ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

ALESSANDRO OSSICINI

Il calcolo simbolico e la propagazione del calore in una ipersfera dello spazio euclideo ad n dimensioni

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 5, nº 3-4 (1951), p. 269-278

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1951_3_5_3-4_269_0>

IL CALCOLO SIMBOLICO E LA PROPAGAZIONE DEL CALORE IN UNA IPERSFERA DELLO SPAZIO EUCLIDEO AD n DIMENSIONI

di ALESSANDRO OSSICINI (Roma)

§ 1. — Enunciato del problema

Il problema della propagazione del calore in una sfera solida (isotropa) di centro 0 e raggio dato (che per comodità scegliamo uguale ad uno) consiste nell'integrazione dell'equazione differenziale:

[1] $$\Delta u = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t}$$

ove Δ è l'operatore di Laplace $\Delta = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$; inoltre $D = \frac{K}{c\, d}$ con $K =$ coefficiente di conducibilità termica, $c =$ calore specifico, $d =$ densità.

L'equazione [1] usando coordinate sferiche di polo 0 diviene:

[2] $$\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} = \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (0 \leq \varrho < 1),$$

in quanto, supponendo la distribuzione iniziale del calore a simmetria sferica, tale sarà la u (essendo la sfera isotropa) e risulterà funzione solo di ϱ e del tempo t.

L'integrale della [2] deve soddisfare alla condizione iniziale:

[3] $$u(\varrho, 0) = F(\varrho) \text{ (1)}.$$

---

(1) La [3] va intesa in modo preciso così: per ϱ fisso $(0 \leq \varrho < 1)$, deve aversi:

$$\lim_{t \to +0} u(\varrho, t) = F(\varrho).$$

Supponiamo che la funzione $\varrho^{\frac{1}{2}} F(\varrho)$ sia continua ed a variazione limitata nell'intervallo chiuso $(0\,,1)$.

L'integrale della [2] deve inoltre soddisfare alla condizione che sulla superficie della sfera si abbia:

$$[4] \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial \varrho} + \lambda u\right]_{\varrho=1} = 0\,,$$

con $\lambda = \frac{\gamma}{K}$ ($\gamma =$ conducibilità termica superficiale) ed infine alla

$$\lim_{t\to\infty} u(\varrho\,,t) = 0\,,$$

(dovendo essere, per $t \to \infty$, la sfera completamente raffreddata).

Detto problema, come sappiamo, fu risolto dal Fourier [2] ed ammette la soluzione:

$$[5] \qquad u(\varrho\,,t) = \frac{2}{\varrho} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{R\,F(R)\,\text{sen}\,h_m R\,\text{sen}\,h_m \varrho\, e^{-Dh_m^2 t}}{1 - \frac{\text{sen}\,2\,h_m}{2\,h_m}}\, d\,R$$

ove $h_1\,,h_2\,;\ldots;h_{m-1}\,,h_m$ sono le radici positive, disposte in ordine crescente dell'equazione:

$$[6] \qquad \frac{h}{\text{tang}\,h} = 1 - \lambda \; {}^{(3)}\,.$$

Estendendo il problema al caso di una ipersfera dello spazio Euclideo ad $n \geq 3$ dimensioni, di centro 0 e raggio 1, l'equazione da integrare sarà sempre la (1) ma con

$$[7] \qquad \Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\,.$$

---

(2) J. B. FOURIER - *La Theory Analitique de la Chaleur.* (Paris 1822) pag. 400-428.

(3) Per una tavola di radici della (6) vedi: H. S. CARSLAW e J. C. JAEGER - *Conduction of Heat in Solids,* (Oxford 1948) pag. 577.

Se assumiamo nuove coordinate $\varrho, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-2}, \theta_{n-1}$ legate alle $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ dalle relazioni:

$$
[8] \qquad \begin{aligned}
x_1 &= \varrho \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \ldots\ldots \operatorname{sen} \theta_{n-2} \operatorname{sen} \theta_{n-1} \\
x_2 &= \varrho \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \ldots\ldots \operatorname{sen} \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\
x_3 &= \varrho \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 \ldots\ldots \cos \theta_{n-2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{n-1} &= \varrho \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 \\
x_n &= \varrho \cos \theta_1
\end{aligned}
$$

ove θ_{n-1} varia nell'intervallo $(0, 2\pi)$ e le θ_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, n-2)$ nell'intervallo $(0, \pi)$; la nostra equazione, se supponiamo valide le stesse considerazioni di simmetria del problema tridimensionale, dipenderà solo dalle due variabili ϱ e t.

Il nostro problema consisterà quindi nell'integrare l'equazione:

$$
[9] \qquad \mathfrak{D}\, u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{n-1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} - \frac{1}{D} \frac{\partial u}{\partial t} = 0,
$$

colla condizione iniziale:

$$
[10] \qquad u(\varrho, 0) = F(\varrho).
$$

Supponiamo che la funzione $\varrho^{\frac{n}{2}-1} F(\varrho)$ sia continua e a variazione limitata nell'intervallo chiuso $(0, 1)$.

L'integrale della [9] deve inoltre soddisfare alla condizione, che sulla ipersuperficie dell'ipersfera si abbia:

$$
[11] \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial \varrho} + \lambda u\right]_{\varrho=1} = 0,
$$

e infine alla:

$$
[12] \qquad \lim_{t \to \infty} u(\varrho, t) = 0.
$$

Se facciamo il cambiamento della funzione incognita dato dalla:

$$
[13] \qquad u = \varrho^{1-\frac{n}{2}} v,
$$

si perviene per la [9] all'equazione:

$$[14] \qquad \overset{*}{\mathfrak{D}} v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial v}{\partial \varrho} - \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)^2 v}{\varrho^2} - \frac{1}{D}\frac{\partial v}{\partial t} = 0 ; \qquad 0<\varrho<1,$$

la cui integrazione equivale a quella della [9]; inoltre le [10], [11], [12] divengono:

$$[15] \qquad v(\varrho, 0) = \varrho^{\frac{n}{2}-1} F(\varrho),$$

$$[16] \qquad \left[\frac{\partial v}{\partial \varrho} + \lambda v + \frac{\left(1-\frac{n}{2}\right)v}{\varrho}\right]_{\varrho=1} = 0,$$

$$[17] \qquad \lim_{t\to\infty} v(\varrho, t) = 0 .$$

§ 2. — Trasformata della funzione incognita.

Pensando la v funzione di ϱ e prescindendo dal fatto che dipenda dall'altra variabile t, applichiamo alla [14] la trasformata così definita:

$$[18] \qquad B[v(\varrho, t)] = \int_0^1 \varrho \, J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho)\, v(\varrho, t)\, d\varrho ,$$

ove $J_\nu(k)$ indica la funzione di Bessel di prima specie e di ordine ν e h_m l'm-esima radice positiva (in ordine crescente) dell'equazione:

$$[19] \qquad h^{1-\frac{n}{2}}\left[h J'_{\frac{n}{2}-1}(h) + \left(\lambda + 1 - \frac{n}{2}\right) J_{\frac{n}{2}-1}(h)\right] (^4) = 0 .$$

(4) L'equazione:

$$x^{-\nu}[x J'_\nu(x) + H J_\nu(x)] = 0 ,$$

per H e ν reali e $\nu \geq -\frac{1}{2}$ venne studiata da Dini; vedi U. DINI — *Serie di Fourier* (Pisa 1880) pp. 190-277. Per una tavola di valori di questa equazione, nel caso $\nu = 0$, vedi: H. S CARSLAW e J. C. JAEGER, op. cit. (3) pag. 379.

Ammettendo sia lecito derivare l'integrale [18] sotto il segno d'integrale, rispetto a t, sarà pure:

$$B\left[\frac{\partial v}{\partial t}\right] = \frac{\partial}{\partial t} B[v]; \tag{20}$$

tenendo conto di questa e delle [16], [19] la trasformazione [18] muta la [14] nella:

$$B[\overset{*}{\mathfrak{D}} v] = -\frac{1}{D}\frac{\partial}{\partial t} B[v] - h_m^2 B[v] = 0. \tag{21}$$

La B — trasformata della nostra funzione incognita $v(\varrho, t)$ deve dunque soddisfare questa equazione differenziale lineare del 1°. ordine, siccome la la $B[v]$ vi compare derivata soltanto rispetto a t e d'altra parte il coefficiente di $B[v]$ dipende solo da h_m, la [21] può considerarsi come un'equazione differenziale ordinaria lineare omogenea a coefficienti costanti. Si ricava immediatamente, tenendo conto delle [15], [17]

$$B[v] = B[\varrho^{\frac{n}{2}-1} F(\varrho)]\, e^{-Dh_m^2 t} \tag{22}$$

e per la [18]:

$$B[v] = \int_0^1 R^{\frac{n}{2}} F(R)\, J_{\frac{n}{2}-1}(h_m R)\, e^{-Dh_m^2 t}\, dR. \tag{23}$$

§ 3 — Antitrasformazione.

Dalla [23] antitrasformando si ha (5):

$$\begin{aligned} v &= B^{-1}\left[\int_0^1 R^{\frac{n}{2}} F(R)\, J_{\frac{n}{2}-1}(h_m R)\, e^{-Dh_m^2 t}\, dR\right] = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{2 h_m^2 R^{\frac{n}{2}} F(R)\, J_{\frac{n}{2}-1}(h_m R)\, J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho)\, e^{-Dh_m^2 t}}{\left[h_m^2 - \left(\frac{n}{2}-1\right)^2\right] J_{\frac{n}{2}-1}^2(h_m) + h_m^2 J_{\frac{n}{2}-1}'^2(h_m)}\, dR, \end{aligned} \tag{24}$$

(5) Per la dimostrazione della [24] basterà considerare la serie del Dini di una funzione $f(x)$ tramite le funzioni di Bessel:

$$(1')\; f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m J_\nu(h_m x),$$

e quindi per la [13]

$$[25] \quad u(\varrho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{2 h_m^2 R^{\frac{n}{2}} \varrho^{1-\frac{n}{2}} F(R) J_{\frac{n}{2}-1}(h_m R) J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho) e^{-D h_m^2 t}}{\left[h_m^2 - \left(\frac{n}{2}-1\right)^2\right] J_{\frac{n}{2}-1}(h_m) + h_m^2 J'^2_{\frac{n}{2}-1}(h_m)} d R.$$

Faremo vedere che la serie a secondo membro della [25] è convergente nell'intervallo (0,1).

Se poniamo per semplicità:

$$[26] \quad b_m = \int_0^1 \frac{2 h_m^2 R^{\frac{n}{2}} F(R) J_{\frac{n}{2}-1}(h_m R)}{\left[h_m^2 - \left(\frac{n}{2}-1\right)^2\right] J^2_{\frac{n}{2}-1}(h_m) + h_m^2 J'^2_{\frac{n}{2}-1}(h_m)} d R .$$

la [25] diviene

$$[27] \quad u(\varrho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho) e^{-D h_m^2 t}.$$

---

ove $h_1, h_2, h_3 \ldots h_{m-1}, h_m$ sono le radici dell'equazione

$$h^{-\nu} [h J'_\nu(h) + H J_\nu(h)] = 0 ,$$

disposte in ordine crescente e $H + \nu > 0$ e $\nu > -\frac{1}{2}$ (condizioni verificate nel nostro caso essendo $H + \nu = \lambda > 0$ e $\nu > \frac{n}{2} - 1 \geq -\frac{1}{2}$ poichè $n \geq 3$).

I coefficienti della (1') sono dati da:

$$[(h_m^2 - \nu^2) J_\nu(h_m) + h_m^2 J'^2_\nu(h_m)] b_m = 2 h_m^2 \int_0^1 \xi f(\xi) J_\nu(h_m \xi) d\xi .$$

La serie (1') è convergente per $0 < x \leq 1$ se $f(\xi)$ è continua e a variazione limitata per $0 \leq \xi \leq 1$.

La serie (1') divisa per x^ν converge anche per $x = 0$. Vedi G. N. WATSON *Theory of Bessel Functions.* (Cambridge 1948) pp. 576-617, e 649-653

Osservando che per $t \geq 0$ la funzione di h_m, $e^{-Dh_m^2 t}$ è variazione limitata nell'intervallo $(0, \infty)$ e che la

$$[28] \qquad \sum_{m=1}^{\infty} b_m \varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho),$$

non è altro che lo sviluppo in serie del Dini, moltiplicato $\varrho^{1-\frac{n}{2}}$, della funzione $\varrho^{\frac{n}{2}-1} F(\varrho)$, sviluppo che è uniformemente convergente per $0 \leq \varrho \leq 1$ [essendo verificate le condizioni richieste per la $\varrho^{\frac{n}{2}-1} F(\varrho)$] ne segue che la serie (27) è anch'essa uniformemente convergente per $0 \leq \varrho \leq 1$.

Abbiamo inoltre:

$$[29] \qquad \begin{aligned} u(\varrho, 0) &= \lim_{t \to +0} \varrho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} b_m J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho) e^{-Dh_m^2 t} = \\ &= \varrho^{1-\frac{n}{2}} [\varrho^{\frac{n}{2}-1} F(\varrho)] = F(\varrho), \end{aligned}$$

ed è così verificata la [10]; e per la presenza del fattore $e^{-Dh_m^2 t}$ si verifica anche la [12]. Resta a vedere se la funzione $u(\varrho, t)$ soddisfa l'equazione differenziale [9] e la [11]. La verifica va fatta perchè il procedimento che ci ha condotto alla [27] è fondato sull'ipotesi che alla $(u(\varrho, t)$ incognita insieme alle sue derivate $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial \varrho}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2}$, sia applicabile la trasformazione [18].

Avendosi

$$\mathfrak{D}\left[\varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho) e^{-Dh_m^2 t}\right] =$$

$$= e^{-Dh_m^2 t}\left[\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{n-1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial \varrho} + h_m^2\right] \varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho) = 0,$$

e per la

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \varrho} + \lambda u\right]_{\varrho=1} = h_m J'_{\frac{n}{2}-1}(h_m) + \left[\lambda + 1 - \frac{n}{2}\right] J_{\frac{n}{2}-1}(h_m) = 0,$$

per provare che anche la funzione $u(\varrho, t)$ soddisfa le [9], [11] basterà dimostrare che le $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial u}{\partial \varrho}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2}$, si possono ottenere eseguendo le corrispondenti operazioni di derivazione sui singoli termini della serie a secondo membro della [27].

Poichè

$$[30]\quad \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{\partial}{\partial t}\left[\varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho)\, e^{-Dh_m^2 t}\right] = -D \sum_{m=1}^{\infty} b_m h_m^2\, \varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho)\, e^{-Dh_m^2 t},$$

$$(^6)\quad \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{\partial}{\partial \varrho}\left[\varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho)\, e^{-Dh_m^2 t}\right] = -\varrho \sum_{m=1}^{\infty} b_m h_m\, \varrho^{-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(h_m \varrho)\, e^{-Dh_m^2 t},$$

[31]

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2}\left[\varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho)\, e^{-Dh_m^2 t}\right] =$$

$$= (n-1) \sum_{m=1}^{\infty} b_m h_m\, \varrho^{-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(h_m \varrho)\, e^{-Dh_m^2 t} - \sum_{m=1}^{\infty} b_m h_m^2\, \varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho)\, e^{-Dh_m^2 t};$$

basterà dimostrare la convergenza delle serie:

$$[32]\quad \sum_{m=1}^{\infty} b_m h_m^2\, \varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho)\, e^{-Dh_m^2 t},$$

$$[33]\quad \sum_{m=1}^{\infty} b_m h_m\, \varrho^{-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(h_m \varrho)\, e^{-Dh_m^2 t} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{h_m^{1-\frac{n}{2}}}\left[(h_m \varrho)^{-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(h_m \varrho)\right] h_m^2\, e^{-Dh_m^2 t}.$$

Ora osserviamo che per $t > 0$ la funzione di h_m, $h_m^2\, e^{-Dh_m^2 t}$ è a variazione limitata nell'intervallo $(0, \infty)$ e che la funzione $(h_m \varrho)^{-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}}(h_m \varrho)$ è limitata per $0 \leq \varrho \leq 1$ (qualsiasi valore abbia m) nè segue che la [32] è convergente per $t > 0$ $0 \leq \varrho \leq 1$ e lo è anche la [33] tale essendo la

$$[34]\quad \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{h_m^{1-\frac{n}{2}}}\ (^7).$$

---

(6) Nelle [31] si è tenuto conto delle formule ricorrenti:

$$x J_\nu'(x) - \nu J_\nu(x) = -x J_{\nu+1}(x),$$

$$x J_\nu(x) + x J_{\nu+2}(x) = 2(\nu+1) J_{\nu+1}(x)$$

Vedi G. N. WATSON op. cit. (5) pag. 45.

(7) La convergenza della [34] è dedotta dalla [28] (convergente per $0 \leq \varrho \leq 1$) che per $\varrho = 0$ diviene:

$$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}\, \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b^m}{h_m^{1-\frac{n}{2}}}.$$

Possiamo concludere che le [30], [31], sono convergenti per $t > 0$ e $0 < \varrho \leq 1$ e la $u(\varrho, t)$ soddisfa le condizioni richieste.

Se ora consideriamo il caso particolare $n = 3$ le [19], [25], divengono

[35] $$h^{-\frac{1}{2}}\left[h\, J'_{\frac{1}{2}}(h) + \left(\lambda - \frac{1}{2}\right) J_{\frac{1}{2}}(h)\right] = 0$$

[36] $$u(\varrho, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{2\, h_m^2 R^{\frac{3}{2}} \varrho^{-\frac{1}{2}} F(R)\, J_{\frac{1}{2}}(h_m \varrho)\, J_{\frac{1}{2}}(h_m \varrho)\, e^{-Dh_m^2 t}}{\left[h_m^2 - \frac{1}{4}\right] J^2_{\frac{1}{2}}(h_m) + h_m^2\, J'^2_{\frac{1}{2}}(h_m)}\, d\, R\,;$$

e se teniamo conto delle

[37] $$J_{\frac{1}{2}}(\varrho) = \left(\frac{2}{\pi \varrho}\right)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} \varrho\,; \quad J'_{\frac{1}{2}}(\varrho) = \left(\frac{2}{\pi \varrho}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\cos \varrho - \frac{\operatorname{sen} \varrho}{2\, \varrho}\right) \text{(8)}$$

abbiamo:

[6] $$\frac{h}{\operatorname{tang} h} = 1 - \lambda\,,$$

[5] $$u(\varrho, t) = \frac{2}{\varrho} \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{R\; F(R)\; \operatorname{sen} h_m\, R\; \operatorname{sen} h_m\, \varrho\; e^{-Dh_m^2 t}}{1 - \frac{\operatorname{sen} 2\, h_m}{2\, h_m}}\, d\, R\,;$$

cioè la classica formula risolutiva della propagazione del calore in una sfera solida.

§ 4. — Temperatura iniziale uniforme.

Se la temperatura iniziale è uniforme nell'interno dell'ipersfera, posto:

$$F(\varrho) = F_0\,,$$

la formula [25] effettuato l'integrale diviene

[38] $$u(\varrho, t) = 2\, F_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varrho^{1-\frac{n}{2}}\, h_m\, J_{\frac{n}{2}-1}(h_m \varrho)\, J_{\frac{n}{2}}(h_m)\, e^{-Dh_m^2 t}}{\left[h_m^2 - \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2\right] J^2_{\frac{n}{2}-1}(h_m) + h_m^2\, J'^2_{\frac{n}{2}-1}(h_m)}\,, \text{(9)}$$

---

(8) Vedi G. N. Watson op. cit. (5) pag. 54.

(9) Per il calcolo dell'integrale della [25] basterà tener conto che

$$\frac{d}{dx}\left\{x^\nu J_\nu(x)\right\} = x^\nu J_{\nu-1}(x)$$

vedi G. N. Watson op. cit. (5) pag. 45.

e poichè in base alle [19] [6] si ha

$$h_m J_{\frac{n}{2}}(h_m) = \lambda J_{\frac{n}{2}-1}(h_m),$$

potremo scrivere la [38] nella forma:

$$[39] \quad u(\varrho, t) = 2 \lambda F_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varrho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}-1}(J_m \varrho) J_{\frac{n}{2}-1}(h_m) e^{-Dh_m^2 t}}{\left[h_m^2 - \left(\frac{n}{2} - 1\right)^2\right] J^2_{\frac{n}{2}-1}(h_m) + h_m^2 J'^2_{\frac{n}{2}-1}(h_m)}.$$

Nel caso particolare $n = 3$ la [39] si trasforma nella:

$$[40] \quad u(\varrho, t) = 2 \lambda F_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varrho^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(h_m \varrho) J_{\frac{1}{2}}(h_m) e^{-Dh_m^2 t}}{\left[h_m^2 - \frac{1}{4}\right] J^2_{\frac{1}{2}}(h_m) + h_m^2 J'^2_{\frac{1}{2}}(h_m)}, \text{ (10)}$$

e per le [37] si ha:

$$[41] \quad u(\varrho, t) = 2 \lambda F_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} h_m \varrho}{h_m \varrho} \frac{e^{-Dh_m^2 t}}{(h_m \operatorname{cosec} h_m - \cos h_m)};$$

alla stessa formula si perviene partendo dalla [5] e tenendo conto della [6].

---

(10) Vedi H. RESAL — *Physique Mathématique* — Vol II° (Paris 1880) pag. 21.