

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

LANDOLINO GIULIANO

**Su alcune relazioni integrali fra funzioni di Bessel di
prima e di seconda specie**

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 6,
n° 1-2 (1952), p. 17-30

http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_1-2_17_0

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SU ALCUNE RELAZIONI INTEGRALI FRA FUNZIONI DI BESSEL DI PRIMA E DI SECONDA SPECIE

di LANDOLINO GIULIANO (Pisa)

Qui di seguito sono contenute alcune ricerche preliminari ad uno studio in corso sugli zeri comuni a due funzioni di BESSEL, di prima e di seconda specie, oppure entrambe di seconda specie, di ordine diverso.

1. — Sia ν un numero reale. Chiamasi funzione di BESSEL (di prima specie) di ordine ν la funzione ⁽¹⁾ (della variabile complessa z):

$$J_{\nu}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)}$$

che è un integrale dell'equazione di BESSEL:

$$(1) \quad z^2 y'' + z y' + (z^2 - \nu^2) y = 0.$$

Supporremo sempre, in quel che diremo, a meno che non si avverta esplicitamente del contrario, che la variabile z assuma solo valori reali e la indicheremo, perciò, d'ora in poi, con x . Intenderemo, sempre, nel seguito, $x > 0$.

Poniamo, nella (1), $y = \sqrt{x} u$. Essa si muta nell'equazione:

$$[2] \quad u'' + \left[1 - \frac{4\nu^2 - 1}{4x^2}\right] u = 0.$$

⁽¹⁾ G. N. WATSON: *A treatise on the theory of Bessel functions*. Cambridge, University Press, 2nd edition, 1944, p. 40.

M. PICONE: *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella Napoli, 1940, p. 485.

COURANT UND HILBERT *Methoden der Mathematischen Physik I* Springer, Berlin, 1924, p. 396.

Si ponga :

$$u_1(x) = \sqrt{x} J_\mu(x) \quad , \quad u_2(x) = \sqrt{x} J_\lambda(x) \quad , \quad v_1(x) = \sqrt{x} Y_\mu(x),$$

essendo λ e μ due numeri reali, assegnati, con μ positivo o nullo e $\lambda > \mu$ e dove $Y_\mu(x)$ significa la funzione (di ordine μ) di WEBER canonica ⁽²⁾ (di seconda specie), la quale, quando $\mu = n$ è un intero positivo o nullo, è legata alla funzione di NEUMANN $Y^{(n)}(x)$ dalla relazione ⁽³⁾

$$Y^{(n)}(x) = \frac{\pi}{2} Y_n(x) + (\log 2 - \gamma) J_n(x)$$

dove

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right)$$

è la nota costante di EULERO-MASCHERONI.

Poichè le funzioni $u_1(x)$ e $u_2(x)$ sono soluzioni dell'equazione (2) dove si faccia, rispettivamente, $\nu = \mu$, $\nu = \lambda$, si ha :

$$(3) \quad u_1''(x) + \left[1 - \frac{4\mu^2 - 1}{4x^2} \right] u_1(x) \equiv 0$$

$$(4) \quad u_2''(x) + \left[1 - \frac{4\lambda^2 - 1}{4x^2} \right] u_2(x) \equiv 0$$

e moltiplicando la (3) per $u_2(x)$ e la (4) per $u_1(x)$, quindi sottraendo membro a membro, si ottiene :

$$(5) \quad \left\{ u_1'(x) u_2(x) - u_1(x) u_2'(x) \right\}' + \frac{\lambda^2 - \mu^2}{x^2} u_1(x) u_2(x) \equiv 0.$$

⁽²⁾ WATSON, loc. cit. p. 64. La funzione di WEBER $Y_\mu(x)$ è indicata in COURANT UND HILBERT, loc. cit. p. 389, formula (8), con $N_\mu(x)$ ed è detta di NEUMANN. Quando $\mu = n$ è un intero positivo o nullo, la funzione di WEBER è legata alla funzione $Y_n(x)$ di HANKEL dalla relazione $Y_n(x) = \frac{1}{\pi} Y_n(x)$. Per questo cfr. WATSON, loc. cit. p. 64 e COURANT UND

HILBERT, loc. cit. p. 399, dove la funzione di HANKEL, $Y_n(x)$, è indicata con $Y_n(x)$. Notiamo che PICONE, loc. cit. p. 493 chiama di NEUMANN la funzione di HANKEL che indica, come COURANT UND HILBERT, con il simbolo, $Y_n(x)$. A scanso di equivoci cade qui opportuno avvertire che noi adottiamo la terminologia e i simboli del WATSON. Ricordiamo che, quando n è intero, valgono le relazioni $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$, $Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$.

⁽³⁾ WATSON, loc. cit. p. 70 e p. 71, formula (8). Ivi si trova anche, della funzione $Y_n(x)$ uno sviluppo, valido per ogni valore di x non nullo. Per questo cfr. anche COURANT UND HILBERT, loc. cit. pp. 406-408 e PICONE, loc. cit. p. 493.

Sia $\alpha > 0$. Integrando la (5) fra α e x si ha:

$$(6) \quad u_1'(x) u_2(x) - u_1(x) u_2'(x) - u_1'(\alpha) u_2(\alpha) + u_1(\alpha) u_2'(\alpha) + \\ + (\lambda^2 - \mu^2) \int_{\alpha}^x \frac{u_1(t) u_2(t)}{t^2} dt \equiv 0.$$

2. — È, com'è noto, ⁽⁴⁾

$$(7) \quad u_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(x - \mu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + a(x)$$

$$(8) \quad u_1'(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(x - \mu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + b(x)$$

avendosi, per $x > K_{\mu}$, $|a(x)| < \frac{A_{\mu}}{x}$, $|b(x)| < \frac{B_{\mu}}{x}$, essendo K_{μ} , A_{μ} , B_{μ} , opportune costanti positive, dipendenti da μ ⁽⁵⁾.

⁽⁴⁾ WATSON, loc. cit. p. 199

⁽⁵⁾ PICONI, loc. cit. p. 497 dove nel caso particolare in cui μ è l'intero $n (\geq 0)$ sono esplicitamente calcolate le costanti K_n , A_n , B_n .

Risulta

$$K_n = \left| n^2 - \frac{1}{4} \right|, A_n = (1 + \sqrt{e}) \left| n^2 - \frac{1}{4} \right| \sqrt{\frac{2}{\pi}}, B_n = \\ = \left[(1 + \sqrt{e}) \left| n^2 - \frac{1}{4} \right| + 1 + \frac{\sqrt{e}}{2} \right] \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Per questo cf. anche G. SANSONE: *Equazioni differenziali nel campo reale*, 2^a ediz. volume II, Zanichelli, Bologna 1949, p. 42. Nel caso in cui μ è un numero reale o immaginario puro qualunque, PICONI (loc. cit. p. 487) stabilisce le decomposizioni:

$$u_1(x) = a \cos(x + b) + \gamma(x) \quad , \quad u_1'(x) = -a \sin(x + b) + \delta(x)$$

essendo a e b due opportune quantità reali (positiva la prima) e avendosi per

$$x > \left| \mu^2 - \frac{1}{4} \right|, A_{\mu} = (1 + \sqrt{e}) \left| \mu^2 - \frac{1}{4} \right| a, B_{\mu} = \left[(1 + \sqrt{e}) \left| \mu^2 - \frac{1}{4} \right| + 1 + \frac{\sqrt{e}}{2} \right] a.$$

Nel caso generale (μ reale o complesso qualunque, x reale o complesso), PICONI osserva (loc. cit. pp. 501-502) che si possono stabilire formule di decomposizione analoghe in

Analogamente è:

$$(9) \quad u_2(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(x - \lambda \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + c(x)$$

$$(10) \quad u_2'(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(x - \lambda \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + d(x)$$

avendosi, per $x > K_\lambda$, $|c(x)| < \frac{C_\lambda}{x}$, $|d(x)| < \frac{D_\lambda}{x}$, dove, come sopra, K_λ , C_λ , D_λ sono opportune costanti positive, dipendenti da λ ⁽⁶⁾.

Se si osserva che:

$$\begin{aligned} & \sin\left(x - \mu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \lambda \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \\ & - \cos\left(x - \mu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x - \lambda \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

si ha, dalla (6) del n. 1, per le (7), (8), (9), (10):

$$\begin{aligned} & -\frac{2}{\pi} \sin(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} + \frac{L(x)}{x} - u_1'(x) u_2(x) + \\ (11) \quad & + u_1(x) u_2'(x) + (\lambda^2 - \mu^2) \int_x^\infty \frac{u_1(t) u_2(t)}{t^2} dt \equiv 0 \end{aligned}$$

eni $a = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, $b = -\mu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$. Nei casi particolari p. es. $\mu = \frac{1}{2}$ e $\mu = -\frac{1}{2}$ è, com'è noto, $\sqrt{x} J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x$, $\sqrt{x} J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x$ per $x > 0$. Nell'uno e nell'altro caso le costanti K_μ e A_μ sono nulle, essendo $K_{\frac{1}{2}} = K_{-\frac{1}{2}} = \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right| = 0$ e $A_{\frac{1}{2}} = A_{-\frac{1}{2}} = (1 + \sqrt{e}) \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right| \sqrt{\frac{2}{\pi}} = 0$.

Torna opportuno qui osservare che, stabilita la (7), la (8) si stabilisce facilmente, dopo aver notato che, essendo $J_\mu'(x) = \frac{\mu}{x} J_\mu(x) - J_{\mu+1}(x)$ (WATSON loc. cit. p. 45), risulta: $u_1'(x) = \left(\mu + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{x}} J_\mu(x) - \sqrt{x} J_{\mu+1}(x)$.

⁽⁶⁾ cfr. quanto è detto in ⁽⁵⁾

avendosi, per $x > \delta > 0$, $|L(x)| < L$, essendo δ, L due opportune costanti positive, dipendenti da λ e μ .

Dalla (11) per $x \rightarrow +\infty$ si ricava:

$$(A) \quad \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} = (\lambda^2 - \mu^2) \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{u_1(t) u_2(t)}{t^2} dt +$$

$$+ u_1(\alpha) u_2'(\alpha) - u_1'(\alpha) u_2(\alpha)$$

cioè:

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} &= (\lambda^2 - \mu^2) \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{J_{\mu}(t) J_{\lambda}(t)}{t} dt + \sqrt{\alpha} J_{\mu}(\alpha) \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} J_{\lambda}(\alpha) + \right. \\ &\quad \left. + \sqrt{\alpha} J_{\lambda}'(\alpha) \right\} - \sqrt{\alpha} J_{\lambda}(\alpha) \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} J_{\mu}(\alpha) + \sqrt{\alpha} J_{\mu}'(\alpha) \right\} \end{aligned}$$

e, tenendo conto della relazione⁽⁷⁾:

$$\alpha J_{\nu}'(\alpha) = \nu J_{\nu}(\alpha) - \alpha J_{\nu+1}(\alpha)$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} (12) \quad \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} &= (\lambda^2 - \mu^2) \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{J_{\lambda}(t) J_{\mu}(t)}{t} dt - \\ &- \alpha \{ J_{\mu}(\alpha) J_{\lambda+1}(\alpha) - J_{\lambda}(\alpha) J_{\mu+1}(\alpha) \} + (\lambda - \mu) J_{\mu}(\alpha) J_{\lambda}(\alpha) \end{aligned}$$

da cui, per $\alpha \rightarrow 0$:

$$(13) \quad \frac{2}{\pi} \frac{\operatorname{sen}(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2}}{\lambda^2 - \mu^2} = \int_0^{+\infty} \frac{J_{\lambda}(t) J_{\mu}(t)}{t} dt$$

e da qui per la (12):

$$(14) \quad \int_0^{\alpha} \frac{J_{\lambda}(t) J_{\mu}(t)}{t} dt = \frac{\alpha \{ J_{\lambda}(\alpha) J_{\mu+1}(\alpha) - J_{\mu}(\alpha) J_{\lambda+1}(\alpha) \}}{\lambda^2 - \mu^2} + \frac{J_{\mu}(\alpha) J_{\lambda}(\alpha)}{\lambda + \mu}$$

Le (13) e (14) sono note⁽⁸⁾.

⁽⁷⁾ WATSON, loc. cit. p. 45.

⁽⁸⁾ WATSON, loc. cit. p. 404, formola (7) e WATSON, loc. cit. p. 135, formola (13).

Si osservi, in particolare, che se è $J_\mu(\alpha) = 0$, dalla (12) si deduce:

$$\int_{\alpha}^{+\infty} \frac{J_\lambda(t) J_\mu(t)}{t} dt = \frac{2}{\pi} \frac{\sin(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2}}{\lambda^2 - \mu^2} - \alpha \frac{J_\lambda(\alpha) J_{\mu+1}(\alpha)}{\lambda^2 - \mu^2}$$

Se è, inoltre, $\lambda = \mu + 2$, oppure μ razionale e $\lambda = \mu + 2m$ (m , intero, ≥ 2), dovendo essere ⁽⁹⁾ $J_\lambda(\alpha) \neq 0$, $J_{\mu+1}(\alpha) \neq 0$ e, per la (13) e la precedente uguaglianza:

$$\int_0^{\alpha} \frac{J_\lambda(t) J_\mu(t)}{t} dt = - \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{J_\lambda(t) J_\mu(t)}{t} dt = \alpha \frac{J_\lambda(\alpha) J_{\mu+1}(\alpha)}{\lambda^2 - \mu^2}$$

posto $\varphi(x) = \int_0^x \frac{J_\lambda(t) J_\mu(t)}{t} dt$, si ottiene $\varphi(\alpha) \neq 0$.

Quando μ è razionale e $\lambda - \mu = K$ (K intero, ≥ 2), non può esistere un punto α in cui $\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = 0$. In un tale punto sarebbe $J_\mu(\alpha) = J_\lambda(\alpha) = 0$. La congettura di BOURGET, provata da SIEGEL ⁽¹⁰⁾, e da questi generalizzata, equivale perciò ad affermare, quando sia μ razionale e $\lambda = \mu + m$ ($m > 2$), che non esiste nessun punto α in cui $\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) = \varphi''(\alpha) = 0$.

3. — Valgono le decomposizioni ⁽¹¹⁾:

$$(15) \quad v_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(x - \mu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + e(x)$$

$$(16) \quad v_1'(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(x - \mu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + f(x)$$

avendosi, per $x > h_\mu$, $|e(x)| < \frac{E_\mu}{x}$, $|f(x)| < \frac{F_\mu}{x}$, essendo h_μ , E_μ , F_μ , tre opportune costanti positive, dipendenti da μ .

⁽⁹⁾ WATSON, loc. cit. pp. 484-485.

⁽¹⁰⁾ WATSON, loc. cit. p. 485.

⁽¹¹⁾ WATSON, loc. cit. p. 199, dove è dato lo sviluppo asintotico della $Y_\mu(x)$, da cui si deduce subito quello della $v_1(x)$. La (16) si stabilisce poi, una volta scritta la (15), dopo aver notato che, essendo $Y'_\mu(x) = \frac{\mu}{x} Y_\mu(x) - Y_{\mu+1}(x)$, (WATSON, loc. cit. p. 66) risulta: $v_1'(x) = \left(\mu + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{x}} Y_\mu(x) - \sqrt{x} Y_{\mu+1}(x)$.

Essendo $Y_\mu(x)$ soluzione dell'equazione di BESSEL (1) dove si faccia $\nu = \mu$, $v_1(x)$ è soluzione dell'equazione (2) dove si ponga $\nu = \mu$.

Vale perciò la relazione identica:

$$(17) \quad \{v_1'(x) u_2(x) - v_1(x) u_2'(x)\}' + \frac{\lambda^2 - \mu^2}{x^2} v_1(x) u_2(x) \equiv 0$$

analoga alla (5) del n. 1, da cui si ha, integrando fra α e x :

$$(18) \quad v_1'(x) u_2(x) - v_1(x) u_2'(x) - v_1'(\alpha) u_2(\alpha) + v_1(\alpha) u_2'(\alpha) + \\ + (\lambda^2 - \mu^2) \int_{\alpha}^x \frac{v_1(t) u_2(t)}{t^2} dt \equiv 0.$$

Se si osserva che è:

$$\cos\left(x - \mu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(x - \lambda \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \\ + \sin\left(x - \mu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(x - \lambda \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2}$$

si ottiene, per le (9), (10), (15), (16),

$$(19) \quad v_1'(x) u_2(x) - v_1(x) u_2'(x) = \frac{2}{\pi} \cos(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} + \frac{M(x)}{x}$$

avendosi, per $x > \eta > 0$, $|M(x)| < M$, essendo η , M , due opportune costanti positive, dipendenti da λ e μ .

Dunque, sostituendo la (19) nella (18) si ottiene:

$$\frac{2}{\pi} \cos(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} + \frac{M(x)}{x} - v_1'(\alpha) u_2(\alpha) + v_1(\alpha) u_2'(\alpha) + \\ + (\lambda^2 - \mu^2) \int_{\alpha}^x \frac{v_1(t) u_2(t)}{t^2} dt \equiv 0$$

dove, per $x > \eta > 0$, è $|M(x)| < M$.

Da qui, per $x \rightarrow +\infty$, si ricava:

$$(B) \quad (\lambda^2 - \mu^2) \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{v_1(t) u_2(t)}{t^2} dt = \\ = -\frac{2}{\pi} \cos(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} - v_1(\alpha) u_2'(\alpha) + v_1'(\alpha) u_2(\alpha)$$

vale a dire :

$$(20) \quad (\lambda^2 - \mu^2) \int_a^{+\infty} \frac{J_\lambda(t) Y_\mu(t)}{t} dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \cos(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} - \alpha \{ Y_\mu(\alpha) J'_\lambda(\alpha) - J_\lambda(\alpha) Y'_\mu(\alpha) \}$$

ossia, essendo ⁽¹²⁾ :

$$J'_\lambda(\alpha) = \frac{\lambda J_\lambda(\alpha) - \alpha J_{\lambda+1}(\alpha)}{\alpha}, \quad Y'_\mu(\alpha) = \frac{\mu Y_\mu(\alpha) - \alpha Y_{\mu+1}(\alpha)}{\alpha}$$

$$(21) \quad (\lambda^2 - \mu^2) \int_a^{+\infty} \frac{J_\lambda(t) Y_\mu(t)}{t} dt =$$

$$= -\frac{2}{\pi} \cos(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} + \alpha \{ Y_\mu(\alpha) J_{\lambda+1}(\alpha) - J_\lambda(\alpha) Y_{\mu+1}(\alpha) \} + (\mu - \lambda) J_\lambda(\alpha) Y_\mu(\alpha)$$

da cui :

$$(22) \quad \int_a^{+\infty} \frac{Y_\mu(t) J_\lambda(t)}{t} dt = -\frac{2}{\pi} \frac{\cos(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2}}{\lambda^2 - \mu^2} +$$

$$+ \frac{\alpha \{ Y_\mu(\alpha) J_{\lambda+1}(\alpha) - J_\lambda(\alpha) Y_{\mu+1}(\alpha) \}}{\lambda^2 - \mu^2} - \frac{J_\lambda(\alpha) Y_\mu(\alpha)}{\lambda + \mu}$$

e perciò, per $\alpha \rightarrow 0$, ricordando che è ⁽¹³⁾ :

$$(23) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{J_\lambda(x)}{x^\lambda} = \frac{1}{2^\lambda \Gamma(\lambda + 1)}$$

$$(24) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} x^\mu Y_\mu(x) = -\frac{2^\mu \Gamma(\mu)}{\pi}$$

si ricava ⁽¹⁴⁾ ($\lambda > \mu$) :

$$(25) \quad \int_0^{+\infty} \frac{J_\lambda(t) Y_\mu(t)}{t} dt = -\frac{2}{\pi} \frac{\cos(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2}}{\lambda^2 - \mu^2}.$$

⁽¹²⁾ WATSON, *loc. cit.*, p. 45 e p. 66.

⁽¹³⁾ WATSON, *loc. cit.*, p. 40 e p. 71.

⁽¹⁴⁾ Questa formula non mi sembra che sia esplicitamente notata nel libro del WATSON.

Se, in particolare, è $\lambda - \mu$ (intero positivo) dispari, con facile calcolo dalla (22), per le (23) e (24) si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\lambda-\mu}} \int_x^{+\infty} \frac{J_\lambda(t) Y_\mu(t)}{t} dt = \frac{\Gamma(\mu)}{\pi \cdot 2^{\lambda-\mu} (\lambda - \mu) \Gamma(\lambda + 1)}.$$

Se è, come supponiamo, $\lambda > \mu$, si ha poi:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\lambda-\mu} \int_x^{+\infty} \frac{J_\mu(t) Y_\lambda(t)}{t} dt = -(\lambda - \mu) \frac{2^{\lambda-\mu} \Gamma(\lambda)}{\pi \Gamma(\mu + 1)}.$$

Sempre per $\lambda > \mu$, dalle (22) e (25) si ricava:

$$\int_0^\alpha \frac{J_\lambda(t) Y_\mu(t)}{t} dt = \frac{-\alpha \{Y_\mu(\alpha) J_{\lambda+1}(\alpha) - J_\lambda(\alpha) Y_{\mu+1}(\alpha)\}}{\lambda^2 - \mu^2} + \frac{J_\lambda(\alpha) Y_\mu(\alpha)}{\lambda + \mu}.$$

Quando sia poi $x > \alpha$, per λ e μ qualunque, positivi o nulli, dalla (22), che è vera per λ e μ qualunque, reali, si ricava:

$$\int_\alpha^x \frac{J_\lambda(t) Y_\mu(t)}{t} dt = \left[\frac{-x \{Y_\mu(x) J_{\lambda+1}(x) - J_\lambda(x) Y_{\mu+1}(x)\}}{\lambda^2 - \mu^2} + \frac{J_\lambda(x) Y_\mu(x)}{\lambda + \mu} \right]_\alpha^x$$

formula nota ⁽¹⁵⁾.

OSSERVAZIONE. — La $Y_\mu(x)$ è soluzione dell'equazione di BESSEL (1) dove si ponga $\nu = \mu$, indipendente da $J_\mu(x)$. Infatti il wronskiano di $Y_\mu(x)$ e $J_\mu(x)$ vale ⁽¹⁶⁾

$$W(J_\mu, Y_\mu) = \frac{2}{\pi x}.$$

Le $u_1(x)$ e $v_1(x)$ sono dunque soluzioni indipendenti dell'equazione (2) dove si faccia $\nu = \mu$. È:

$$(26) \quad W(u_1, v_1) = \frac{2}{\pi}.$$

⁽¹⁵⁾ WATSON, *loc. cit.*, p. 135, formula (13).

⁽¹⁶⁾ WATSON, *loc. cit.*, p. 76.

4. — La $u_2(x)$ soddisfa all'equazione in θ :

$$\theta'' + \left[1 - \frac{4\mu^2 - 1}{4x^2} \right] \theta = \frac{\lambda^2 - \mu^2}{x^2} u_2(x)$$

la cui equazione omogenea corrispondente ha le soluzioni fondamentali $u_1(x)$ e $v_1(x)$. Si trova dunque, essendo C_1 e C_2 costanti da determinarsi, per $x > 0$:

$$(27) \quad u_2(x) = \frac{\pi}{2} (\lambda^2 - \mu^2) \left\{ v_1(x) \int_{\alpha}^x \frac{u_1(t) u_2(t)}{t^2} dt - u_1(x) \int_{\alpha}^x \frac{v_1(t) u_2(t)}{t^2} dt \right\} + \\ + C_1 u_1(x) + C_2 v_1(x)$$

com'è facile constatare, tenendo presente, fra l'altro, la (26) dell'osservazione del n. 3. Poichè è:

$$u_2'(x) = \frac{\pi}{2} (\lambda^2 - \mu^2) \left\{ v_1'(x) \int_{\alpha}^x \frac{u_1(t) u_2(t)}{t^2} dt - u_1'(x) \int_{\alpha}^x \frac{v_1(t) u_2(t)}{t^2} dt \right\} + \\ + C_1 u_1'(x) + C_2 v_1'(x)$$

le C_1 e C_2 devono soddisfare al sistema lineare:

$$\begin{cases} u_1(\alpha) \cdot C_1 + v_1(\alpha) \cdot C_2 = u_2(\alpha) \\ u_1'(\alpha) \cdot C_1 + v_1'(\alpha) \cdot C_2 = u_2'(\alpha) \end{cases}$$

il cui determinante vale, per la (26), $\frac{2}{\pi}$.

Si trova:

$$C_1 = \frac{\pi \{u_2(\alpha) v_1'(\alpha) - v_1(\alpha) u_2'(\alpha)\}}{2}$$

$$C_2 = \frac{\pi \{u_1(\alpha) u_2'(\alpha) - u_2(\alpha) u_1'(\alpha)\}}{2}$$

e perciò, tenendo presenti la (26), la (A) e la (B):

$$u_2(x) = v_1(x) \cdot \operatorname{sen}(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} + u_1(x) \cdot \cos(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} + \\ + \frac{\pi}{2} (\lambda^2 - \mu^2) \int_x^{+\infty} \frac{u_1(x) v_1(t) - v_1(x) u_1(t)}{t^2} u_2(t) dt$$

Sussiste dunque l'identità:

$$u_2(x) = u_1(x) \left\{ \cos(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} (\lambda^2 - \mu^2) \int_x^{+\infty} \frac{v_1(t) u_2(t)}{t^2} dt \right\} + \\ + v_1(x) \cdot \left\{ \operatorname{sen}(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} (\lambda^2 - \mu^2) \int_x^{+\infty} \frac{u_1(t) u_2(t)}{t^2} dt \right\}$$

ossia

$$J_\lambda(x) = J_\mu(x) \cdot \left\{ \cos(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} (\lambda^2 - \mu^2) \int_x^{+\infty} \frac{Y_\mu(t) J_\lambda(t)}{t} dt \right\} + \\ (28) \quad + Y_\mu(x) \cdot \left\{ \operatorname{sen}(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} (\lambda^2 - \mu^2) \int_x^{+\infty} \frac{J_\lambda(t) J_\mu(t)}{t} dt \right\}$$

vale a dire:

$$\int_x^{+\infty} \left\{ J_\mu(x) Y_\mu(t) - J_\mu(t) Y_\mu(x) \right\} \frac{J_\lambda(t)}{t} dt = \frac{2}{\pi(\lambda^2 - \mu^2)} \cdot \\ (29) \quad \cdot \left\{ J_\lambda(x) - J_\mu(x) \cos(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} - Y_\mu(x) \operatorname{sen}(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} \right\}$$

che si può ottenere anche direttamente dalle (12) e (21).

Scambiando λ con μ , la (28) dà:

$$J_\mu(x) = J_\lambda(x) \cdot \left\{ \cos(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} (\lambda^2 - \mu^2) \int_x^{+\infty} \frac{Y_\lambda(t) J_\mu(t)}{t} dt \right\} - \\ - Y_\lambda(x) \cdot \left\{ \operatorname{sen}(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} (\lambda^2 - \mu^2) \int_x^{+\infty} \frac{J_\lambda(t) J_\mu(t)}{t} dt \right\}$$

e moltiplicando la (28) per $Y_\lambda(x)$, la (29) per $Y_\mu(x)$, indi sommando membro a membro, si ottiene:

$$\begin{aligned} J_\lambda(x) Y_\lambda(x) + J_\mu(x) Y_\mu(x) &= \cos(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} \cdot \left\{ J_\mu(x) Y_\lambda(x) + J_\lambda(x) Y_\mu(x) \right\} \\ &+ \frac{\pi}{2} (\lambda^2 - \mu^2) \cdot \left\{ J_\mu(x) Y_\lambda(x) \int_x^{+\infty} \frac{Y_\mu(t) J_\lambda(t)}{t} dt - \right. \\ &\left. - J_\lambda(x) Y_\mu(x) \cdot \int_x^{+\infty} \frac{Y_\lambda(t) J_\mu(t)}{t} dt \right\} \end{aligned}$$

vale a dire :

$$\begin{aligned} (31) \quad & J_\mu(x) Y_\lambda(x) \int_x^{+\infty} \frac{J_\lambda(t) Y_\mu(t)}{t} dt - J_\lambda(x) Y_\mu(x) \int_x^{+\infty} \frac{J_\mu(t) Y_\lambda(t)}{t} dt = \\ &= \frac{2}{\pi (\lambda^2 - \mu^2)} \{ J_\lambda(x) Y_\lambda(x) + J_\mu(x) Y_\mu(x) - \cos(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} [J_\mu(x) Y_\lambda(x) + \\ &+ J_\lambda(x) Y_\mu(x)] \} \end{aligned}$$

formula che si può ottenere anche direttamente dalla (21) e da quella che si ottiene scambiando in questa λ con μ .

Data l'analiticità, rispetto a ν e a z ($z \neq 0$) delle funzioni $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, è lecito concludere che le (29), (31), valgono se si intende che λ, μ siano complessi qualunque e si sostituisce alla variabile positiva x la variabile complessa $z \neq 0$.

Facciamo una semplice applicazione della (31). Supponiamo $\lambda - \mu$ intero (> 0).

Poichè sussiste l'uguaglianza⁽¹⁷⁾:

$$J_\lambda(x) Y_\mu(x) - J_\mu(x) Y_\lambda(x) = \frac{2 R(x)}{\pi x}$$

dove $R(x)_{\lambda-\mu-1, \mu+1}$ è il polinomio di LOMMEL, la cui espressione esplicita è⁽¹⁸⁾

⁽¹⁷⁾ WATSON, loc. cit. p. 297.

⁽¹⁸⁾ WATSON, loc. cit. p. 296.

$\lambda - \mu$ pari :

$$\begin{aligned} R(x)_{\lambda-\mu-1, \mu+1} &= \frac{2^{\lambda-\mu-1} \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu+1)} \frac{1}{x^{\lambda-\mu-1}} - \\ &- \frac{(\lambda - \mu - 2) 2^{\lambda-\mu-3} \Gamma(\lambda-1)}{\Gamma(\mu+2)} \frac{1}{x^{\lambda-\mu-3}} + \\ &+ \dots + (-1)^{\frac{\lambda-\mu-2}{2}} \left(\frac{\lambda-\mu}{2}\right)! (\lambda+\mu) \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$\lambda - \mu$ dispari :

$$\begin{aligned} R(x)_{\lambda-\mu-1, \mu+1} &= \frac{2^{\lambda-\mu-1} \Gamma(\lambda)}{\Gamma(\mu+1)} \frac{1}{x^{\lambda-\mu-1}} - \\ &- \frac{(\lambda - \mu - 2) 2^{\lambda-\mu-3} \Gamma(\lambda-1)}{\Gamma(\mu+2)} \frac{1}{x^{\lambda-\mu-3}} + \\ &+ \dots + (-1)^{\frac{\lambda-\mu-1}{2}} \end{aligned}$$

le radici $\alpha > 0$ di $R(x)_{\lambda-\mu-1, \mu+1} = 0$ soddisfano all'equazione :

$$J_\lambda(\alpha) Y_\mu(\alpha) = J_\mu(\alpha) Y_\lambda(\alpha).$$

Dalla (31) si ricava perciò :

$$\begin{aligned} J_\lambda(\alpha) Y_\mu(\alpha) \int_a^{+\infty} \{J_\lambda(t) Y_\mu(t) - J_\mu(t) Y_\lambda(t)\} \frac{dt}{t} = \\ (32) \quad = J_\lambda(\alpha) Y_\mu(\alpha) \int_a^{+\infty} 2 \frac{R(x)}{\pi x^2} dx = \frac{2}{\pi(\lambda^2 - \mu^2)} \{J_\lambda(\alpha) Y_\lambda(\alpha) + \\ + J_\mu(\alpha) Y_\mu(\alpha) - 2 \cos(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} J_\mu(\alpha) Y_\lambda(\alpha)\} \end{aligned}$$

Supponiamo μ razionale, $\lambda = \mu + m$ (m intero, > 2). Non può essere allora ⁽¹⁹⁾ $J_\mu(\alpha) = J_\lambda(\alpha) = 0$. Se è $Y_\mu(\alpha) = 0$ è anche $Y_\lambda(\alpha) = 0$. Se è $Y_\mu(\alpha) \neq 0$ è anche $Y_\lambda(\alpha) \neq 0$. Dunque ⁽²⁰⁾:

⁽¹⁹⁾ WATSON, loc. cit. pp. 484-485.

⁽²⁰⁾ Se è $\lambda = \mu + m$ (m intero, > 2), qualunque sia $\mu \geq 0$ e reale poichè la minima radice positiva di $Y_\nu(x)$ (ν reale, > 0), deve risultare maggiore di $\nu + \frac{1}{2}$ (WATSON, loc. cit. p. 487), ne viene facilmente che quando μ è sufficientemente piccolo, non può verificarsi il caso a).

a) o è $Y_\mu(\alpha) = Y_\lambda(\alpha) = 0$

b) oppure $Y_\mu(\alpha) \neq 0$, $Y_\lambda(\alpha) \neq 0$ e quindi anche $J_\lambda(\alpha) \neq 0$, $J_\mu(\alpha) \neq 0$.

In questo secondo caso dalla (32) si ricava :

$$\int_a^{+\infty} \frac{R(x)}{x^2} dx = \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} \left\{ \frac{J_\lambda(\alpha)}{J_\mu(\alpha)} + \frac{J_\mu(\alpha)}{J_\lambda(\alpha)} - 2 \cos(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} \right\}$$

Essendo ⁽²¹⁾

$$J_\lambda(x) = J_\mu(x) \frac{R(x)}{\lambda - \mu, \mu} - J_{\mu-1}(x) \frac{R(x)}{\lambda - \mu - 1, \mu + 1}$$

si ha :

$$J_\lambda(\alpha) = J_\mu(\alpha) \frac{R(\alpha)}{\lambda - \mu, \mu}$$

Perciò :

$$\int_a^{+\infty} \frac{R(x)}{x^2} dx = \frac{1}{\lambda^2 - \mu^2} \cdot \frac{\left\{ \frac{R(\alpha)}{\lambda - \mu, \mu} \right\}^2 - 2 \cos(\lambda - \mu) \frac{\pi}{2} \frac{R(\alpha)}{\lambda - \mu, \mu + 1}}{\frac{R(\alpha)}{\lambda - \mu, \mu}}$$

che esprime un legame in μ e $\lambda = \mu + m$ (m intero, > 2), μ razionale ≥ 0 .

⁽²¹⁾ WATSON, loc. cit. p. 298.