ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SALVATORE CHERUBINO

Ancora sulle matrici infinite

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 8, nº 1-2 (1954), p. 77-80
<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1954_3_8_1-2_77_0>

ANCORA SULLE MATRICI INFINITE

di SALVATORE CHERUBINO (Pisa)

In due Note apparse su questi Annali (1) abbiamo cercato di dare un contributo allo studio sistematico delle proprietà delle matrici infinite mettendoci da un punto di vista alquanto diverso da quello classico, dando una certa prevalenza agli sviluppi formali validi per le matrici finite e basandoci sul solo presupposto della esistenza ed associatività dei prodotti via via incontrati. I risultati raggiunti per questa via sono stati confrontati a posteriori con quelli classici allo scopo di assicurarci della loro validità quando questa non appariva evidente conseguenza dello sviluppo formale col quale li avevamo raggiunti e delle ipotesi predette; o quando si richiedesse di soddisfare ad altre condizioni. Questo metodo ci ha permesso di indicare qualche procedimento che, fino a un certo punto, può considerarsi praticamente effettivo per la risoluzione dei sistemi lineari infiniti e che mette in luce più chiara alcune proprietà delle matrici infinite molto analoghe a quelle delle finite.

Il desiderio di spingere il più possibile le analogie constatate ci ha indotto in qualche imprecisione o inesattezza che abbiamo corretto in una Nota successiva (2) apparsa contemporaneamente alla recensione di T. H. HILDEBRANDT sulla seconda Nota (3).

L'egregio recensore apprezza giustamente il punto di vista dal quale ci siamo posti, ma sembra non abbia inteso esattamente (forse per la difficoltà di intendere a fondo le sfumature della nostra lingua) il valore od il significato che volevamo dare allo sviluppo formale del n. 13 (p. 312) e non ha rilevato che, nell'ultimo periodo, rimandavamo la dimostrazione del ri-

(1) Nota I: *Sulle matrici infinite* (s. III, vol. IV, 1949, pp. 133-159). Nota II: *Matrici e sistemi lineari infiniti* (s. III, vol. VI, 1952, pp. 292-315).

(2) *Precisazione e rettifica di alcune osservazioni sulla teoria delle matrici infinite.* (questi Annali, s. III, vol. VII, pp. 217-218).

(3) MATH. REVIEW, v. 14, n. 11, dic. 1953, p. 105.

sultato al n. successivo. Forse anche egli non ha avuto modo di accorgersene chiaramente, perchè il n. 16 perseguiva essenzialmente uno scopo che non era necessariamente legato allo sviluppo ed alla conclusione del n. 15.

Comunque, sono grato al recensore che mi dà occasione per insistere sul valore euristico del metodo impiegato e per riprendere qui brevemente, in forma alquanto diversa, la quistione che non era stata bene intesa, proponendo anche, per essa, una notazione che spero non possa più dar luogo a equivoci e potrà forse essere utile pure in altre quistioni.

Potremmo aggiungere qualche riga per dare un'idea del fine che ci proponevamo di raggiungere mercè le matrici che abbiamo chiamato bi- e pluri-infinite. Esso è però forse ancora molto lontano; perciò ci auguriamo soltanto che il nostro tentativo iniziale non rimanga del tutto sterile (4).

1. — Siano le due matrici

$$A = [a_{rt}]\,, \qquad B = [b_{ts}]$$

la prima a p righe e infinite colonne, la seconda ad infinite righe e p colonne per le quali esiste il prodotto

$$AB = [c_{rs}] = C$$

ove

$$c_{rs} = \sum_{t=1}^{\infty} a_{rt}\, b_{ts}\,, \qquad (r\,, s = 1, 2, \ldots, p) \tag{1}$$

sono p^2 serie convergenti.

Indichiamo con $A^{(n)}$, $B_{(n)}$ le due matrici costituite rispettivamente dalle prime n colonne di A e dalle prime n righe di B e sia $n \geqq p$. Il prodotto

$$A^{(n)} B_{(n)} = \left[c_{rs}^{(n)}\right]\,, \qquad r,\, s, = 1, 2, \ldots, p$$

ha per elementi le somme

$$c_{rs}^{(n)} = \sum_{t=1}^{n} a_{rt}\, b_{ts}\ . \tag{2}$$

---

(4) V. A. PLANS SANZ DE BREMOND: a) *Alganas proprietades de las matrices aeotadas* [Rev. Acad. Ciencies, Madrid, t. XLVI, 1952, pp. 273-302]; b) *Ensayo de un algebra lineal infinita nel campo de las matrices acotadas.* [Coll. Math., v. V, 1952, pp. 286-328]. Qualche idea di questo A. sembra avvicinarsi al nostro punto di vista.

Se n è sufficientemente alto, le differenze

$$c_{rs} - c_{rs}^{(n)} \qquad\qquad r, s = 1, 2, \dots, p$$

avranno i loro moduli tutti minori di un numero $\varepsilon > 0$ comunque piccolo, il che si può esprimere dicendo che la matrice

$$C - A^{(n)} B_{(n)} \tag{3}$$

riesce così vicina alla matrice nulla quanto ci piace; ovvero sia che, col tendere di n all'infinito, la matrice (3) tende alla matrice nulla e, per la continuità del determinante come funzione degli elementi della propria matrice (finita), [5] si può scrivere:

$$\lim_{n\to\infty} \det [A^{(n)} B_{(n)}] = \det C . \tag{4}$$

Per un noto teorema si ha:

$$\det [A^{(n)} B_{(n)}] = \sum_{t_1, \dots, t_p} \det A^{t_1, \dots, t_p} . \det B_{t_1, \dots, t_p} \tag{5}$$

dove $A^{t_1 \dots t_p}$, $B_{t_1 \dots t_p}$, $t_1 < t_2 < \dots < t_p$ indicano i minori di ordine p le cui colonne o righe occupano in A e B i posti $t_1, t_2, \dots, t_p$. La (4) può allora scriversi

$$\det C = \sum_{t_1, \dots, t_p} \det A^{t_1, \dots, t_p} . \det B_{t_1, \dots, t_p} \tag{6}$$

dove gli indici $t_1, t_2, \dots, t_p$, sempre presi in ordine crescente, assumono p valori scelti nella successione $1, 2, \dots, \infty$.

Il significato della scrittura (6) è reso manifesto dalla (4), attraverso la (5). Nella (6) non sarebbe opportuno aggiungere l'indicazione *lim* innanzi alla sommatoria, perchè gli indici $t_1, \dots, t_p$ tendono all'infinito solo attraverso il numero n delle colonne di $A^{(n)}$ e delle righe di $B_{(n)}$. Non è invece inopportuno, come è stato fatto nella nostra Nota, indicare che gli indici interi $t_1, \dots, t_p$ variano da 1 all'∞, benchè questa notazione possa far pensare, a chi non legge il testo, che si tratti di serie multipla.

---

[5] Qui si tratta di matrici finite. Non ci spieghiamo perchè lo HILDEBRANDT sembra abbia inteso che nella Nota recensita una proprietà analoga venga affermata valevole pel determinante di una matrice infinita: nulla di simile ci è mai capitato di affermare.

Si riescirebbe più chiari se si indicasse con t la riga o p-complesso orizzontale $[t_1, t_2, \ldots, t_p]$ con $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_p$ variabili da 1 ad ∞ e si scrivesse:

$$\det A = \sum_t A^{(t)} B_{(t)} \tag{7}$$

In tal modo il secondo membro di questa (7) si presenta sotto lo aspetto di serie semplice e sarebbe meno facile equivocare sul suo significato che è appunto quello di limite della successione delle somme parziali ottenute per $t_p = p, p+1, \ldots, n$, ed n tendente all'∞.

Nel n. 16 della Nota II, scrivendo la (4.5), che qui è sostituita dalla (5), si è esattamente precisato il significato di quanto è detto al n. 15.

È a notare che, come è ovvio da quel che precede, non è necessario supporre che le serie (1) siano assolutamente convergenti (come sembra ritenere lo HILDEBRANDT).