

ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

MARIA CINQUINI-CIBRARIO

**Alcuni nuovi teoremi di esistenza per equazioni non
lineari di ordine n di tipo iperbolico**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3^e série, tome 5,
n° 3-4 (1951), p. 329-353*

[<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_3-4_329_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_3-4_329_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1951, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ALCUNI NUOVI TEOREMI DI ESISTENZA PER EQUAZIONI NON LINEARI DI ORDINE n DI TIPO IPERBOLICO

di MARIA CINQUINI-CIBRARIO (a Pavia)

In una nostra memoria di alcuni anni or sono ⁽¹⁾ avevamo sviluppata, nel campo delle funzioni di variabile reale e sotto ampie ipotesi, la teoria delle caratteristiche per l'equazione non lineare di ordine n di tipo iperbolico

$$(I) \quad F\left(x, y; z; \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots; \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1} \partial y}, \dots, \frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right) = 0,$$

o anche, più brevemente

$$(I_a) \quad F(x, y; z; p_{rs}) = 0 \quad (r + s = 1, 2, \dots, n),$$

avendo posto

$$p_{rs} = \frac{\partial^{r+s} z}{\partial x^r \partial y^s}.$$

Tale teoria era stata già sviluppata dal GOURSAT ⁽²⁾ nel solo campo delle funzioni analitiche; egli aveva dimostrato, tra l'altro ⁽³⁾, che esiste una e una sola superficie integrale della (I), che contiene una striscia caratteristica data e passa per una curva data; è questo un caso particolare del problema, detto appunto di GOURSAT, problema che non è ancora mai stato

⁽¹⁾ M. CINQUINI CIBRARIO, *Teoria delle caratteristiche per equazioni non lineari di ordine n di tipo iperbolico*, Ann. di Mat., S. IV, T. XXVI, 1947, p. 95-117. Nel seguito tale memoria sarà indicata con (M_1).

⁽²⁾ E. GOURSAT, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre* (Paris, Hermann, 1896), T. II, Chap. X, p. 296 e seg.

⁽³⁾ E. GOURSAT, l. c., n. 210 e 211.

preso in considerazione nel campo delle funzioni di variabile reale per l'equazione (I) *non lineare di ordine n* (con $n > 2$)⁽⁴⁾.

Nel presente lavoro si dimostra un risultato di carattere generale: *esiste uno e un solo integrale della (I), che contiene una striscia caratteristica data, e inoltre è tale che nei punti di una curva assegnata l'integrale e alcune delle sue derivate dei successivi ordini soddisfano una relazione lineare data*; il risultato vale sotto ipotesi molto larghe.

Questo teorema (TEOR. I), enunciato nel § 1 del presente lavoro, nel caso, in cui la relazione lineare contenga almeno alcune tra le derivate n -esime dell'integrale richiesto $z(x, y)$ della (I), viene dimostrato nel § 2 riconducendosi ai risultati ottenuti in un nostro lavoro recente, relativo ai sistemi quasi-lineari del primo ordine⁽⁵⁾.

Il § 3 è dedicato al caso (TEOR. II), in cui la relazione lineare a cui si è accennato, non contenga alcuna tra le derivate di ordine n ; da tale teorema segue, come caso particolare, il teorema di esistenza e di unicità del GOURSAT (TEOR. III), di cui si è parlato in principio.

Nel § 4 è considerato il caso (TEOR. IV) in cui la relazione lineare in questione, invece che nei punti di una curva data, *deve essere soddisfatta nei punti di una curva caratteristica* della superficie integrale richiesta; di tale caratteristica non è data l'equazione, ma solo il sistema, a cui essa appartiene. Come conseguenza dei risultati del presente lavoro, nel § 4 sono inoltre esposti alcuni complementi alla teoria delle caratteristiche per l'equazione (I), sempre nel campo delle funzioni di variabile reale.

Il § 5 è dedicato al caso, in cui l'equazione (I) sia quasi-lineare, cioè lineare soltanto nelle derivate di ordine massimo, e quindi abbia la forma

$$(I') \quad \sum_{i=0}^n A_{n-i,i} \left(x, y; z; \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots; \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-2} \partial y}, \dots, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}} \right) \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-i} \partial y^i} = B(\dots).$$

(4) Invece per $n=2$ il problema di GOURSAT per l'equazione di tipo iperbolico non lineare nel campo delle funzioni di variabile reale è stato oggetto di ricerche sia di: E. E. LEVI, *Sopra un teorema di esistenza per le equazioni alle derivate parziali del secondo ordine*, Ann. di Mat., S. III, T. XVIII, p. 287-333, che nostre:

M. CINQUINI-CIBRARIO, *Sul problema di GOURSAT per le equazioni del tipo iperbolico non lineari*, Ann. di Mat., S. IV, T. XXI, 1942, p. 189-229.

M. CINQUINI-CIBRARIO, *Sopra alcune questioni relative alle equazioni del tipo iperbolico non lineari*, Ann. di Mat., S. IV, T. XXIII, 1944, p. 1-23.

(5) M. CINQUINI-CIBRARIO, *Sopra la teoria delle caratteristiche per i sistemi di equazioni quasi-lineari alle derivate parziali del primo ordine*, Ann. della Scuola Normale Superiore di Pisa, S. III, Vol. III (1949), p. 161-197. Nel seguito tale memoria sarà indicata con (M_2).

Col presente lavoro la teoria delle caratteristiche per l'equazione (I) di ordine n del tipo iperbolico non lineare risulta pienamente compiuta anche nel campo delle funzioni di variabile reale.

§ 1.

1. La funzione $F(x, y; z; p_{rs})$ ($r + s = 1, 2, \dots, n$) sia definita per $x, y, z; p_{rs}$ ($r + s = 1, 2, \dots, n$) variabili in un campo D e sia ivi D^{II} ⁽⁶⁾; inoltre l'equazione (I) sia *del tipo iperbolico* in tutto il campo D , cioè l'equazione

$$(II) \quad P_{n0} dy^n - P_{n-1,1} dy^{n-1} dx + \dots + (-1)^n P_{0n} dx^n = 0,$$

dove si è posto

$$(1) \quad P_{rs} = \frac{\partial F(x, y; z; p_{rs})}{\partial p_{rs}}$$

abbia sempre n radici reali e distinte, comunque varino $x, y, z; p_{rs}$ nel campo D ; posto $\frac{dy}{dx} = \varrho$, la (II) diviene:

$$(II_a) \quad P_{n0} \varrho^n - P_{n-1,1} \varrho^{n-1} + \dots + (-1)^n P_{0n} = 0.$$

Supponiamo che in tutto D sia

$$(2) \quad P_{n0} \neq 0; \quad P_{0n} \neq 0,$$

cioè che le n radici *distinte* della (II_a)

$$(3) \quad \frac{dy}{dx} = \varrho_i(x, y; z; p_{rs}) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

non siano mai nulle nè infinite nel campo D ⁽⁷⁾.

⁽⁶⁾ Diciamo funzione D^n una funzione finita e continua con tutte le sue derivate, fino a quelle dell'ordine n incluse, e funzione $D^n - L$ una funzione D^n , le cui derivate n -esime sono, inoltre, lipschitziane.

⁽⁷⁾ Si vede facilmente che le ipotesi (2) non sono restrittive per quanto concerne i teoremi, che enunceremo nel presente lavoro; infatti tali teoremi valgono nell'intorno di un elemento fissato $x_0, y_0, z_0, (p_{rs})_0$ ($r + s = 1, 2, \dots, n$), e le ipotesi (2) possono sempre essere soddisfatte nell'intorno di un tale elemento; basta infatti che nel piano x, y si scelgano gli assi coordinati x e y distinti da tutte le n rette per l'origine, aventi come coefficienti angolari rispettivi $\varrho_i(x_0, y_0; z_0; (p_{rs})_0)$ con $i = 1, 2, \dots, n$.

Le equazioni differenziali dei corrispondenti n sistemi di strisce caratteristiche di ordine n sono date dalle ⁽⁸⁾

$$(III) \left\{ \begin{array}{l} dy = \varrho_i(x, y; z; p_{rs}) dx \\ dz = p_{10} dx + p_{01} dy; dp_{rs} = p_{r+1,s} dx + p_{r,s+1} dy \quad (r+s=1, 2, \dots, n-1) \\ P_{n0} dp_{n0} + (-P_{n0} \varrho_i + P_{n-1,1}) dp_{n-1,1} + (P_{n0} \varrho_i^2 - P_{n-1,1} \varrho_i + \\ + P_{n-2,2}) dp_{n-2,2} + \dots + ((-1)^{n-1} P_{n0} \varrho_i^{n-1} + (-1)^{n-2} P_{n-1,1} \varrho_i^{n-2} + \\ \dots + P_{1,n-1}) dp_{1,n-1} + \left(\frac{dF}{dx} \right) dx = 0. \\ P_{n0} dp_{n-1,1} + (-P_{n0} \varrho_i + P_{n-1,1}) dp_{n-2,2} + (P_{n0} \varrho_i^2 - P_{n-1,1} \varrho_i + \\ + P_{n-2,2}) dp_{n-3,3} + \dots + ((-1)^{n-1} P_{n0} \varrho_i^{n-1} + \\ + (-1)^{n-2} P_{n-1,1} \varrho_i^{n-2} + \dots + P_{1,n-1}) dp_{0n} + \left(\frac{dF}{dy} \right) dy = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n) \end{array} \right.$$

dove

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{dF}{dx} \right) = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} p_{10} + \sum_{r+s=1}^{n-1} P_{rs} p_{r+1,s} \\ \left(\frac{dF}{dy} \right) = \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} p_{01} + \sum_{r+s=1}^{n-1} P_{rs} p_{r,s+1} \end{array} \right.$$

2. Sia assegnata una *striscia caratteristica* ⁽⁹⁾ della (I) del sistema corrispondente alla radice ϱ_1 della (II_a) mediante le

$$(IV) \quad \begin{array}{l} y = Y(x); \quad z = \Phi(x); \quad p_{rs} = \Phi_{rs}(x) \\ (r+s=1, 2, \dots, n; \quad x_1 \leq x \leq x_2). \end{array}$$

⁽⁸⁾ Per quanto riguarda la definizione di striscia caratteristica cfr. (M_1), § 1, n. 1 e n. 2, p. 97-98.

Le funzioni (IV), che supponiamo D^I nell'intervallo (x_1, x_2) , costituiscono un sistema di integrali del sistema (III) (con $i=1$) e inoltre soddisfanno la

$$(5) \quad F(x, Y(x); \Phi(x); \Phi_{rs}(x)) = 0$$

identicamente in (x_1, x_2) ⁽⁹⁾.

Si dice ⁽¹⁰⁾ che *un integrale* $z = z(x, y)$ della (I) *contiene la striscia caratteristica* (IV), *se la curva* $y = Y(x)$, *o almeno un suo arco, appartiene al campo* δ *di definizione della funzione* $z(x, y)$, *e se nei punti della curva* $y = Y(x)$, *appartenenti a* δ , *valgono le*

$$(V) \quad z(x, Y(x)) = \Phi(x); \quad \left(\frac{\partial^{r+s} z(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \right)_{y=Y(x)} = \Phi_{rs}(x) \quad (r+s=1, 2, \dots, n)$$

Allora la curva $y = Y(x)$, $z = \Phi(x)$, che appartiene alla superficie integrale della (I) $z = z(x, y)$, è per tale superficie integrale una *curva caratteristica* del sistema corrispondente alla radice ρ_1 della (II_a).

3. Supponiamo, ora e in tutto il seguito del lavoro, che valgano tutte le ipotesi dei precedenti n. 1 e 2, e che inoltre $F(x, y; z; p_{rs})$ sia funzione $D^m - L$ dei suoi argomenti nel campo D , e le funzioni (IV) siano $D^m - L$ in (x_1, x_2) .

Sia x_0 un punto interno a (x_1, x_2) ; posto $y_0 = Y(x_0)$, sia (y_1, y_2) un intervallo, a cui sia interno il punto y_0 .

Sia $x = g(y)$ una funzione $D^m - L$, definita in (y_1, y_2) e tale che

$$(6) \quad x_0 = g(y_0);$$

inoltre tutti i punti della curva $x = g(y)$ per y in (y_1, y_2) siano proiezione nel piano x, y di punti del campo D ; le due curve $y = Y(x)$, $x = g(y)$ non siano tangenti nel punto comune (x_0, y_0) , e dunque valga la

$$(7) \quad 1 - Y'(x_0) g'(y_0) \neq 0.$$

⁽⁹⁾ Come si è già osservato in (M_1) (§ 1, n. 2, pag. 98) è sufficiente che le funzioni (IV) soddisfino le (III) (con $i=1$) in tutto (x_1, x_2) e soddisfino la (5) in un punto qualsiasi di (x_1, x_2) , perchè la (5) sia soddisfatta identicamente in (x_1, x_2) .

⁽¹⁰⁾ (M_1), § 1, n. 2, p. 98.

Siano date $\frac{(n+1)(n+2)}{2} + 1$ funzioni $\varphi_0(y), \varphi_{rs}(y) (r+s=1, 2, \dots, n), G(y)$, definite in (y_1, y_2) , ivi $D^n = L$, e soddisfacenti le condizioni

$$(VI) \quad \varphi_0(y_0) \Phi(x_0) + \sum_{r+s=1}^n \varphi_{rs}(y_0) \Phi_{,s}(x_0) = G(y_0)$$

$$(VII) \quad (\varrho_1)_0^n \varphi_{n0}(y) - (\varrho_1)_0^{n-1} \varphi_{n-1,1}(y) + \dots + (-1)^{n-1} (\varrho_1)_0 \varphi_{1,n-1}(y) + \\ + (-1)^n \varphi_{0n}(y) \neq 0 \quad (y_1 \leq y \leq y_2).$$

dove con $(\varrho_1)_0$ indichiamo il valore della funzione $\varrho_1(x, y; z; p_{rs})$ per

$$x = x_0, y = y_0; z = \Phi(x_0); p_{rs} = \Phi_{,rs}(x_0)$$

(e la stessa convenzione faremo in tutto il seguito del lavoro in casi analoghi).

In queste ipotesi vale il seguente

TEOREMA I. « Esiste uno e un solo integrale $z = z(x, y)$ della (I), che è definito in un campo δ opportuno, a cui è interno il punto (x_0, y_0) , è ivi $D^{n+2} = L$, contiene la striscia caratteristica, definita dalle (IV), e nei punti della curva $x = g(y)$, appartenenti a δ , soddisfa la

$$(VIII) \quad \varphi_0(y) z(g(y), y) + \sum_{r+s=1}^n \varphi_{rs}(y) p_{rs}(g(y), y) = G(y) \gg.$$

4. Il TEOR. VI di $(M_1)^{(11)}$ segue come caso particolare del presente TEOR. I, quando sia identicamente

$$(8) \quad \varphi_0(y) = \varphi_{rs}(y) = 0 \quad (y_1 \leq y \leq y_2; r+s=1, 2, \dots, n-1),$$

e le $\varphi_{n-i,i}(y) (i=0, 1, \dots, n)$ siano costanti in (y_1, y_2) e precisamente abbiano i valori (12)

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{n0}(y) = 0; \varphi_{n-1,1}(y) = (P_{n,0})_0; \varphi_{n-2,2}(y) = (-P_{n0} \varrho_1 + P_{n-1,1})_0; \dots \\ \dots; \varphi_{0,n}(y) = ((-1)^{n-1} P_{n0} \varrho_1^{n-1} + (-1)^{n-2} P_{n-1,1} \varrho_1^{n-2} + \dots + P_{1,n-1})_0. \end{array} \right.$$

⁽¹¹⁾ (M_1) , § 6, p. 112-113.

⁽¹²⁾ Si osservi che, nelle ipotesi particolari (8) e (9), la condizione (VI) coincide colla (1') del l. c. in ⁽¹¹⁾, e la condizione (VII) diviene

$$(n P_{n0} \varrho_1^{n-1} - (n-1) P_{n-1,1} \varrho_1^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1} P_{1,n-1})_0 \neq 0,$$

che è certo soddisfatta, perchè ϱ_1 è radice semplice della (II_α) .

5. La condizione (VI) assicura che l'elemento di ordine n

$$x_0, y_0; \Phi(x_0); \Phi_{rs}(x_0) \quad (r + s = 1, 2, \dots, n)$$

(che appartiene alla superficie integrale della (I) cercata) soddisfa la condizione (VIII). Tenendo conto che dalle (V) segue

$$(10) \quad \Phi'_{n-i,i}(x) = p_{n-i+1,i}(x, Y(x)) + p_{n-i,i+1}(x, Y(x)) \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

derivando la (VIII) e ponendo sia nella relazione ottenuta che nella (10) $x = x_0, y = y_0$, si ottiene un sistema di equazioni lineari nelle

$$p_{n+1-i,i}(x_0, y_0) \quad (i = 0, 1, \dots, n+1);$$

la condizione (VII) (che nel successivo § 2 utilizzeremo per altro scopo) e la (7) assicurano che il determinante di tale sistema è diverso da zero.

In modo analogo si potrebbero calcolare le

$$p_{n+2-i,i}(x_0, y_0) \quad (i = 0, 1, \dots, n+2),$$

e, con opportune ipotesi di derivabilità, le derivate dei successivi ordini dell'integrale $z = z(x, y)$ cercato nel punto (x_0, y_0) .

§ 2.

1. Per dimostrare il TEOR. I ci ricondurremo ad un teorema dimostrato in (M_2) per i sistemi di equazioni quasi-lineari del primo ordine⁽¹³⁾; precisamente dall'equazione (I), derivando rispetto a x , si ottiene il sistema di equazioni quasi-lineari a derivate parziali

$$(IX) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= p_{10}; \frac{\partial p_{10}}{\partial x} = p_{20}, \frac{\partial p_{01}}{\partial x} = p_{11}; \frac{\partial p_{20}}{\partial x} = p_{30}, \dots; \\ \frac{\partial p_{n-1,0}}{\partial x} &= p_{n0}, \frac{\partial p_{n-2,1}}{\partial x} = p_{n-1,1}, \dots, \frac{\partial p_{0,n-1}}{\partial x} = p_{1,n-1}; \\ \frac{\partial p_{n0}}{\partial y} &= \frac{\partial p_{n-1,1}}{\partial x}, \frac{\partial p_{n-1,1}}{\partial y} = \frac{\partial p_{n-2,2}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial p_{1,n-1}}{\partial y} = \frac{\partial p_{0n}}{\partial x} \\ P_{n0} \frac{\partial p_{n0}}{\partial x} &+ P_{n-1,1} \frac{\partial p_{n-1,1}}{\partial x} + \dots + P_{0n} \frac{\partial p_{0n}}{\partial x} + \left(\frac{dF}{dx} \right) = 0 \end{aligned} \right.$$

⁽¹³⁾ (M_2) , § 1, n. 4, p. 166.

Tale sistema contiene $N = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ equazioni nelle N funzioni incognite $z; p_{10}, p_{01}; p_{20}, \dots; p_{n0}, p_{n-1,1}, \dots, p_{0n}$, considerate come funzioni di x, y , indipendenti tra loro. Tenuto conto dell'equazione, che dà le direzioni caratteristiche di un sistema di equazioni quasi-lineari ⁽¹⁴⁾, si verifica facilmente che esse soddisfano l'equazione

$$(1) \quad C = 0,$$

dove, posto $\nu = \frac{n(n+1)}{2}$, è

$$(2) \quad C = \begin{vmatrix} dy & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & dy & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu) & 0 & 0 & \dots & dy & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & dx & dy & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & dx & dy & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & dx & dy \\ 0 & 0 & \dots & 0 & P_{n0} dy & P_{n-1,1} dy & P_{n-2,2} dy & \dots & P_{1,n-1} dy & P_{0n} dy \end{vmatrix}$$

Si verifica, con trasformazioni opportune sul determinante C , che è

$$(3) \quad C = dy^{\nu+1} \left((-1)^n P_{n0} dy^n + (-1)^{n-1} P_{n-1,1} dy^{n-1} dx + \right. \\ \left. + \dots - P_{1,n-1} dy dx^{n-1} + P_{0n} dx^n \right),$$

cioè che le direzioni caratteristiche del sistema (IX) sono, in ogni punto del campo D , la direzione $dy = 0$, contata $\nu + 1$ volte, e le n direzioni caratteristiche distinte dell'equazione (I), definite dalla (II).

Il sistema (IX) ammette dunque un sistema di caratteristiche multiple; di molteplicità $\nu + 1$; per tale sistema è soddisfatta l'IPOTESI A) di (M_2) ⁽¹⁵⁾;

⁽¹⁴⁾ (M_2) . § 1, n. 1, p. 163, form. (II).

⁽¹⁵⁾ (M_2) , § 6, n. 1, p. 186.

infatti per $dy = 0$ la caratteristica del determinante C è $n = N - r - 1$, come si verifica subito.

2. Scriviamo ora le equazioni differenziali delle curve caratteristiche del sistema quasi-lineare (IX), considerate nello spazio a $N + 2$ dimensioni delle variabili $x, y, z; p_{rs}$ ($r + s = 1, 2, \dots, n$) (al quale appartiene il campo D).

Vi è un sistema di curve caratteristiche multiple, di molteplicità $r + 1$, relativo alla radice $dy = 0$ della (1); tenendo conto di quanto è detto in (M_2) circa i sistemi quasi-lineari aventi caratteristiche multiple ⁽¹⁶⁾, e facendo qualche calcolo, si trova che nei punti delle curve di tale sistema (nello spazio a $N + 2$ dimensioni, di cui sopra) valgono le

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} dy = 0; dz = p_{10} dx; dp_{rs} = p_{r+1,s} dx \quad (r + s = 1, 2, \dots, n-1) \\ P_{n0} dp_{n0} + P_{n-1,1} dp_{n-1,1} + \dots + P_{0n} dp_{0n} + \left(\frac{dF}{dx} \right) dx = 0 \end{array} \right.$$

Il sistema di equazioni quasi-lineari (IX) ammette poi (sempre nello spazio accennato a $N + 2$ dimensioni) n sistemi di curve caratteristiche semplici, corrispondenti alle n radici semplici $\frac{dy}{dx} = \varrho_i(x, y, z; p_{rs})$ ($i = 1, 2, \dots, n$) della (1) (che sono le n radici, tutte semplici per ipotesi, della (II_a)); ricordando, anche qui, i risultati di (M_2) ⁽¹⁷⁾ si trova con qualche calcolo che nei punti delle curve di uno di tali sistemi valgono le

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} dy = \varrho_i dx \\ P_{n0} dp_{n0} + (-P_{n0} \varrho_i + P_{n-1,1}) dp_{n-1,1} + (P_{n0} \varrho_i^2 - P_{n-1,1} \varrho_i + \\ + P_{n-2,2}) dp_{n-2,2} + \dots + ((-1)^{n-1} P_{n0} \varrho_i^{n-1} + \\ + (-1)^{n-2} P_{n-1,1} \varrho_i^{n-2} + \dots + P_{1,n-1}) dp_{1,n-1} + \left(\frac{dF}{dx} \right) dx = 0 \\ (i = 1, 2, \dots, n), \end{array} \right.$$

⁽¹⁶⁾ (M_2) , § 6, n. 1, p. 186-187; il sistema (4) del testo è il sistema (III') di p. 187 di (M_2) , nel quale si faccia $\varrho_r = 0$ identicamente, si calcolino le $h_i^{(r,s)}$ mediante le (1) pure di p. 187 di (M_2) e si tenga conto dei valori particolari delle A_{ij}, B_{ij} nel caso del sistema (IX).

⁽¹⁷⁾ (M_2) , § 1, n. 1, p. 163-164; il sistema (5) del testo è il sistema (III) di p. 164 di (M_2) nel quale si ponga ϱ_i al posto di ϱ , si calcolino le h_i mediante le (4) pure di p. 164 di (M_2) e si tenga conto dei valori, che hanno A_{ij}, B_{ij} nel caso del sistema (IX).

In (M_2) viene introdotto anche il determinante ⁽¹⁸⁾

(¹⁸) (M_2), § 6, n. 2, p. 188.

la superficie definita dalle equazioni (7) (che è una superficie integrale del sistema (X)) passa per la curva di equazioni (IV) (che è una curva caratteristica del sistema (IX), relativa alla radice $\frac{dy}{dx} = \varrho_1$ dell'equazione (1)).

Inoltre il sistema (7) di soluzioni delle (IX) soddisfa la condizione (VIII).

4. Inversamente si voglia costruire un sistema di integrali

$$(8) \quad z = z(x, y); \quad p_{rs} = p_{rs}(x, y) \quad (r + s = 1, 2, \dots, n)$$

del sistema (IX), che siano definiti in un campo δ abbastanza piccolo, a cui sia interno il punto (x_0, y_0) , siano ivi $D^u = L$ e soddisfino le (V) e (VIII). Il TEOR I di $(M_2)^{(19)}$ assicura l'esistenza di uno e un solo sistema di integrali del sistema (IX), che soddisfa le condizioni citate.

Sono infatti soddisfatte tutte le ipotesi di tale teorema; in particolare la condizione (11) del § 1, n. 4, p. 166 di (M_2) coincide colla (VI) del presente lavoro; in quanto alla condizione (12) del § 1, n. 4, p. 166 di (M_2) , essa diviene nel caso presente

$$(9) \quad \sum_{j=0}^n \varphi_{n-j,j}(y) (\gamma_{r+2,r+1+j})_0 \neq 0,$$

perchè (cfr. l'espressione (6) del determinante Δ) è

$$(10) \quad (\gamma_{r+2,\lambda})_0 = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, r).$$

Si vede subito che la (9) si può anche scrivere

$$(11) \quad \begin{vmatrix} \varphi_{n0}(y) & \varphi_{n-1,1}(y) & \dots & \varphi_{1,n-1}(y) & \varphi_{0n}(y) \\ (P_{n0})_0 & (P_{n-1,1})_0 & \dots & (P_{1,n-1})_0 & (P_{0n})_0 \\ (P_{n0})_0 & (-P_{n0}\varrho_2 + P_{n-1,1})_0 & \dots & ((-1)^{n-1}P_{n0}\varrho_2^{n-1} + \dots + P_{1,n-1})_0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ (P_{n0})_0 & (-P_{n0}\varrho_n + P_{n-1,1})_0 & \dots & ((-1)^{n-1}P_{n0}\varrho_n^{n-1} + \dots + P_{1,n-1})_0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

e si verifica, tenendo conto che $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ sono le n radici dell'equa-

⁽¹⁹⁾ (M_2) , § 1, n. 4, p. 166; cfr. anche § 6, n. 3, p. 188.

zione (II_a) e facendo qualche trasformazione sul determinante, che sta a primo membro della (11), che la (11) equivale alla condizione (VII).

5. Dall'esistenza e dall'unicità del sistema (8) di integrali del sistema di equazioni quasi-lineari (IX), soddisfacente le (V) e (VIII) segue l'esistenza e l'unicità dell'integrale della (1), che soddisfa il TEOR. I. Dalle (IX) segue infatti

$$(12) \quad \frac{\partial^2 p_{n-1-j,j}(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial p_{n-1-j,j+1}(x, y)}{\partial x} \quad (j = 0, 1, \dots, n-1)$$

in tutto δ , e che quindi in tutto δ

$$(13) \quad \frac{\partial p_{n-1-j,j}(x, y)}{\partial y} = p_{n-1-j,j+1}(x, y) + H_{n-1-j,j}(y) \quad (j = 0, 1, \dots, n-1),$$

dove le $H_{n-1-j,j}(y)$ sono funzioni opportune della sola y ; ora dalle (IX) segue, in particolare, che

$$(14) \quad \frac{\partial p_{n-1-j,j}(x, y)}{\partial x} = p_{n-j,j}(x, y)$$

e dalle condizioni (V) segue che

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{n-1-j,j}(x, Y(x)) = \Phi_{n-1-j,j}(x); p_{n-j,j}(x, Y(x)) = \Phi_{n-j,j}(x); \\ p_{n-1-j,j+1}(x, Y(x)) = \Phi_{n-1-j,j+1}(x). \end{array} \right.$$

Sulla curva $y = Y(x)$ è dunque

$$(16) \quad \Phi'_{n-1-j,j}(x) = \Phi_{n-j,j}(x) + \left[\frac{\partial p_{n-1-j,j}(x, y)}{\partial y} \right]_{y=Y(x)} Y'(x).$$

Ma le funzioni (IV) soddisfano il sistema di equazioni differenziali (III) (con $i = 1$) in tutto (x_1, x_2) , e quindi, in particolare, la

$$(17) \quad \Phi'_{n-1-j,j}(x) = \Phi_{n-j,j}(x) + \Phi_{n-1-j,j+1}(x) Y'(x).$$

Poichè $Y'(x) \neq 0$ in tutto (x_1, x_2) , dal confronto delle (16) e (17) e dell'ultima delle (15) segue

$$(18) \quad \left[\frac{\partial p_{n-1-j,j}(x, y)}{\partial y} \right]_{y=Y(x)} = p_{n-1-j,j+1}(x, Y(x)).$$

Dalla condizione $Y'(x) \neq 0$ in tutto (x_1, x_2) segue che l'equazione della curva $y = Y(x)$ si può porre anche nella forma $x = \xi(y)$; facendo $x = \xi(y)$ nelle (13) e (18), e confrontando le due relazioni così ottenute segue che in tutto δ è ⁽²⁰⁾

$$(19) \quad \frac{\partial p_{n-1-j,j}(x, y)}{\partial y} = p_{n-1-j,j+1}(x, y) \quad (j = 0, 1, \dots, n-1).$$

Dal confronto delle (14) e (19) segue

$$(20) \quad \frac{\partial p_{n-1-j,j}(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial p_{n-2-j,j+1}(x, y)}{\partial x} \quad (j = 0, 1, \dots, n-2)$$

A partire dalle (IX) e dalle (20) si ragiona sulle $p_{n-2-j,j}(x, y)$ ($j = 0, 1, \dots, n-2$) come si è ragionato or ora sulle $p_{n-1-j,j}(x, y)$ ($j = 0, 1, \dots, n-1$); e così di seguito successivamente sulle $p_{n-3-j,j}(x, y)$ ($j = 0, 1, \dots, n-3$), sulle $p_{n-4-j,j}(x, y)$ ($j = 0, 1, \dots, n-4$), ..., e infine sulle $p_{10}(x, y)$, $p_{01}(x, y)$, $z(x, y)$. Ne resta provato che in tutto δ

$$(21) \quad p_{rs}(x, y) = \frac{\partial^{r+s} z(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \quad (r + s = 1, 2, \dots, n).$$

La superficie $z = z(x, y)$ soddisfa le condizioni (V) e (VIII); per l'ultima delle (IX) nei punti di tale superficie è

$$(22) \quad \frac{d F(x, y; z(x, y); p_{rs}(x, y))}{d x} = 0$$

Poichè per le ipotesi fatte nel § 1, n. 2 sulle funzioni (IV) l'equazione

$$(I) \quad F(x, y; z(x, y); p_{rs}(x, y)) = 0$$

è soddisfatta nei punti della curva $y = Y(x)$ appartenenti a δ , e l'equazione di tale curva si può scrivere $x = \xi(y)$, dalla (22) segue che l'equazione (I) è soddisfatta in ogni punto della superficie $z = z(x, y)$ costruita ⁽²¹⁾.

Essa è dunque una superficie integrale della (I) e il TEOR. I è completamente dimostrato.

⁽²⁰⁾ Si suppone che il campo δ sia scelto (opportunamente piccolo) in modo da essere tutto ricoperto dalle parallele all'asse x per i punti della curva $x = \xi(y)$.

⁽²¹⁾ Cfr. la precedente nota ⁽²⁰⁾.

§ 3.

1. Nel presente paragrafo supponiamo che nella relazione (VIII) *non* compaiano le derivate n^{esima} ; precisamente sia h ($h < n$) l'ordine massimo delle derivate, che compaiono nella (VIII), così che tale relazione abbia la forma

$$(X) \quad \varphi_0(y) z(g(y), y) + \sum_{r+s=1}^h \varphi_{rs}(y) p_{rs}(g(y), y) = G(y)$$

od anche

$$(X_a) \quad \varphi_0(y) z(g(y), y) + \sum_{r+s=1}^{h-1} \varphi_{rs}(y) p_{rs}(g(y), y) + \\ + \sum_{j=0}^h \varphi_{h-j,j}(y) p_{h-j,j}(g(y), y) = G(y).$$

Supposto che le funzioni $g(y)$, $\varphi_0(y)$, $\varphi_{rs}(y)$ ($r+s=1, 2, \dots, h$), $G(y)$ siano $D^{n-h+2} = L$ in (y_1, y_2) , derivando $n-h$ volte la (X_a) si ottiene una relazione della forma

$$(1) \quad \psi_0(y) z(g(y), y) + \sum_{r+s=1}^{n-1} \psi_{rs}(y) p_{rs}(g(y), y) + \\ + \sum_{j=0}^n \psi_{n-j,j}(y) p_{n-j,j}(g(y), y) = G^{(n-h)}(y),$$

dove le funzioni $\psi_{rs}(y)$ ($r+s=0, 1, \dots, n$) si calcolano facilmente mediante le $\varphi_0(y)$, $\varphi_{rs}(y)$ ($r+s=1, 2, \dots, h$), $g'(y)$ e le loro successive derivate; in particolare è

$$(2) \quad \psi_{n-j,j}(y) = \sum_{\lambda=0}^{n-h} \binom{n-h}{\lambda} g'^{n-h-\lambda}(y) \varphi_{h-j+\lambda, j-\lambda}(y)$$

avendo posto $\varphi_{rs}(y) = 0$ identicamente per $r < 0$, oppure $s < 0$. L'ipotesi (VI) del § 1 è qui sostituita dalle condizioni

$$(XI) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0(y_0) \Phi(x_0) + \sum_{r+s=1}^h \varphi_{rs}(y_0) \Phi_{rs}(x_0) = G(y_0) \\ \frac{d^i}{d y^i} \left[\varphi_0(y) z(g(y), y) + \sum_{r+s=1}^h \varphi_{rs}(y) p_{rs}(g(y), y) \right]_{\substack{y=y_0 \\ z=\Phi(x_0) \\ p_{rs}=\Phi_{rs}(x_0)}} = \\ = G^{(i)}(y_0) \quad (i=1, 2, \dots, n-h) \end{array} \right.$$

La (VII) del § 1 diviene nel caso presente

$$(XII) \quad (\varrho_1)_0^n \psi_{n0}(y) - (\varrho_1)_0^{n-1} \psi_{n-1,1}(y) + \dots + (-1)^{n-1} (\varrho_1)_0 \psi_{1,n-1}(y) + \\ + (-1)^n \psi_{0n}(y) \neq 0,$$

dove le $\psi_{n-j,j}(y)$ ($j = 0, 1, \dots, n$) sono date dalle (2).

Ci si è così ricondotti alle ipotesi del TEOR. I, e questo assicura l'esistenza e l'unicità di un integrale $z = z(x, y)$ della (I), che contiene la striscia caratteristica (IV) e nei punti della curva $x = g(y)$ soddisfa la condizione (1).

Integrando la (1) rispetto a y successivamente $n - h$ volte e tenendo conto delle (XI), si verifica che valgono le

$$(3) \quad \frac{d^i}{dy^i} \left[\varphi(y) z(g(y), y) + \sum_{r+s=1}^h \varphi_{rs}(y) p_{rs}(g(y), y) \right] = G^{(i)}(y) \\ (i = n - h - 1, n - h - 2, \dots, 2, 1),$$

e infine che vale la (X).

Si ha così il

TEOREMA II. « Nelle stesse ipotesi del TEOR. I circa la funzione $F(x, y; z; p_{rs})$ e le funzioni (IV), se $g(y), \varphi_0(y), \varphi_{rs}(y)$ ($r + s = 1, 2, \dots, h$), $G(y)$ sono funzioni $D^{n-h+2} = L$ in (y_1, y_2) , se il punto $y_0 = Y(x_0)$ è interno a (y_1, y_2) ed è

$$(4) \quad x_0 = g(y_0), \quad 1 - Y'(x_0) g'(y_0) \neq 0,$$

e se inoltre valgono le (XI) e (XII), allora esiste uno e un solo integrale $z = z(x, y)$ della (I), che è definito in un campo δ sufficientemente piccolo, contenente all'interno il punto (x_0, y_0) , è ivi $D^{n+2} = L$, contiene la striscia caratteristica (IV), e nei punti della curva $x = g(y)$, appartenenti a δ , soddisfa la condizione (X) ».

2. Si supponga, in particolare, che sia $h = 0$, e che $\varphi_0(y)$ non si annulli mai in (y_1, y_2) ; allora posto

$$(5) \quad Z(y) = \frac{G(y)}{\varphi_0(y)}$$

la condizione (X) diviene

$$(XIII) \quad z(g(y), y) = Z(y),$$

cioè è dato il valore dell'integrale richiesto $z(x, y)$ nei punti della curva $x = g(y)$.

Le condizioni (XI) divengono

$$(XIV) \left\{ \begin{array}{l} \Phi(x_0) = Z(y_0) \\ \left[\frac{d^i z(g(y), y)}{d y^i} \right]_{\substack{y=y_0 \\ p_{rs}=\Phi_{rs}(x_0)}} = Z^{(i)}(y_0) \quad (i=1, 2, \dots, n), \end{array} \right.$$

mentre la (XII) diviene, come si vede subito,

$$(6) \quad 1 - (Q_1)_0 g'(y) \neq 0,$$

certo soddisfatta, almeno per $|y - y_0|$ abbastanza piccolo, perchè $(Q_1)_0 = Y(x_0)$ e vale la seconda delle (4).

Si ha così il:

TEOREMA III « *Nelle stesse ipotesi del TEOR. I per la funzione*

$$F(x, y; z; p_{rs})$$

e per le funzioni (IV), se $g(y), Z(y)$ sono funzioni $D^{n+2} - L$ nell'intervallo (y_1, y_2) , a cui è interno il punto $y_0 = Y(x_0)$, e se valgono le (4) e (XIV), esiste uno e un solo integrale della (I) $z = z(x, y)$ definito in un campo δ sufficientemente piccolo, al quale è interno il punto (x_0, y_0) , e ivi $D^{n+2} - L$, che contiene la striscia caratteristica (IV), e nei punti della curva $x = g(y)$, appartenenti a δ , si riduce ad una funzione assegnata $Z(y)$ ».

Geometricamente: « *Esiste una e una sola superficie integrale Σ della (I), che contiene una striscia caratteristica data (IV) e passa per una curva (in generale) sghemba A data, di equazioni*

$$(7) \quad x = g(y), z = Z(y).$$

La curva A taglia la curva Γ di equazioni

$$(8) \quad y = Y(x), z = \Phi(x),$$

sostegno della striscia caratteristica (IV), ma non le è tangente; Γ è curva caratteristica della superficie integrale Σ costruita (cfr. il § 1, n. 2 in fine).

Il TEOR. III è il risultato, al quale si era accennato nell'introduzione, già ottenuto dal GOURSAT nel solo campo delle funzioni analitiche⁽²²⁾; tale

⁽²²⁾ E. GOURSAT, l. c. nella nota ⁽³⁾.

risultato è fondamentale per la teoria delle caratteristiche delle equazioni di ordine n .

Nel caso particolare $n=2$ il TEOR. III è già stato dimostrato nelle nostre due Memorie citate nella nota ⁽⁴⁾; esso segue, come caso particolare, dalla risoluzione, fatta in tali lavori, del problema di GOURSAT per l'equazione

$$(a) \quad F\left(x, y; z; \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Nel caso $n=2$ vi è qualche riduzione nelle ipotesi, rispetto al caso $n > 2$ ⁽²³⁾.

Invece il TEOR. I e il TEOR. II (nel quale per $n=2$ è necessariamente $h=1$) hanno carattere di novità anche per il caso $n=2$.

§ 4.

1. Nel presente paragrafo supponiamo soddisfatte tutte le ipotesi fatte nel § 1, e in particolare le (VI) e (VII), tranne quelle relative alla curva $x=g(y)$; in tali ipotesi vale il:

TEOREMA IV « Esiste uno e un solo integrale $z=z(x, y)$ della (I), definito in un campo δ opportuno, a cui è interno il punto (x_0, y_0) , ivi $D^{n+2} - L$, che contiene la striscia caratteristica (IV), e nei punti di una sua curva caratteristica C , passante per il punto $(x_0, y_0, \Phi(x_0))$ e appartenente a un ben determinato sistema, diverso da quello a cui appartiene la striscia caratteristica assegnata (IV), soddisfa la condizione

$$(XV) \quad \varphi_0(y) z(x, y) + \sum_{r+s=1}^n \varphi_{rs}(y) p_{rs}(x, y) = G(y) \gg.$$

La curva caratteristica C non è data, ma è dato soltanto il sistema, a cui essa appartiene.

Per dimostrare il TEOR. IV si ragiona in modo simile a quello tenuto nel § 2, riconducendo il teorema stesso ad un teorema analogo di esistenza e di unicità, relativo al sistema di equazioni quasi-lineari del primo ordine (IX) contenuto in (M_2) ⁽²⁴⁾.

⁽²³⁾ Cfr. la prima delle memorie citate in ⁽⁴⁾, § 6, p. 220-224, e la seconda, § 3 p. 11-19.

⁽²⁴⁾ (M_2) , § 3, n. 1 e n. 2, p. 174-175, TEOR. II.

Il TEOR. III di (M_1) ⁽²⁵⁾ è un caso particolare dell'attuale TEOR. IV, quando sia identicamente in (y_1, y_2)

$$\varphi_0(y) = \varphi_{rs}(y) = 0 \quad (r + s = 1, 2, \dots, n-1)$$

e le $\varphi_{n-i,i}(y)$ ($i = 0, 1, \dots, n$) siano costanti in (y_1, y_2) e precisamente abbiano i valori dati dalle (9) del § 1, n. 4.

2. Come conseguenza di uno qualsiasi dei TEOREMI I, II, III, IV del presente lavoro si possono dimostrare di nuovo i TEOR. I e II di (M_1) ⁽²⁶⁾, relativi all'esistenza di infinite superfici integrali della (I), che contengono una data striscia caratteristica, e all'esistenza di infinite superfici integrali della (I), che hanno con una data superficie integrale un contatto di ordine n nei punti di una sua curva caratteristica; come è ben noto, questi ultimi due teoremi sono fondamentali nella teoria delle caratteristiche per equazioni non lineari di ordine n di tipo iperbolico.

3. Il TEOR. IV costituisce una nuova conferma di quanto è detto in (M_1) ⁽²⁷⁾, che cioè: « date due strisce caratteristiche (di ordine n) della (I), appartenenti a due diversi sistemi, e aventi in comune un elemento (di ordine n) non esiste, in generale, alcuna superficie integrale della (I), che le contenga entrambe; se tale superficie integrale esiste, essa è unica ».

Siano infatti assegnate la striscia caratteristica (IV) relativa alla radice ϱ_1 della (II_a) , e un'altra striscia caratteristica, relativa p. es. alla radice ϱ_2 della (II_a) , di equazioni ⁽²⁸⁾

$$(1) \quad x = X(y); \quad z = \Psi(y); \quad p_{rs} = \Psi_{rs}(y) \quad (r + s = 1, 2, \dots, n),$$

dove le funzioni $X(y)$, $\Psi(y)$, $\Psi_{rs}(y)$ sono supposte $D^n - L$ nell'intervallo (y_1, y_2) , al quale è interno il punto $y_0 = Y(x_0)$, e soddisfano inoltre la

$$(2) \quad x_0 = X(y_0); \quad \Psi(y_0) = \Phi(x_0); \quad \Psi_{rs}(y_0) = \Phi_{rs}(x_0) \quad (r + s = 1, 2, \dots, n).$$

La (XV) può, nel caso presente, essere sostituita dalla condizione

$$(3) \quad p_{0n}(x, y) = \Psi_{0n}(y)$$

⁽²⁵⁾ (M_1) , § 4, n. 1, p. 108, TEOR. III.

⁽²⁶⁾ (M_1) , § 1, n. 2, p. 99, TEOR. I e TEOR. II.

⁽²⁷⁾ (M_1) , § 4, n. 2, p. 109-110; il risultato è ivi ottenuto come conseguenza del TEOR. III (§ 4, n. 1, p. 108) dello stesso lavoro.

⁽²⁸⁾ Poichè si suppone $\varrho_2 \neq 0$ si può prendere y come variabile indipendente, invece di x .

nei punti della curva caratteristica del sistema relativo alla radice ϱ_2 della (II_a) e passante per il punto $(x_0, y_0, \Phi(x_0))$ della superficie integrale cercata. Il TEOR. IV assicura l'esistenza e l'unicità della superficie integrale $z = z(x, y)$ che contiene la striscia caratteristica (IV) e soddisfa la condizione or ora accennata; però non è detto che la superficie integrale così costruita contenga la striscia caratteristica (1).

Fa eccezione, come già si è osservato in $(M_1)^{(29)}$, il caso $n = 2$; per $n = 2$ il TEOR. IV equivale a un teorema dimostrato nei nostri lavori citati nella nota ⁽⁴⁾, che assicura *l'esistenza e l'unicità dell'integrale dell'equazione (a), che contiene due strisce caratteristiche (del secondo ordine) assegnate, aventi in comune un elemento (del secondo ordine)* ⁽³⁰⁾; per $n = 2$ vi è qualche riduzione nelle ipotesi.

§ 5.

1. Sia data una equazione quasi-lineare

$$(I') \quad \sum_{i=0}^n A_{n-i,i} \left(x, y, z; \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dots; \dots; \right. \\ \left. \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-2} \partial y}, \dots, \frac{\partial^{n-1} z}{\partial y^{n-1}} \right) \frac{\partial^n z}{\partial x^{n-i} \partial y^i} = B(\dots).$$

Le $A_{n-i,i}$ ($i = 0, 1, \dots, n$), B siano definite in un campo D dello spazio a $\frac{n(n+1)}{2} + 2$ dimensioni, nel quale variano le $x, y, z; p_{rs}$ ($r + s = 1, 2, \dots, n - 1$), e ivi D' . Inoltre la (I') sia di tipo iperbolico in tutto D , cioè l'equazione

$$(II') \quad A_{n0} dy^n - A_{n-1,1} dy^{n-1} dx + \dots + (-1)^n A_{0n} dx^n = 0$$

abbia sempre n radici reali e distinte, comunque varino $x, y, z; p_{rs}$ ($r + s = 1, 2, \dots, n - 1$) nel campo D .

Supponiamo che in tutto D sia ⁽³¹⁾

$$(1) \quad A_{n0} \neq 0; \quad A_{0n} \neq 0.$$

⁽²⁹⁾ (M_1) , § 4, n. 2, p. 109-110.

⁽³⁰⁾ Cfr. il primo dei lavori citati in ⁽⁴⁾, § 6, in particolare p. 223-224, e il secondo di tali lavori, § 3, n. 4, p. 17, TEOR. III (cfr. pure § 3, n. 2 e n. 3, p. 14-16).

⁽³¹⁾ Le condizioni (1) non sono restrittive per quanto riguarda i teoremi del presente paragrafo; cfr. la nota ⁽⁷⁾.

Posto $\frac{dy}{dx} = \varrho$, la (II') si può scrivere

$$(II'_a) \quad A_{n0} \varrho^n - A_{n-1,1} \varrho^{n-1} + \dots + (-1)^n A_{0n} = 0;$$

e questa equazione ha per ipotesi in ogni punto del campo D n radici $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_n$ tutte distinte, e mai nulle nè infinite.

Ad ognuna delle n radici della (II'_a) corrisponde un *sistema di striscie caratteristiche di ordine $n-1$* ⁽³²⁾, definito dalle equazioni differenziali

$$(III') \quad \left\{ \begin{array}{l} dy = \varrho_i dx; \quad dz = p_{10} dx + p_{01} dy; \quad dp_{rs} = p_{r+1,s} dx + p_{r,s+1} dy \\ \hspace{15em} (r+s=1, 2, \dots, n-2). \\ A_{n0} dp_{n-1,0} + (-A_{n0} \varrho_i + A_{n-1,1}) dp_{n-2,1} + (A_{n0} \varrho_i^2 - A_{n-1,1} \varrho_i + \\ \hspace{10em} + A_{n-2,2}) dp_{n-3,2} + \dots + ((-1)^{n-1} A_{n0} \varrho_i^{n-1} + \\ \hspace{10em} + (-1)^{n-2} A_{n-1,1} \varrho_i^{n-2} + \dots + A_{n-1,1}) dp_{0,n-1} = \\ \hspace{10em} = B dx, \end{array} \right.$$

nelle quali non compaiono le derivate n^e di $z(x, y)$.

2. Sia assegnata una *striscia caratteristica (di ordine $n-1$)* della (I) del sistema corrispondente alla radice ϱ_1 della (II_a) mediante le

$$(IV') \quad y = Y(x); \quad z = \Phi(x); \quad p_{rs} = \Phi_{rs}(x) \\ (r+s=1, 2, \dots, n-1; x_1 \leq x \leq x_1).$$

Le funzioni (IV'), che supponiamo D^1 in (x_1, x_2) , costituiscono in (x_1, x_2) un sistema di integrali delle (III'), nelle quali si ponga $i=1$.

Si dice che un integrale $z = z(x, y)$ delle (I') contiene la *striscia caratteristica (IV')*, di ordine $n-1$, se la curva $y = Y(x)$, o almeno un suo arco parziale, appartiene al campo δ di definizione di $z(x, y)$, e se inoltre nei punti della curva $y = Y(x)$, appartenenti a δ , valgono le

$$(V') \quad z(x, Y(x)) = \Phi(x); \quad \left[\frac{\partial^{r+s} z(x, y)}{\partial x^r \partial y^s} \right]_{y=Y(x)} = \Phi_{rs}(x) \\ (r+s=1, 2, \dots, n-1).$$

⁽³²⁾ Per quanto è detto nel presente numero e nel successivo n. 2 cfr. (M_1), § 7, n. 1 e n. 2, p. 113-114.

La curva $y = Y(x)$, $z = \Phi(x)$ appartiene allora alla superficie integrale della (I') $z = z(x, y)$ ed è una sua curva caratteristica (del sistema corrispondente alla radice ϱ_1 della (II'_a)).

3. Per la (I') valgono, naturalmente, tutti i risultati ottenuti nei precedenti §§ 1-4 per l'equazione generale (I), ma il fatto che la (I') ammetta striscie caratteristiche di ordine $n-1$ permette di dimostrare per la (I') qualche risultato ulteriore.

Si supponga, qui e in tutto il seguito del presente paragrafo, che le $A_{n-i, i}$ ($i = 0, 1, \dots, n$), B siano funzioni $D^n - L$ dei loro argomenti in tutto D , e che le funzioni (IV') siano $D^n - L$ in (x_1, x_2) . Sia x_0 un punto interno a (x_1, x_2) , e sia (y_1, y_2) un intervallo, a cui sia interno il punto $y_0 = Y(x_0)$. Sia assegnata una funzione $x = g(y)$ definita in (y_1, y_2) , ivi $D^n - L$ e soddisfacente le

$$(2) \quad x_0 = g(y_0); \quad 1 - Y'(x_0)g'(y_0) \neq 0.$$

Siano date inoltre $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ funzioni $\varphi_0(y), \varphi_{rs}(y)$ ($r+s=1, 2, \dots, n-1$), $G(y)$, definite in (y_1, y_2) , ivi $D^n - L$ e soddisfacenti le

$$(VI') \quad \varphi_0(y_0)\Phi(x_0) + \sum_{r+s=1}^{n-1} \varphi_{rs}(y_0)\Phi_{rs}(x_0) = G(y_0)$$

$$(VII') \quad (\varrho_1)_0^{n-1} \varphi_{n-1,0}(y) - (\varrho_1)_0^{n-2} \varphi_{n-2,1}(y) + \dots + \\ + (-1)^{n-2} (\varrho_1)_0 \varphi_{1,n-2}(y) + (-1)^{n-1} \varphi_{0,n-1}(y) \neq 0.$$

In queste ipotesi vale il

TEOREMA I'. « Esiste uno e un solo integrale della (I') $z = z(x, y)$, che è definito in un campo δ abbastanza piccolo del piano xy , a cui è interno il punto (x_0, y_0) , è ivi $D^{n+1} - L$, contiene la striscia caratteristica (IV') di ordine $n-1$ e soddisfa la condizione

$$(VIII') \quad \varphi_0(y)z(g(y), y) + \sum_{r+s=1}^{n-1} \varphi_{rs}(y)p_{rs}(g(y), y) = G(y) \quad (33) ».$$

(33) Il TEOR. VI' di (M_1) (§ 7, n. 4, p. 115) è un caso molto particolare del TEOR. IV' del testo, nell'ipotesi che sia, identicamente in (y_1, y_2) ,

$$(*) \quad \varphi_0(y) = \varphi_{rs}(y) = 0 \quad (r+s=1, 2, \dots, n-2),$$

e che le $\varphi_{n-1-i, i}(y)$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) siano costanti in (y_1, y_2) ed abbiano i valori

$$(**) \quad \begin{cases} \varphi_{n-1,0} = (A_{n0})_0; & \varphi_{n-2,1} = (-A_{n0}\varrho_1 + A_{n-1,1})_0; \dots; \\ \varphi_{0,n-1} = ((-1)^{n-1}A_{n0}\varrho_1^{n-1} + (-1)^{n-2}A_{n-1,1}\varrho_1^{n-2} + \dots + A_{1,n-1})_0 \end{cases}$$

4. Per dimostrare il TEOR. IV' ci si riconduce al sistema quasi lineare

$$(IX') \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial z}{\partial x} = p_{10}; \quad \frac{\partial p_{10}}{\partial x} = p_{20}, \quad \frac{\partial p_{01}}{\partial x} = p_{11}; \quad \frac{\partial p_{20}}{\partial x} = p_{30}, \dots; \dots; \\ \frac{\partial p_{n-2,0}}{\partial x} = p_{n-1,0}, \quad \frac{\partial p_{n-3,1}}{\partial x} = p_{n-2,1}, \dots, \frac{\partial p_{0,n-2}}{\partial x} = p_{1,n-2}; \\ \frac{\partial p_{n-1,0}}{\partial y} = \frac{\partial p_{n-2,1}}{\partial x}, \quad \frac{\partial p_{n-2,1}}{\partial y} = \frac{\partial p_{n-3,2}}{\partial x}, \dots, \frac{\partial p_{1,n-2}}{\partial y} = \frac{\partial p_{0,n-1}}{\partial x} \\ A_{n0} \frac{\partial p_{n-1,0}}{\partial x} + A_{n-1,1} \frac{\partial p_{n-2,1}}{\partial x} + \dots + A_{2,n-2} \frac{\partial p_{1,n-2}}{\partial x} + \\ + A_{1,n-1} \frac{\partial p_{0,n-1}}{\partial x} + A_{0n} \frac{\partial p_{0,n-1}}{\partial y} = B \end{array} \right.$$

Tale sistema contiene $\frac{n(n+1)}{2}$ equazioni in altrettante incognite; si ragiona poi in modo simile a quello tenuto nel § 2 (anzi vi è qui qualche semplificazione).

5. La relazione (VIII') non contenga alcuna tra le derivate di ordine $n-1$, e sia h ($h < n-1$) l'ordine massimo delle derivate che compaiono in essa, cioè la (VIII') abbia la forma

$$(X') \quad \varphi_0(y) z(g(y), y) + \sum_{r+s=1}^h \varphi_{rs}(y) p_{rs}(g(y), y) = G(y).$$

Supposto che le funzioni $g(y)$, $\varphi_0(y)$, $\varphi_{rs}(y)$ ($r+s=1, 2, \dots, h$), $G(y)$ siano $D^{n+1-h} - L$, si derivi $n-1-h$ volte la (X') rispetto a y , ottenendo una relazione della forma

$$(3) \quad \psi_0(y) z(g(y), y) + \sum_{r+s=1}^{n-1} \psi_{rs}(y) p_{rs}(g(y), y) = G^{(n-1-h)}(y),$$

dove le $\psi_0(y)$, $\psi_{rs}(y)$ ($r+s=1, 2, \dots, n-1$) sono funzioni $D^{II} - L$ in (y_1, y_2) , calcolabili facilmente; in particolare

$$(4) \quad \psi_{n-1-i,i}(y) = \sum_{\lambda=0}^{n-1-h} \binom{n-1-h}{\lambda} g'^{n-1-h-\lambda}(y) \varphi_{h-i+\lambda,i-\lambda}(y) \quad (i=0, 1, \dots, n-1),$$

avendo posto (come già nel § 3, n. 1) $\varphi_{rs}(y) = 0$ identicamente in (y_1, y_2) se $r < 0$ oppure $s < 0$.

Ragionando come nel § 3, n. 1 si dimostra il

TEOREMA II'. « Nelle stesse ipotesi del TEOR. I' circa le $A_{n-i,i}$ ($i = 0, 1, \dots, n$), B e le funzioni (IV'), se $g(y)$, $\varphi_0(y)$, $\varphi_{rs}(y)$ ($r+s=1, 2, \dots, h$), $G(y)$ sono funzioni $D^{n+1-h} - L$ in (y_1, y_2) , se valgono le (2) e le

$$(XI') \quad \left\{ \begin{aligned} & \varphi_0(y_0) \Phi(x_0) + \sum_{r+s=1}^h \varphi_{rs}(y_0) \Phi_{rs}(x_0) = G(y_0) \\ & \frac{d^i}{dy^i} \left[\varphi_0(y) z(g(y), y) + \sum_{r+s=1}^h \varphi_{rs}(y) p_{rs}(g(y), y) \right] \Big|_{\substack{y=y_0 \\ z=\Phi(x_0) \\ p_{rs}=\Phi_{rs}(x_0)}} = G^{(i)}(y_0) \end{aligned} \right. \quad (i=1, 2, \dots, n-1-h).$$

$$(XII') \quad (\varrho_1)_0^{n-1} \psi_{n-1,0}(y) - (\varrho_1)_0^{n-2} \psi_{n-2,0}(y) + \dots + (-1)^{n-1} \psi_{0,n-1}(y) \neq 0,$$

dove le $\psi_{n-1-i,i}(y)$ ($i=0, 1, \dots, n-1$) sono date dalle (4), esiste uno e un solo integrale della (I') $z=z(x, y)$, definito in un campo δ sufficientemente piccolo, a cui è interno il punto (x_0, y_0) , ivi $D^{n+1} - L$, che contiene la striscia caratteristica (IV') di ordine $n-1$, e soddisfa la condizione (X') ».

6. Se tutte le $\varphi_{rs}(y)$ ($r+s=1, 2, \dots, h$) sono nulle identicamente in (y_1, y_2) e $\varphi_0(y)$ non si annulla mai in (y_1, y_2) , posto

$$Z(y) = \frac{G(y)}{\varphi_0(y)}$$

la (X') diviene

$$(XIII') \quad z(g(y), y) = Z(y),$$

e il TEOR. II' diviene:

TEOREMA. III'. « Nelle stesse ipotesi del TEOR. I' circa le funzioni $A_{n-i,i}$ ($i=0, 1, \dots, n$), B e le funzioni (IV'), se $g(y)$, $Z(y)$ sono funzioni $D^{n+1} - L$ in (y_1, y_2) , e se valgono le (2) e le

$$(XIV') \quad \left\{ \begin{aligned} & \Phi(x_0) = Z(y_0) \\ & \left[\frac{d^i z(g(y), y)}{dy^i} \right] \Big|_{\substack{y=y_0 \\ p_{rs}=\Phi_{rs}(x_0)}} = Z^{(i)}(y_0) \quad (i=1, 2, \dots, n), \end{aligned} \right.$$

esiste uno e un solo integrale della (I') $z = z(x, y)$, che è definito in un campo δ , abbastanza piccolo, a cui è interno il punto (x_0, y_0) , è ivi $D^{n+1} - L$, contiene la striscia caratteristica (IV') di ordine $n - 1$, e nei punti della curva $x = g(y)$ si riduce alla funzione assegnata $Z(y)$ ».

Geometricamente: « Esiste una e una sola superficie integrale Σ della (I'), che contiene la striscia caratteristica data (IV') di ordine $n - 1$, e passa per una curva (in generale) sghemba assegnata di equazioni

$$x = g(y), \quad z = Z(y) ».$$

Si ha così, nel campo delle funzioni di variabile reale, un risultato fondamentale per la teoria delle caratteristiche di ordine $n - 1$ per l'equazione quasi-lineare di ordine n , con $n > 2$.

Per $n = 2$ il TEOR. III' è già stato dimostrato nei nostri lavori citati in (4), come caso particolare del problema di GOURSAT (34). Invece il TEOR. I' ha carattere di novità anche per $n = 2$ (mentre per $n = 2$ il TEOR. II' coincide col TEOR. III').

7. Per l'equazione (I') vale ancora il seguente:

TEOREMA IV'. « Supposte soddisfatte tutte le ipotesi del TEOR. I', tranne quelle relative alla curva $x = g(y)$, esiste uno e un solo integrale $z = z(x, y)$ della (I'), che è definito in un campo δ sufficientemente piccolo, a cui è interno il punto (x_0, y_0) , è ivi $D^{n+1} - L$, contiene la striscia caratteristica (IV'), di ordine $n - 1$, e nei punti di una sua curva caratteristica, passante per il punto $(x_0, y_0, \Phi(x_0))$ e appartenente a un ben determinato sistema, diverso da quello a cui appartiene la striscia caratteristica data (IV'), soddisfa la condizione

$$(XV') \quad \varphi_0(y) z(x, y) + \sum_{r+s=1}^{n-1} \varphi_{rs}(y) p_{rs}(x, y) = G(y) » (35).$$

Il TEOR. IV' si dimostra, riconducendosi ad un teorema analogo per il sistema quasi-lineare (IX'), dimostrato in (M_2) (36).

(34) Cfr. il primo dei lavori citati in (4), § 8, p. 227-229, e il secondo, dei lavori citati in (4) § 4, p. 19-23 (cfr. in particolare il n. 3, p. 23).

(35) Il TEOR. III' di (M_1) (§ 7, n. 4, p. 115) è un caso particolare del presente TEOR. IV', quando le $\varphi_0(y)$, $\varphi_{rs}(y)$ ($r + s = 1, 2, \dots, n - 1$) soddisfino le (*) e (**) della nota (33).

(36) (M_2) , § 3, n. 1 e n. 2, p. 174-175, TEOR. II.

8. Come conseguenza di uno qualunque dei TEOR. I', II', III', IV' del presente paragrafo si possono dimostrare i TEOR. I' e II' di (M_1) ⁽³⁷⁾, che sono di importanza fondamentale nella teoria delle caratteristiche di ordine $n - 1$ per l'equazione quasi lineare (I'), e sono relativi all'esistenza di infinite superfici integrali della (I'), che contengono una data striscia caratteristica (di ordine $n - 1$), e all'esistenza di infinite superfici integrali della (I'), che hanno con una data superficie integrale un contatto di ordine $n - 1$ nei punti di una sua curva caratteristica.

Dal TEOR. IV' si può ottenere una nuova conferma del risultato già ottenuto in (M_1) ⁽³⁸⁾: « Se $n > 2$, date due striscie caratteristiche di ordine $n - 1$ della (I') di due diversi sistemi, aventi un elemento di ordine $n - 1$ in comune, in generale non esiste alcuna superficie integrale della (I), che le contenga entrambe; se tale superficie, eventualmente, esiste, essa è unica ».

La dimostrazione è del tutto simile a quella data nel § 4, n. 3 per l'equazione generale (I) e le striscie caratteristiche di ordine n .

Il caso $n = 2$ fa eccezione, cioè, se $n = 2$, esiste una superficie integrale della (I'), che contiene due striscie caratteristiche del primo ordine appartenenti ai due diversi sistemi e aventi un elemento del primo ordine in comune; l'esistenza e l'unicità di tale superficie integrale seguono dal TEOR. IV', che per $n = 2$ coincide con un teorema dimostrato in un nostro lavoro anteriore ⁽³⁹⁾.

⁽³⁷⁾ (M_1) , § 7, n. 3, p. 114-115.

⁽³⁸⁾ (M_1) , § 7, n. 5, p. 115-116.

⁽³⁹⁾ Cfr. la seconda delle Memorie citate in ⁽⁴⁾, § 4, n. 5, TEOR. III', p. 22-23; se $n = 2$ si ha qualche riduzione nelle ipotesi.