ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

LUIGI SOBRERO

Un metodo di approssimazioni successive per la risoluzione del problema di Dirichlet

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 3, nº 1-4 (1950), p. 67-93

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_3_1-4_67_0>

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

UN METODO DI APPROSSIMAZIONI SUCCESSIVE PER LA RISOLUZIONE DEL PROBLEMA DI DIRICHLET

di LUIGI SOBRERO (Trieste)

1. DESCRIZIONE DEL METODO. — Il problema di DIRICHLET, e cioè la ricerca di quella funzione $f(x, y)$ che soddisfa, nell'interno di una data regione R del piano cartesiano, all'equazione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

ed assume, sul contorno L della regione, valori prestabiliti, costituisce uno dei temi più classici e suggestivi dell'Analisi matematica.

Numerosi sono i metodi proposti per la sua risoluzione; ma non tutti si prestano agevolmente a determinazioni numeriche. In questa Memoria diremo di un metodo che, da noi applicato in diverse occasioni (e, più precisamente, nello studio di alcuni problemi di fotoelasticità) ci ha fornito risultati numerici pienamente soddisfacenti.

Ci serviremo, per ottenere la incognita funzione $f(x, y)$, di un procedimento di approssimazioni successive; e cioè costruiremo una successione di funzioni, $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots, f_n(x, y) \ldots$, la quale converge, col crescere dell'indice n, alla richiesta funzione $f(x, y)$.

La prima approssimazione, $f_1(x, y)$, è largamente arbitraria. Si richiede solo che essa abbia, in tutto il campo R di sua definizione, derivate prime limitate, e che assuma, sul contorno L, i valori prescritti per la funzione $f(x, y)$.

Da questa prima approssimazione si passa ad una seconda, $f_2(x, y)$, col metodo seguente. Fatto centro in generico punto $P(x, y)$ della regione R, si costruisca la maggior circonferenza interna ad R, e si formi la media aritmetica dei valori che la funzione $f_1(x, y)$ assume su quella circonferenza C. Spostando a differente posizione il punto P, varieranno, in generale, sia la circonferenza C come il valore di quella media aritmetica. La quale media potrà, dunque, riguardarsi come funzione delle coordinate, x ed y, del punto P. Tale funzione, che diremo $f_2(x, y)$, costituisce la nostra seconda appros-

simazione. L'operazione colla quale siamo passati dalla funzione $f_1(x, y)$ alla funzione $f_2(x, y)$ verrà, nel seguito, ripetuta e citata più volte. Per brevità la designeremo col nome di *operazione di media*.

Con l'operazione di media possiamo passare, dalla seconda approssimazione $f_2(x, y)$, ad una terza, $f_3(x, y)$; da questa ad una quarta, e così via di seguito. Dimostreremo che, al crescere dell'indice n, l'approssimazione $f_n(x, y)$ tende, in ogni punto di R, alla richiesta funzione armonica $f(x, y)$.

Ad evitare malintesi circa la portata del procedimento, vogliamo esplicitamente avvertire che esso non mira a dare una dimostrazione dell'esistenza della funzione $f(x, y)$. In altri termini noi supponiamo già di sapere che il problema di DIRICHLET ammette una soluzione, $f(x, y)$; e solo ci proponiamo di costruire e determinare questa soluzione con procedimento numerico.

Per dimostrare la convergenza del procedimento di approssimazioni successive ci serviremo di varie ipotesi. La prima di esse riguarda il contorno L. Detto ϱ un conveniente numero positivo (non nullo) noi supporremo che, per ogni punto Q del contorno L, si possa condurre una circonferenza, di raggio ϱ, tangente ad L e situata completamente all'esterno della regione R. Questa ipotesi richiede, in particolare, che il contorno L sia privo di punti angolosi e possegga, in ogni suo punto, raggio di curvatura maggiore di ϱ.

Una seconda ipotesi riguarda i valori prescritti, per la funzione $f(x, y)$, sulla curva L. Noi supporremo tali valori non soltanto continui, ma anche derivabili lungo l'arco di contorno; e la loro derivata si supporrà limitata in valore assoluto.

È probabile che il metodo di approssimazioni successive ora esposto converga anche sotto ipotesi meno restrittive di quelle che abbiamo indicate; ma qui non crediamo opportuno di complicare le cose al solo fine di una maggiore generalità.

Il metodo del quale ci stiamo occupando non è nuovo; esso è stato indicato da H. LEBESGUE in una brevissima Nota pubblicata fin dal 1912 (1); ed è stato ripreso, recentemente, da G. CIMMINO (2). Ci sembra tuttavia che nè l'uno nè l'altro Autore abbiano posto in luce una proprietà, assai notevole, di quel procedimento: l'estrema rapidità della sua convergenza. Requisito — questo — ovviamente essenziale per chi miri alle applicazioni numeriche.

---

(1) H. LEBESGUE, *Sur le problème de Dirichlet*; Comptes Rendus, To. 154 (1912), pag. 335.

(2) G. CIMMINO, *Formole di maggiorazione nel problema di Dirichlet per le funzioni armoniche*, Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Padova, 1932.

Mossi, dunque, dall'intento di completare da un tal punto di vista le dimostrazioni di LEBESGUE e di CIMMINO, abbiam finito per riprendere l'argomento totalmente *ex-novo*; ed abbiamo potuto stabilire che la n^{esima} funzione approssimatrice, $f_n(x, y)$, differisce dalla richiesta funzione $f(x, y)$, in ogni punto del campo R, per una quantità, $\varepsilon(x, y)$, non superiore (in valore assoluto) ad

$$\frac{1}{(a + b\,n)^2},$$

(a e b designando convenienti costanti positive), L'*errore*, ε, di cui è affetta l'n-^{esima} approssimazione converge dunque rapidamente verso zero al divergere di n.

L'argomento di questa Memoria è stato oggetto di una breve nostra comunicazione tenuta al Congresso di Innsbruck della *Osterreichische Mathematische Gesellschaft* nell'Agosto 1949.

2. OSSERVAZIONI CIRCA LA PORTATA DEL METODO. — Prima di accingerci a dimostrare la convergenza del nostro metodo di approssimazioni successive, desideriamo far cenno di una importante categoria di problemi in cui detto metodo si manifesta particolarmente efficace.

In molti dei problemi di DIRICHLET che pongono le ricerche tecniche, i dati al contorno prescritti per la funzione $f(x, y)$ non sono conosciuti con matematica esattezza, ma solo con un certo grado di approssimazione. Nei problemi che vengon fuori dalle ricerche di fotoelasticità, per esempio, si conoscono i punti, del contorno, dove la funzione $f(x, y)$ assume valori intieri, o, meglio, valori multipli intieri di una assegnata costante k; ma si ignora l'andamento della funzione negli archetti di contorno compresi fra due, successivi, di quei punti. A priori potendosi unicamente asserire che, in ciascun archetto, l'oscillazione della funzione è inferiore alla suddetta costante k. Essa costante ci dà la misura del grado di approssimazione col quale si conoscono, per il problema in esame, i dati al contorno della funzione $f(x, y)$.

In questo caso, come negli altri, consimili, nei quali i dati al contorno sono il risultato di misure sperimentali, è ovviamente inutile cercare di determinare la funzione $f(x, y)$, nell'interno del campo R, con precisione superiore a quella con cui sono conosciuti i valori al contorno. Alla ricerca della funzione $f(x, y)$ si presenta, allora, particolarmente idoneo il metodo proposto nel capoverso precedente; perchè una delle prime approssimazioni (in genere la terza o la quarta, nei problemi di fotoelasticità) è già sufficiente per indicare l'andamento della funzione incognita con tutta l'approssimazione che il problema richiede. Il metodo verrà, preferibilmente, applicato per via grafica, nel modo che qui appresso indicheremo.

La funzione di prima approssimazione, $f_1(x, y)$, si rappresenterà mediante le sue linee di livello; e cioè mediante le curve sulle quali essa rispettivamente assume i valori (*quote*) $\ldots, -2k, -k, 0, k, 2k, \ldots$. Queste linee di livello avranno, entro il campo R, andamento largamente arbitrario; esse dovranno soddisfare all'unica sostanziale condizione di tagliare il contorno L proprio in quei punti, noti, dove son rispettivamente prescritti, per la funzione, i valori $\ldots, 2k, -k, 0, k, 2k, \ldots$. Le linee di livello prescelte definiscono l'andamento della funzione $f_1(x, y)$ solo imperfettamente; e, tuttavia, con un grado di precisione non minore di quello con cui è conosciuto l'andamento dei valori al contorno.

Per determinare la seconda approssimazione, $f_2(x, y)$, segneremo anzitutto sull'area R un certo numero di punti, $P_1, P_2, \ldots$. Poi, con centro in P_1, tracceremo il massimo cerchio interno ad R; divideremo questo cerchio in alcune (per es. 10) parti eguali mediante altrettanti punti di suddivisione; e, in ciascuno di tali punti, leggeremo sul grafico il valore di $f_1(x, y)$. Se il punto dove si fa questa lettura cade proprio sopra una linea di livello, il valore di $f_1(x, y)$ è fornito dalla quota della linea. In caso contrario il valore di $f_1(x, y)$ si otterrà per interpolazione. Infine si determinerà la media aritmetica dei 10 valori di f_1 così ottenuti; e si segnerà tale media a fianco del punto P_1. Essa rappresenterà il valore che, in P_1, assume la funzione $f_2(x, y)$. Analogamente procederemo con i punti $P_2, P_3, \ldots$.

L'operazione si semplifica se si ha cura di preparare un foglio trasparente sul quale sian disegnati vari cerchi concentrici, di diametro differente, divisi ciascuno in un certo numero di parti eguali mediante altrettanti punti di suddivisione. Nel comune centro dei cerchi si pratica, sul foglio trasparente, un minuscolo foro.

Portiamo il foglio trasparente sul grafico, in cui son già disegnate le linee di livello di $f_1(x, y)$, e disponiamolo in modo che uno dei cerchi risulti tangente al contorno L (ed interno ad R). Introdotta nel forellino del foglio trasparente la punta di una matita, segnamo sul grafico la posizione, P_1, del centro del cerchio. Infine leggiamo i valori che assume la funzione $f_1(x, y)$ in corrispondenza ai vari punti di suddivisione del cerchio; formiamoci la media di questi valori, e segnamola sul grafico, accanto al punto P_1. Ripeteremo l'operazione un certo numero di volte, via via spostando il foglio trasparente a differenti posizioni e utilizzando cerchi di diametro differente.

Abbiamo così determinati i valori che la funzione $f_2(x, y)$ assume in alcuni punti, $P_1, P_2, \ldots$, della regione R. Se questi punti sono abbastanza numerosi, l'andamento della $f_2(x, y)$ risulterà determinato con approssimazione sufficiente. Si potranno così, per interpolazione, individuare i punti dove la f_2 assume valori che siano multipli intieri della costante k e trac-

ciare le linee di livello di $f_2(x, y)$. Analogamente procederemo per ottenere le approssimazioni ulteriori. Quando constateremo che, nel passaggio da un'approssimazione alla successiva, le linee di livello non subiscono variazione apprezzabile, potremo arrestare il procedimento.

È quasi inutile avvertire che un eventuale errore, anche grossolano, commesso nel tracciamento delle linee di livello di una qualche approssimazione non inficia la convergenza delle approssimazioni ulteriori (ma, al più, la rallenta). Nella pratica applicazione del metodo conviene far seguire, ad un primo gruppo di approssimazioni grossolane, di carattere orientativo, un secondo gruppo di approssimazioni più accurate; facendo crescere, di volta in volta, il numero dei punti, dell'area R, cui si applica l'operazione di media.

Abbiamo sperimentalmente constatato che, se l'area R non è troppo irregolare, e la prima approssimazione, f_1, è scelta con andamento ragionevole, la terza o la quarta approssimazione son già sufficienti per determinare la funzione incognita $f(x, y)$ con precisione non inferiore a quella con cui son conosciuti i valori al contorno. Il nostro problema non chiede di più.

3. Considerazioni intuitive preliminari. — La convergenza del metodo di approssimazioni successive indicato nel capoverso 1 appare probabile già da alcune considerazioni intuitive che, per quanto vaghe ed imprecise, contengono in sè quel filo conduttore che ci servirà poi di guida per la dimostrazione rigorosa.

Confrontiamo la funzione di prima approssimazione, $f_1(x, y)$, con la funzione armonica $f(x, y)$. Per il modo stesso come son definite, queste funzioni risultano, sul contorno dell'area R, eguali fra loro. Per motivi di continuità esse risulteranno pertanto molto prossime l'una all'altra anche nei punti, del campo R, immediatamente adiacenti al contorno. In altri termini il divario tra la funzione approssimatrice $f_1(x, y)$ e la funzione armonica $f(x, y)$ è certamente piccolo nella « zona marginale » dell'area R, presumibilmente maggiore nella « zona centrale ».

Esaminiamo la funzione di seconda approssimazione, $f_2(x, y)$. Il valore che questa assume in un punto P dell'area R è, per definizione, la media aritmetica dei valori assunti da $f_1(x, y)$ nei punti della circonferenza C, di centro P, inscritta nel contorno L. Anche se il punto P è situato nella zona interna dell'area R, la circonferenza C corre, almeno in buona parte, nella zona marginale dell'area. Pertanto i valori che, nei punti della circonferenza, assume la funzione f_1, differiscono presumibilmente di poco da quelli che, nei medesimi punti, assume la funzione f. La media aritmetica dei primi valori, a sua volta, differirà di poco dalla media aritmetica dei secondi.

La prima delle due medie è, per de nizione, il valore di $f_2(x, y)$ nel punto P. La seconda media, in virtù di una proprietà ben nota delle fun-

zioni armoniche, si identifica con il valore assunto da $f(x, y)$ nel punto P. Concludiamo che la funzione f_2 e la funzione f differiscono, in P, all'incirca di tanto quanto differivano fra loro, nella zona marginale dell'area R, le funzioni f ed f_1. In altri termini con l'operazione di media noi abbiamo costruita una funzione $f_2(x, y)$ la quale possiede, nella zona centrale di R, quella medesima buona approssimazione che già possiedeva la funzione $f_1(x, y)$ nella zona marginale dell'area.

L'operazione di media ha cioè trasformato la prima grossolana approssimazione $f_1(x, y)$ in una approssimazione migliore. Iterando il procedimento è da sperare che, al limite, si pervenga proprio ad ottenere la richiesta funzione armonica $f(x, y)$.

4. IPOTESI SEMPLIFICATRICI. Proveremo la convergenza della successione di funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ verso la funzione armonica f in un caso particolare; e cioè nell'ipotesi che i valori prescritti, sul contorno L, per la funzione armonica f, siano tutti eguali a zero (e quindi la funzione f risulti, essa stessa, identicamente nulla). Dimostreremo, in altri termini, il teorema seguente:

Sia $f_1(x, y)$ *una funzione dotata, in* R, *di derivate prime limitate, e nulla sul contorno di* R; *e siano* $f_2(x, y), \ldots, f_n(x, y), \ldots$ *le funzioni che da* $f_1(x, y)$ *si ottengono con l'applicazione iterata dell'operazione di media. Al divergere dell'indice* n *la funzione* $f_n(x, y)$ *tende a zero identicamente* (*e cioè in ogni punto dell'area* R).

L'ipotesi che i dati al contorno sian nulli è solo apparentemente, ma non sostanzialmente, restrittiva. Infatti, dal teorema enunciato dianzi, è facile trarre la convergenza delle funzioni $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ verso la funzione armonica f anche nel caso di dati al contorno non nulli. Consideriamo, invero, le differenze $f_1 - f, f_2 - f \ldots, f_n - f, \ldots$. Si constata subito che tali differenze son nulle sul contorno di R e si ottengono, ognuna dalla precedente, con l'operazione di media. Ad esse possiamo dunque applicare il teorema enunciato più sopra; e concludiamo che il termine generico $f_n - f$ tende a zero al divergere di n; il che prova, appunto, che la funzione f_n tende, al limite, verso la funzione f.

Senza ledere la generalità della trattazione possiamo supporre che la funzione f_1, non soltanto sia eguale a zero sul contorno di R, ma risulti sempre positiva (o sempre negativa) in tutti i punti di quest'area. In altre parole, appena sia provata la convergenza della successione $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ nell'ipotesi che il primo termine (e quindi i successivi) abbiano segno positivo in tutti i punti di R, è facilmente dimostrabile la convergenza di quella successione anche in assenza di una particolare ipotesi circa il segno di f_1.

Supponiamo, infatti, che f_1 sia una funzione, nulla sul contorno di R, ma non di segno uniforme nei punti di quest'area; e diciamo g_1 il valore assoluto di f_1. Sussistono evidentemente, per ogni punto di R, le diseguaglianze:

$$-g_1 \leq f_1 \leq g_1 .$$

Applichiamo alle funzioni f_1 e g_1 l'operazione di media. Otterremo due nuove funzioni che diremo f_2 e g_2. Dalle diseguaglianze precedenti immediatamente seguono, per tali nuove funzioni f_2 e g_2, le diseguaglianze analoghe:

$$-g_2 \leq f_2 \leq g_2 ,$$

e, più generale,

$$-g_n \leq f_n \leq g_n .$$

I termini della successione $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ sono dunque compresi fra i termini analoghi di due altre successioni, $-g_1, -g_2, \ldots, \quad g_n, \ldots$ e $g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots$, le quali, essendo formate con termini di segno uniforme, tendono ambedue verso zero. Pertanto anche f_n tenderà verso zero al divergere dell'indice n.

Ci siamo, così, ridotti a dover dimostrare la convergenza di $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ sotto le seguenti ipotesi: che f_1 (e quindi anche $f_2, \ldots, f_n, \ldots$) sian nulle sul contorno di R, e che esse abbiano segno positivo in tutti i punti di quest'area.

5. Introduzione di una successione maggiorante. — Il procedimento che seguiremo per provare la convergenza di $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ è, per sommi capi, il seguente. Ci fabbricheremo una seconda successione di funzioni, $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$, tutte nulle al contorno di R, positive nei punti interni di quest'area, e tali che: la prima di esse, F_1, maggiori la funzione data f_1; la seconda maggiori quella che si ottiene, dalla prima, per operazione di media: la terza maggiori quella che si ottiene, per operazione di media, dalla seconda; e così via di seguito. Si constata subito che l'n^{esima} funzione, F_n, maggiora f_n. Se, pertanto, riusciremo a provare che F_n, tende a zero al divergere di n, resterà evidentemente dimostrata anche la convergenza a zero della funzione f_n.

La sostituzione delle funzioni primitive $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ con queste nuove funzioni, maggioranti, $F_1, F_2, \ldots, F_n \ldots$ è suggerita da una esigenza di carattere tecnico: Le funzioni primitive possono avere un andamento complicatissimo, e mal si prestano alle varie trasformazioni cui dobbiamo sottoporle quando vogliamo ricavare una generica di esse dalla precedente. Le funzioni maggioranti, invece, possono venir scelte con andamento

molto semplice; così da evitare l'inconveniente ora indicato. Vedremo, nel prossimo capoverso, il tipo di funzioni maggioranti sulle quali intendiamo fissare la nostra attenzione.

6. SUL TIPO DELLE FUNZIONI MAGGIORANTI PRESCELTE. — Sia $H(u)$ una funzione, della variabile reale positiva u, definita al modo seguente. Per tutti i valori di u compresi fra lo zero ed una certa costante positiva ε, la H è legata ad u dalla relazione di proporzionalità

$$H = k\,u \qquad (\text{per } 0 \leq u \leq \varepsilon),$$

nella quale k designa un parametro positivo. Per valori di u superiori ad ε la funzione $H(u)$ assume un valore costante positivo, m:

$$H = m \qquad (\text{per } \varepsilon < u).$$

Si esige, inoltre, che la funzione $H(u)$ sia continua in tutto il campo di sua definizione. Per il che basta che sia

$$k\,\varepsilon = m\,.$$

La funzione $H(u)$ rimane perfettamente determinata appena si assegnino due dei tre parametri k, m, ε; per esempio i primi due, k ed m; il terzo parametro, ε, potendosi ricavare, ove occorra, dalla precedente relazione. Volendo mettere in evidenza, oltrechè la variabile indipendente u anche i parametri k ed m da cui la funzione H dipende, useremo la notazione $H(u \mid k, m)$.

Si noti che la funzione $H(u \mid k, m)$ soddisfa in tutto il campo di sua definizione (e cioè per tutti i valori positivi di u) alle ovvie diseguaglianze

$$\left.\begin{array}{l} H(u \mid k, m) \leq k\,u \\ H(u \mid k, m) \leq m \end{array}\right\} \quad (\text{per } 0 \leq u).$$

Si noti ancora che una qualunque funzione reale, $\varphi(u)$, definita per tutti i valori positivi di u, la quale simultaneamente verifichi alle diseguaglianze

$$\left|\begin{array}{ll} (1) & \varphi(u) \leq k\,u \\ (2) & \varphi(u) \leq m \end{array}\right.$$

(con m e k costanti positive arbitrarie) risulta maggiorata, in tutto il campo di sua definizione, dalla funzione $H(u \mid k, m)$. In altri termini le due diseguaglianze soprascritte possono riassumersi nella unica relazione

$$(3) \qquad \varphi(u) \leq H(u \mid k, m)\,.$$

Infatti la diseguaglianza (1) è più stringente della (2) per tutti i valori di u compresi fra zero ed m/k; mentre la (2) è più stringente della (1) per i valori di u superiori ad m/k. La (1) e la (2) ci dicono dunque che:

$$\text{per } 0 \leq u \leq \frac{m}{k} \quad \text{è} \quad \varphi(u) \leq k\,u\,,$$

$$\text{per } u \geq \frac{m}{k} \quad \text{è} \quad \varphi(u) \leq m\,,$$

le quali diseguaglianze, insieme considerate, appunto equivalgono alla (3).

Ciò premesso indichiamo con $P(x, y)$ un punto generico dell'area R, e diciamo u la minor distanza di P dal contorno L dell'area. Questa lunghezza u si identifica con il raggio del cerchio, di centro P, inscritto nel contorno L, e verrà, nel seguito, brevemente chiamata «distanza» di P dal contorno L. Essa risulta definita in modo univoco appena siano assegnate le coordinate x, y dal punto P, e può dunque riguardarsi come una funzione delle coordinate x ed y.

Quando si riguardi u come funzione di x ed y, le funzioni $H(u \mid k, m)$ si mutano in funzioni di x e di y. Si tratta di funzioni molto particolari e di andamento estremamente semplice.

Per avere un'idea di tale andamento, immaginiamo divisa l'area R in due zone; l'una, marginale, costituita dai punti che distano dal contorno per meno di ε; l'altra, centrale, costituita dai punti la cui distanza dal contorno è superiore ad ε. Nella prima di queste zone la $H(u \mid k, m)$ è proporzionale alla distanza u del generico punto x, y dal contorno L. Essa è dunque eguale a zero nei punti di L, e raggiunge, sulla linea di confine tra la zona marginale e quella centrale, il suo valore massimo m. In tutti i punti della zona centrale la funzione $H(u \mid k, m)$ assume il valore costante m.

Le funzioni maggioranti $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ delle quali dicevamo nel precedente capoverso verranno scelte fra quelle del tipo $H(u \mid k, m)$; e saranno, ciascuna, caratterizzata da una diversa coppia di parametri k, m. Diremo k_1 ed m_1 i parametri relativi alla prima funzione maggiorante, F_1; k_2 ed m_2 quelli relativi alla seconda funzione maggiorante, F_2; e, più in generale, k_n ed m_n quelli relativi alla n^{esima} funzione maggiorante, F_n. Si tratta, ora, di scegliere questi vari gruppi di parametri in modo che le funzioni $F_1, F_2, \ldots, F_n, \ldots$ soddisfacciano alle diseguaglianze che per esse richiede il nostro problema.

Notiamo, per inciso, d'aver introdotta, nei nostri ragionamenti, proprio quella tal «zona marginale» dell'area R, della quale avevamo prevista l'importanza attraverso le considerazioni intuitive del capoverso 3.

7. DETERMINAZIONE DELLA PRIMA FUNZIONE MAGGIORANTE. — La funzione maggiorante F_1 è soggetta alle condizioni seguenti: di annullarsi sul contorno dell'area R, e di maggiorare, nei punti interni ad R, la funzione di prima approssimazione $f_1(x, y)$.

Quando si assuma, per F_1, una funzione del tipo $H(u|k_1, m_1)$, la prima di queste condizioni risulta senz'altro soddisfatta. Rimarrà dunque da soddisfare alla seconda; e cioè si dovrà provare che, mediante conveniente scelta dei parametri k_1 ed m_1, si può far in modo che sia:

$$f_1(x, y) \leq H(u|k_1, m_1).$$

A tale scopo ricorderemo che la funzione $f_1(x, y)$ è, per ipotesi, limitata, e quindi inferiore, in ogni punto del campo R, ad una certa costante positiva e finita m. Avremo, cioè:

$$f_1(x, y) < m.$$

Per ipotesi la funzione $f_1(x, y)$ è inoltre derivabile e dotata di derivate prime limitate in valore assoluto. Val quanto dire che la derivata di $f_1(x, y)$, presa in una qualunque direzione, è sempre inferiore (in valore assoluto) ad una certa costante positiva e finita k. Di qui si trae che la differenza dei valori assunti dalla funzione $f_1(x, y)$ agli estremi di un segmento PQ tracciato nel campo R è, in valore assoluto, inferiore al prodotto della costante k per la lunghezza, $\overline{PQ}$, di quel segmento. In simboli:

$$|f_1(P) - f_1(Q)| < k \cdot \overline{PQ}.$$

Se, in particolare, il punto Q appartiene al contorno L (dove la funzione f_1 è nulla) la relazione precedente diviene:

$$|f_1(P)| < k \cdot \overline{PQ},$$

o, anche, avendo presente che f_1 è positiva in tutto il campo di sua definizione:

$$f_1(P) < k \cdot \overline{PQ}.$$

Ferma restando la posizione di P, noi potremo scegliere Q, sul contorno L, in quella posizione che rende minima la distanza $\overline{PQ}$. Tale distanza $\overline{PQ}$ si identifica, allora, con quella che abbiamo chiamata la *distanza* di P dal contorno L, ed abbiamo indicata con la lettera u. Pertanto.

$$f_1(x, y) < k\,u.$$

Le due limitazioni:

$$f_1(x, y) < m$$

$$f_1(x, y) < k\,u$$

cui abbiamo dimostrato soddisfare la funzione $f_1(x, y)$ possono riassumersi, pur quanto abbiamo osservato nel capoverso precedente, nella unica relazione:

$$f_1(x, y) < H(u \mid k_1, m_1),$$

pur di scegliere i parametri k_1 ed m_1 rispettivamente eguali (o superiori) a k ed m.

Rimane pertanto provato che la funzione $f_1(x, y)$ può maggiorarsi, in tutto il campo di sua definizione, con la funzione $H(u \mid k_1, m_1)$.

8. Determinazione della seconda funzione maggiorante. – Noi applicheremo ora alla prima funzione maggiorante, F_1, l'operazione di media; poi maggioreremo la funzione φ_2 in tal modo ottenuta con una funzione del tipo $H(u \mid k_2, m_2)$. Questa funzione costituirà la nostra seconda maggiorante, F_2.

Diciamo P, come al solito, un punto generico dell'area R. Con centro in P conduciamo la maggior circonferenza, C, contenuta in R, e diciamone Q il punto di contatto con il contorno L.

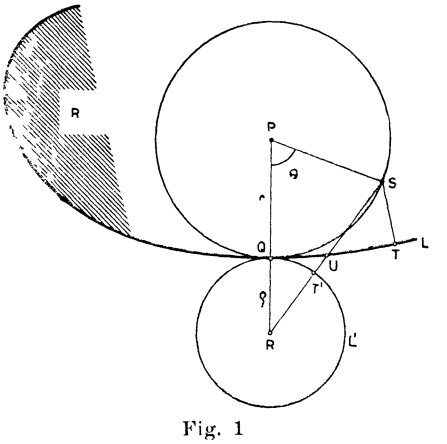

Fig. 1

Relativamente al contorno L noi abbiamo fatta, a suo luogo, una ipotesi restrittiva: che, fissato convenientemente un parametro ϱ positivo e non nullo, si possa condurre per ogni punto di L una circonferenza, di raggio ϱ, tangente al contorno L e completamente esterna all'area R. Ebbene, conduciamo per il punto Q una circonferenza, L', cosiffatta, e indichiamone il centro con R.

Rappresentiamo inoltre: con r il raggio del cerchio C; con S un generico punto di questo cerchio; con u ed u' le distanze di S dalla curva L e, rispettivamente, dal cerchio L'; con θ l'angolo $\widehat{QPS}$. Variando la posizione di S lungo il cerchio C, varieranno, in genere, anche le distanze u ed u', le quali potranno dunque riguardarsi come funzioni di θ.

Elementari considerazioni geometriche provano che risulta sempre (e cioè quale che sia la posizione del punto S sulla circonferenza C):

$$u' > u.$$

Si dicano, infatti, T e T' i piedi delle perpendicolari abbassate da S sul contorno L e, rispettivamente, sul cerchio L'. Poichè L' corre all'esterno dell'area R, ed S è punto interno a quest'area, il segmento $S\,T'$ è tagliato dal contorno L dell'area, in un certo punto che diremo U.

Pertanto:

$$\overline{S\,T'} > \overline{S\,U}.$$

D'altra parte, essendo $\overline{S\,T}$ la minima distanza di S dal contorno L, avremo pure:

$$\overline{S\,U} > \overline{S\,T}.$$

Dalle due diseguaglianze scritte segue

$$\overline{S\,T'} > \overline{S\,T}$$

e cioè

$$u' > u\,.$$

Veniamo, ciò premesso, a considerare la funzione, φ_2, che si ottiene da F_1 con l'operazione di media. Questa funzione φ_2 assume, in P, un valore pari alla media aritmetica dei valori che la funzione F_1 assume nei punti del cerchio C. Avendo presente che $F_1 = H(u \mid k_1, m_1)$, otterremo pertanto:

$$\varphi_2(P) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(u \mid k_1, m_1)\, d\,\theta\,.$$

Poichè $H(u \mid k_1, m_1)$ è funzione non decrescente di u, noi potremo maggiorare il secondo membro della relazione precedente ponendo, in luogo di u, la maggior grandezza u'; ed avremo:

$$\varphi_2(P) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(u' \mid k_1, m_1)\, d\,\theta\,,$$

ovvero

$$\varphi_2(P) \leq \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} H(u' \mid k_1, m_1)\, d\,\theta.$$

Non è difficile calcolare, o, per meglio dire, maggiorare convenientemente l'integrale a secondo membro. Il procedimento che ora indicheremo, anche se lievemente artificioso, ci porterà direttamente al risultato voluto.

Designato con θ_0 un valore di θ scelto ad arbitrio nell'intervallo $0 \vdash\!\dashv \pi$, spezziamo l'integrale a secondo membro nella somma di due analoghi integrali; l'uno esteso all'intervallo $0 \vdash\!\dashv \theta_0$, l'altro esteso all'intervallo $\theta_0 \vdash\!\dashv \pi$. Otterremo:

$$\varphi_2(P) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\theta_0} H(u' \mid k_1, m_1)\, d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\theta_0}^{\pi} H(u' \mid k_1, m_1)\, d\theta .$$

Nel primo dei due integrali soprascritti maggioriamo la funzione integranda $H(u' \mid k_1, m_1)$ sostituendola con il prodotto $k_1 u'$ (cfr. capoverso 6); nel secondo maggioriamo $H(u' \mid k_1, m_1)$ sostituendola con il valore costante m_1. Avremo:

$$\varphi_2(P) \leq \frac{k_1}{\pi} \int_0^{\theta_0} u'\, d\theta + \frac{m_1}{\pi} \int_{\theta_0}^{\pi} d\theta ,$$

ovvero

$$\varphi_2(P) \leq \frac{k_1}{\pi} \int_0^{\theta_0} u'\, d\theta + \frac{\pi - \theta_0}{\pi} m_1 .$$

D'altra parte (v. figura)

$$u' = \overline{RS} - \varrho ,$$

o anche, ricavando $\overline{RS}$ dal triangolo RSP col teorema di CARNOT,

$$u' = \sqrt{\varrho^2 + 2r(r+\varrho)(1-\cos\theta)} - \varrho .$$

Si constata subito che la radice a secondo membro è sempre minore di

$$\varrho + \frac{r}{\varrho}(r+\varrho)(1-\cos\theta)$$

(come immediatamente si prova confrontando il radicando col quadrato dell'espressione soprascritta). Pertanto la distanza u' è maggiorata da

$$\frac{r}{\varrho}(r+\varrho)(1-\cos\theta).$$

Se, nella diseguaglianza cui soddisfa $\varphi_2(P)$, sostituiamo, in luogo di u', il maggior valore $\frac{r}{\varrho}(r+\varrho)(1-\cos\theta)$, ricaviamo:

$$\varphi_2(P) < \frac{k_1}{\pi}\int_0^{\theta_0}\frac{r}{\varrho}(r+\varrho)(1-\cos\theta)\,d\theta + \frac{\pi-\theta_0}{\pi}m_1,$$

ed, eseguendo l'integrazione a secondo membro,

$$\varphi_2(P) < \frac{k_1}{\pi}\frac{r}{\varrho}(r+\varrho)(\theta_0-\sin\theta_0) + \frac{\pi-\theta_0}{\pi}m_1 \,. \tag{4}$$

Da questa diseguaglianza, che sussiste quale che sia il valore di θ_0, se ne possono trarre altre, più particolari, assegnando a θ_0 valori determinati; e, di queste diseguaglianze particolari, due sono essenziali per le nostre successive considerazioni.

Intanto, se si pone $\theta_0 = \pi$, si ha:

$$\varphi_2(P) < k_1\left(1+\frac{r}{\varrho}\right)r\,.$$

Questa diseguaglianza sussiste quale che sia, nell'area R, la posizione del punto P. Tuttavia a noi interessa prenderla in esame solo per i punti P che appartengono a quella zona marginale, dell'area R, in cui è $r < \varepsilon_1$ (ε_1 designando il rapporto m_1/k_1). Per i punti P di questa zona marginale potremo rafforzare la diseguaglianza sostituendo, in luogo della r che figura fra parentesi a secondo membro, la maggior quantità ε_1; ed avremo:

$$\varphi_2(P) < k_1\left(1+\frac{\varepsilon_1}{\varrho}\right)r \qquad (\text{per } r < \varepsilon_1)\,.$$

È, questa, la prima delle due diseguaglianze particolari di cui dicevamo nelle righe precedenti. Ricordando che $\varepsilon_1 = m_1/k_1$ potremo anche scriverla nella forma:

$$\varphi_2(P) < \left(k_1+\frac{m_1}{\varrho}\right)r \qquad \left(\text{per } r < \frac{m_1}{k_1}\right).$$

La seconda diseguaglianza si otterrà osservando che (in tutto l'intervallo $0 < \theta_0 < \pi$) sussiste la relazione:

$$\theta_0 - \sin\theta_0 < \frac{\theta_0^3}{6}\,,$$

cosicchè si può rafforzare la (4) scrivendo:

$$\varphi_2(P) < \frac{k_1}{\pi}\,\frac{r}{\varrho}\,(r+\varrho)\,\frac{\theta_0^3}{6} + \frac{\pi-\theta_0}{\pi}\,m_1\,,$$

la quale deve sussistere per ogni valore di θ_0, e, in particolare, per quel valore che ne rende minimo il secondo membro. Tale valore di θ_0 è dato dalla relazione:

$$\theta_0 = \sqrt{\frac{2\varrho}{r(r+\varrho)}\,\frac{m_1}{k_1}}\,,$$

e, per questo particolare valore di θ_0, la diseguaglianza precedente diviene:

$$\varphi_2(P) < m_1\left(1 - \frac{2}{3\pi}\sqrt{\frac{2\varrho}{r(r+\varrho)}}\sqrt{\frac{m_1}{k_1}}\right).$$

Rafforzeremo ulteriormente questa diseguaglianza ponendo in luogo di r, il massimo, r^*, dei valori che la r assume nei punti dell'area R; ed avremo:

$$\varphi_2(P) < m_1\left(1 - a\sqrt{\frac{m_1}{k_1}}\right),$$

dove per semplicità abbiamo posto

$$a = \frac{2}{3\pi}\sqrt{\frac{2\varrho}{r^*(r^*+\varrho)}}\,.$$

Le due diseguaglianze:

$$(5)\qquad \left|\begin{array}{l} \varphi_2(P) < \left(k_1 + \dfrac{m_1}{\varrho}\right) r \qquad \left(\text{con } r < \dfrac{m_1}{k_1}\right) \\[2ex] \varphi_2(P) < m_1\left(1 - a\sqrt{\dfrac{m_1}{k_1}}\right) \end{array}\right.$$

sono basilari per il seguito del nostro ragionamento. Si noti che la limitazione $r < m_1/k_1$, apposta alla prima di esse, può sopprimersi perchè superflua. E, infatti, per i valori di r che non soddisfano a detta limitazione, la prima delle diseguaglianze (5) è senz'altro soddisfatta in virtù della seconda. Potremo dunque scrivere (per ogni valore di r):

$$\left|\begin{array}{l} \varphi_2(P) < \left(k_1 + \dfrac{m_1}{\varrho}\right) r \\[2ex] \varphi_2(P) < m_1\left(1 - a\sqrt{\dfrac{m_1}{k_1}}\right). \end{array}\right.$$

Ci sia consentita, in queste diseguaglianze, un'ultima trasformazione di carattere formale. Noi abbiamo designata con r la distanza del punto P dal contorno L. Indicando, ora, questa distanza con la solita notazione u, della quale già ci siamo serviti nei precedenti capoversi, scriveremo:

$$\varphi_2(P) < \left(k_1 + \frac{m_1}{\varrho}\right) u$$

$$\varphi_2(P) < m_1 \left(1 - a \sqrt{\frac{m_1}{k_1}}\right).$$

Se introduciamo due nuovi parametri, k_2 ed m_2, legati a k_1 ed m_1 delle relazioni

$$\left| \begin{array}{l} k_2 = k_1 + \dfrac{m_1}{\varrho} \\ m_2 = m_1 \left(1 - a \sqrt{\dfrac{m_1}{k_1}}\right) \end{array} \right.$$

le diseguaglianze precedenti diventano

$$\varphi_2(P) < k_2 u$$

$$\varphi_2(P) < m_2$$

e possono (per quanto osservammo nel capoverso 6) riassumersi nella diseguaglianza unica:

$$\varphi_2(P) < H(u \mid k_2, m_2).$$

La funzione $H(u \mid k_2, m_2)$ costituisce la richiesta seconda funzione maggiorante F_2.

Potremo così riassumere i risultati di questo e del precedente capoverso: *La prima funzione approssimatrice,* $f_1(x, y)$, *può essere maggiorata con una funzione* F_1 *del tipo:*

$$F_1 = H(u \mid k_1, m_1),$$

dove k_1 *ed* m_1 *designano convenienti parametri. La seconda funzione approssimatrice,* $f_2(x, y)$, *sarà a sua volta maggiorata da una funzione* F_2 *del tipo:*

$$F_2 = H(u \mid k_2, m_2),$$

dove k_2 *ed* m_2 *sono parametri legati a* k_1 *ed* m_1 *dalle relazioni:*

$$\left| \begin{array}{l} k_2 = k_1 + \dfrac{m_1}{\varrho_1} \\ m_2 = m_1 \left(1 - a \sqrt{\dfrac{m_1}{k_1}}\right) \end{array} \right.$$

9. Determinazione delle successive funzioni maggioranti. — La funzione F_3, che maggiora la terza funzione approssimatrice $f_3(x, y)$, si otterrà, da F_2, in modo analogo a quello con cui, da F_1, abbiamo ottenuto F_2. Sarà dunque, F_3, una funzione del tipo:

$$F_3 = H(u \mid k_3, m_3),$$

i cui parametri k_3 ed m_3 saranno legati a k_2 ed m_2 dalle relazioni

$$\left| \begin{array}{l} k_3 = k_2 + \dfrac{m_2}{\varrho} \\ m_3 = m_2 \left(1 - a \sqrt{\dfrac{m_2}{k_2}}\right). \end{array} \right.$$

Analogamente ricaveremo la funzione maggiorante F_4 e le altre successive. L'$(n+1)^{\text{esima}}$ funzione maggiorante, F_{n+1}, sarà dunque del tipo

$$F_{n+1} = H(u \mid k_{n+1}, m_{n+1}),$$

ed i suoi parametri, k_{n+1} ed m_{n+1}, saranno legati a quelli, k_n ed m_n, della precedente funzione maggiorante F_n, dalle relazioni ricorrenti:

$$(6) \qquad \left| \begin{array}{l} k_{n+1} = k_n + \dfrac{m_n}{\varrho} \\ m_{n+1} = m_n \left(1 - a \sqrt{\dfrac{m_n}{k_n}}\right). \end{array} \right.$$

Noi dimostreremo nel prossimo capoverso che, al divergere dell'indice n, i valori di k_n definiti da queste formule si mantengono limitati, ed i valori di m_n tendono a zero. La prima di queste conclusioni ci serve per provare la legittimità di quelle operazioni di integrazione che (per quanto abbiam visto nel capoverso precedente) ci son necessarie per passare da F_n ad F_{n+1}; e ci assicura, pertanto, la possibilità di far crescere illimitatamente l'indice n. La seconda conclusione ci prova che, al divergere di n, la funzione F_n tende a zero. Con ciò risulterà dimostrata la convergenza del metodo di approssimazioni successive che forma oggetto di questa Memoria.

10. La convergenza nel caso di contorni convessi. — La convergenza delle m_n verso zero e delle k_n ad un limite finito è particolarmente facile a dimostrarsi nel caso che il contorno L sia convesso. In questa ipotesi, fissato del tutto a piacere un parametro positivo ϱ, si potrà sempre

condurre, per ogni punto di L, un cerchio, di raggio ϱ, tangente ad L e totalmente esterno all'area R. In altri termini il valore da assegnare al parametro ϱ che figura nelle equazioni ricorrenti (6) è, nel caso di contorni convessi, del tutto arbitrario, e può scegliersi grande quanto si vuole. Ponendo addirittura

$$\varrho = \infty$$

l'espressione di a indicata nel precedente capoverso 8:

$$a = \frac{2}{3\pi}\sqrt{\frac{2\varrho}{r^*(r^* + \varrho)}}$$

si semplifica in

$$a = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}\,\frac{1}{\sqrt{r^*}},$$

e le formule (6) si riducono alle seguenti:

$$\left|\begin{array}{l} k_{n+1} = k_n \\ \\ m_{n+1} = m_n\left(1 - \dfrac{2\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{k_n r^*}}\sqrt{m_n}\right). \end{array}\right.$$

La prima di queste relazioni sta a dire che le k_n con indice superiore ad 1 sono tutte eguali a k_1. La convergenza delle k_n ad un limite finito è dunque, nel caso di contorni convessi, assolutamente banale. Un po' meno evidente è, invece, la convergenza delle m_n verso il valore zero.

Posto, per semplicità

$$A = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi\sqrt{k_n r^*}}, \tag{7}$$

potremo scrivere l'equazione ricorrente cui soddisfa m_n nella forma:

$$m_{n+1} = m_n(1 - A\sqrt{m_n}),$$

ovvero nell'altra, equivalente,

$$m_{n+1} - m_n = -A\, m_n^{\frac{3}{2}}. \tag{8}$$

Se non è facile integrare, con funzioni elementari, questa equazione alle differenze finite, è tuttavia assai facile trovare una maggiorazione, del resto abbastanza stringente, per i valori di m_n.

Indichiamo con $M(x)$ quella funzione, della variabile x, che verifica, nell'intervallo $1 \leq x < \infty$, l'equazione differenziale

$$\frac{dM}{dx} = -A M^{\frac{3}{2}}, \tag{9}$$

ed assume, per $x = 1$, il valore m_1. Integrando per separazione di variabili si verifica subito che tale funzione $M(x)$ ha l'espressione

$$M(x) = \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{m_1}} + \frac{A}{2}(x-1)\right]^2}.$$

Ebbene: possiamo dimostrare che, per ogni valore intiero, n, della variabile x, sussiste la diseguaglianza

$$m_n \leq M(n) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Noi proveremo anzitutto, che la diseguaglianza precedente sussiste per $n = 2$; passeremo poi a dimostrarla per $n = 3$ e, successivamente, per un valore n qualunque.

Poniamo la (8), scritta per $n = 1$, nella forma equivalente:

$$m_2 = m_1 - A \int_1^2 m_1^{\frac{3}{2}} dx. \tag{10}$$

A fianco di questa consideriamo la relazione che si ottiene integrando nell'intervallo $1 \vdash\!\dashv 2$ ambo i membri della (9). Ricordando che per $x = 1$ deve aversi $M(x) = m_1$, otterremo:

$$M(2) = m_1 \quad A \int_1^2 M^{\frac{3}{2}} dx.$$

Poichè $M(x)$ è, come ovviamente risulta dalla (9), funzione decrescente della variabile x, in tutto l'intervallo d'integrazione $1 \vdash\!\dashv 2$ avremo:

$$M(x) < m_1.$$

Se, pertanto, in luogo della funzione integranda $M(x)$, noi poniamo, nell'ultima relazione scritta, il maggior valore m_1, il secondo membro di

quella relazione diventa più piccolo. Di qui la diseguaglianza:

$$M(2) > m_1 - A \int_1^2 m_1^{\frac{3}{2}} \, d\,x\,,$$

che, tenendo presente la (10), si scrive:

$$M(2) > m_2\,.$$

Procediamo, ora, al confronto di $M(3)$ con m_3. Conviene, a questo scopo, introdurre una funzione ausiliare; e, più precisamente, quella funzione $\overline{M}(x)$ che verifica l'equazione (9) ed assume, per $x = 2$, il valore m_2. Si constata immediatamente che, per ogni valore di x, risulta:

$$M(x) > \overline{M}(x). \tag{11}$$

Difatti $M(x)$ ed $M(x)$ sono, ambedue, soluzioni dell'equazione differenziale (9); la prima di esse assume, per $x = 2$, il valore $M(2)$, e la seconda il minor valore m_2. Se si scrivono le espressioni esplicite delle due funzioni, tenendo conto di questi loro iniziali valori, si può facilmente verificare che la prima supera la seconda in ogni punto del suo campo di definizione. Scrivendo la (11) per $x = 3$, otteniamo

$$M(3) > \overline{M}(3). \tag{12}$$

D'altra parte, scrivendo $\overline{M}(3)$ nella forma:

$$\overline{M}(3) = m_2 - \int_2^3 \overline{M}^{\frac{3}{2}} \, d\,x$$

si verifica subito che risulta

$$\overline{M}(3) > m_2 - \int_2^3 m_2^{\frac{3}{2}} \, d\,x$$

e quindi

$$\overline{M}(3) > m_3\,.$$

Da questa e dalla (12) discende

$$M(3) > m_3\,.$$

Analogamente procederemo al confronto di $M(4)$ con m_4 e constateremo che, in generale, sussiste la diseguaglianza:

$$m_n < M(n),$$

che, tenuta presente l'espressione di $M(x)$, può scriversi:

$$m_n < \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{m_1}} + \frac{A}{2}(n-1)\right]^2}.$$

Sostituendo, per A, la sua espressione (7) otterremo:

$$m_n < \frac{m_1}{\left[1 + \frac{\sqrt{2}}{3\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{r^*}}(n-1)\right]^2}, \tag{13}$$

dove si è designato con ε_1 il rapporto $m_1 k_1$ (e cioè la larghezza della « zona marginale » dell'area R).

Questa relazione dimostra che, al divergere di n, il parametro m_n tende a zero con rapidità assai notevole. Se, a titolo di esempio, assumiamo per il rapporto ε_1/r^* il ragionevole valore numerico $1/2$, otteniamo (per $n = 10$)

$$m_{10} < 0{,}25\, m_1.$$

Bastano, dunque, dieci approssimazioni perchè il divario fra la funzione approssimatrice e la funzione armonica richiesta scenda al di sotto di $1/4$ del valore iniziale.

In realtà la convergenza del metodo si dimostra, sperimentalmente, ancor più rapida di quanto lasci credere la relazione (13). Il che, del resto, non può sorprendere quando si rifletta che la (13) è stata ottenuta attraverso una lunga catena di maggiorazioni, alcune delle quali necessariamente assai larghe.

11. La convergenza nel caso generale. — Abbandoniamo, ora, l'ipotesi semplificatrice della convessità del contorno L, e riprendiamo cioè lo studio del sistema di equazioni ricorrenti

$$\left| \begin{aligned} k_{n+1} &= k_n + \frac{m_n}{\varrho} \\ m_{n+1} &= m_n\left(1 - a\sqrt{\frac{m_n}{k_n}}\right) \end{aligned} \right. \tag{6}$$

nell'ipotesi, più generale, che ϱ sia un parametro finito.

L'integrazione di queste equazioni appare tutt'altro che semplice. È possibile, ciononondimeno, trovare per k_n ed m_n (come già nel caso particolare esaminato nel precedente capoverso) convenienti espressioni maggioranti.

Intanto scriveremo la seconda equazione ricorrente nella forma

$$m_{n+1} = m_n (1 - A_n \sqrt{m_n}), \tag{14}$$

dove abbiam posto

$$A_n = \frac{a}{\sqrt{k_n}};$$

e, relativamente alla equazioni del tipo (14), dimostreremo il seguente lemma preliminare:

Designate con a_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *certe costanti positive, scelte colle sole condizioni di essere inferiori alle corrispondenti costanti* A_n,

$$a_n \leq A_n,$$

e di costituire una successione decrescente (o, al massimo, non crescente), consideriamo la successione dei valori M_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *che verificano l'equazione, analoga alla* (14),

$$M_{n+1} = M_n (1 - a_n \sqrt{M_n}); \tag{15}$$

il valore iniziale, M_1, *della nuova successione essendo scelto pari al valore antico,* m_1:

$$M_1 = m_1.$$

Ebbene: *i termini della successione* $M_1, M_2, M_3, \ldots$ *maggiorano (o eguagliano), rispettivamente, i termini della successione* $m_1, m_2, m_3, \ldots$. *In simboli:*

$$m_n \leq M_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

In termini equivalenti: Se, nella (14), sostituiamo i coefficienti A_n con altri coefficienti più piccoli, lasciando tuttavia invariato il termine iniziale m_1, i successivi termini, $m_2, m_3, \ldots$, risultano maggiorati.

Per provarlo basta confrontare fra loro, ordinatamente, i valori, m_n, che verificano la (14), coi valori, M_n, che verificano la (15). Cominciamo dal confronto di m_2 ed M_2. Abbiamo, per definizione,

$$m_2 = m_1 (1 - A_1 \sqrt{m_1}),$$

$$M_2 = m_1 (1 - a_1 \sqrt{m_1}). \tag{16}$$

Per ipotesi è $a_1 \leq A_1$; dal confronto dei secondi membri risulta senz'altro:

$$m_2 \leq M_2 .$$

Indicheremo qui, per inciso, una limitazione cui soddisfa il valore M_2; essa ci sarà utile nel seguito del ragionamento. Il secondo membro della (16), riguardato come funzione della variabile indipendente m_1, assume il suo valore massimo per $m_1 = 4/(9\, a_1^2)$; e tale valore massimo è $4/(27\, a_1^2)$. Avremo pertanto, quale che sia il valore di m_1,

$$M_2 \leq \frac{4}{27\, a_1^2} .$$

Veniamo ora al confronto fra i termini m_3 ed M_3. Abbiamo, per definizione:

$$m_3 = m_2 (1 - A_2 \sqrt{m_2}) ,$$

$$M_3 = M_2 (1 - a_2 \sqrt{M_2}) .$$

Per eseguire comodamente il paragone fra m_3 ed M_3, conviene introdurre un parametro ausiliare, $\overline{M}_3$, definito dalla relazione:

$$\overline{M}_3 = m_2 (1 - a_2 \sqrt{m_2}).$$

Esaminando le espressioni di m_3 ed $\overline{M}_3$, e tenendo presente che, per ipotesi, $a_2 \leq A_2$, si constata che è:

$$m_3 \leq \overline{M}_3 .$$

Noi proveremo ora che, insieme con questa diseguaglianza, sussiste anche l'altra:

$$\overline{M}_3 \leq M_3 , \tag{17}$$

e, dal confronto delle due diseguaglianze seguirà immediatamente che:

$$m_3 \leq M_3 .$$

Consideriamo la funzione

$$x (1 - a_2 \sqrt{x}) . \tag{18}$$

Essa è crescente per tutti i valori di x inferiori a $4/(9\, a_2^2)$. Ora noi abbiamo visto che M_2 soddisfa alla limitazione:

$$M_2 \leq \frac{4}{27\, a_1^2}$$

e a più forte ragione (poichè $a_2 \leq a_1$) alla limitazione :

$$M_2 \leq \frac{4}{9\, a_2^2} \, .$$

I valori di x eguali o inferiori ad M_2 appartengono, dunque, a quell'intervallo in cui la funzione (18) è crescente. In particolare la funzione (18) crescerà quando noi passiamo dal valore $x = m_2$ al maggior valore $x = M_2$; ed avremo, cioè :

$$m_2 (1 - a_2 \sqrt{m_2}) \leq M_2 (1 - a_2 \sqrt{M_2}) \, ,$$

che appunto dimostra la (17).

Così resta provato che :

$$m_3 \leq M_3 \, ,$$

e che, più in generale, è :

$$m_n \leq M_n \; (n = 1 \, , 2 \, , 3 \, , \ldots) \, .$$

Il lemma che ora abbiamo enunciato ci dà mezzo di maggiorare i valori delle m_n che si ricavano dalla (14) con altri valori, M_n, ottenibili da una equazione analoga, la (15). Giocando sull'arbitrarietà dei parametri a_n noi potremo ridurre quest'ultima equazione alla forma più adatta per una facile valutazione dei valori M_n. La scelta più idonea, per i parametri a_n, sembra essere la seguente.

Assegnato, a piacer nostro, un indice intiero e positivo i, attribuiamo, a tutte le a_n con indice inferiore ad i, il valore costante A_{i-1}. Poniamo, cioè,

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{i-1} = A_{i-1} \, .$$

Questi parametri a_n verificano, ovviamente, le relazioni

$$a_n \leq A_n \; (n = 1 \, , 2 \, , \ldots , i - 1) \, .$$

Pertanto, in virtù del lemma dimostrato nella prima parte di questo capoverso, i valori M_n che si ottengono dalla equazione ricorrente

$$M_{n+1} = M_n (1 - a_n \sqrt{M_n}) \quad (n = 1 \, , 2 \, , \ldots , i - 1) \tag{15}$$

maggioreranno i valori m_n che si ottengono dalla (14). In simboli:

$$m_n \leq M_n \quad (n = 1, 2, \ldots, i).$$

D'altra parte abbiamo già constatato nel precedente capoverso che gli M_n deducibili dalla (15) (nella quale, ricordiamo, i parametri a_n hanno il valore costante A_{i-1}) soddisfano alla diseguaglianza:

$$M_n \leq \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{m_1}} + \frac{A_{i-1}}{2}(n-1)\right]^2} \quad (n = 1, 2, \ldots, i).$$

A più forte ragione avremo:

$$m_n \leq \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{m_1}} + \frac{A_{i-1}}{2}(n-1)\right]^2} \quad (n = 1, 2, \ldots, i). \tag{19}$$

Noi abbiamo — finora — utilizzata soltanto la seconda delle equazioni ricorrenti (6). Esaminiamo adesso la prima:

$$k_{n+1} = k_n + \frac{m_n}{\varrho}.$$

Se scriviamo l'equazione precedente per tutti i valori dell'indice n compresi fra 1 ed i, e poi sommiamo membro a membro, otteniamo:

$$k_{i+1} = k_1 + \frac{1}{\varrho} \sum_1^i m_n.$$

Tenuta presente la maggiorazione (19), dianzi ottenuta per m_n, potremo scrivere:

$$k_{i+1} < k_1 + \frac{1}{\varrho} \sum_1^i \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{m_1}} + \frac{A_{i-1}}{2}(n-1)\right]^2}.$$

Ci si consenta, per semplicità di scrittura, di porre

$$P = \frac{1}{\sqrt{m_1}}, \quad Q = \frac{A_{i-1}}{2},$$

e, pertanto, di scrivere la relazione precedente nella forma:

$$k_{i+1} < k_1 + \frac{1}{\varrho} \sum_1^i \frac{1}{[P + Q(n-1)]^2}.$$

La sommatoria a secondo membro può, se non valutarsi, almeno maggiorarsi in modo abbastanza stringente. A tale scopo conviene, anzitutto, tirar fuori dal segno di sommatoria, il primo termine di quest'ultima, e scrivere:

$$k_{i+1} < k_1 + \frac{1}{\varrho P^2} + \frac{1}{\varrho} \sigma, \tag{20}$$

dove

$$\sigma = \sum_2^i \frac{1}{[P + Q(n-1)]^2}.$$

Si osservi poi che, dalla ovvia diseguaglianza

$$\frac{1}{[P + Q(n-1)]^2} < \int_{n-1}^{n} \frac{1}{[P + Q(x-1)]^2} dx \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

segue

$$\sigma < \int_1^i \frac{1}{[P + Q(x-1)]^2} dx,$$

e, a maggior ragione,

$$\sigma < \int_1^\infty \frac{1}{[P + Q(x-1)]^2} dx.$$

Eseguendo l'integrazione:

$$\sigma < \frac{1}{PQ}.$$

La (20) si può dunque rafforzare scrivendo

$$k_{i+1} < k_1 + \frac{1}{\varrho P^2} + \frac{1}{PQ}.$$

Sostituiamo a primo membro, in luogo di k_{i+1}, la minor quantità k_{i-1}. Tenute presenti le espressioni di P e Q avremo

$$k_{i-1} < k_1 + \frac{m_1}{\varrho} + \frac{2\sqrt{m_1}}{\varrho A_{i-1}}$$

e infine, ricordando che $A_{i-1} = a / \sqrt{k_{i-1}}$,

$$k_{i-1} < \left(k_1 + \frac{m_1}{\varrho}\right) + \left(\frac{2\sqrt{m_1}}{\varrho\, a}\right)\sqrt{k_{i-1}}.$$

Si trae immediatamente, di qui, che deve essere (per ogni valore dell'indice i)

$$\sqrt{k_i} < \frac{\sqrt{m_1}}{\varrho\, a} + \sqrt{\frac{m_1}{\varrho^2 a^2} + \frac{m_1}{\varrho} + k_1}\,.$$

Resta così provato che i parametri k_i non possono crescere illimitatamente al divergere dell'indice i. Essi non possono superare il valore K indicato dalla relazione

$$\sqrt{K} = \frac{\sqrt{m_1}}{\varrho\, a} + \sqrt{\frac{m_1}{\varrho^2 a^2} + \frac{m_1}{\varrho} + k_1}\,.$$

I coefficienti A_i non potranno, a loro volta, scendere al di sotto del valore $a / \sqrt{K}$, e quindi, in virtù della (19), le m_n soddisferanno alla diseguaglianza

$$m_n < \frac{1}{\left[\frac{1}{\sqrt{m_1}} + \frac{a}{2\sqrt{K}}(n-1)\right]^2},$$

la quale prova che, al crescere dell'indice n, i valori m_n convergono verso zero.

Risulta così dimostrata, anche nel caso di contorni non convessi, la convergenza del metodo di approssimazioni successive che forma oggetto di questa Memoria.

[*Pervenuta alla Redazione il 23 Gennaio 1950*]