ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

TULLIO VIOLA

Sull'esistenza del minimo assoluto di taluni integrali multipli, connessi con i problemi al contorno per le funzioni iperarmoniche

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 6, n° 1-2 (1952), p. 109-145

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1952_3_6_1-2_109_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1952, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SULL'ESISTENZA DEL MINIMO ASSOLUTO DI TALUNI INTEGRALI MULTIPLI, CONNESSI CON I PROBLEMI AL CONTORNO PER LE FUNZIONI IPERARMONICHE (*)

di TULLIO VIOLA (Roma)

CAP. I. - IPOTESI E PREMESSE.

1. **Introduzione.** — In una recente nota lincea (1), G. FICHERA ha dato una dimostrazione diretta dell'esistenza del minimo dell'integrale multiplo (2)

$$I[u] = \int_A (\Delta_2 u)^2 \, d\tau ,$$

nella classe delle funzioni $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ definite (sotto ipotesi qualitative opportunamente precisate) in un *campo limitato* A di S_r, tali che i valori u e quelli della derivata normale $\frac{du}{d\nu}$, sulla frontiera $\mathcal{F}A$ di A, coincidono rispettivamente con due prescritte funzioni.

(*) Lavoro eseguito nell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(1) G. FICHERA, *Esistenza del minimo in un classico problema di calcolo delle variazioni* (Rendiconti Lincei, s. VIII, vol. XI, 1951, pp. 34-39).

(2) Con $d\tau = dx_1 \, dx_2 \ldots dx_r$ s'intende l'elemento di volume dello spazio euclideo S_r a un numero generico $r > 1$ di dimensioni, con Δ_2^k l'operatore che s'ottiene applicando successivamente k volte il laplaciano

$$\Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_r^2}$$

(Intendendo ovviamente che $\Delta_2^1 u \equiv \Delta_2 u$, $\Delta_2^0 u \equiv u$).

FICHERA ha dimostrato altresì che la funzione minimante è un'estremale, cioè è la soluzione del problema bi-iperarmonico nella classe predetta.

L'interesse del metodo ideato da FICHERA (3) consiste soprattutto nel fatto che viene in tal modo dimostrata l'esistenza del minimo, in un problema di calcolo delle variazioni *non regolare,* dato che la forma quadratica nelle derivate seconde, che compare nell'integrale multiplo, è soltanto semidefinita positiva. Per ovviare a tale difficoltà alcuni autori, fra cui G. FUBINI e K. O. FRIEDRICHS, considerano, in connessione al problema bi-iperarmonico in due variabili, il problema di minimo per l'integrale regolare

$$\int_A \left\{ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \, \partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 \right\} d x_1 \, d x_2 ,$$

nella classe delle funzioni che, su $\mathcal{F} A$, sono assegnate insieme alle loro derivate prime (4). Il procedimento di FRIEDRICHS è stato esteso da S. SOBOLEFF a problemi regolari, di calcolo delle variazioni, che ammettono, come equazione di EULERO, l'equazione iperarmonica $\Delta_2^n u = 0$ (5).

Mi sono chiesto se non sia possibile estendere il metodo di FICHERA in modo da dimostrare, in generale, l'esistenza del minimo per i problemi non regolari, di calcolo delle variazioni, che possono connettersi al classico

---

(3) Tale metodo si può considerare come un caso particolare di altro avente carattere di grande generalità, che FICHERA ha esposto in una conferenza all'Università di Padova (in corso di pubblicazione nei rendiconti di quel Seminario matematico) ed anche in altra conferenza tenuta recentemente a Messina (che sarà pubblicata negli Atti del IV Congresso dell'Unione Matematica Italiana, Taormina, ottobre 1951).

(4) Cfr. G. FUBINI, *Il principio di minimo e i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazioni alle derivate parziali di ordine pari* (Rend. Circ. Mat. di Palermo, *23,* 1907, pp. 58-84); K. O. FRIEDRICHS, *Die Randwert - u. Eigenwertprobleme aus der Theorie der elastischen Platten (Anwendung der direkten Methoden der Variationsrechnung)* (Math. Annalen, *98,* 1928, pp. 205-247).

(5) Cfr. S. SOBOLEFF, *Problème limite fondamental pour l'équation polyharmonique dans le domaine au contour degénéré* (C. R. Ac. d. Sc. de l'U. R. S. S., III/XII, n. 7/102, 1936, pp. 310-314); *Sur une méthode directe de solution des équations polyharmoniques* (Id., IV/XIII, n. 8/112, 1936, pp. 351-353); *Sur un problème limite pour les équations polyharmoniques* (Recueil mathématique de Moscou, II/44, n. 3, 1937, pp. 465-499). Si osservi che, nelle applicazioni del problema bi-iperarmonico alla fisica, l'opportunità o meno di minimizzare l'uno o l'altro degli integrali sopra scritti, dipende dalle particolarità fisiche che condizionano il problema nella sua concretezza. È noto per es. che l'espressione dell'energia potenziale elastica nel problema della piastra, è una combinazione lineare dei due integrali, con coefficienti legati sia alle condizioni di vincolo sia alle caratteristiche fisiche del materiale, e che il minimo di una tale combinazione dà la condizione per l'equilibrio. La combinazione stessa si riduce rispettivamente all'uno o all'altro dei due integrali, in casi particolari che possono considerarsi come casi limiti.

problema al contorno relativo all'equazione n-iperarmonica. Tale problema al contorno, a tutt'oggi, non aveva ancora ricevuto, a quanto mi consta, un'esauriente trattazione dal punto di vista esistenziale e quantitativo.

Il seguente enunciato riassume i risultati della ricerca da me compiuta.

Indichiamo con $\mathfrak{L}_n$ la classe delle funzioni u definite nel campo limitato A dello spazio euclideo S_r (6), *e che godono ivi delle seguenti proprietà.*

I) *se n è pari $= 2p$, le funzioni $u, \Delta_2 u, \Delta_2^2 u, \ldots, \Delta_2^{p-1} u$ sono continue e dotate di derivate parziali prime e seconde continue e di quadrato sommabile;*

II) *se n è dispari $= 2p+1$, oltre ad essere soddisfatte le condizioni precedenti, anche le funzioni $\Delta_2^p u$ sono dotate di derivate parziali prime continue e di quadrato sommabile.*

Assegnate, sulla frontiera $\mathfrak{F}A$ di A, le n funzioni quasi continue e sommabili

I) (nel caso $n = 2p$) $\quad \{f_h(Q)\}, \{g_h(Q)\}$

II) (» » $n = 2p+1$) $\quad \{f_h(Q)\}, \{g_h(Q)\}, f_p(Q)$

$(h = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$,

e indicata con $\overline{\mathfrak{L}}_n$ la sottoclasse (supposta non vuota) di $\mathfrak{L}_n$, costituita da tutte le funzioni di $\mathfrak{L}_n$ per le quali si ha, su $\mathfrak{F}A$, (7)

$$u = f_0, \quad \frac{du}{d\nu} = g_0, \quad \Delta_2 u = f_1, \quad \frac{d\,\Delta_2 u}{d\nu} = g_1,$$

$$\Delta_2^2 u = f_2, \quad \frac{d\,\Delta_2^2 u}{d\nu} = g_2, \ldots, \Delta_2^{p-1} u = f_{p-1}, \quad \frac{d\,\Delta_2^{p-1} u}{d\nu} = g_{p-1},$$

e, nel caso $n = 2p+1$, anche $\Delta_2^p u = f_p$,

risulta dotato di minimo assoluto, in $\overline{\mathfrak{L}}_n$, il funzionale

$$I[u] = \begin{cases} \displaystyle\int_A (\Delta_2^p u)^2 \, d\tau & \text{nel } I \text{ caso } (n = 2p) \\ \displaystyle\int_A |\operatorname{grad} \Delta_2^p u|^2 \, d\tau & \text{» } II \text{ » } (n = 2p+1), \end{cases}$$

---

(6) Com'è noto, col termine « *campo* » s'intende un insieme *aperto*, cioè un insieme dotato di soli punti interni. Il campo A si suppone verificare talune proprietà di regolarità, che verranno indicate al n. 2 e che, nei confronti con ricerche analoghe di altri autori, possono ritenersi sufficientemente generali.

(7) L'operazione di derivazione s'intende qui eseguita nel verso e con l'orientamento della normale esterna ad $\mathfrak{F}A$. Il modo in cui, per una funzione di $\mathfrak{L}_n$, vengono verificate le condizioni al contorno qui scritte, verrà specificato al n. 7.

la funzione minimante essendo soluzione, in tutto il campo A, dell'equazione differenziale

$$\Delta_2^n u = 0 .$$

Verranno anche date, nel corso del lavoro, delle espressioni esplicite per le funzioni minimanti, e cioè le formule (12), (22), rispettivamente nel caso $n = 2p$ e nel caso $n = 2p + 1$. Tali formule, all'occorrenza, potranno essere impiegate anche per il calcolo delle funzioni minimanti [8]. Esse si trovano riportate nel breve riassunto (v. n. 17) con cui, por comodità del lettore, abbiamo creduto opportuno di chiudere la presente memoria.

2. **Proprietà geometriche del campo d'integrazione.** — Sul campo limitato A di cui sopra, faremo le seguenti ipotesi. Supporremo la frontiera $\mathcal{F}A$ formata da un numero finito di porzioni d'ipersupeficie aperte di classe 2 [9]. Se Σ è una qualunque di queste porzioni e Q è un qualunque punto regolare di Σ (cioè un punto di $\Sigma - \mathcal{B}\Sigma$), supporremo che sulla retta normale a Σ in Q, sia sempre possibile individuare un segmento (sia pur piccolo), di centro Q, per metà interno ad A e per l'altra metà esterno. Supporremo inoltre:

---

[8] Per quanto riguarda l'equivalenza del problema n-iperarmonico qui enunciato, coi problemi classici (nei quali sono assegnati in altro modo i valori al contorno), v. M. NICOLESCO, *Les fonctions polyharmoniques* (Paris, Hermann 1936) cap. III. Mi propongo però di studiare tale questione particolare, in un prossimo lavoro.

[9] Ogni porzione Σ può considerarsi come il luogo descritto, in S_r, da un punto $Q = Q(u_1, u_2, \ldots, u_{r-1})$, ove $Q(u_1, u_2, \ldots, u_{r-1})$ è una funzione vettoriale definita in un certo dominio $\mathcal{D}$ (appartenente allo spazio euclideo S_{r-1}, a $r-1$ dimensioni, descritto dal punto U di coordinate $u_1, u_2, \ldots, u_{r-1}$). Il dominio $\mathcal{D}$, *base* di Σ, si suppone internamente connesso e con frontiera di misura nulla. La funzione $Q(u_1, u_2, \ldots, u_{r-1})$ si suppone continua in tutto $\mathcal{D}$, insieme con le derivate parziali prime e seconde [10], tale inoltre che la corrispondenza $Q = Q(u_1, u_2, \ldots, u_{r-1})$ sia biunivoca e che la matrice jacobiana

$$\left\| \frac{\partial Q(u_1, u_2, \ldots, u_{r-1})}{\partial (u_1, u_2, \ldots, u_{r-1})} \right\|$$

abbia, in tutto $\mathcal{D}$, caratteristica $r-1$. I punti Q di Σ, che corrispondono ai punti di $\mathcal{F}\mathcal{D}$, costituiscono il *bordo* $\mathcal{B}\Sigma$ della porzione Σ.

[10] Tali derivate parziali s'intendono definite, in ogni punto $U \in \mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$, al modo solito (cioè come limiti di rapporti incrementali), sono invece definite per continuità in ogni punto $U \in \mathcal{F}\mathcal{D}$. Questa precisazione valga anche per il seguito, in ogni circostanza analoga.

1°) che sia possibile definire, in ogni punto Q di $\mathcal{F}A$, un versore $\vec{\mu} = \vec{\mu}(Q)$, continuo su tutto $\mathcal{F}A$ e di classe 1 su ogni porzione Σ [11], penetrante sempre nell'interno di A e tale che, detta ω la misura dell'angolo (compreso fra 0 e π) che $\vec{\mu}(Q)$ forma (in ogni punto Q regolare su una porzione Σ) col versore $\vec{\nu}'(Q)$ della normale, in Q, penetrante in A, riesca sempre $0 \leq \omega \leq \omega_0 < \frac{\pi}{2}$, con ω_0 costante;

2°) che esista un numero $\varrho_0 > 0$ tale che, qualunque sia la costante ϱ, con $0 < \varrho \leq \varrho_0$, il luogo descritto dal punto $M = Q + \varrho\,\vec{\mu}(Q)$, al variare di Q su $\mathcal{F}A$, riesca interamente contenuto in A e in corrispondenza biunivoca con $\mathcal{F}A$.

Il tipo di campo ora descritto si dirà, genericamente, *regolare*. Esso è, in tutto, analogo a quello cui si riferiscono altri Autori, per es. G. FICHERA [12], C. MIRANDA [13] e, in certo modo, anche K. O. FRIEDRICHS [14], in ricerche di grande valore e portata [15].

A proposito del tipo, da noi qui descritto, di campo regolare, dimostriamo la seguente proposizione.

LEMMA I. — *Se $\varphi(M)$ è una qualunque funzione definita in un campo regolare A, ivi dotata di derivate parziali prime continue e sommabili, esiste*

---

[11] Una funzione numerica o vettoriale si dice di classe h in un dominio [in un campo], se essa è ivi continua insieme con le derivate parziali successive fino a quelle d'ordine h incluse. Una porzione Σ d'ipersuperficie aperta, priva di punti multipli, si dice di classe h, se (con riferimento alle notazioni introdotte nella nota [9]), la funzione vettoriale $Q(u_1, u_2, \ldots, u_{r-1})$ è di classe h in $\mathcal{D}$. Una funzione numerica o vettoriale φ si dice di classe h su una porzione Σ d'ipersuperficie aperta di classe k (con $k \geq h$) [rispettivamente su $\Sigma - \mathcal{B}\Sigma$], se, considerando φ come funzione composta, cioè come funzione del punto U variabile nel dominio $\mathcal{D}$ base della porzione [rispettivamente nel campo $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$], φ è di classe h in $\mathcal{D}$ [rispettivamente nel campo $\mathcal{D} - \mathcal{F}\mathcal{D}$].

[12] G. FICHERA, *Sull'esistenza e sul calcolo delle soluzioni dei problemi al contorno, relativi all'equilibrio di un corpo elastico* (Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, s. III, vol. IV, 1950, fasc. I-II, cap. V n. 1).

[13] C. MIRANDA, *Sul principio di Dirichlet per le funzioni armoniche* (Rendiconti Lincei, s. VIII, vol. III, 1947, pag. 58).

[14] K. O. FRIEDRICHS, *On the boundary-value problems of the theory of elasticity and Korn's inequality* (Annals of Mathematics, vol. 48, n. 2, aprile 1947, parte I, 1, pp. 443-445).

[15] Ci riserviamo di stabilire un esame comparativo fra le definizioni adottate dai vari Autori, in un prossimo lavoro. Qui, per valutare il carattere di generalità che presentano non solo le proprietà da noi supposte, ma già quelle supposte dagli Autori citati, basterà osservare che a tali proprietà soddisfano largamente una classe vastissima di campi solitamente considerati nelle applicazioni: per es. ogni campo la cui frontiera sia costituita da un numero finito d'ipersuperficie chiuse dl classe 2, oppure, in S_3, da un numero finito di superficie poliedriche a facce piane, ecc.

il limite, determinato e finito,

$$\lim_{\varrho \to 0+} \varphi\,(Q + \varrho\,\vec{\mu})$$

per quasi tutti i punti Q di $\mathcal{F}A$ (16).

Indicato con A_ϱ il campo che s'ottiene, privando A di tutti i punti (17)

$$M = Q + \varrho'\,\vec{\mu}\,(Q) \qquad (Q \in \mathcal{F}A\,, \quad 0 < \varrho' \leq \varrho\,, \quad \varrho \text{ cost.} \leq \varrho_0)\,,$$

la funzione $\varphi\,(Q + \varrho\,\vec{\mu})$ riesce uniformemete sommabile sulla frontiera $\mathcal{F}A_\varrho$ (al variare di ϱ).

Infine, se $\vec{\mu}' = \vec{\mu}'\,(Q)$ è un secondo versore di classe 1 su $\mathcal{F}A$, dotato delle stesse proprietà sopra indicate per $\vec{\mu}$, si ha, quasi ovunque su $\mathcal{F}A$,

$$\lim_{\varrho \to 0+} \varphi(Q + \varrho\,\vec{\mu}) = \lim_{\varrho \to 0+} \varphi\,(Q + \varrho\,\vec{\mu}')\,.$$ (18)

DIM. — Siano $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$ le porzioni d'ipersuperficie aperte di classe 2, in cui (a norma della data definizione di campo regolare) si decompone $\mathcal{F}A$. È lecito supporre i corrispondenti domini base $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_p$, nello spazio S_{r-1} del punto U, due a due disgiunti.

a) Si trova, con un calcolo elementare, che lo jacobiano $J\,(U\,, \varrho)$ della trasformazione

$$M = Q\,(U) + \varrho\,\vec{\mu}\,(Q)\,,$$

definita al variare di U nel dominio

$$\mathcal{D}^* = \sum_i^{1,p} \mathcal{D}_i$$

e di ϱ in $(0\,, \varrho_0)$, soddisfa alla condizione

$$J\,(U\,, 0)\,d\,\tau_U = \cos\omega\,.\,d\,\sigma_Q \qquad (U \in \mathcal{D}^*)\,,$$

ove con $d\,\tau_U$ s'è indicata la misura dell'elemento descritto da U in $\mathcal{D}^*$, con

---

(16) I concetti relativi alla misura degli insiemi e agli integrali delle funzioni, sono, in tutto il presente lavoro, assunti nel senso di LEBESGUE. Si tenga presente che, su ogni porzione Σ componente $\mathcal{F}A$, si ha necessariamente, in tal senso, mis $(\mathcal{B}\,\Sigma) = 0$.

(17) Per il significato della costante ϱ_0, v. sopra la condizione 2ª.

(18) Cfr. G. FICHERA, loc. cit. alla nota (12) cap. V, n. 2, XXXII.

$d\sigma_Q$ la misura ipersuperficiale dell'elemento corrispondentemente descritto da Q su $\mathcal{F}A$. Supponiamo ϱ_0 tanto piccolo, che riesca

$$J(U, \varrho) \geq m > 0 \qquad (U \in \mathcal{D}^*, \quad 0 \leq \varrho \leq \varrho_0),$$

m essendo una certa costante.

Sia ora $\mathcal{C}$ il dominio dello spazio S_r, descritto dal punto $M = Q + \varrho \vec{\mu}(Q)$ quando Q descrive $\mathcal{F}A$ (cioè quando U descrive $\mathcal{D}^*$) e ϱ descrive l'intervallo $(0, \varrho_0)$. La funzione

$$g(M) = g(Q + \varrho \vec{\mu}(Q)) = \vec{\mu}(Q) \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q + \varrho \vec{\mu}(Q))$$

è certo sommabile in $\mathcal{C}$, e risulta

$$\int_{\mathcal{C}} g(M)\, d\tau_M = \int_0^{\varrho_0} d\varrho \int_{\mathcal{D}^*} g(Q + \varrho \vec{\mu}(Q))\, J(U, \varrho)\, d\tau_U .$$

Ne segue che, per quasi tutti i punti Q di $\mathcal{F}A$, la funzione $g(Q + \varrho \vec{\mu}(Q))$ della sola variabile ϱ, è sommabile in $(0, \varrho_0)$ e quindi esiste il limite

$$\lim_{\varrho \to 0+} \int_{\varrho}^{\varrho_0} g(Q + \varrho' \vec{\mu}(Q))\, d\varrho' .$$

Ma si ha

$$\varphi(Q + \varrho \vec{\mu}) = \varphi(Q + \varrho_0 \vec{\mu}) - \int_{\varrho}^{\varrho_0} g(Q + \varrho' \vec{\mu}(Q))\, d\varrho',$$

e perciò il $\lim_{\varrho \to 0+} \varphi(Q + \varrho \vec{\mu})$ esiste per quasi tutti i punti Q di $\mathcal{F}A$, precisamente

$$\lim_{\varrho \to 0+} \varphi(Q + \varrho \vec{\mu}) = \varphi(Q + \varrho_0 \vec{\mu}) - \lim_{\varrho \to 0+} \int_{\varrho}^{\varrho_0} g(Q + \varrho' \vec{\mu}(Q))\, d\varrho'.$$

b) $\mathcal{F}A_\varrho$ è formata da un numero finito di porzioni d'ipersuperficie aperte di classe 1 (analoghe a quelle che formano $\mathcal{F}A$), siano $\Sigma_1^{(\varrho)}, \Sigma_2^{(\varrho)}, \ldots, \Sigma_p^{(\varrho)}$, in modo che, mentre Q descrive una qualunque delle porzioni Σ_i, il punto $M = Q + \varrho \vec{\mu}(Q)$ descrive la corrispondente porzione $\Sigma_i^{(\varrho)}$ e, se Q è regolare in Σ_i, tale è pure M in $\Sigma_i^{(\varrho)}$. Indichiamo con $\omega_\varrho = \omega_\varrho(Q)$ l'angolo (compreso fra 0 e π) che il versore $\vec{\nu}'_\varrho = \vec{\nu}'_\varrho(Q)$ normale a $\mathcal{F}A_\varrho$ (nel

punto $M = Q + \varrho\,\vec{\mu}(Q)$, regolare in una qualunque delle porzioni $\Sigma_1^{(\varrho)}, \Sigma_2^{(\varrho)}, \ldots, \Sigma_p^{(\varrho)}$) e orientato verso l'interno di A_ϱ, forma con $\vec{\mu}(Q)$. La funzione

$$H(Q, \varrho) = \cos \omega_\varrho$$

è continua per U interno a $\mathcal{D}^*$ e per $0 \leq \varrho \leq \varrho_0$. Poichè $H(Q, 0) \geq \cos \omega_0 > 0$, possiamo supporre ϱ_0 tanto piccolo che riesca sempre $H(Q, \varrho) \geq H_0 > 0$, essendo H_0 una certa costante.

Si ha

$$\int_{\mathcal{F}A_\varrho} \varphi(M)\, d\sigma_M = \int_{D^*} \varphi(Q + \varrho\,\vec{\mu}(Q)) \frac{|J(U, \varrho)|}{\cos \omega_\varrho}\, d\tau_U$$

e, d'altra parte,

$$\frac{|J(U, \varrho)|}{\cos \omega_\varrho} \leq \frac{|J(U, \varrho)|}{H_0},$$

$$|\varphi(Q + \varrho\,\vec{\mu}(Q))| \leq |\varphi(Q + \varrho_0\,\vec{\mu})| + \left|\int_\varrho^{\varrho_0} g(Q + \varrho'\,\vec{\mu}(Q))\, d\varrho'\right| \leq$$

$$\leq |\varphi(Q + \varrho_0\,\vec{\mu})| + \int_0^{\varrho_0} |g(Q + \varrho\,\vec{\mu}(Q))|\, d\varrho\,.$$

Ciò basta a dimostrare l'asserita uniforme sommabilità di $\varphi(Q + \varrho\,\vec{\mu}) = \varphi(M)$, su $\mathcal{F}A_\varrho$.

c) Sia T un punto regolare di una qualunque delle porzioni Σ_i ($i = 1, 2, \ldots, p$). Sull'iperpiano π, tangente a Σ_i in T, determiniamo un dominio circolare I di centro T e di raggio tale che, assunto π come iperpiano coordinato $x_r = 0$ e la normale in T a Σ (con l'orientamento del versore $\vec{\nu}'(T)$) come asse x_r, possa individuarsi tutta una porzione $\overline{\Sigma}$ di Σ_i, connessa, passante per T, che si projetti in I, sia ivi rappresentata con l'equazione

$$x_r = x_r(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1})$$

ed abbia distanza positiva da $\mathcal{B}\Sigma_i$ [19]. Sia $\overline{\mathcal{D}}$ il dominio base di $\overline{\Sigma}$ nello spazio del punto $U \equiv (u_1, u_2, \ldots, u_{r-1})$ e sia $\overline{\Sigma}_\varrho$ la porzione d'ipersuperficie, aperta e di classe 1, descritta dal punto

$$M = Q + \varrho\,\vec{\mu} \qquad (Q \in \overline{\Sigma},\ \varrho \text{ costante tale che } 0 < \varrho \leq \varrho_0).$$

---

[19] Fissando il raggio di I sufficientemente piccolo, una siffatta porzione Σ esiste certamente ed è unica.

Fissiamo un numero $h > 0$ tanto piccolo, che il dominio $\mathcal{E}$:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}) \in I, x_r(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}) \leq x_r \leq x_r(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}) + h,$$

abbia i soli punti di $\overline{\Sigma}$ in comune con $\mathcal{F}A$. Fissiamo inoltre un numero positivo $\varrho_0' \leq \varrho_0$, tanto piccolo che l'ipersuperficie $x_r = x_r(x_1, x_2, \ldots x_{r-1}) + h$ e l'ipersuperficie cilindrica $(x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}) \in \mathcal{F}I$ limitino, insieme con l'ipersuperficie

$$M = Q + \varrho \vec{\mu} \qquad (Q \in \Sigma_i, \varrho \text{ costante tale che } 0 < \varrho \leq \varrho_0'),$$

un dominio $\mathcal{E}_\varrho \subset \mathcal{E}$, insieme con l'ipersuperficie

$$M = Q + \varrho \vec{\mu'} \qquad (Q \in \Sigma_i, \varrho \text{ costante tale che } 0 < \varrho \leq \varrho_0'),$$

un dominio $\mathcal{E}_\varrho' \subset \mathcal{E}$, e questi due domini $\mathcal{E}_\varrho, \mathcal{E}_\varrho'$, per $\varrho \to 0^+$, invadano $\mathcal{E}$.

Sia $k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}$ un gruppo di $r-1$ arbitrari numeri interi non negativi. Poniamo

$$v(x_1, x_2, \ldots, x_r) = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_{r-1}^{k_{r-1}} x_r,$$

$$\overline{\varphi} = \lim_{\varrho \to 0^+} \varphi(Q + \varrho \vec{\mu}), \overline{\varphi'} = \lim_{\varrho \to 0^+} \varphi(Q + \varrho \vec{\mu'}).$$

Applicando la formula di GAUSS-GREEN ai domini $\mathcal{E}_\varrho, \mathcal{E}_\varrho'$, si trova, per $\varrho \to 0^+$,

$$(1) \quad \begin{cases} \int_{\mathcal{E}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \frac{\partial v}{\partial x_r} d\tau = \int_{\overline{\Sigma}} \overline{\varphi} \frac{\partial v}{\partial x_r} \gamma \, d\sigma + \int_{\mathcal{F}\mathcal{E}-\overline{\Sigma}} \varphi \frac{\partial v}{\partial x_r} \gamma \, d\sigma, \\ \int_{\mathcal{E}} \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} \frac{\partial v}{\partial x_r} d\tau = \int_{\overline{\Sigma}} \overline{\varphi'} \frac{\partial v}{\partial x_r} \gamma \, d\sigma + \int_{\mathcal{F}\mathcal{E}-\overline{\Sigma}} \varphi \frac{\partial v}{\partial x_r} \gamma \, d\sigma, \end{cases}$$

ove γ è il coseno direttore della normale esterna ad $\mathcal{E}$, relativo all'asse x_r [20]. Sottraendo le (1) membro a membro, s'ottiene

$$\int_{\overline{\Sigma}} (\overline{\varphi} - \overline{\varphi'}) \frac{\partial v}{\partial x_r} \gamma \, d\sigma = 0,$$

---

[20] Nelle (1) intervengono integrali ipersuperficiali dei prodotti $\varphi \frac{\partial v}{\partial x_r} \gamma$, estesi a porzioni d'ipersuperficie cilindriche di direttrice $\mathcal{F}I$. Per il teor. di FUBINI, la φ è ipersuperficialmente sommabile su quasi tutte le ipersuperficie cilindriche che hanno direttrici

cioè

$$\int_I (\bar{\varphi} - \bar{\varphi}') x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{r-1}^{k_{r-1}} d x_1 d x_2 \dots d x_{r-1} = 0 .$$

Si ha dunque, ricordando la completezza del sistema di monomi $\{x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_{r-1}^{k_{r-1}}\}$ (al variare degli esponenti $k_1, k_2, \dots, k_{r-1}$), $\bar{\varphi} \equiv \bar{\varphi}'$ quasi ovunque su Σ, e infine anche $\varphi \equiv \bar{\varphi}'$ quasi ovunque su $\mathcal{F}A$, c.d.d. [21].

3. **Sulle formule di Gauss-Green.** — Tali formule classiche vengono solitamente dimostrate in condizioni diverse da quelle che ci occorreranno nel seguito [22]. Consideriamo genericamente una funzione $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_r)$, definita in un campo regolare A, ivi continua e dotata di derivate parziali prime continue e sommabili. In virtù del lemma I, esisterà, per quasi tutti i punti Q di $\mathcal{F}A$, il limite, determinato e finito,

$$\lim_{\varrho \to 0+} f(Q + \varrho \vec{\mu}) ,$$

e questo limite sarà indipendente da $\vec{\mu}$ [23]. Ebbene *porremo, per definizione, quasi ovunque su* $\mathcal{F}A$ [24],

$$f(Q) = \lim_{\varrho \to 0+} f(Q + \varrho \vec{\mu}) .$$

Dopo ciò, acquista preciso significato l'enunciato seguente.

---

omotetiche ad $\mathcal{F}I$, di centro T e di rapporto d'omotetia positivo e < 1. D'altronde tali integrali sono nulli, ivi essendo identicamente $\gamma \equiv 0$.

[21] Si noti bene che la dimostrazione qui data, per quanto concerne la classe delle porzioni Σ_i di cui si compone $\mathcal{F}A$, si vale soltanto del fatto che tali porzioni sono di classe 1. L'ipotesi più restrittiva da noi fatta (Σ_i di classe 2), sarà sfruttata negli ulteriori sviluppi del lavoro.

[22] In condizioni pochissimo restrittive, esse si trovano dimostrate (relativamente all'S_2 e all'S_3) da M. PICONE, *Lezioni di analisi matematica* (Corso litografato dell'Università di Roma, vol. II, 1950-51, pp. 317-321, 386-388); cfr. anche O. D. KELLOG, *Foundations of Potential Theory* (Berlino 1929, cap. II nn. 1-2, pp. 84-88).

[23] S'intenda: il detto limite, assicurato dal fatto che l'esistenza del versore $\vec{\mu}(Q)$ è ammessa dalla definizione del campo A (v. n. 2), non può variare, se $\vec{\mu}(Q)$ si sostituisce con altro versore $\vec{\mu}'(Q)$ dotato delle stesse proprietà.

[24] L'idea di definire, quasi ovunque, i valori al contorno di una funzione, mediante un passaggio a limite lungo la normale, è stata sistematicamente introdotta da L. AMERIO: *a*) *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ *in un dominio di connessione qualsiasi* (Rend. dell'Istit. Lombardo di Scienze e Lettere, *78*, 1, 1944-45, pp. 79-102); *b*) *Sul calcolo delle*

LEMMA II. — *Se la funzione* $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *è definita nel campo regolare* A, *vi è continua e dotata di derivate parziali prime continue e sommabili, allora sussistono le* r *relazioni*

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} d\tau = -\int_{\mathcal{F}A} f \alpha_i \, d\sigma \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{2}$$

ove con α_i *è indicato l'i-esimo coseno direttore della normale interna ad* $\mathcal{F}A$, *ed* f *s'intende prolungata, su quasi tutta* $\mathcal{F}A$, *con la legge sopra indicata.*

DIM. — Ferme restando le notazioni del n. preced., sussisteranno, in virtù delle ipotesi fatte sulla $f(M)$, le relazioni

$$\int_{A_\varrho} \frac{\partial f}{\partial x_i} d\tau = -\int_{\mathcal{F}A_\varrho} f \alpha_i \, d\sigma \qquad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{3}$$

dimostrabili coi metodi classici noti.

Facciamo ora tendere ϱ a 0^+, osservando anzitutto che i primi membri delle (3), in virtù delle ipotesi fatte, tendono ai corrispondenti primi membri delle (2). Per il lemma I, i prodotti $f\alpha_i$ riescono uniformemente sommabili sulle frontiere $\mathcal{F}A_\varrho$, inoltre la funzione f, in quasi tutti i punti Q di $\mathcal{F}A$, tende (nella direzione del versore ausiliario $\vec{\mu}$) ai rispettivi valori limiti che, a norma della convenzione sopra enunciata, sono stati assunti come effettivi valori della f su $\mathcal{F}A$. Tenendo infine conto del fatto che per $\varrho \to 0^+$, la misura ipersuperficiale di $\mathcal{F}A_\varrho$ tende, come facilmente si riconosce, a quella di $\mathcal{F}A$, s'ottengono al limite le (2), c. d. d.

4. **Funzioni iperarmoniche elementari.** — Queste funzioni $s_k(\varrho)$ (per $k = 2, 3, \ldots$) sono definite per ogni coppia di punti M, Q dello spazio S_r, ma dipendono dalla sola distanza $\varrho = \overline{MQ}$ dei due punti. Esse generalizza-

---

soluzioni dei problemi al contorno per le equazioni lineari del secondo ordine di tipo ellittico (American Journal of Mathematics, *69*, 3, luglio 1947, pp. 447-489); *c*) *Sull'equazione di propagazione del calore* (Rend. di Matematica e delle sue applicazioni 1946, pp. 84-120); *d*) *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_{2k} u = f$ (Annali di Matematica pura ed applicata, s. IV, *24*, 1945, pp. 119-138). Nel lavoro *b*) e, in alcuni casi, anche nel lavoro *c*), il ruolo della normale è assunto dalla *conormale*.

no la nota funzione armonica elementare

$$s_1(\varrho) = \begin{cases} \dfrac{1}{(r-2)\,\omega_r}\,\dfrac{1}{\varrho^{r-2}}, & \text{per} \quad r > 2 \\ -\dfrac{1}{2\pi}\log\varrho & \text{»} \quad r = 2\,, \end{cases}$$

ove ω_r indica la misura ipersuperficiale dell'ipersfera unitaria di S_r. Le $s_k(\varrho)$ sono state calcolate e utilizzate, per la prima volta, da T. BOGGIO limitatamente ai casi $r=2\,, r=3$ ([25]), da M. NICOLESCO per r generico ([26]). Le loro espressioni sono date dalle formule seguenti ([27])

$$s_k(\varrho) = \begin{cases} \dfrac{1}{C_{rk}\,\omega_r}\,\dfrac{1}{\varrho^{r-2k}}, & \text{per } r \text{ dispari, oppure:} \\ & \text{per } r \text{ pari } > 2k\,, \\ -\dfrac{1}{C_{rk}\,\omega_r}\,\varrho^{2k-r}\log\varrho\,, & \text{per } r \text{ pari } \leq 2k\,, \end{cases}$$

ove C_{rk} indica una costante che, rispettivamente nel primo e nel secondo caso, assume i valori numerici

$$C_{rk} = \begin{cases} (-2)^{k-1}(r-2)(r-4)\ldots(r-2k)(k-1)\,!\,, \\ \qquad \text{per } r \text{ dispari, oppure per } r \text{ pari } > 2k\,, \\ (-1)^{\frac{r}{2}-1}\,4^{k-1}(k-1)\,!\left(\dfrac{r}{2}-1\right)!\left(k-\dfrac{r}{2}\right)!\,, \text{per } r \text{ pari } \leq 2k\,. \end{cases}$$

([25]) T. BOGGIO, *Sulle funzioni di* GREEN *d'ordine m.* (Rendic. Circ. Matem. di Palermo *20*, 1905 pp. 97-135).

([26]) M. NICOLESCO, *Nouvelles contributions dans la théorie des fonctions polyharmoniques* (Bull. Mathémat. de la Soc. Roum. des Sciences *37*$_2$, 1936 p. 84). Questa memoria contiene purtroppo numerosi errori di calcolo, sembra imputabili a difficoltà o trascuratezza editoriali.

([27]) Si tenga presente che, in ogni caso, risulta $\Delta_2^k s_k(\varrho) = 0$ per $\varrho > 0$, intendendo l'operatore Δ_2^k effettuato al variare d'uno qualunque dei due punti M, Q, l'altro punto essendo supposto fissato.

Ci saranno utili, più volte, le seguenti formule, alle quale si perviene con facili calcoli (per $\varrho > 0$):

$$\Delta_2 s_k(\varrho) = \begin{cases} s_{k-1}(\varrho), \text{ per } r \text{ dispari, oppure} \\ \qquad \text{per } r \text{ pari } \geq 2k, \\ s_{k-1}(\varrho) - H_{rk}\varrho^{2k-r-2}, \text{ con } H_{rk} \text{ costante } = \dfrac{4k-r-2}{C_{rk}\omega_r}, \\ \qquad \text{per } r \text{ pari } < 2k. \end{cases}$$

Dimostriamo ora il seguente

LEMMA III. — *Se la funzione* $f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ *è definita nel campo limitato* A, *ivi di quadrato sommabile, la funzione*

$$g(M) = \int_A s_p(\varrho) f(Q)\, d\tau_Q$$

($\varrho = \overline{MQ}$, p *intero positivo qualunque*) *gode delle seguenti proprietà:*

a) *è continua e di quadrato sommabile in* A, *insieme alle derivate successive fino a quelle d'ordine* $2p-2$ (*incluse*);

b) $\Delta_2^{p-1} g(M)$ *possiede le derivate parziali prime e seconde, in quasi tutto* A, *di quadrato sommabile in* A;

c) *è, in quasi tutto* A,

$$\Delta_2^p g(M) = f(M).$$

DIM. La tesi *a*) si deduce immediatamente dalle espressioni surriportate, per la funzione $s_p(\varrho)$.

Per dimostrare la tesi *b*), applichiamo successivamente, $p-1$ volte, l'operatore Δ_2 alla funzione $g(M)$. Si trova, in tutto A,

$$\Delta_2 g(M) = \begin{cases} \displaystyle\int_A s_{p-1}(\varrho) f(Q)\, d\tau_Q, & \text{per } r \text{ dispari, oppure} \\ & \text{per } r \text{ pari } \geq 2p \\ \displaystyle\int_A s_{p-1}(\varrho) f(Q)\, d\tau_Q - H_{rp}\int_A \varrho^{2p-r-2} f(Q)\, d\tau_Q, & \\ & \text{per } r \text{ pari } < 2p. \end{cases}$$

Nel primo caso, si ha dunque

$$\Delta_2^k g(M) = \int_A s_{p-k}(\varrho) f(Q)\, d\tau_Q \qquad (k = 2, 3, \ldots, p-1).$$

Nel secondo caso, si ha invece, posto $r = 2(p-q)$ (con $1 \leq q \leq p-1$),

$$\Delta_2^2 g(M) = \int_A s_{p-2}(\varrho) f(Q)\, d\tau_Q -$$

$$- [H_{r,p-1} + 2^2 (q-1)(p-2) H_{rp}] \int_A \varrho^{2(q-2)} f(Q)\, d\tau_Q,$$

$$\Delta_2^3 g(M) = \int_A s_{p-3}(\varrho) f(Q)\, d\tau_Q -$$

$$- [H_{r,p-2} + 2^2 (q-2)(p-3) H_{r,p-1} + 2^4 (q-1)(q-2)(p-2)(p-3) H_{rp}] \cdot$$

$$\cdot \int_A \varrho^{2(q-3)} f(Q)\, d\tau_Q,$$

. . . . . .

$$\Delta_2^q g(M) = \int_A s_{p-q}(\varrho) f(Q)\, d\tau_Q - [H_{r,p-q+1} + 2^2 (p-q) H_{r,p-q+2} + \ldots$$

$$\ldots + 2^{2(q-1)} (q-1)! \frac{(p-2)!}{(p-q-1)!} H_{rp}] \int_A f(Q)\, d\tau_Q.$$

Se $q < p-1$, si ha dunque ancora

$$\Delta_2^k g(M) = \int_A s_{p-k}(\varrho) f(Q)\, d\tau_Q \qquad (k = q+1, q+2, \ldots, p-1).$$

Se invece $q = p-1$ cioè $r = 2$,

$$\Delta_2^{p-1} g(M) = \int_A s_1(\varrho) f(Q)\, d\tau_Q - L \int_A f(Q)\, d\tau_Q,$$

con

$$L = \sum_{s}^{0,p-2} 2^{2s} . s\,!^2 H_{2,s+2} .$$

L'integrale

$$\int_A s_1(Q) f(Q)\, d\tau_Q .$$

in virtù d'un noto teor. di LICHTENSTEIN-FRIEDRICHS ([28]), possiede le derivate parziali prime e seconde, in quasi tutto A, di quadrato sommabile in A, ciò che dimostra appunto la tesi *b*).

Infine (tesi *c*)), dalle espressioni trovate per $\Delta_2^{p-1} g(M)$, risulta immediatamente

$$\Delta_2^p g(M) = f(M),$$

quasi ovunque in A, c. d. d.

CAP. II. - INTEGRALI MULTIPLI CORRISPONDENTI ALL'EQUAZIONE EULERIANA $\Delta_2^n u = 0$. ENUNCIATO DEL PROBLEMA.

5. Determinazione del più generale integrale multiplo, corrispondente all'equazione euleriana $\Delta_2^n u = 0$. — Volendo affrontare il problema proposto, nel senso cui abbiamo accennato al n. 1, sorge spontanea la domanda: quale funzionale $I[u]$ converrà cercare di minimizzare, e sotto quali condizioni al contorno, onde risolvere, con sufficiente generalità, il corrispondente problema n-iperarmonico? La risposta a questa domanda può ottenersi nel modo che ora ci proponiamo d'indicare sommariamente.

Consideriamo la seguente generalissima espressione del funzionale:

$$(4)\quad I[u] = \int_A \left\{ \sum_{\substack{s_1+s_2+\ldots+s_r=n \\ t_1+t_2+\ldots+t_r=n}} a_{t_1 t_2 \ldots t_r}^{s_1 s_2 \ldots s_r} \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2} \ldots \partial x_r^{s_r}} \cdot \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{t_1} \partial x_2^{t_2} \ldots \partial x_r^{t_r}} \right\} d\tau ,$$

ove le lettere, dotate di doppio ordine d'indici, $a_{t_1 t_2 \ldots t_r}^{s_1 s_2 \ldots s_r}$ rappresentano delle costanti reali. Come si vede, l'integrando è una generica forma quadratica,

---

([28]) L. LICHTENSTEIN, *Über das Poissonsche Integral ecc.* (Journal für die reine u. angewandte Mathem. *141*, 1912 pp. 12-42); K. O. FRIEDRICHS, *A theorem of Lichtenstein* (Duke Math. Journal *14*, fasc. 1, marzo 1947 pp. 67-82).

a coefficienti costanti, nelle derivate parziali n-esime della funzione u ([29]). Le costanti suddette si suppongono del tutto arbitrarie, purchè tali che la forma risulti semidefinita positiva.

Secondo il ben noto procedimento euleriano e col significato ordinario dei simboli ([30]), la variazione prima del funzionale si scrive

$$\delta I = \varepsilon \left(\frac{d}{d\varepsilon} I\,[u + \varepsilon\,\eta] \right)_{\varepsilon=0} .$$

ove, nel caso nostro, si avrà:

$$\left(\frac{d}{d\varepsilon} I\,[u + \varepsilon\,\eta] \right)_{\varepsilon=0} = \int_A \left\{ \sum_{\substack{s_1+s_2+\ldots+s_r=n \\ t_1+t_2+\ldots+t_r=n}} a_{t_1 t_2 \ldots t_r}^{s_1 s_2 \ldots s_r} \cdot \right.$$

$$\cdot \left(\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{t_1}\,\partial x_2^{t_2} \ldots \partial x_r^{t_r}} \cdot \frac{\partial^n \eta}{\partial x_1^{s_1}\,\partial x_2^{s_2} \ldots \partial x_r^{s_r}} + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{s_1}\,\partial x_2^{s_2} \ldots \partial x_r^{s_r}} \cdot \frac{\partial^n \eta}{\partial x_1^{t_1}\,\partial x_2^{t_2} \ldots \partial x_r^{t_r}} \right) \right\} d\tau .$$

Integrando successivamente per parti ciascuno dei prodotti

$$\frac{\partial^n u}{\partial x_1^{t_1}\,\partial x_2^{t_2} \ldots \partial x_r^{t_r}} \cdot \frac{\partial^n \eta}{\partial x_1^{s_1}\,\partial x_2^{s_2} \ldots \partial x_r^{s_r}} , \quad \frac{\partial^n u}{\partial x_1^{s_1}\,\partial x_2^{s_2} \ldots \partial x_r^{s_r}} \cdot \frac{\partial^n \eta}{\partial x_1^{t_1}\,\partial x_2^{t_2} \ldots \partial x_r^{t_r}} ,$$

cioè applicando successivamente la formula di GAUSS-GREEN, in modo da elevare gradualmente l'ordine di derivazione della u, fino a raggiungere l'ordine $2n$ di derivazione, si perviene infine a liberare, nell'espressione di δI, l'addendo:

$$2\,\varepsilon \int_A \eta \left\{ \sum_{\substack{s_1+s_2+\ldots+s_r=n \\ t_1+t_2+\ldots+t_r=n}} a_{t_1 t_2 \ldots t_r}^{s_1 s_2 \ldots s_r} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x_1^{s_1+t_1}\,\partial x_2^{s_2+t_2} \ldots \partial x_r^{s_r+t_r}} \right\} d\tau .$$

([29]) Nei nn. 5,6 ci si pone da un punto di vista euristico: si suppongono quindi a priori soddisfatte tutte le condizioni qualitative (relative al campo A e alla funzione u) atte ad assicurare l'esistenza degli enti analitici in questione, e a giustificare i procedimenti di calcolo cui tali enti vengono assoggettati.

([30]) Cfr. per es. R. COURANT e D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik* (Berlin 1924, vol. I cap. IV).

I rimanenti integrali, che scaturiscono dalla integrazione per parti, sono ovviamente estesi alla frontiera $\mathcal{F}A$. Si ha dunque che *l'equazione euleriana corrispondente al funzionale* $I[u]$ *è*

$$(5)\qquad \sum_{\substack{s_1+s_2+\ldots+s_r=n\\ t_1+t_2+\ldots+t_r=n}} a_{t_1 t_2 \ldots t_r}^{s_1 s_2 \ldots s_r} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x_1^{s_1+t_1}\, \partial x_2^{s_2+t_2} \ldots \partial x_r^{s_r+t_r}} = 0 .$$

D'altra parte, sviluppando $\Delta_2^n u$ secondo la formula di LEIBNIZ, si trova

$$(6)\qquad \Delta_2^n u = \sum_{h_1+h_2+\ldots+h_r=n} \frac{n!}{h_1!\, h_2! \ldots h_r!} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x_1^{2h_1}\, \partial x_2^{2h_2} \ldots \partial x_r^{2h_r}} ,$$

e perciò le condizioni, necessarie e sufficienti, affinchè le (5) e (6) s'identifichino, sono

$$(7)\qquad \sum_{\substack{s_1+t_1=p_1\\ s_2+t_2=p_2\\ \ldots\ldots\ldots\\ s_r+t_r=p_r}} a_{t_1 t_2 \ldots t_r}^{s_1 s_2 \ldots s_r} = \begin{cases} \dfrac{n!}{\left(\frac{p_1}{2}\right)!\left(\frac{p_2}{2}\right)! \ldots \left(\frac{p_r}{2}\right)!}, & \text{se } p_1, p_2, \ldots, p_r \text{ sono pari,} \\ 0, & \text{nel caso contrario} \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{per ogni } r\text{-pla d'interi non negativi} \\ p_1, p_2, \ldots, p_r, \\ \text{tali che } p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 2n \end{array} \right) .$$

Tali condizioni, ove si considerino le $a_{t_1 t_2 \ldots t_r}^{s_1 s_2 \ldots s_r}$ come incognite, formano un sistema d'equazioni lineari: ad ogni soluzione di tale sistema, corrisponde un ben determinato funzionale (4) ammettente l'equazione euleriana $\Delta_2^n u = 0$, e inversamente (con la sola condizione restrittiva che la forma quadratica, sopra considerata, risulti semidefinita positiva).

6. Scelta degli integrali multipli. Formule di GREEN generalizzate. — Fra le diverse espressioni degli integrali $I[u]$ che possono scegliersi in modo tale da dar luogo, come equazione delle estremali, alla $\Delta_2^n u = 0$ [31],

---

[31] Espressioni fornite dalle (4), sotto le condizioni (7).

considereremo (anche per ragioni di semplicità e d'analogia coi due casi $n = 1$, $n = 2$) i seguenti due tipi:

$$I[u] = \begin{cases} \int_A (\Delta_2^p u)^2 \, d\tau, & \text{nel caso } n \textit{ pari} \text{ cioè } n = 2p, \\ \int_A |\operatorname{grad} \Delta_2^p u|^2 \, d\tau, & \text{nel caso } n \textit{ dispari} \text{ cioè } n = 2p+1 \ldots \end{cases}$$

Le corrispondenti condizioni al contorno, potranno naturalmente esprimersi in più modi [32]. Il modo più semplice (e, nel contempo, più elegante e generale) sembra essere quello che può dedursi dalle seguenti due formule, che generalizzano le ben note formule di GREEN, fondamentali nella teoria del potenziale: [33]

$$\int_A (u \, \Delta_2^p v - v \, \Delta_2^p u) \, d\tau =$$

(8_1)

$$= \sum_h^{0,p-1} \int_{\mathfrak{F}A} \left(\Delta_2^h u \, \frac{d \, \Delta_2^{p-1-h} v}{d\nu} - \Delta_2^{p-1-h} v \, \frac{d \, \Delta_2^h u}{d\nu} \right) d\sigma \quad \text{(nel caso } n = 2p),$$

$$\int_A \{(\operatorname{grad} \Delta_2^p u . \operatorname{grad} \Delta_2^p v) + u \, \Delta_2^p v\} \, d\tau =$$

(8_2)

$$= \sum_h^{0,p-1} \int_{\mathfrak{F}A} \left(\Delta_2^h u \, \frac{d \, \Delta_2^{2p-h} v}{d\nu} - \Delta_2^{2p-h} v \, \frac{d \, \Delta_2^h u}{d\nu} \right) d\sigma +$$

$$+ \int_{\mathfrak{F}A} \Delta_2^p u \, \frac{d \, \Delta_2^p v}{d\nu} \, d\sigma \text{ (nel caso } n = 2p+1).$$

Tali formule s'ottengono facilmente con successive integrazioni per parti, in modo analogo a quanto s'è accennato al n. precedente [34].

---

[32] Ciò dipende dalla libertà di scelta inerente al procedimento di successive integrazioni per parti, di cui al n. preced.

[33] Con ν è indicata la normale esterna ad A, nei punti di $\mathfrak{F}A$.

[34] Le accennate formule di GREEN si possono riottenere rispettivamente: dalla (8_1) ponendovi $p = 1$, dalla (8_2) sopprimendo la sommatoria al secondo membro indi ponendo $p = 0$.

Nel seguito, saranno di fondamentale importanza anche altre formule che si possono ottenere dalla (8_1), applicando le funzioni iperarmoniche elementari (v. n. 4), formule da considerarsi anch'esse come generalizzazioni di altre, ben note, di GREEN. Fissato a piacere un *punto* M *in* A, indichiamo con Σ un'ipersfera di centro M e di raggio ε (arbitrariamente piccolo) inferiore alla distanza di M da FA. Posto $\varrho = \overline{MQ}$, applichiamo la (8_1) sostituendo A col campo $A - \Sigma$ e v con $s_p(\varrho)$. Poichè $\Delta_2^p s_p = 0$ in tutto $A - \Sigma$, la (8_1) diviene:

$$-\int_{A-\Sigma} s_p \Delta_2^p u(Q)\, d\tau_Q = \sum_h^{0,p-1} \int_{\mathcal{F}(A-\Sigma)} \left[\Delta_2^h u(Q) \frac{d\, \Delta_2^{p-1-h} s_p}{d\nu} - \Delta_2^{p-1-h} s_p \frac{d\, \Delta_2^h u(Q)}{d\nu} \right] d\sigma_Q .$$

Se ciascuno dei p integrali scritti al secondo membro, si decompone nella differenza di due integrali estesi rispettivamente ad $\mathcal{F}A$ e ad $\mathcal{F}\Sigma$ e si passa poi al limite per $\varepsilon \to 0$, s'ottiene con facili passaggi la formula fondamentale:

$$(9_1) \qquad u(M) = -\sum_h^{0,p-1} \int_{\mathcal{F}A} \left[\Delta_2^h u(Q) \frac{d\, \Delta_2^{p-1-h} s_p}{d\nu} - \Delta_2^{p-1-h} s_p \frac{d\, \Delta_2^h u(Q)}{d\nu} \right] d\sigma_Q -$$

$$- \int_A s_p \Delta_2^p u(Q)\, d\tau_Q .$$

Se invece s'applica la (8_1), fissando un qualunque *punto* M *all'esterno di* A e sempre sostituendo v con $s_p(\varrho)$, s'ottiene immediatamente la formula:

$$(9_2) \qquad 0 = -\sum_h^{0,p-1} \int_{\mathcal{F}A} \left[\Delta_2^h u(Q) \frac{d\, \Delta_2^{p-1-h} s_p}{d\nu} - \Delta_2^{p-1-h} s_p \frac{d\, \Delta_2^h u(Q)}{d\nu} \right] d\sigma_Q -$$

$$- \int_A s_p \Delta_2^p u(Q)\, d\tau_Q .$$

La (8_1) è conosciuta col nome di *formula di* GUTZMER (v. M. NICOLESCO, loc. cit. alla nota (26)).

Per identificare formalmente il procedimento del presente n., con quello del n. preced., basta sostituire:

nella (8_1), u con η, v con $\Delta_2^p u$, indi integrare per parti a cominciare dall'integrale

$$\int_A \Delta_2^p u\, \Delta_2^p \eta\, d\tau ;$$

nella (8_2), u con η, v con u, indi integrare per parti a cominciare dall'integrale

$$\int_A (\operatorname{grad} \Delta_2^p \eta . \operatorname{grad} \Delta_2^p u)\, d\tau .$$

7. Classe delle funzioni, per cui esistono gli integrali e sono valide le formule del n. precedente. — Per giungere ad una conveniente enunciazione del problema, è ormai necessario formulare delle condizioni qualitative (le meno restrittive possibili) sufficienti ad assicurare l'esistenza dei precedenti integrali e la validità delle precedenti formule (8_1), (8_2), (9_1), (9_2) (cfr. la nota [29]).

Supporremo il campo A *regolare* (nn. 2,3). Quanto alla funzione u, la supporremo anzitutto continua in A, insieme con le derivate parziali prime e seconde. Questa condizione assicurerà l'esistenza e la continuità di $\Delta_2 u$ in A. Supporremo, in secondo luogo, che anche $\Delta_2 u$ sia dotata, in A, di derivate parziali prime e seconde continue: sarà così assicurata l'esistenza di $\Delta_2^2 u$, continua in A.

Così proseguiremo, giungendo da ultimo ad assicurare l'esistenza e la continuità di $\Delta_2^p u$ in A, in entrambi i casi: $n = 2p$, $n = 2p+1$. Infine, nel caso $n = 2p+1$ ma solo in questo caso, supporremo che anche $\Delta_2^p u$ sia dotata di derivate parziali prime continue.

Converremo che v indichi: nella formula (8_1) una qualunque funzione di classe $n = 2p$ in $A + \mathcal{F}A$, nella (8_2) una qualunque funzione di classe $2n = 4p+2$ in $A + \mathcal{F}A$. Ma tutto questo ancora non basta ad assicurare neppure l'esistenza di tutti gli integrandi che compariscono nelle formule indicate: perciò, in modo del tutto naturale e spontaneo, sarà da noi ulteriormente ammessa la sommabilità, in A, dei quadrati sia delle funzioni

$$u, \Delta_2 u, \Delta_2^2 u, \ldots, \Delta_2^{p-1} u,$$

sia delle loro derivate parziali prime e seconde; inoltre, nel caso $n = 2p+1$ ma solo in questo caso, saranno ammesse anche la continuità e la sommabilità, in A, dei quadrati delle derivate parziali prime di $\Delta_2^p u$.

Tutte queste condizioni sono sufficienti ad assicurare l'esistenza (v. Lemma I, n. 2), per quasi tutti i punti Q di $\mathcal{F}A$, dei limiti, determinati e finiti,

$$\lim_{M \to Q} u(M) = \bar{u}(Q), \lim_{M \to Q} \frac{\partial u(M)}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{u}(Q)}{\partial x_i},$$

$$\lim_{M \to Q} \Delta_2^h u(M) = \Delta_2^h \bar{u}(Q), \lim_{M \to Q} \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta_2^h u(M) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta_2^h \bar{u}(Q)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r;\ h = 1, 2, \ldots, p-1),$$

inoltre, nel caso $n = 2p + 1$, del limite

$$\lim_{M \to Q} \Delta_2^p u(M) = \Delta_2^p \bar{u}(Q).$$

I detti limiti devono considerarsi ottenuti nel senso indicato al n. 3 (v. l'introduzione al Lemma II). Per definire il significato delle derivate normali, su $\mathcal{F}A$, delle funzioni $u(Q)$, $\Delta_2^h u(Q)$ (con $h = 1, 2, \ldots, p-1$), porremo:

$$\frac{d u(Q)}{d \nu} = -\sum_i^{1,r} \frac{\partial \bar{u}(Q)}{\partial x_i} \alpha_i(Q), \quad \frac{d}{d \nu} \Delta_2^h u(Q) = -\sum_i^{1,r} \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta_2^h \bar{u}(Q) \alpha_i(Q),$$

avendo $\alpha_i = \alpha_i(Q)$ il significato indicato nell'enunciato del Lemma II.

Il Lemma II assicura la possibilità d'applicare ripetutamente, quante volte occorre, il procedimento d'integrazione per parti accennato al n. precedente. In conclusione tutte le ipotesi qualitative enunciate nel presente n., sono sufficienti ad assicurare sia l'esistenza degli integrali che figurano nelle formule (8_1), (8_2), (9_1), (9_2), sia l'esattezza delle formule stesse.

8. **Enunciato del problema.** — Supposto il *campo A regolare e connesso* [35], indichiamo con $\mathfrak{L}_n$ la classe delle funzioni $u(M)$ definite in A, ivi continue, di quadrato sommabile insieme con le proprie derivate parziali prime e seconde, e inoltre soddisfacenti alla seguente condizione.

I CASO: $n = 2p$. Esistono continue, di quadrato sommabile, dotate di derivate parziali prime e seconde continue e di quadrato sommabile, le funzioni

$$\Delta_2 u, \Delta_2^2 u, \ldots, \Delta_2^{p-1} u.$$

II CASO: $n = 2p + 1$. Esistono continue, di quadrato sommabile, dotate di derivate parziali prime e seconde continue e di quadrato sommabile, le funzioni

$$\Delta_2 u, \Delta_2^2 u, \ldots, \Delta_2^{p-1} u;$$

inoltre la funzione $\Delta_2^p u$ è dotata di derivate parziali prime continue e di quadrato sommabile.

Definiamo ora, come segue, una sottoclasse $\bar{\mathfrak{L}}_n$ di $\mathfrak{L}_n$, che in ogni caso supporremo *non vuota*.

---

[35] Per quanto riguarda la supposta connessione di A, cfr. nota [36].

I CASO: $n = 2p$. Siano $\{f_h(Q)\}, \{g_h(Q)\}$ (con $h = 0, 1, \ldots, p-1$) n funzioni definite su $\mathcal{F}A$, ivi quasi continue e sommabili. Indichiamo con $\overline{\mathcal{L}}_n$ la sottoclasse di $\mathcal{L}_n$, costituita da tutte le funzioni di $\mathcal{L}_n$ per le quali si ha su $\mathcal{F}A$, nel senso specificato al n. precedente:

$$(10_1)\qquad u = f_0, \frac{du}{d\nu} = g_0, \Delta_2 u = f_1, \frac{d\Delta_2 u}{d\nu} = g_1,$$
$$\Delta_2^2 u = f_2, \frac{d\Delta_2^2 u}{d\nu} = g_2, \ldots, \Delta_2^{p-1} u = f_{p-1}, \frac{d\Delta_2^{p-1} u}{d\nu} = g_{p-1}.$$

II CASO: $n = 2p+1$. Siano $\{f_h(Q)\}, \{g_h(Q)\}, f_p(Q)$ (con $h = 0, 1, \ldots, p-1$) n funzioni quasi continue e sommabili su $\mathcal{F}A$. Indichiamo con $\overline{\mathcal{L}}_n$ la sottoclasse di $\mathcal{L}_n$, costituita da tutte le funzioni di $\mathcal{L}_n$ per le quali si ha su $\mathcal{F}A$, nel senso specificato al n. precedente:

$$(10_2)\qquad u = f_0, \frac{du}{d\nu} = g_0, \Delta_2 u = f_1, \frac{d\Delta_2 u}{d\nu} = g_1,$$
$$\Delta_2^2 u = f_2, \frac{d\Delta_2^2 u}{d\nu} = g_2, \ldots, \frac{d\Delta_2^{p-1} u}{d\nu} = g_{p-1}, \Delta_2^p u = f_p.$$

Orbene ci domandiamo se il funzionale

$$I[u] = \begin{cases} \displaystyle\int_A (\Delta_2^p u)^2 \, d\tau & \text{nel } I \textit{ caso,} \\ \displaystyle\int_A |\operatorname{grad} \Delta_2^p u|^2 \, d\tau & \text{» } II \textit{ caso,} \end{cases}$$

sia dotato di minimo assoluto nella classe $\overline{\mathcal{L}}_n$. Nei nn. seguenti si risponderà affermativamente a questa domanda, e anzi si risolverà il problema di determinare il minimo assoluto cercato. All'uopo avranno ufficio essenziale le formule (8_1), (8_2), (9_1), (9_2), le quali verranno senz'altro applicate alle funzioni $u(M)$ di $\mathcal{L}_n$, l'applicazione essendo giustificata da quanto abbiamo detto al n. precedente (36). La (9_1) fornirà un'espressione esplicita per una

(36) L'ipotesi fatta che A sia connesso, non ha nulla d'essenziale perchè, nell'ipotesi contraria, basterebbe risolvere separatamente i singoli problemi di minimo relativi alle singole porzioni connesse costituenti A.

qualunque funzione $u(M)$ della classe $\mathcal{L}_n$, quando n è pari $= 2p$. Si osservi che, in tal caso, l'integrale

$$\int_A s_p(\varrho)\, \Delta_2^p u(Q)\, d\tau_Q ,$$

che compare al secondo membro della (9_1), sarà una funzione della classe $\mathcal{L}_n$ (v. Lemma III n. 4), perciò anche la funzione espressa dalla sommatoria risulterà una funzione della classe $\mathcal{L}_n$.

CAP. III. - ESISTENZA DEL MINIMO DEL FUNZIONALE $I[u] = \int_A (\Delta_2^p u)^2\, d\tau$ NELLA CLASSE $\overline{\mathcal{L}}_{2p}$.

9. Costruzione d'un particolare sistema di funzioni, ortonormale e completo in A. — Indichiamo con B un qualunque campo esterno ad A (cioè tale che la distanza $\overline{A\,B}$ sia positiva), che abbia punti contenuti in ciascuna delle porzioni connesse di cui si compone il campo complementare ad $A + \mathcal{F}A$. Sia $\{\varphi_k(M)\}$ un sistema di funzioni, tutte definite in B, completo in B nel senso di HILBERT. Le nuove funzioni

$$v_k(M) = \int_B s_p(\varrho)\, \varphi_k(Q)\, d\tau_Q , \qquad (\varrho = \overline{M\,Q})$$

riescono p-iperarmoniche e di classe n in $A + \mathcal{F}A$ [37]. Possiamo supporre inoltre che il sistema di funzioni $\{v_k(M)\}$ sia ortonormale in A, verifichi cioè le condizioni

$$\int_A v_h(M)\, v_k(M)\, d\tau = \begin{cases} 1 & \text{per } h = k \\ 0 & \text{» } h \neq k . \end{cases}$$

---

[37] La considerazione di sistemi di funzioni quali le v_k, è utile non solamente per acquisire il teorema d'esistenza dei problemi al contorno considerati in questo lavoro, ma anche per il calcolo numerico della soluzione, mercè l'applicazione dei metodi generali di M. PICONE, fondati sull'impiego delle formule di GREEN. Cfr. M. PICONE: *Appunti di analisi superiore* (Napoli, Rondinella, 1940, pp. 752-765); *Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuove applicazioni della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti* (Atti dell'Accad. delle Scienze di Torino, *75*, 1939-40, pp. 413-426); *Sulla traduzione in equazione integrale lineare di prima specie dei problemi al contorno concernenti i sistemi di equazioni lineari a derivate parziali* (Rendiconti Lincei, s. VIII, vol. II, 1947, pp. 365-371, 485-492, 717-725). Cfr. anche L. AMERIO, loc. cit. alla nota [24], d.

Associamo al sistema $\{v_k(M)\}$ un altro sistema $\{w_i(M)\}$, così da ottenere un unico sistema

$$\{v_k(M)\}, \{w_i(M)\} \qquad (k = 1, 2, \ldots; i = 1, 2, \ldots)$$

che sia ortonormale e inoltre anche hilbertianamente completo in A.

10. Espressione della funzione $u_0(M)$, minimante di $I[u]$. — Indichiamo con $a_k (k = 1, 2, \ldots)$ i seguenti numeri:

$$a_k = -\sum_h^{0,p-1} \int_{\mathcal{F}A} \left(f_h \frac{d\, \Delta_2^{p-1-h} v_k}{d\, \nu} - \Delta_2^{p-1-h} v_k \cdot g_h \right) d\, \sigma\,, \tag{11}$$

e dimostriamo anzitutto che *la serie*

$$\sum_k^{1,\infty} a_k^2$$

è convergente. Infatti specificando, nella (8_1), v in v_k ed u in una qualunque funzione di $\overline{\mathfrak{L}}_n$, si ottiene immediatamente

$$\int_A v_k\, \Delta_2^p u\, d\, \tau = a_k$$

e perciò, in virtù del teor. di PARSEVAL, risulta, qualunque sia u in $\overline{\mathfrak{L}}_n$,

$$I[u] = \sum_k^{1,\infty} a_k^2 + \sum_i^{1,\infty} \left(\int_A w_i\, \Delta_2^p u\, d\, \tau \right)^2.$$

Orbene poniamo:

$$u_0(M) = -\sum_h^{0,p-1} \int_{\mathcal{F}A} \left[f_h(Q) \frac{d\, \Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho)}{d\, \nu} - g_h(Q)\, \Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho) \right] d\, \sigma_Q -$$

$$- \int_A s_p(\varrho) \sum_k^{1,\infty} a_k v_k(Q)\, d\, \tau_Q\,, \qquad (\varrho = \overline{MQ}) \text{ (38)}. \tag{12}$$

---

(38) La circostanza che $\overline{\mathfrak{L}}_n$ non sia vuota, ci ha permesso di dimostrare la convergenza della serie

$$\sum_k^{1,\infty} a_k^2.$$

Inversamente, se tale serie è convergente, la classe $\overline{\mathfrak{L}}_n$ non è vuota.

11. Dimostrazione della proprietà di $u_0(M)$, precedentemente asserita. — a) *La funzione $u_0(M)$ appartiene ad $\mathfrak{Al}_n$.* Infatti, per ipotesi, $\overline{\mathfrak{Al}}_n$ non è vuota: esiste dunque almeno una funzione $u^*(M)$ di $\mathfrak{Al}_n$, la cui espressione è (v. n. 8)

$$u^*(M) = -\sum_h^{0,p-1} \int_{\mathcal{F}A} \left[f_h(Q) \frac{d\,\Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho)}{d\nu} - g_h(Q)\,\Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho) \right] d\sigma_Q -$$

$$- \int_A s_p(\varrho)\,\Delta_2^p u^*(Q)\,d\tau_Q,$$

e perciò la funzione

$$- \sum_h^{0,p-1} \int_{\mathcal{F}A} \left[f_h(Q) \frac{d\,\Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho)}{d\nu} - g_h(Q)\,\Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho) \right] d\sigma_Q$$

appartiene ad $\mathfrak{Al}_n$. Ma, in virtù del Lemma III (v. n. 4), l'integrale

$$\int_A s_p(\varrho) \sum_k^{1,\infty} a_k v_k(Q)\,d\tau_Q$$

appartiene ad $\mathfrak{Al}_n$. Dunque anche $u_0(M)$ appartiene effettivamente ad $\mathfrak{Al}_n$ e valgono perciò le formule analoghe alle (9_1), (9_2) (*v.* n. 8):

$$- \sum_h^{0,p-1} \int_{\mathcal{F}A} \left[\Delta_2^h u_0(Q) \frac{d\,\Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho)}{d\nu} - \frac{d\,\Delta_2^h u_0(Q)}{d\nu} \Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho) \right] d\sigma_Q -$$

(13)

$$- \int_A s_p(\varrho)\,\Delta_2^p u_0(Q)\,d\tau_Q = \begin{cases} u_0(M) & \text{per } M \text{ in } A \\ 0 & \text{» } M \text{ esterno ad } A. \end{cases}$$

b) *La funzione $u_0(M)$ appartiene, più precisamente, ad $\overline{\mathfrak{Al}}_n$.* Infatti, introducendo le espressioni esplicite delle $v_k(M)$ (v. n. 9) nelle (11), si trova (per ogni $k = 1, 2, \ldots$)

$$a_k = -\sum_h^{0,p-1} \int_{\mathcal{F}A} \left\{ f_h(Q) \frac{d}{d\nu} \Delta_2^{p-h-1} \left[\int_B \varphi_k(M)\, s_p(\varrho)\,d\tau_M \right] - \right.$$

$$\left. - g_h(Q)\,\Delta_2^{p-1-h} \left[\int_B \varphi_k(M)\, s_p(\varrho)\,d\tau_M \right] \right\} d\sigma_Q =$$

$$(14_1) \qquad = -\sum_h^{0,p-1} \int_{\dot{\mathcal{F}}A} \left\{ f_h(Q) \frac{d}{d\nu} \left[\int_B \varphi_k(M)\, \Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho)\, d\tau_M \right] - \right.$$

$$\left. - g_h(Q) \left[\int_B \varphi_k(M)\, \Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho)\, d\tau_M \right] \right\} d\sigma_Q =$$

$$= -\sum_h^{0,p-1} \int_B \varphi_k(M)\, d\tau_M \int_{\dot{\mathcal{F}}A} \left\{ f_h(Q) \frac{d\, \Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho)}{d\nu} - g_h(Q)\, \Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho) \right\} d\sigma_Q .$$

D'altra parte si ha pure

$$(14_2) \qquad a_k = \int_B \varphi_k(M)\, d\tau_M \int_A \left[\sum_h^{1,\infty} a_h\, v_h(Q) \right] s_p(\varrho)\, d\tau_Q .$$

Identificando fra loro gli ultimi membri delle (14_1), (14_2), si deduce, *per ogni punto M esterno ad A* [39],

$$(15) \qquad \sum_h^{0,p-1} \int_{\dot{\mathcal{F}}A} \left\{ f_h(Q) \frac{d\, \Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho)}{d\nu} - g_h(Q)\, \Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho) \right\} d\sigma_Q +$$

$$+ \int_A \left[\sum_h^{1,\infty} a_h\, v_h(Q) \right] s_p(\varrho)\, d\tau_Q = 0 .$$

Ma $\Delta_2^p u_0 = \sum_h^{1,\infty} a_h\, v_h$ e perciò, sommando membro a membro la (15) alla (13_2), s'ottiene la relazione:

$$(16) \qquad \sum_h^{0,p-1} \int_{\dot{\mathcal{F}}A} \left\{ [f_h(Q) - \Delta_2^h u_0(Q)] \frac{d\, \Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho)}{d\nu} - \right.$$

$$\left. - \left[g_h(Q) - \frac{d\, \Delta_2^h u_0(Q)}{d\nu} \right] \Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho) \right\} d\sigma_Q = 0 .$$

---

[39] Più precisamente la (15) varrà in ogni punto M di B, e quindi ovunque fuori di A, data l'analicità (fuori di A) della funzione rappresentata dal primo membro della (15) stessa. Come si vede, in questa deduzione, è essenziale l'ipotesi fatta, che B abbia punti contenuti in ciascuna delle porzioni connesse di cui si compone il campo complementare ad $A + \mathcal{F}A$.

Per ogni M di A, la stessa relazione (16) si ottiene semplicemente sottraendo membro a membro la (12) dalla (13_1). La (16) vale dunque sia in A che all'esterno di A.

Se alla (16) si applica successivamente, $p-1$ volte di seguito, l'operatore Δ_2 (intendendo M comuuque estraneo ad $\mathcal{F}A$), s'ottiene la formula

$$\int_{\mathcal{F}A}\left\{[f_{p-1}(Q)-\Delta_2^{p-1}u_0(Q)]\frac{d\,s_1(\varrho)}{d\,\nu}-\right.$$

(17_1)

$$\left.-\left[g_{p-1}(Q)-\frac{d\,\Delta_2^{p-1}u_0(Q)}{d\,\nu}\right]s_1(\varrho)\right\}d\,\sigma_Q=0$$

nel caso $r>2$, s'ottiene invece la formula

$$\int_{\mathcal{F}A}\left\{[f_{p-1}(Q)-\Delta_2^{p-1}u_0(Q)]\,\frac{d\,s_1(\varrho)}{d\,\nu}-\right.$$

(17_2)

$$\left.-\left[g_{p-1}(Q)-\frac{d\,\Delta_2^{p-1}u_0(Q)}{d\,\nu}\right][s_1(\varrho)-L]\right\}d\,\sigma_Q=0$$

(ove L è la costante indicata al n. 4) nel caso $r=2$. In entrambi i casi, in virtù di teoremi noti ([40]), si deduce che, su quasi tutto $\mathcal{F}A$, valgono le identità:

$$\Delta_2^{p-1}u_0(Q)=f_{p-1}(Q),\ \frac{d\,\Delta_2^{p-1}u_0(Q)}{d\,\nu}=g_{p-1}(Q).$$

Se si tien conto di questo primo risultato e si applica successivamente, $p-2$ volte di seguito, l'operatore Δ_2 alla (16), s'ottengono le due formule analoghe alle (17_1), (17_2):

$$\int_{\mathcal{F}A}\left\{[f_{p-2}(Q)-\Delta_2^{p-2}u_0(Q)]\frac{d\,s_1(\varrho)}{d\,\nu}-\left[g_{p-2}(Q)-\frac{d\,\Delta_2^{p-2}u_0(Q)}{d\,\nu}\right]s_1(\varrho)\right\}d\,\sigma_Q=0$$

(nel caso $r>2$),

([40]) Cfr. G. C. EVANS - E. R. C. MILES, *Potential of general masses iu single and double lagers* (Journal of Math., *53*, 1931, pp. 483-516); G. FICHERA, *Teoremi di completezza sulla frontiera di un dominio per taluni sistemi di funzioni* (Ann. di Mat. pura e appl., *27*, s. IV, 1948, pp. 1-28).

$$\int_{\mathcal{F}A} \Big\{ [f_{p-2}(Q) - \Delta_2^{p-2} u_0(Q)] \frac{d s_1(\varrho)}{d \nu} -$$

$$- \Big[g_{p-2}(Q) - \frac{d \Delta_2^{p-2} u_0(Q)}{d \nu} \Big] [s_1(\varrho) - L] \Big\} d \sigma_Q = 0 \qquad \text{(nel caso } r = 2),$$

dalle quali si deduce, su quasi tutto $\mathcal{F}A$,

$$\Delta_2^{p-2} u_0(Q) = f_{p-2}(Q), \quad \frac{d \Delta_2^{p-2} u_0(Q)}{d \nu} = g_{p-2}(Q).$$

Così proseguiremo diminuendo, ogni volta, d'un'unità il numero delle applicazioni successive dell'operatore Δ_2. Infine s'otterrà, direttamente dalla (16),

$$u_0(Q) = f_0(Q), \quad \frac{d u_0(Q)}{d \nu} = g_0(Q)$$

su quasi tutto $\mathcal{F}A$. Valgono dunque, su quasi tutto $\mathcal{F}A$, tutte le condizioni (10_1), e ciò dimostra appunto l'appartenenza di u_0 ad $\bar{\mathcal{U}}_n$.

c) *La funzione* $u_0(M)$ *è effettivamente minimante di* $I[u]$ *in* $\bar{\mathcal{U}}_n$. Infatti si ha (v. n. 10)

$$I[u_0] = \int_A (\Delta_2^p u_0)^2 \, d\tau = \sum_k^{1,\infty} a_k^2 .$$

CAP. IV - ESISTENZA DEL MINIMO DEL FUNZIONALE $I[u] = \int_A |\operatorname{grad} \Delta_2^p u|^2 \, d\tau$ NELLA CLASSE $\bar{\mathcal{U}}_{2p+1}$.

12. Applicazioni delle formule (8_1), (8_2). — Poichè evidentemente $\mathcal{U}_{2p+1} \subset \mathcal{U}_{2p}$, è ancora valida la (8_1), intendendo che u sia una qualunque funzione di $\mathcal{U}_{2p+1}$ e v una qualunque funzione di classe $2p$ in $A + \mathcal{F}A$. Ragionando perciò come al n 6, otteniamo ancora la stessa espressione generale (9_1) per una funzione $u(M)$ di $\mathcal{U}_n$ (con $n = 2p + 1$), ivi intendendo M in A, e ancora otteniamo la formula (9_2), qualunque sia il punto M all'esterno di A.

Quanto alla formula (8_2), osserviamo che in essa la funzione v comparisce soltanto sotto le potenze simboliche del laplaciano Δ_2, e che tali potenze hanno tutte esponente $\geq p$. Dalla (8_2) si deduce dunque immediatamente, sostituendo $\Delta_2^p v$ con v e intendendo ora per v una qualunque fun-

zione di classe $n+1=2p+2$ in $A+\mathcal{F}A$, la formula seguente, più semplice e più adatta ai nostri scopi:

$$\int_A \{(\text{grad } \Delta_2^p u \,.\, \text{grad } v) + u\, \Delta_2^{p+1} v\}\, d\tau =$$

(18)

$$= \sum_h^{0,p-1} \int_{\mathcal{F}A} \left(\Delta_2^h u \frac{d\, \Delta_2^{p-h} v}{d\nu} - \Delta_2^{p-h} v \frac{d\, \Delta_2^h u}{d\nu} \right) d\sigma + \int_{\mathcal{F}A} \Delta_2^p u \frac{dv}{d\nu} d\sigma .$$

13. **Calcolo del vettore $\vec{U}_0(M) = \text{grad } \Delta_2^p u_0(M)$, relativo alla minimante $u_0(M)$ cercata.** — Richiamando le notazioni introdotte al n. 4, dovremo ora considerare la seguente funzione:

$$\bar{s}_{p+1}(\varrho) = \begin{cases} s_{p+1}(\varrho) & \text{per } r \text{ dispari, oppure per } r \text{ pari} > 2p\,, \\ s_{p+1}(\varrho) + \dfrac{H_{r,p+1}}{(2p+2-r)\,2p}\, \varrho^{2p+2-r} & \text{per } r \text{ pari} \leq 2p\,, \end{cases}$$

per la quale si verifica, con un calcolo elementare, che è, in ogni caso,

$$\Delta_2 \bar{s}_{p+1}(\varrho) = s_p(\varrho)\,, \text{ inoltre}$$

$$\Delta_2^p \bar{s}_{p+1}(\varrho) = \begin{cases} s_1(\varrho) & \text{per } r > 2\,, \\ s_1(\varrho) - L & \text{per } r = 2\,, \end{cases}$$

e quindi anche $\Delta_2^{p+1} \bar{s}_{p+1} = 0$.

Fissato un sistema $\{\varphi_k(M)\}$ di funzioni come al n. 9, definiamo le nuove funzioni

$$v_k(M) = \int_B \bar{s}_{p+1}(\varrho)\, \varphi_k(Q)\, d\tau_Q\,, \quad (\varrho = \overline{MQ}),$$

le quali riescono $(p+1)$— iperarmoniche e di classe $n+1$ in $A+\mathcal{F}A$ [41]. Supporremo il sistema di vettori

$$\vec{V}_k(M) = \text{grad } v_k(M) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

---

[41] Anche a proposito di tali funzioni v_k, valgono le osservazioni della nota [37].

ortonormalizzato in A, verificante cioè le condizioni

$$\int_A \vec{V}_h(M)\cdot\vec{V}_k(M)\,d\tau = \begin{cases} 1 & \text{per } h=k \\ 0 & \text{» } h\neq k\,. \end{cases}$$

Dopo ciò indichiamo con $\{\vec{\Psi}_i(M)\}$ un sistema, hilbertianamente completo in A, di vettori

$$\vec{\Psi}_i(M) \equiv \{\psi_{i1}(M), \psi_{i2}(M), \ldots, \psi_{ir}(M)\},$$

le cui r componenti $\psi_{ij}(M)$ $(j=1,2,\ldots,r)$ sono funzioni definite in A, e poniamo

$$\vec{W}_i(M) = \vec{\Psi}_i(M) - \sum_k^{1,\infty} c_k^{(i)}\vec{V}_k(M), \text{ con } c_k^{(i)} = \int_A \vec{\Psi}_i(M)\cdot\vec{V}_k(M)\,d\tau \ (i=1,2,\ldots).$$

Si riconosce subito che il sistema di vettori costituito dalle due successioni

$$\{\vec{V}_k(M)\}, \{\vec{W}_i(M)\} \qquad (k=1,2,\ldots;\ i=1,2,\ldots),$$

è hilbertianamente completo in A: supporremo anche tale sistema ortonormalizzato in A [42].

Consideriamo la seguente successione di numeri:

$$(19)\quad a_k = \sum_h^{0,p-1}\int_{\mathcal{F}A}\left(f_h\frac{d\,\Delta_2^{p-h}v_k}{d\nu} - \Delta_2^{p-h}v_k\cdot g_h\right)d\sigma + \int_{\mathcal{F}A} f_p\frac{d\,v_k}{d\nu}\,d\sigma \quad (\text{per } k=1,2,\ldots)$$

e dimostriamo che *la serie*

$$\sum_k^{1,\infty} a_k^2$$

è convergente [43]. Infatti specificando, nella (18), v in v_k ed u in una qualunque funzione di $\mathfrak{L}_n$, s'ottiene, posto $\vec{U} = \text{grad}\,\Delta_2^p u$,

$$\int_A \vec{U}\cdot\vec{V}_k\,d\tau = a_k,$$

---

[42] S'intende: col criterio sopra indicato relativamente al sistema di vettori $\vec{V}_k(M)$.

[43] A proposito di tale serie, vale un'osservazione analoga a quella della nota [38].

e perciò

$$I[u] = \sum_{k}^{1,\infty} a_k^2 + \sum_{i}^{1,\infty} \left(\int_A \vec{W}_i . \vec{U}\, d\tau \right)^2 .$$

Ne segue che

$$I[u] \geq \sum_{k}^{1,\infty} a_k^2 = \int_A | \vec{U}_0(M) |^2 \, d\tau ,$$

avendo posto

$$\vec{U}_0(M) = \sum_{k}^{1,\infty} a_k \vec{V}_k(M) .$$

Il teorema d'esistenza del minimo sarà acquisito, allorchè avremo fatto vedere che l'equazione

$$\text{grad } \Delta_2^p u = \vec{U}_0(M) \tag{20}$$

è risolubile nella classe $\bar{\mathcal{L}}_n$.

14. **Risoluzione dell'equazione (20) nella classe $\bar{\mathcal{L}}_n$.** — L'equazione

$$\text{grad } \varphi = \vec{U}_0(M) \tag{21}$$

ammette infinite soluzioni φ in A, e una qualunque di esse è univocamente determinata dal valore $\varphi(M_0)$ che ad essa venga prescritto in un punto M_0 di A. Il punto M_0 può prefissarsi ad arbitrio, così pure il valore $\varphi(M_0)$. Per es. la soluzione $\varphi(M)$ tale che $\varphi(M_0) = 0$, è

$$\varphi_0(M) = \sum_{k}^{1,\infty} a_k [v_k(M) - v_k(M_0)] ,$$

tale serie riuscendo uniformemente convergente in A. Ogni soluzione della (21) è dunque del tipo:

$$\varphi(M) = \varphi_0(M) + C ,$$

con C costante arbitraria. Scegliamo tale costante in modo che sia

$$\int_{\mathcal{F}A} (f_p - \varphi)\, d\sigma = 0 ,$$

cioè scegliamo

$$C = \frac{\int_{\mathcal{F}A} (f_p - \varphi_0)\, d\sigma}{\operatorname{mis} \mathcal{F} A},$$

indi poniamo (v. n. 10) [44]

$$(22)\quad u_0(M) = -\sum_h^{0,p-1} \int_{\mathcal{F}A} \left[f_h(Q) \frac{d\, \Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho)}{d\nu} - g_h(Q)\, \Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho) \right] d\sigma_Q -$$

$$- \int_A s_p(\varrho)\, \varphi(Q)\, d\tau_Q, \qquad (\varrho = \overline{MQ}).$$

Vogliamo dimostrare che questa funzione $u_0(M)$ è effettivamente la minimante cercata. Tale dimostrazione non può darsi in modo del tutto analogo a quanto s'è fatto al n. 11: precisamente si dovrà sostituire il ragionamento del n. 11 *b*, con altro non altrettanto semplice. Il n. 11 *a* può invece strettamente imitarsi, potendosi così affermare che sussistono le formule, analoghe alle (13):

$$-\sum_h^{0,p-1} \int_{\mathcal{F}A} \left[\Delta_2^h u_0(Q) \frac{d\, \Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho)}{d\nu} - \frac{d\, \Delta_2^h u_0(Q)}{d\nu} \Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho) \right] d\sigma_Q -$$

$$- \int_A s_p(\varrho)\, \varphi(Q)\, d\tau_Q = \begin{cases} u_0(M) & \text{per } M \text{ in } A \\ 0 & \text{» } M \text{ esterno ad } A. \end{cases}$$

15. **La $u_0(M)$ precedentemente costruita, soddisfa all'ultima delle condizioni (10_2).** — Infatti, introducendo le espressioni esplicite delle $v_k(M)$ (v. n. 13) nelle (19), si trova (per ogni $k = 1, 2, \ldots$) (v. n. 11 *b*)

$$a_k = \sum_h^{0,p-1} \int_B \varphi_k(M)\, d\tau_M \int_{\mathcal{F}A} \left\{ f_h(Q) \frac{d\, \Delta_2^{p-h} \bar{s}_{p+1}(\varrho)}{d\nu} - g_h(Q)\, \Delta_2^{p-h} \bar{s}_{p+1}(\varrho) \right\} d\sigma_Q +$$

$$+ \int_B \varphi_k(M)\, d\tau_M \int_{\mathcal{F}A} f_p(Q) \frac{d\, \bar{s}_{p+1}(\varrho)}{d\nu}\, d\sigma_Q.$$

---

[44] In questa formula, la funzione $\varphi(Q)$ s'identifica con $\Delta_2^p u_0(Q)$, in virtù delle (20), (21) e del lemma III (n. 4).

D'altra parte si ha pure

$$a_k = \int_A \operatorname{grad} \varphi(Q) . \left\{ \int_B \varphi_k(M) \operatorname{grad} \bar{s}_{p+1}(\varrho)\, d\tau_M \right\} d\tau_Q =$$

$$= \int_B \varphi'_k(M)\, d\tau_M \int_A \operatorname{grad} \varphi(Q) . \operatorname{grad} \bar{s}_{p+1}(\varrho)\, d\tau_Q .$$

Si deduce dunque, *per ogni punto M esterno ad A*,

$$\sum_h^{0,p-1} \int_{\mathcal{F}A} \left\{ f_h(Q) \frac{d\, \Delta_2^{p-h} \bar{s}_{p+1}(\varrho)}{d\nu} - g_h(Q)\, \Delta_2^{p-h} \bar{s}_{p+1}(\varrho) \right\} d\sigma_Q +$$

$$+ \int_{\mathcal{F}A} f_p(Q) \frac{d\, \bar{s}_{p+1}(\varrho)}{d\nu} d\sigma_Q - \int_A \operatorname{grad} \varphi(Q) . \operatorname{grad} \bar{s}_{p+1}(\varrho)\, d\tau_Q = 0 . \tag{23}$$

Ragionando ora in modo del tutto analogo a quanto s'è fatto al n. 11, e cioè applicando successivamente, alla (23), p volte di seguito, l'operatore Δ_2 (intendendo M comunque esterno ad A), s'ottiene la formula

$$\int_{\mathcal{F}A} f_p(Q) \frac{d\, s_1(\varrho)}{d\nu} d\sigma_Q - \int_A \operatorname{grad} \varphi(Q) . \operatorname{grad} s_1(\varrho)\, d\tau_Q = 0 . \tag{24}$$

Ma, ricordando che $\Delta_2 s_1 = 0$, si ha

$$\int_A \operatorname{grad} \varphi(Q) . \operatorname{grad} s_1(\varrho)\, d\tau_Q = \int_{\mathcal{F}A} \varphi(Q) \frac{d\, s_1(\varrho)}{d\nu} d\sigma_Q$$

per ogni M esterno ad A, dunque dalla (24) risulta:

$$\int_{\mathcal{F}A} [f_p(Q) - \varphi(Q)] \frac{d\, s_1(\varrho)}{d\nu} d\sigma_Q = 0 . \tag{25}$$

Richiamiamo ora il sistema $\{\varphi_k(Q)\}$ di funzioni definite al n. 9. Poniamo, per ogni $k = 1, 2, \ldots,$

$$\omega_k(Q) = \int_B \varphi_k(M)\, s_1(\varrho)\, d\tau_M .$$

Moltiplicando per le $\varphi_k(M)$ e integrando su B, s'ottiene la successione di relazioni:

$$\int_{\mathcal{F}A} [f_p(Q) - \varphi(Q)] \frac{d\,\omega_k}{d\,\nu}\, d\,\sigma_Q = 0 \qquad (\text{per } k = 1, 2, \ldots),$$

e da queste si deduce (in virtù d'un teorema dimostrato da FICHERA [45]) che è $f_p(Q) = \varphi(Q)$ cioè $f_p(Q) = \Delta_2^p u_0(Q)$ in quasi tutto $\mathcal{F}A$, c.d.d.

16. La funzione $u_0(M)$ appartiene ad $\overline{\mathcal{L}}_n$ e fornisce il minimo di $I[u]$ in $\overline{\mathcal{L}}_n$. Sottraendo membro a membro le due espressioni date al n. 14 per la funzione $u_0(M)$, troviamo che, *per ogni* M *in* A, vale la relazione (già scritta al n. 11)

$$\sum_h^{0,p-1} \int_{\mathcal{F}A} \left\{ [f_h(Q) - \Delta_2^h u_0(Q)] \frac{d\,\Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho)}{d\,\nu} - \right.$$

(16)

$$\left. - \left[g_h(Q) - \frac{d\,\Delta_2^h u_0(Q)}{d\,\nu} \right] \Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho) \right\} d\,\sigma_Q = 0 .$$

Si riconosce facilmente che questa relazione vale anche *per ogni* M *esterno ad* A oppure, ciò ch'è lo stesso (in virtù dell'intima formula del n. 14), che risulta, per ogni M esterno ad A:

$$\sum_h^{0,p-1} \int_{\mathcal{F}A} \left[f_h(Q) \frac{d\,\Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho)}{d\,\nu} - g_h(Q)\, \Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho) \right] d\,\sigma_Q +$$

(26)

$$+ \int_A \varphi(Q)\, s_p(\varrho)\, d\,\tau_Q = 0 .$$

---

(45) Cfr. loc. cit. alla nota (40), §. 3. Secondo il teor. XIX ivi dimostrato, $f_p(Q)$ deve differire per una costante, su quasi tutto $\mathcal{F}A$, da $\varphi(Q)$: e tale costante è nulla, in virtù della scelta della costante C, che abbiamo fatta al n. 14. Cfr. anche G. FICHERA, *Risultati concernenti la risoluzione delle equazioni funzionali lineari dovuti all'Istituto Nazionale per le applicazioni del calcolo* (Memorie dell'Accad. Nazion. Lincei *3*, s. VIII, vol. III, sez. I, fasc. I, 1950, cap. V n. 4).

All'uopo basta riprendere la (23) e ricordare che, in ogni caso, si ha $\Delta_2 \bar{s}_{p+1} = s_p$ (v. n. 13). Si ha, per ogni M esterno ad A,

$$\int_A [\operatorname{grad} \varphi . \operatorname{grad} \bar{s}_{p+1}(\varrho)]\, d\tau = \int_{\mathcal{F}A} \varphi \frac{d\bar{s}_{p+1}(\varrho)}{d\nu}\, d\sigma - \int_A \varphi\, \Delta_2 \bar{s}_{p+1}(\varrho)\, d\tau =$$

$$= \int_{\mathcal{F}A} \varphi \frac{d\bar{s}_{p+1}(\varrho)}{d\nu}\, d\sigma - \int_A \varphi\, s_p(\varrho)\, d\tau,$$

cioè

$$- \int_{\mathcal{F}A} f_p(Q) \frac{d\bar{s}_{p+1}(\varrho)}{d\nu}\, d\sigma + \int_A [\operatorname{grad} \varphi . \operatorname{grad} \bar{s}_{p+1}(\varrho)]\, d\tau +$$

$$+ \int_A \varphi\, s_p(\varrho)\, d\tau = 0$$

da cui, sommando membro a membro alla (23), risulta appunto la (26).

Dopo ciò, la dimostrazione può ormai condursi a termine come al n. 11.

17. **Riassunto dei capitoli III e IV.** — La soluzione del problema propostoci (v. n. 8), è stata completamente conseguita nei due ultimi capitoli e può essere indicata, in forma riassuntiva, come segue [46].

I Caso: $n = 2p$. — Fissato un opportuno sistema $\{v_k(M)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ di funzioni p-iperarmoniche e di classe n in $A + \mathcal{F}A$, ortonormale in A (v. n. 9), s'è calcolata (v. n. 10) la successione di costanti

$$(11) \qquad a_k = - \sum_h^{0,p-1} \int_{\mathcal{F}A} \left(f_h \frac{d\, \Delta_2^{p-1-h} v_k}{d\nu} - \Delta_2^{p-1-h} v_k . g_h \right) d\sigma,$$

indi s'è espressa la minimante $u_0(M)$ dell'integrale

$$\int_A (\Delta_2^p u)^2\, d\tau,$$

---

[46] Per comodità del lettore, vengono qui appresso riscritte le formule più salienti della trattazione fatta.

con la formula

$$u_0(M) = -\sum_h^{0,p-1} \int_{\mathcal{F}A} \left[f_h(Q) \frac{d\,\Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho)}{d\,\nu} - g_h(Q)\,\Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho) \right] d\,\sigma_Q -$$

(12)

$$- \int_A s_p(\varrho) \sum_k^{1,\infty} a_k\, v_k(Q)\, d\,\tau_Q\,, \quad (\varrho = \overline{MQ})\,,$$

ove $s_p(\varrho)$ è la funzione iperarmonica elementare, d'ordine p, definita al n. 4.

II CASO: $n = 2p+1$. — Fissato un opportuno sistema $\{v_k(M)\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ di funzioni $(p+1)$-iperarmoniche e di classe $n+1$ in $A + \mathcal{F}A$, tale che il sistema di vettori

$$\vec{V}_k(M) = \operatorname{grad} v_k(M) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

risulti ortonormale in A (nel senso precisato al n. 13), si è calcolata la successione di costanti

$$(19) \quad a_k = \sum_h^{0,p-1} \int_{\mathcal{F}A} \left(f_h \frac{d\,\Delta_2^{p-h} v_k}{d\,\nu} - \Delta_2^{p-h} v_k \cdot g_h \right) d\,\sigma + \int_{\mathcal{F}A} f_p \frac{d\,v_k}{d\,\nu}\, d\,\sigma \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

e, posto

$$\vec{U}_0(M) = \sum_k^{1\,\infty} a_k\, \vec{V}_k(M)\,,$$

s'è indicata con $\varphi(M)$ (v. n. 14) quella soluzione particolare dell'equazione differenziale vettoriale

$$(21) \qquad \operatorname{grad} \varphi = \vec{U}_0(M)\,,$$

che soddisfa alla condizione

$$\int_{\mathcal{F}A} \varphi\, d\,\sigma = \int_{\mathcal{F}A} f_p\, d\,\sigma\,.$$

Dopo ciò, s'è espressa la minimante $u_0(M)$ dell'integrale

$$\int_A |\operatorname{grad} \Delta_2^p u|^2 \, d\tau ,$$

con la formula

$$u_0(M) = -\sum_h^{0,p-1} \int_{\mathfrak{F}A} \left[f_h(Q) \frac{d\, \Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho)}{d\nu} - g_h(Q)\, \Delta_2^{p-1-h} s_p(\varrho) \right] d\sigma_Q -$$

(22)

$$- \int_A s_p(\varrho)\, \varphi(Q)\, d\tau_Q , \quad (\varrho = \overline{MQ}).$$