arbitrari, si ha che tutte e sole le matrici T intiere che soddisfano alla relazione:

$$T I_0 = - I_0 T \tag{3}$$

hanno:

$$b = \begin{bmatrix} x & \xi \\ n\xi - n s \eta + r y & x - r\eta + s y \end{bmatrix}$$

(4)

$$c = \begin{bmatrix} x + s y & -\xi + s\eta \\ -(r y + n\xi) & x - r\eta \end{bmatrix}.$$

Per avere le trasformazioni s. p. o., si vede subito che debbono soddisfarsi le condizioni di parità: $y \equiv \xi \equiv \eta \equiv x + 1 \equiv 0$ (mod. 2) e quindi, scrivendo, come è lecito, $2y$, 2ξ, 2η, al posto di y, ξ, η rispettivamente, le (4) si riscriveranno:

$$b = \begin{bmatrix} x & 2\xi \\ 2(n\xi - n s \eta + r y) & x - 2(r\eta - s y) \end{bmatrix} \tag{5}$$

$$c = \begin{bmatrix} x + 2 s y & -2(\xi - s y) \\ -2(r y + n\xi) & x - 2 r\eta \end{bmatrix}$$

Dobbiamo inoltre verificare la condizione di modularità:

$$(x + 2 s y)(x - 2 r \eta) - 4(\xi - s y)(r y + n\xi) = \pm 1,$$

che è risolubile per intieri allora e solo che lo sia il sistema:

$$X + Y = 2x - (r\eta - s y)$$
$$X Y = 4 A \pm 1$$

in cui si è posto:

$$X = x + 2 s y\,;\; Y = x - 2 r \eta\,;\; A = (\xi - s y)(r y + n\xi)$$

Procedendo ora in modo del tutto analogo a quanto fatto nel caso a″) del § precedente, si ottiene che sono s. p. o. tutte e sole quelle trasformazioni

T per le quali valgono le (5) in cui si diano a ξ, η, y, valori arbitrari e si scelgano per x le determinazioni dispari (certo esistenti) del numero:

$$x = r\,\eta - s\,y \pm \frac{(\mu' + \nu')}{2}$$

in cui μ', ν' sono divisori complementari del numero $4\,A \pm 1$. (9)

I casi b), b′), b″), b‴), b$^{\mathrm{IV}}$) non ammettono soluzioni, in quanto, le ipotesi fatte sui periodi sono incompatibili con le (1)

b$^{\mathrm{V}}$) Con le notazioni del § precedente si ha subito dalla (1) $r' = r'' = 1$ $r''' = 0$ e quindi saranno s. p. o. tutte e sole quelle trasformazioni per cui si ha:

$$b = \begin{bmatrix} x & 2\,\xi \\ 2\,n\,\xi & x \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} x & -2\,\xi \\ -2n\,\xi & x \end{bmatrix}$$

con x e ξ soluzioni dell'equazione (di Pell):

$$x^2 - 4\,n\,\xi^2 = \pm 1$$

che ammette infinite soluzioni (almeno tutte quelle che si ottengono prendendo in essa il segno superiore). La forma delle matrici di Riemann si ottiene subito come nei precedenti casi, dalle (1).

c) Non si hanno soluzioni, causa la $(1)_1$.

---

(9) Si osservi che in questo modo si hanno certamente infinite soluzioni, e per convincersene, basta scegliere per η e y una delle infinite soluzioni della congruenza $r\,u - s\,v \equiv 1 \pmod{2}$, dare a ξ un valore arbitrario e prendere $\mu' = 4\,A - 1$, $\nu' = 1$.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. CHERUBINO : *Sul concetto di parità nella teoria delle varietà abeliane reali e su alcune sue applicazioni,* (Atti Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli v. XX, 1933)

[2] S. CHERUBINO : *Sugli n-interi calcolati modulo due,* (Atti Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli v. XXXVI, 1930)

[3] S. CHERUBINO : *Sulla classificazione delle sup. iperellittiche dal punto di vista reale,* (Acc. N. Lincei t. XVI, 1932).

[4] S. CHERUBINO : *Le trasformazioni pseudoordinarie delle sup. iperellittiche reali.* (Atti Ist. Ven. t. XCII, 1932-33).

[5] A. COMESSATTI : *Sulla connessione delle sup. razionali reali,* (Ann. s. IV t. 5 1927-28).

[6] S. CHERUBINO : *Sulle varietà abeliane reali e sulle matrici di Riemann reali* (p. I Gior. Mat. Napoli t. LX, 1922).

[7] S. CHERUBINO : *Sul numero base reale delle varietà abeliane,* (Atti Acc. Sc. Fis. Mat. Napoli v. XXXVI, 1930)