ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ROSSI FRANCESCO-SAVERIO

Sui coefficienti di Legendre di una funzione limitata, compresa fra limiti assegnati

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 6, nº 3-4 (1952), p. 317-322

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_3-4_317_0>

SUI COEFFICIENTI DI LEGENDRE DI UNA FUNZIONE LIMITATA, COMPRESA FRA LIMITI ASSEGNATI (*)

di Rossi Francesco-Saverio (Lanciano)

1. — In questa Nota sono date le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un'assegnata successione di costanti $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sia la successione dei coefficienti di Legendre

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x)\, P_n(x)\, dx, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

di una funzione quasi continua $f(x)$ verificante quasi ovunque in $(-1,1)$ la limitazione

$$|f(x)| \leq 1. \tag{2}$$

Per ricavare le predette condizioni faremo vedere anzitutto che, per ogni $f(x)$ sommabile in $(-1,1)$, è possibile esprimere, per mezzo dei coefficienti a_n definiti dalla (1), i seguenti coefficienti di Fourier

$$b_k = \int_0^{\pi} f(\cos t) \operatorname{sen} k\,t\,dt \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

e viceversa.

(*) Lavoro eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

A tale scopo osserviamo che la (1) può anche scriversi

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\cos t)\, P_n(\cos t) \operatorname{sen} t\, dt\,. \tag{4}$$

Di questa formula possiamo servirci per calcolare i coefficienti di Legendre a_{kn} della particolare funzione $f(\cos t) = \dfrac{\operatorname{sen} k t}{\operatorname{sen} t}$; si ottiene in tal modo

$$a_{kn} = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi \operatorname{sen} k t \,.\, P_n(\cos t)\, dt$$

vale a dire, tenendo conto di un risultato noto [1]

$$a_{kn} = (2n+1)\, \frac{(k-n+1)(k-n+3)\ldots(k+n-1)}{(k-n)(k-n+2)\ldots(k+n)}\,,$$

$$\text{per} \quad n = k-1,\ k-3,\ k-5, \ldots, \begin{cases} 0 \text{ se } k \text{ è dispari} \\ 1 \text{ se } k \text{ è pari} \quad (^2) \end{cases};$$

$$a_{kn} = 0\,, \quad \text{per tutti gli altri valori di } n\,.$$

Ne deriva immediatamente che la considerata funzione $\dfrac{\operatorname{sen} k t}{\operatorname{sen} t}$ ammette uno sviluppo in serie di funzioni $P_n(\cos t)$ ridotto a un numero finito di termini e più precisamente che si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} k t}{\operatorname{sen} t} &= \sum_{r=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} a_{k,k-2r+1}\, P_{k-2r+1}(\cos t) = \\ &= \sum_{r=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} (2k-4r+3)\, \frac{2r(2r+2)\ldots(2k-2r)}{(2r-1)(2r+1)\ldots(2k-2r+1)}\, P_{k-2r+1}(\cos t)\,, \end{aligned} \tag{5}$$

(1) Vedi per es. HOBSON, E. W. *Theory of spherical and ellipsoidal harmonics,* Cambridge 1931, p. 45.

(2) Se k è dispari e $n = 0$, il numeratore di questa frazione perde significato, ma in tal caso si ha semplicemente $a_{k0} = \dfrac{1}{k}$.

ove con $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ si è indicato il massimo intero contenuto in $\frac{k+1}{2}$ [3].

Ciò posto, ritornando a considerare una generica funzione $f(\cos t)$, dalle (3), (5) segue:

$$b_k = \int_0^\pi f(\cos t)\, \frac{\operatorname{sen} k\, t}{\operatorname{sen} t} \operatorname{sen} t\, dt =$$

$$= \sum_{r=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} (2k - 4r + 3) \, \frac{2\, r\, (2\, r + 2) \ldots (2\, k - 2\, r)}{(2\, r - 1)(2\, r + 1) \ldots (2\, k - 2\, r + 1)} \, .$$

$$\cdot \int_0^\pi f(\cos t)\; P_{k-2r+1}(\cos t) \operatorname{sen} t\; d\, t$$

e quindi per la (4)

$$b_k = 2 \sum_{r=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \frac{2\, r\, (2\, r + 2) \ldots (2\, k - 2\, r)}{(2\, r - 1)(2\, r + 1) \ldots (2\, k - 2\, r + 1)}\, a_{k-2r+1} \tag{6}$$

coll'avvertenza (cfr. nota [3]), che se K è dispari, l'ultimo numeratore vale 1.

Viveversa è facile vedere che dai numeri $b_1, b_2, b_3 \ldots .$ resta univocamente determinata la successione $a_0, a_1, a_2, \ldots$

Basta ricordare che

$$P_n(\cos t) = (-1)^n \sum_{r=0}^{n} \binom{-1/2}{r} \binom{-1/2}{n-r} e^{-i(n-2r)t}$$

per ottenere dalle (4)

$$a_n = (-1)^n\, \frac{2\, n + 1}{4} \sum_{r=0}^{n} \binom{-1/2}{r} \binom{-1/2}{n-r} \, .$$

$$\cdot \int_0^\pi f(\cos t)\, [\operatorname{sen}(n - 2\, r + 1)\, t - \operatorname{sen}(n - 2\, r - 1)\, t]\; d\, t$$

---

[3] A norma di quanto si è detto nella nota [2] *se k è dispari*, il numeratore della frazione che compare nell'ultimo membro perde significato per $r = \frac{k+1}{2}$; in tal caso deve essere sostituito col numero 1.

e di conseguenza, per la (3)

$$a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{4} \sum_{r=0}^{n} \binom{-1/2}{r} \binom{-1/2}{n-r} (b_{n-2r+1} - b_{n-2r-1}) ,$$

ovvero, con una facile trasformazione, tenendo conto che $b_{-k} = - b_k$, $b_0 = 0$:

$$a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{2} \cdot \left\{ \binom{-1/2}{n} b_{n+1} + \sum_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left[\binom{-1/2}{r} \binom{-1/2}{n-r} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \binom{-1/2}{r-1} \binom{-1/2}{n-r+1} \right] b_{n-2r+1} \right\} .$$

In base ai risultati ottenuti possiamo dunque enunciare:

I. *Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una data successione di numeri* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *sia quella dei coefficienti di Legendre di una funzione* $f(x)$ *verificante la* (2), *coincidono con quelle esprimenti che la successione* $b_1, b_2, b_3, \ldots$ *dedotta da* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *mediante le formule* (6), *sia quella dei coefficienti di Fourier, secondo la* (3), *di una funzione* $f(\cos t)$ *verificante la stessa limitazione* (2).

2. — In base al teorema I possiamo pervenire alle condizioni richieste, tenendo conto di un risultato ottenuto da A. GHIZZETTI [4] circa le condizioni necessarie e sufficienti perchè una data successione di numeri (reali o complessi) $c_0, c_1, c_2, \ldots$ sia quella dei coefficienti di Fourier

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t)\, e^{ikt}\, dt \tag{7}$$

di una $\varphi(t)$ verificante la limitazione

$$0 \leq \varphi(t) \leq 1 . \tag{8}$$

---

[4] Vedi A. GHIZZETTI, *Sui coefficienti di Fourier di una funzione limitata, compresa fra limiti assegnati*, Annali della Scuola Normale di Pisa, s. III, vol. IV, 1950, p. 131-156.

Se, riprendendo in considerazione la $f(\cos t)$ del n. 1, poniamo

$$\varphi(t) \begin{cases} = \dfrac{1}{2}[1+f(\cos t)] & \text{in } (0,\pi), \\ = \dfrac{1}{2}[1-f(\cos t)] & \text{in } (-\pi,0), \end{cases}$$

questa $\varphi(t)$ verifica la (8) e per essa la (7) fornisce, ricordando la (3):

$$c_0 = \frac{1}{2}, \qquad c_k = \frac{i}{2\pi} b_k \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots). \tag{9}$$

Dalle (9) e dalle condizioni date dal GHIZZETTI si deduce allora facilmente quanto segue:

II. *Condizioni necessarie e sufficienti affinchè una data successione di numeri* $b_1, b_2, b_3, \ldots$ *sia quella dei coefficienti di Fourier* (3) *di una funzione* $f(\cos t)$ *verificante la* (2) *è che, dedotti da* $b_1, b_2, b_3, \ldots$ *i numeri* $s_0, s_1, s_2 \ldots$ *definiti dalle formule:*

$$s_0 = 2, \qquad e^{\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k z^k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} s_k z^k \tag{10}$$

e costruiti i determinanti (simmetrici) [5]

$$D_k = \begin{vmatrix} 2 & s_1 & s_2 & \ldots s_k \\ s_1 & 2 & s_1 & \ldots s_{k-1} \\ s_2 & s_1 & 2 & \ldots s_{k-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot\cdot \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \ldots 2 \end{vmatrix}, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots), \tag{11}$$

si verifichi uno dei seguenti casi:

(A) $D_k > 0$ per $k < n-1$, $D_k = 0$ per $k \geq n$ (per un certo intero $n \geq 1$)

(B) $D_k > 0$ per $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Nel caso (A) la $f(\cos t)$ *assume soltanto i valori* $-1, +1$ *alternativamente in intervalli contigui, perfettamente determinati, costituenti una sud-*

[5] Si noti che D_k dipende solo da $b_1, b_2, \ldots, b_k$ vale a dire da $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$.

divisione di $(0, \pi)$ (6) (diremo brevemente che $f(x)$ è una funzione costante *a* n tratti coi valori $1, -1$).

3. — Dai precedenti teoremi I e II deduciamo infine:

III. *Condizioni necessarie e sufficienti affinchè una data successione di numeri* $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *sia quella dei coefficienti di Legendre di una funzione* $f(x)$ *verificante quasi ovunque in* $(-1, +1)$ *la limitazione* $|f(x)| \leq 1$ *è che, dedotte da tale successione successivamente le seguenti*

1) $b_1, b_2, b_3 \ldots$ con $b_k = 2 \sum_{r=1}^{\left[\frac{k+1}{2}\right]} \frac{2r(2r+2)\ldots(2k-2r)}{(2r-1)(2r+1)\ldots(2k-2r+1)} a_{k-2r+1}$;

2) $s_1, s_2, s_3, \ldots$ *per mezzo della funzione generatrice*

$$e^{\sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} s_k z^k ;$$

3) $D_1, D_2, D_3, \ldots$ con $D_k = \begin{vmatrix} 2 & s_1 & s_2 & \ldots s_k \\ s_1 & 2 & s_1 & \ldots s_{k-1} \\ s_2 & s_1 & 2 & \ldots s_{k-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_k & s_{k-1} & s_{k-2} & \ldots 2 \end{vmatrix}$;

si verifichi uno di questi due casi:

A) *esiste un intero* $n \geq 1$ *per cui risulta*

$$D_k > 0 \text{ per } k < n-1, \; D_k = 0 \text{ per } k \geq n .$$

B) *tutti i numeri* $D_1, D_2, D_3, \ldots$ *sono positivi.*

Nel caso A) la $f(x)$ *è una funzione costante a* n *tratti coi valori* $1, -1$ *perfettamente individuata dai suoi primi* n *coefficienti di Legendre.*

(6) Determinati dal fatto che la f deve avere come primi n coefficienti di Legendre i numeri $a_0, a_1, a_3, \ldots a_{n-1}$ (con a_{n-1} ricavato in funzione di $a_0, a_1, a_2, \ldots a_{n-2}$ dalla $D_n = 0$). Occorre anche tener conto di a_{n-1} perchè si vede facilmente che $D_n = 0$ definisce due valori per a_{n-1}.

SANDRO FAEDO - *Direttore responsabile.* Finito di stampare il 28 febbraio 1953