

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

CARLO CATTANEO

**Sulla torsione di due sfere elastiche a contatto**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série*, tome 6,  
n° 1-2 (1952), p. 1-16

<[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1952\\_3\\_6\\_1-2\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_1-2_1_0)>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SULLA TORSIONE DI DUE SFERE ELASTICHE A CONTATTO

DI CARLO CATTANEO (Pisa)

In un lavoro comparso recentemente sul « Journal of Applied Mechanics » J. L. LUBKIN ha studiato il problema della « torsione di due sfere in contatto » <sup>(1)</sup>. Si tratta della determinazione degli sforzi tangenziali che nascono nel contatto con attrito tra due sfere elastiche mutuamente compresse allorchè esse vengono ulteriormente sottoposte a una scambievole coppia di giro.

Poichè della questione mi sono, indipendentemente, occupato anche io, con gli stessi criteri meccanici (da me indicati in precedenti lavori sul contatto con attrito <sup>(2)</sup>) ma con diversi mezzi matematici, credo opportuno esporre, anche in vista di possibili estensioni, il metodo risolutivo da me seguito.

**1. Riduzione del problema meccanico a un sistema di equazioni integrali.** — Due sfere elastiche  $S_1$  ed  $S_2$ , di centri  $C_1$  e  $C_2$  e raggi rispettivi  $R_1$  e  $R_2$ , siano a contatto geometrico in un punto  $O$ . Con riferimento a una terna trirettangola  $\mathcal{T}_1 \equiv Oxyz_1$  con l'asse  $z_1$  parallelo e concorde alla semiretta  $OC_1$  e gli assi  $x, y$  sul piano tangente in  $O$ , nell'intorno di  $O$  medesimo la superficie di  $S_1$  è confondibile con un paraboloide rotondo di equazione

$$(1) \quad z_1 = A_1 \varrho^2$$

ove si è posto  $A_1 = \frac{1}{2R_1}$ ,  $\varrho^2 = x^2 + y^2$ .

---

<sup>(1)</sup> J. L. LUBKIN, *The Torsion of elastic Spheres in Contact*, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, June 1951, pag. 183.

<sup>(2)</sup> *Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi*, Rendic. Accademia Naz. dei Lincei, Serie 6, Vol. 27, 1938, pagg. 342-48, 434-36, 474-78. *Teoria del contatto elastico in seconda approssimazione: compressione obliqua*, Rend. Semin. Fac. Scienze dell'Università di Cagliari, fasc. 1, Vol. XVII, 1947.

Del pari la superficie di  $S_2$ , riferita a una terna  $\mathcal{T}_2 \equiv 0 \ x \ y \ z_2$  con  $z_2 = -z_1$ , nell'intorno di  $O$  si può assimilare al paraboloide di equazione

$$(2) \quad z_2 = A_2 \varrho^2$$

con  $A_2 = \frac{1}{2 R_2}$ . Approssimazioni analoghe valgono anche se  $S_1$  ed  $S_2$ , senza essere sfere, sono semplicemente rotondi attorno alla comune normale in  $O$ .

Nel seguito, in cui dovremo pensare le due sfere soggette a deformazione locale nell'intorno di  $O$ , noi riterremo che la terna  $\mathcal{T}_1$  si mantenga solidale alla parte indeformata di  $S_1$  o, più precisamente, a un elemento bidimensionale di  $S_1$  molto lontano da  $O$ , ad esempio circostante  $C_1$ , e che la terna  $\mathcal{T}_2$  resti invece solidale a un elemento di  $S_2$ , anche esso lontano da  $O$ .

Supponiamo ora che le due sfere siano mutuamente compresse secondo la retta  $C_1 C_2$  con uno sforzo globale di compressione  $P$ , e successivamente vengano sottoposte a una mutua coppia di giro (per fissare le idee supporremo che la coppia direttamente agente su  $S_1$  sia levogira rispetto all'asse  $z_2$ ). Durante la fase di compressione i due corpi subiscono, nell'intorno di  $O$ , uno schiacciamento locale; si genera tutta un'areola circolare di contatto  $\sigma$  di raggio  $a$  dipendente da  $P$  e crescente con esso, mentre la terna  $\mathcal{T}_1$  subisce rispetto a  $\mathcal{T}_2$  una traslazione  $\gamma$  parallela e concorde a  $C_1 C_2$ , anch'essa crescente con  $P$ .

Durante la successiva fase di torsione se tra le due sfere è presente l'attrito, di coefficiente  $f$ , e il momento torcente è abbastanza piccolo l'equilibrio delle due sfere può ancora sussistere. Nel raggiungere il nuovo assetto di equilibrio si ha una nuova deformazione locale nell'intorno di  $O$  e, senza che avvenga uno slittamento globale delle due superficie a contatto, si ha tuttavia una rotazione elastica di  $\mathcal{T}_1$  rispetto a  $\mathcal{T}_2$  attorno all'asse  $C_1 C_2$ , di entità  $\omega$  crescente col momento torcente. Se indichiamo con  $Q_1$  e  $Q_2$  due punti di  $S_1$  e  $S_2$  aventi originariamente le stesse coordinate  $x, y$  e  $s_1 \equiv (u_1, v_1, w_1)$  lo spostamento elastico subito dal primo rispetto a  $\mathcal{T}_1$  per effetto della duplice deformazione e  $s_2 \equiv (u_2, v_2, w_2)$  lo spostamento subito per la stessa causa dal secondo rispetto a  $\mathcal{T}_2$ , nell'ipotesi che i due corpi siano costituiti dello stesso materiale <sup>(3)</sup> risulta

$$(3) \quad w_1 + w_2 = \gamma - A \varrho^2 \quad \dots \sigma$$

---

<sup>(3)</sup> Non entriamo nei dettagli trattandosi di considerazioni ormai note in questo genere di questioni.

(essendo  $A = A_1 + A_2$ ) in tutta l'area di contatto  $\sigma$  e, nella regione  $\sigma^*$  di  $\sigma$  ove non hanno luogo scorrimenti locali,

$$(4) \quad \begin{cases} u_2 - u_1 = -\omega y \\ v_2 - v_1 = \omega x \end{cases} \quad \dots \sigma^*.$$

Se il comportamento elastico locale di ciascuno dei due corpi si assimila, date le piccole dimensioni di  $\sigma$  rispetto ai due raggi  $R_1$  e  $R_2$ , a quello di un semispazio elastico, tanto  $s_1$  quanto  $s_2$  si possono esprimere mediante le ben note formule integrali di BOUSSINESQ e CERRUTI<sup>(4)</sup> in funzione degli sforzi, normali e tangenziali, suscitati nell'area di contatto. Le equazioni (3) e (4), chiamate  $(L, M, N)$  le componenti secondo gli assi della terna  $\mathcal{C}_2$  dello sforzo esercitato da  $S_1$  su  $S_2$  nel generico punto dell'area di contatto  $\sigma$ , si traducono allora in altrettante equazioni integrali in cui figurano come incognite appunto  $L, M, N$ . La (3) dà luogo all'equazione di HERTZ<sup>(5)</sup>

$$(5) \quad \vartheta \int_{\sigma} \frac{N}{r} d\sigma = \gamma - A \varrho^2 \quad \dots \sigma,$$

mentre le (4) divengono

$$(6) \quad \begin{cases} \kappa \int_{\sigma} \frac{L}{r} d\sigma - \chi \int_{\sigma} L \frac{\partial^2 r}{\partial x^2} d\sigma - \chi \int_{\sigma} M \frac{\partial^2 r}{\partial x \partial y} d\sigma = -\omega y \\ \kappa \int_{\sigma} \frac{M}{r} d\sigma - \chi \int_{\sigma} M \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} d\sigma - \chi \int_{\sigma} L \frac{\partial^2 r}{\partial y \partial x} d\sigma = \omega x \end{cases} \quad \dots \sigma^*,$$

ove si è posto

$$(7) \quad \begin{cases} \vartheta = \frac{\lambda + 2\mu}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \\ \kappa = \frac{1}{\pi\mu} \\ \chi = \frac{\lambda}{2\pi\mu(\lambda + \mu)}; \end{cases}$$

<sup>(4)</sup> Cfr. ad es. E. CESÀRO, *Introduzione alla Teoria matematica della Elasticità*, Torino, Ed. Bocca, 1894, pag. 126.

<sup>(5)</sup> Cfr. ad es. A. E. H. LOVE, *The Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge, 1934, pag. 195.

$\lambda$  e  $\mu$  sono le costanti elastiche di LAMÉ del materiale costituente i due corpi. È ben noto come la (5) determini univocamente lo sforzo normale  $N$ ,

$$(8) \quad N = \frac{3 P}{2 \pi a^2} \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{a^2}},$$

nonchè il valore del raggio  $a$  dell'area di contatto  $\sigma$  e della compressione  $\gamma$  in funzione di  $P$  <sup>(6)</sup>

$$(9) \quad a = \sqrt[3]{\frac{3 \pi \vartheta P}{8 A}} = \sqrt[3]{\frac{3 \pi P \vartheta R_1 R_2}{4 (R_1 + R_2)}},$$

$$\gamma = 2 a^2 A = \sqrt[3]{\frac{9 \pi^2 P^2 \vartheta^2 (R_1 + R_2)}{16 R_1 R_2}}.$$

Vedremo che a loro volta le (6), completate da opportune condizioni suggerite da un'indagine preliminare che ora svolgeremo, si prestano alla determinazione completa degli sforzi tangenziali  $(L, M)$ .

**2. Un'ipotesi complementare.** — Se si ammette, prima ipotesi che si presenta spontanea alla mente, che l'area  $\sigma^*$  degli scorrimenti nulli coincida addirittura con l'area di contratto  $\sigma$ , si riconosce agevolmente che alle equazioni (6) si può soddisfare ponendo

$$(10) \quad L = \frac{-2 \omega y}{\pi^2 a \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{a^2}}}, \quad M = \frac{2 \omega x}{\pi^2 a \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{a^2}}},$$

soluzione che tuttavia è da considerare fisicamente accettabile soltanto nell'ipotesi, molto artificiosa, che le parti di  $S_1$  e  $S_2$  venute a contatto durante la fase di compressione si siano mutuamente saldate in guisa da rendere possibili in  $\sigma$  sforzi tangenziali comunque intensi. Ma se si ammette che tra i due corpi sia presente soltanto un attrito di coefficiente finito  $f$ , la grandezza  $\sqrt{L^2 + M^2}$  dello sforzo tangenziale è ovunque soggetta alla limitazione

$$(11) \quad L^2 + M^2 \leq f^2 N^2$$

la quale, stante il ricordato valore (8) dello sforzo normale, non è certo ovunque soddisfatta dalla soluzione (10).

---

<sup>(6)</sup> Si cfr. ad es. A. E. H. LOVE, *op. cit.*, *loc. cit.*, o anche S. TIMOSHENKO, *Theory of Elasticity*, Cap. XI, n. 107.

Non c'è allora che rinunciare, come già si è fatto in altri problemi di contatto con attrito, ad ammettere che  $\sigma^*$  coincida con  $\sigma$ : l'ipotesi più naturale è che  $\sigma^*$  si riduca a un cerchio concentrico e interno a  $\sigma$ , di raggio incognito  $a_*$ , e che nella residua corona circolare  $\tau$  si verifichino invece scorrimenti. In tal corona ammetteremo in compenso, per rendere determinato il problema, che lo sforzo tangenziale  $(L, M)$  si espliciti nella stessa direzione della soluzione ausiliaria (10) con la massima intensità compatibile con le leggi (11) di attrito. Ciò equivale a porre in  $\tau$ :

$$(12) \quad L = -\frac{3fP}{2\pi a^2} \frac{y}{\varrho} \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{a^2}}, \quad M = \frac{3fP}{2\pi a^2} \frac{x}{\varrho} \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{a^2}} \quad \dots \tau$$

ovverosia

$$(12') \quad L = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad M = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \dots \tau$$

con

$$(13) \quad \varphi = \frac{3fP}{4\pi a} \left( \frac{\varrho}{a} \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{a^2}} + \arcsin \frac{\varrho}{a} - \frac{\pi}{2} \right),$$

ove, disponendo della costante additiva, si è imposto alla  $\varphi$  di annullarsi per  $\varrho = a$ .

Con questa ipotesi aggiuntiva il problema che ci occupa si riduce a quello di determinare lo sforzo tangenziale  $(L, M)$ , presunto noto a priori in  $\tau$  secondo la formula (12), anche in  $\sigma^*$  in guisa da soddisfare ivi al sistema (6) e, naturalmente, da rispettare la continuità nel passaggio da  $\sigma^*$  a  $\tau$ . Si dovrà simultaneamente determinare, in dipendenza dei dati del problema, il valore del raggio  $a_*$  dell'area  $\sigma^*$  nonchè il valore dell'angolo  $\omega$  di torsione.

**3. Riduzione del sistema (6) a una sola equazione integrale.** — La simmetria geometrica e materiale del sistema elastico in esame attorno alla retta  $C_1 C_2$ , l'identica costituzione elastica delle due sfere e la loro assimilabilità locale a due semispazi elastici, e infine l'assoluta libertà di espansione radiale che il sistema presenta, fanno presumere che, conformemente al risultato ausiliario (10), lo sforzo tangenziale  $(L, M)$  risulti non soltanto in  $\tau$ , ma anche in  $\sigma^*$ , ortogonale al raggio vettore  $OP$  con grandezza dipendente dal raggio vettore medesimo  $\varrho = |OP|$ . Ciò induce a ritenere che anche in  $\sigma^*$  lo sforzo dipenda alla maniera (12') da una funzione di  $\varrho$ .

Porremo allora in  $\sigma^*$

$$(14) \quad L = -\frac{\partial (\varphi - \varphi^*)}{\partial y}, \quad M = \frac{\partial (\varphi - \varphi^*)}{\partial x} \quad \dots \sigma^*$$

ove  $\varphi$  è la medesima funzione (13) che definisce lo sforzo in  $\tau$  mentre  $\varphi^*$  è una incognita funzione di  $\varrho$ , *nulla sul bordo di  $\sigma^*$  insieme con la sua derivata prima*. L'ultima condizione è necessaria per assicurare la continuità dello sforzo tangenziale in tutta la  $\sigma$ .

Se nel sistema (6) si sostituiscono a  $L$  e a  $M$  le espressioni (12'), valide in  $\tau$ , e le (14), valide in  $\sigma^*$ , ogni integrale che vi figura si sdoppia in un integrale esteso a  $\sigma$  contenente la sola funzione  $\varphi$  e in un integrale esteso a  $\sigma^*$  contenente la sola  $\varphi^*$ . Operando su ciascuno degli integrali ottenuti mediante il lemma di GREEN, tenendo conto dell'annullarsi di  $\varphi$  sul contorno di  $\sigma$  e di  $\varphi^*$  sul contorno di  $\sigma^*$ , dopo alcune semplificazioni il sistema si riduce alla forma

$$(15) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma^*} \frac{\varphi^*}{r} d\sigma^* = \frac{\partial}{\partial y} \int_{\sigma} \frac{\varphi}{r} d\sigma - \frac{\omega}{\kappa} y \\ \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma^*} \frac{\varphi^*}{r} d\sigma^* = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\sigma} \frac{\varphi}{r} d\sigma - \frac{\omega}{\kappa} x \end{cases} \quad \dots \sigma^*$$

ossia, integrando,

$$(16) \quad \int_{\sigma^*} \frac{\varphi^*}{r} d\sigma^* = \int_{\sigma} \frac{\varphi}{r} d\sigma - \frac{\omega}{2\kappa} \varrho^2 + C \quad \dots \sigma^*$$

con  $C$  costante indeterminata. Il sistema (6) è così ridotto a una sola equazione integrale nell'unica funzione incognita  $\varphi^*$  definita nell'area  $\sigma^*$ . Il secondo membro della (16), salvo la sua esplicitazione, è virtualmente noto: per la funzione  $\varphi$  va naturalmente assunta l'espressione (13). Si noti che per la questione fisica che ci interessa basterà soddisfare all'equazione (16) con un valore qualunque della costante  $C$ . La  $\varphi^*(\varrho)$ , beninteso, è ulteriormente vincolata ad annullarsi insieme con la sua derivata prima sul bordo di  $\sigma^*$ .

Si noti che, oltre a  $\varphi^*$ , nella (16) è incognito anche il raggio  $a_*$  del cerchio  $\sigma^*$  in cui essa deve ritenersi valida.

**4. Digressione su alcuni potenziali newtoniani relativi a un disco circolare.** — Il procedimento risolutivo dell'equazione (16) che tra poco esporremo si fonda essenzialmente sulle proprietà di alcuni potenziali newtoniani, relativi a varie distribuzioni di massa sopra un disco circolare di raggio  $a$ , da me esaminati in una Nota lineea del 1948 e più diffusamente in un articolo dei Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di

Modena, dello stesso anno <sup>(7)</sup>. Mi limito qui a richiamare i risultati d'utilità specifica al nostro scopo.

Sul piano  $z = 0$  ed entro il cerchio  $\sigma$  di centro  $O$  e raggio  $a$  consideriamo la funzione

$$(17) \quad \mu = \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{a^2}}$$

( $\varrho^2 = x^2 + y^2$ ). Indicando poi con  $s$  un qualunque numero dispari, maggiore od eguale a  $-1$ , consideriamo i seguenti potenziali newtoniani di strato semplice

$$(18) \quad \begin{aligned} V_s(x, y, z) &= \int_{\sigma} \frac{\mu^s}{r} d\sigma = \\ &= \iint \frac{\left(1 - \frac{\xi^2 + \eta^2}{a^2}\right)^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} d\xi d\eta \quad (s = -1, 1, 3, 5, \dots). \end{aligned}$$

Ciascuno di essi definisce nello spazio una funzione armonica, nulla all'infinito e ovunque continua, la quale nei punti dello strato potenziente ( $z = 0, \varrho \leq a$ ) assume i valori  $\bar{V}_s(\varrho^2)$  di un polinomio di grado  $\frac{s+1}{2}$  in  $\varrho^2$

$$(19) \quad \bar{V}_s = \sum_{h=0}^{\frac{s+1}{2}} a_{sh} \varrho^{2h} \quad (s = -1, 1, 3, 5, \dots)$$

i cui coefficienti  $a_{sh}$  possono calcolarsi mediante semplici formule ricorrenti, a partire dai coefficienti di  $\bar{V}_{-1}$  e di  $\bar{V}_1$  che sono noti classicamente:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} a_{s0} &= \frac{s}{s+1} a_{s-2,0} \\ a_{sh} &= \frac{-s^2 a_{s-2,h-1} + s(s-2) a_{s-4,h-1}}{4 h^2 a^2} \quad \left(h = 1, \dots, \frac{s-1}{2}\right) \\ a_{s, \frac{s+1}{2}} &= -\frac{s^2 a_{s-2, \frac{s-1}{2}}}{(s+1)^2 a^2} \end{aligned} \right.$$

<sup>(7)</sup> *Su alcuni potenziali di strato e su qualche loro applicazione*, Rend. Acc. Naz. dei Lincei, Aprile 1948.

*Sul calcolo di alcuni potenziali sul loro intervento nella risoluzione di particolari problemi armonici*, Atti del Semin. Mat. e Fis. dell'Università di Modena, Vol. III, 1948.



Dai polinomi  $\bar{V}_s$  può dedursi, con combinazioni lineari, una successione  $\Gamma_r$  di polinomi in  $q^2$  ortogonali in  $\sigma$ , completa rispetto alle funzioni di  $q^2$  regolari in  $\sigma$ . Il loro calcolo effettivo comparirà prossimamente in un lavoro del Dott. B. FORTE<sup>(8)</sup> il quale ha posto in relazione i polinomi  $\Gamma_r$  con i polinomi di LEGENDRE ed ha anche esplicitato, ciò che non appariva immediato, i coefficienti dei loro sviluppi nelle  $\bar{V}_s$ . In termini precisi, con la condizione che sia  $\Gamma_r(0) = 1$ , si ha

$$(21) \quad \Gamma_r = \sum_{h=0}^{\frac{r+1}{2}} \gamma_{rh} q^{2h} \quad (r = -1, 1, 3, 5, 7 \dots)$$

con

$$(22) \quad \gamma_{rh} = (-1)^h \frac{1}{a^{2h}} \frac{\left(\frac{r+2h+1}{2}\right)!}{\left(\frac{r-2h+1}{2}\right)! h! 2^h},$$

mentre le  $\Gamma_r$  medesime possono a loro volta esprimersi come combinazioni delle  $\bar{V}_s$ ,

$$(23) \quad \Gamma_r = \sum_{s=-1,1,3,\dots}^r \beta_{rs} \bar{V}_s,$$

i coefficienti di combinazione valendo<sup>(9)</sup>

$$(24) \quad \beta_{rs} = (-1)^{\frac{r+s+2}{2}} \frac{\left(\frac{r+s+2}{2}\right)! (r+2) 2^{s+1}}{\left(\frac{r-s}{2}\right)! s!! (s+2)!!}.$$

I polinomi  $\Gamma_r$  così definiti non sono normali in  $\sigma$ : il generico fattore di normalizzazione vale

$$(25) \quad \varepsilon_r = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{r+2}{\pi}}.$$

Accanto ai potenziali  $V_s$  definiti dalla (18) ci occorrerà anche di considerare, simultaneamente, gli analoghi potenziali  $V_s^*$  generati da una massa

(\*) Assistente alla Cattedra di Meccanica razionale nell'Università di Pisa.

(9) Col simbolo  $m!!$  si suole indicare il prodotto  $1.3.5 \dots (m-2) \cdot m$  ovvero  $2.4.6 \dots (m-2) \cdot m$ , secondo che  $m$  è dispari o pari.

distribuita entro un cerchio  $\sigma^*$ , concentrico a  $\sigma$  e di raggio  $a_* < a$ , con densità  $\mu_*$ , ove è posto

$$(26) \quad \mu_* = \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{a_*^2}}.$$

Mutato  $a$  in  $a_*$  valgono naturalmente per i  $V_s^*$  tutte le proprietà dei  $V_s$ . In particolare anche i potenziali  $V_s^*$  assumono nei punti dell'area  $\sigma^*$  i valori  $\bar{V}_s^*$  di un polinomio di grado  $\frac{s+1}{2}$  in  $\varrho^2$

$$(27) \quad \bar{V}_s^* = \sum_{h=0}^{\frac{s+1}{2}} a_{sh}^* \varrho^{2h}$$

ove i coefficienti  $a_{sh}^*$  si ottengono dalle (20) mutando  $a$  in  $a_*$ .

Del pari ci occorrerà di considerare i polinomi ortogonali in  $\sigma^*$  che si deducono dai  $\bar{V}_s^*$  e che indicheremo naturalmente  $\Gamma_r^*$  nonchè i loro sviluppi nelle  $\bar{V}_s^*$

$$(28) \quad \Gamma_r^* = \sum_{s=-1,1,3,\dots}^r \beta_{rs}^* \bar{V}_s^*. \quad (s = -1, 1, 3, 5, \dots)$$

Le formule che definiscono i polinomi  $\Gamma_r^*$  e i coefficienti  $\beta_{rs}^*$  saranno ancora le (21) (22) e, rispettivamente, la (24), ove in esse si muti  $a$  in  $a_*$ .

Mostreremo tra poco come il disporre di siffatti potenziali di strato consenta di giungere rapidamente alla soluzione del nostro problema.

**5. Primo metodo di risoluzione (approssimata). Calcolo effettivo di prima e di seconda approssimazione.** — Mediante la posizione (17) la funzione  $\varphi$ , che compare a secondo membro dell'equazione integrale (16) ed è definita dalla formula (13), può scriversi

$$(29) \quad \varphi = \frac{3 f P}{4 \pi a} (\mu \sqrt{1 - \mu^2} - \arcsin \mu)$$

od anche, sviluppando in serie di MAC-LAURIN convergente in  $\sigma$ ,

$$(30) \quad \varphi = \sum_{s=3,5,\dots}^{\infty} a_s \mu^s = -\frac{3 f P}{4 \pi a} \left( \frac{2}{3} \mu^3 + \frac{1}{5} \mu^5 + \frac{3}{28} \mu^7 + \dots \right).$$

Dopo tale osservazione, l'equazione integrale (16) si può, utilizzando le considerazioni del precedente n. 4, risolvere, in via approssimata od esatta, con due distinti procedimenti, concettualmente assai semplici e praticamente

poco laboriosi. Nel primo si adotterà per  $\varphi$ , e quindi per il relativo potenziale, una espressione approssimata, del resto con grado di approssimazione comunque spinto, e si risolverà poi *esattamente* la nuova equazione integrale. Nel secondo si conserverà alla  $\varphi$  il suo valore esatto; sarà invece approssimata, in sede di valutazione numerica, la determinazione della funzione incognita; il secondo procedimento si presterà anche, come vedremo, a una risoluzione esatta mediante sviluppi in serie.

Esponiamo il primo metodo. Adottiamo per la funzione  $\varphi$  un'espressione approssimata identificandola col suo sviluppo di MAC-LAURIN arrestato all' $n$ -mo termine significativo

$$(31) \quad \varphi \cong \sum_{3,5,\dots}^{2n+1} a_s \mu^s.$$

Si avrà in conseguenza per il suo potenziale, valutato in  $\sigma$ , l'espressione approssimata, immediatamente desunta dalla (18),

$$(32) \quad \int_{\sigma} \frac{\varphi}{r} d\sigma \cong \sum_{3,5,\dots}^{2n+1} a_s \bar{V}_s \dots \sigma.$$

All'equazione integrale approssimata cui si riduce allora la (16) e che qui esplicitiamo,

$$(33) \quad \int_{\sigma^*} \frac{\varphi^*}{r} d\sigma^* = \sum_{3,5,\dots}^{2n+1} a_s \bar{V}_s - \frac{\omega}{2\kappa} \varrho^2 + C \dots \sigma^*,$$

si può soddisfare, imponendo anche la condizione che  $\varphi^*$  e la sua derivata prima si annullino sul bordo di  $\sigma^*$ , ponendo

$$(34) \quad \varphi^* = \sum_{3,5,\dots}^{2n+1} A_s \mu_s^*$$

ove  $\mu_s^*$  ha il significato (26) e le  $A_s$  sono opportuni coefficienti costanti da determinare. Si ha infatti sostituendo a  $\varphi^*$ , nella (33), l'espressione (34),

$$(35) \quad \sum_{3,5,\dots}^{2n+1} A_s \bar{V}_s^* = \sum_{3,5,\dots}^{2n+1} a_s \bar{V}_s - \frac{\omega}{2\kappa} \varrho^2 + C:$$

esplicitando le  $V_s$  e le  $V_s^*$  in funzione di  $\varrho$  mediante la (19) e la (27), si ricavano a primo e a secondo membro due polinomi completi di grado  $n+1$  in  $\varrho^2$ : l'identificazione dei termini di grado  $n+1$  consente la immediata determinazione del coefficiente  $A_{2n+1}$ ; noto questo, l'identificazione dei ter-

mini di grado  $n$  permette di determinare  $A_{2n-1}$ , e così di mano in mano. Determinato da ultimo il coefficiente di indice più basso,  $A_3$ , mediante l'identificazione dei monomi di grado 2 (in  $\varrho^2$ ), la successiva identificazione dei termini di primo grado varrà ad individuare l'angolo di torsione  $\omega$  in funzione di  $a_*$  e viceversa. L'identità dei termini costanti può infine ritenersi in ogni caso verificata figurando a secondo membro la costante addittiva arbitraria  $C$ .

La mancanza nella (34) di un termine di primo grado in  $\mu_*$  assicura poi il richiesto annullamento di  $\frac{d\varphi^*}{d\varrho}$  sul contorno di  $\sigma^*$ .

A chiarimento di quanto detto esplicheremo ora i calcoli in prima e in seconda approssimazione.

a) *Calcolo di prima approssimazione.* — Se nella (16) poniamo semplicemente

$$(36) \quad \varphi \cong -\frac{fP}{2\pi a} \mu^3,$$

(primo termine dello sviluppo (30)), posto  $\frac{f\pi P}{2a} = g$  essa si riduce alla forma

$$(37) \quad \int_{\sigma^*} \frac{\varphi^*}{r} d\sigma^* = C - \frac{\omega}{2\kappa} \varrho^2 - g \left( \frac{3a}{8} - \frac{3}{8a} \varrho^2 + \frac{9}{64a^3} \varrho^4 \right).$$

Conformemente al procedimento indicato in generale porremo.

$$(38) \quad \varphi^* = A_3 \mu^3$$

con che la (37) diviene

$$(39) \quad \begin{aligned} & A_3 \pi^2 \left( \frac{3a_*}{8} - \frac{3}{8a_*} \varrho^2 + \frac{9}{64a_*^3} \varrho^4 \right) = \\ & = C - \frac{\omega}{2\kappa} \varrho^2 - g \left( \frac{3a}{8} - \frac{3}{8a} \varrho^2 + \frac{9}{64a^3} \varrho^4 \right). \end{aligned}$$

Identificando nei due membri i termini di quarto e di secondo grado si ricava rispettivamente

$$(40) \quad A_3 = -\frac{fP}{2\pi} \frac{a_*^3}{a^4}$$

e

$$(41) \quad \omega = \frac{3\pi f\kappa P}{8a^2} \left( 1 - \frac{a_*^2}{a^2} \right),$$

mentre, come si è detto, non occorre identificare i termini costanti data l'arbitrarietà di  $C$ .

Nell'ordine di approssimazione adottato risulta allora

$$(42) \quad \begin{cases} L = \frac{f P}{2 \pi a} \frac{\partial \mu^3}{\partial y} = - \frac{3 f P y}{2 \pi a^3} \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{a^2}} \\ M = - \frac{f P}{2 \pi a} \frac{\partial \mu^3}{\partial x} = - \frac{3 f P x}{2 \pi a^3} \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{a^2}} \end{cases} \dots \tau$$

nell'anello  $\tau$  e

$$(43) \quad \begin{cases} L = \frac{f P}{2 \pi a} \frac{\partial \mu^3}{\partial y} + A_3 \frac{\partial \mu_*^3}{\partial y} = \frac{3 f P y}{2 \pi a^3} \left\{ \frac{a^2}{a_*^2} \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{a_*^2}} - \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{a^2}} \right\} \\ M = - \frac{f P}{2 \pi a} \frac{\partial \mu^3}{\partial x} - A_3 \frac{\partial \mu_*^3}{\partial x} = - \frac{3 f P x}{2 \pi a^3} \left\{ \frac{a^2}{a_*^2} \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{a_*^2}} - \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{a^2}} \right\}. \end{cases} \dots \sigma^*$$

Il raggio  $a_*$  è determinato in funzione dell'angolo di torsione  $\omega$  dalla formula (41) che, invertita, dà esplicitamente

$$(44) \quad a_* = a \sqrt{1 - \frac{8 a^2 \omega}{3 \pi f \kappa P}}.$$

Il momento torcente corrispondente alla determinata distribuzione di sforzi vale

$$(45) \quad \begin{aligned} \mathcal{N} &= \int_{\sigma} (M x - L y) d\sigma = \\ &= \frac{3 f P}{2 \pi a^3} \int_{\sigma} \varrho^2 \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{a^2}} d\sigma - \frac{3 f P}{2 \pi a a_*^2} \int_{\sigma^*} \varrho^2 \sqrt{1 - \frac{\varrho^2}{a_*^2}} d\sigma^* \\ &= \frac{2}{5} f a P \left( 1 - \frac{a_*^2}{a^2} \right). \end{aligned}$$

Invertendo si ha l'espressione esplicita, in prima approssimazione, del raggio  $a_*$  in funzione del momento torcente

$$(46) \quad a_* = a \left( 1 - \frac{5 \mathcal{N}}{2 f a P} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dalle (41) (45) si trae poi una relazione biunivoca tra momento torcente e angolo di torsione

$$(47) \quad \omega = \frac{15 \pi \kappa}{16 a^3} \varpi \mathcal{N},$$

relazione che, in questa prima approssimazione, risulta lineare.

Come si vede già i risultati di prima approssimazione, salvo la loro limitata validità, sono molto espressivi.

b) *Calcolo in seconda approssimazione.* — In seconda approssimazione si porrà

$$(48) \quad \varphi \cong -\frac{3 f P}{4 \pi a} \left( \frac{2}{3} \mu^3 + \frac{1}{5} \mu^5 \right)$$

e

$$(49) \quad \varphi^* = A_3 \mu_*^3 + A_5 \mu_*^5.$$

L'equazione integrale (16) dà allora, posto  $h = \frac{3 f P}{4 \pi a}$ ,

$$(50) \quad A_3 \pi^2 \left( \frac{3 a_*}{8} - \frac{3}{8 a_*} \varrho^2 + \frac{9}{64 a_*^3} \varrho^4 \right) + A_5 \pi^2 \left( \frac{15 a_*}{48} - \frac{15}{32 a_*} \varrho^2 + \frac{45}{128 a_*^3} \varrho^4 - \right. \\ \left. - \frac{25}{256 a_*^5} \varrho^6 \right) = C - \frac{\omega}{2 \kappa} \varrho^2 - h \frac{2}{3} \left( \frac{3 a}{8} - \frac{3}{8 a} \varrho^2 + \frac{9}{64 a^3} \varrho^4 \right) - \\ - \frac{h}{5} \left( \frac{15 a}{48} - \frac{15}{32 a} \varrho^2 + \frac{45}{128 a^3} \varrho^4 - \frac{25}{256 a^5} \varrho^6 \right).$$

Identificando nei due membri le potenze di grado 3, 2, 1 (in  $\varrho^2$ ) si ottiene

$$(51) \quad A_5 = -\frac{3 f P}{20 \pi} \frac{a_*^5}{a^6},$$

$$(52) \quad A_3 = -\frac{f P a_*^3}{8 \pi a^4} \left( 7 - 3 \frac{a_*^2}{a^2} \right),$$

$$(53) \quad \omega = \frac{3 \kappa \pi f P}{64 a^2} \left\{ 11 - \frac{a_*^2}{a^2} \left( 14 - 3 \frac{a_*^2}{a^2} \right) \right\}.$$

Gli sforzi tangenziali risultano allora :

$$(54) \quad \begin{cases} L = -\frac{3 f P y}{4 \pi a^3} (2 \mu + \mu^3) \\ M = \frac{3 f P x}{4 \pi a^3} (2 \mu + \mu^3) \end{cases} \quad \dots \tau$$

nella corona  $\tau$  e

$$(55) \quad \begin{cases} L = -\frac{3fPy}{4\pi a^3}(2\mu + \mu^3) - \frac{3A_3y}{a_*^2}\mu_* - \frac{5A_5y}{a_*^2}\mu_*^3 \\ M = \frac{3fPx}{4\pi a^3}(2\mu + \mu^3) + \frac{3A_3x}{a_*^2}\mu_* + \frac{5A_5x}{a_*^2}\mu_*^3 \end{cases} \dots \sigma^*$$

in  $\sigma^*$ . Ne segue per il momento torcente il valore

$$(56) \quad \mathcal{N} = \frac{f\pi Pa}{70} \left\{ 34 - \frac{a_*^5}{a^5} \left( 49 - 15 \frac{a_*^2}{a^2} \right) \right\}.$$

L'eliminazione di  $a_*$  tra la (53) e la (56) darebbe poi la relazione tra  $\omega$  e  $\mathcal{N}$ . Si noti che già in seconda approssimazione questa non risulta più lineare.

L'attendibilità dei risultati di prima e di seconda approssimazione ora trovati è naturalmente subordinata all'ipotesi che  $\mathcal{N}$ , e in conseguenza la differenza  $a - a_*$ , siano tanto piccoli da rendere attendibile in tutta  $\tau$  l'approssimazione (36), ovvero la (48). Per valori a mano a mano crescenti di  $\mathcal{N}$  occorrerà naturalmente assumere nell'espressione approssimata di  $\varphi$  (cfr. (31)), onde ottenere un dato grado di approssimazione, un numero sempre maggiore di termini significativi. Nulla muterebbe però sostanzialmente nel procedimento.

Si può anche ragionevolmente presumere che aumentando indefinitamente il grado di approssimazione della  $\varphi$ , e cioè al tendere di  $n$  ad  $\infty$ , il procedimento converga e la soluzione approssimata testè determinata tenda alla soluzione rigorosa dell'originaria equazione (16). Ma a questo scopo meglio si presta forse un altro metodo risolutivo che ora esporremo.

**6. Secondo metodo. Soluzione esatta.** — Nell'esporre il seguente secondo metodo risolutivo dell'equazione (16) procederemo esclusivamente in via formale, lasciando da parte, in questa Nota, ogni questione di rigore, su cui torneremo in un prossimo lavoro. Lasciamo alla funzione  $\varphi$  il suo valore esatto e assumiamo per essa lo sviluppo completo (30). Il corrispondente potenziale si valuterà come serie dei potenziali dei singoli termini e l'equazione integrale (16) potrà scriversi

$$(57) \quad \int_{\sigma^*} \frac{\varphi^*}{r} d\sigma^* = C - \frac{\omega}{2\pi} \varrho^2 + \sum_{3, 5, \dots}^{\infty} a_s \bar{V}_s$$

ove le  $\bar{V}_s$  sono i polinomi (19).

Sviluppiamo ora il secondo membro della (57), definito a meno di una costante addittiva, in serie  $\sum_{1,3,\dots}^{\infty} B_r I_r^*$  delle funzioni  $I_r^*$ , ortogonali in  $\sigma^*$ , considerati al n. 3. I coefficienti  $B_r$  si calcolano alla FOURIER. Si noti che l'unico coefficiente influenzato dal termine  $-\frac{\omega}{2\kappa} \varrho^2$  è  $B_1$  che vale, tenuto conto del fattore di normalizzazione, (cfr. la (25))

$$(58) \quad B_1 = -\varepsilon_1 \int_{\sigma^*} I_1^* \left( \frac{\omega}{2\kappa} \varrho^2 - \sum_{1,3,\dots}^{\infty} a_s \bar{V}_s \right) d\sigma^*$$

mentre per  $r \geq 3$  risulta, tenuto anche conto che per  $s < r$  è  $\int_{\sigma^*} I_r^* \bar{V}_s d\sigma^* = 0$ ,

$$(59) \quad B_r = \varepsilon_r \int_{\sigma^*} I_r^* \sum_{1,3,\dots}^{\infty} a_s \bar{V}_s \cdot d\sigma^*.$$

Il secondo membro dell'equazione (57) si può ora ulteriormente trasformare in una serie nei polinomi  $\bar{V}_s^*$ . Si ha infatti, a meno di una costante addittiva, in virtù delle relazioni analoghe alle (23) valide per i polinomi  $I_r^*$ ,

$$(60) \quad \sum_{1,3,\dots}^{\infty} B_r I_r^* = \sum_{1,3,\dots}^{\infty} B_r \sum_{1,3,\dots}^r b_{rs}^* \bar{V}_s^* = \sum_{1,3,\dots}^{\infty} C_s \bar{V}_s^*$$

ove si è posto

$$(61) \quad C_s = \sum_{s, s+2, \dots}^{\infty} B_r b_{rs}^* \quad (s = 1, 3, \dots).$$

Trasformato così il secondo membro della (57) e avuto riguardo al fatto che le  $\bar{V}_s^*$  non sono che i valori assunti su  $\sigma^*$  dai potenziali generati dalla distribuzione  $\mu_s^*$  nella  $\sigma^*$  medesima, si ricava subito la soluzione

$$(62) \quad \varphi^* = \sum_{1,3,\dots}^{\infty} C_s \mu_s^*.$$

Se si vuole, come è suggerito dalla natura del problema fisico e come si è più volte ripetuto, che lo sforzo  $(L, M)$  sia continuo in tutta la  $\sigma$ , non soltanto  $\varphi^*$  ma anche la sua derivata prima devono annullarsi sul contorno di  $\sigma^*$ . Ciò impone che sia  $C_1 = 0$ . Si noti che  $C_1$  è l'unico dei coefficienti  $C_s$  che dipenda dalla  $B_1$ , che a sua volta è l'unica delle  $B_r$  dipendente da



$\omega$ . L'ultima condizione, che esplicitata diviene

$$(63) \quad \frac{\varepsilon_1 \omega}{2\kappa} b_{11}^* \int_{\sigma^*} I_1^* \varrho^2 d\sigma - \varepsilon_1 b_{11}^* \int_{\sigma^*} \sum_{3,5}^{\infty} a_s I_1^* \bar{V}_s d\sigma - \sum_{3,5}^{\infty} B_r b_{r1}^* = 0,$$

consente quindi di determinare, in funzione di  $a_*$ , l'angolo  $\omega$  di torsione.

Con la  $\varphi^*$  restano determinati, mediante la (14) gli sforzi tangenziali in  $\sigma^*$ . Dopo di ciò si potrà dedurre, con quadrature, il momento torcente  $\mathcal{N}$  che si riduce facilmente alla forma

$$(64) \quad \mathcal{N} = 2\pi \int_0^{a_*} \varphi_* d\varrho^2 - 2\pi \int_0^a \varphi d\varrho^2;$$

la successiva eliminazione di  $a_*$  tra la (63) e la (64) fornirà l'esatta relazione tra  $\mathcal{N}$  ed  $\omega$ .

Stabilito così, in via puramente formale, come si possa ottenere la soluzione esatta del problema in esame, riserviamo ad un successivo lavoro di legittimare i procedimenti adottati in questo n. 6, e di illustrare con discussione qualitativa e calcoli numerici, i risultati ottenuti.