

# ANNALI DELLA SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA *Classe di Scienze*

S. FAEDO

## **Una osservazione sul metodo di Ritz**

*Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3<sup>e</sup> série, tome 2, n° 1-4 (1950), p. 85-97*

[http://www.numdam.org/item?id=ASNSP\\_1950\\_3\\_2\\_1-4\\_85\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_2_1-4_85_0)

© Scuola Normale Superiore, Pisa, 1950, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze » (<http://www.sns.it/it/edizioni/riviste/annaliscienze/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UNA OSSERVAZIONE SUL METODO DI RITZ

di S. FAEDO (Roma)

1. - Nelle Sue « *Lezioni di Analisi funzionale* » il prof. M. PICONE ha segnalato il problema <sup>(1)</sup> di dare procedimenti per la costruzione delle estremanti nei problemi di Calcolo delle Variazioni, vevoli anche se non si può ricorrere ai classici procedimenti euleriani.

Ci occupiamo qui di tale problema, limitandoci a considerare l'integrale

$$I(y) = \int_a^b f[x, y(x), y'(x)] dx;$$

quanto si dirà ha però carattere del tutto generale.

L'ormai classico metodo di RITZ è un procedimento costruttivo che risolve il problema posto. L'obiezione che solitamente si muove ad esso è che la sua applicabilità è limitata al caso che la funzione  $f(x, y, y')$  sia un polinomio di secondo grado in  $y$  e  $y'$ .

*Scopo di questa nota è di far rilevare che il metodo di RITZ è applicabile all'integrale  $I(y)$  anche se  $f(x, y, y')$  non è quadratica in  $y$  e  $y'$ , purchè in tal caso si consideri  $I(y)$  sopra opportune classi di funzioni.*

2. — Supponiamo che  $f(x, y, y')$  sia una funzione continua per  $a \leq x \leq b$  e ogni valore di  $y$  e  $y'$  e sia  $\Gamma$  una classe di funzioni  $y(x)$  continue in  $(a, b)$  con la derivata prima, che sia chiusa e compatta del primo ordine, cioè quando si assuma come distanza fra due elementi  $y_1(x)$  e  $y_2(x)$  di  $\Gamma$

$$\max_{a \leq x \leq b} \{ |y_1(x) - y_2(x)| + |y_1'(x) - y_2'(x)| \}.$$

---

<sup>(1)</sup> Si veda anche T. VIOLA, « *Procedimenti costruttivi per le estremanti di un funzionale* », Rend. Circ. Matem. Palermo. t. LXII, 1938-39. Rend. Lincei, Vol. XXVIII, 1938, pag. 311-317 e 371-377.

L'integrale  $I(y)$  è continuo in  $\Gamma$  e quindi possiede massimo e minimo assoluto. Possiamo limitarci al caso del minimo. E' ben noto<sup>(2)</sup> che da ogni successione  $\{y_n(x)\} \subset \Gamma$  e minimizzante  $I(y)$  in  $\Gamma$  si può sempre estrarre una successione parziale convergente uniformemente in  $(a, b)$  (con la successione delle derivate prime) a una minimante  $\bar{y}(x)$  di  $I(y)$  in  $\Gamma$ . Ne segue che se  $I(y)$  possiede una sola minimante assoluta in  $\Gamma$ , ogni successione minimizzante  $\{\bar{y}_n(x)\}$  converge uniformemente in  $(a, b)$ , con  $\{y'_n(x)\}$ , alla  $\bar{y}(x)$  e alla  $\bar{y}'(x)$ .

*Volendo dare un metodo generale che risponda al problema posto dal prof. M. PICONE, basta quindi dare un procedimento, che si presti al calcolo numerico, per la costruzione di successioni minimizzanti  $I(y)$  in  $\Gamma$ .*

*A ciò risponde perfettamente il metodo di Ritz qualora la classe  $\Gamma$ , chiusa e compatta del primo ordine, sia di funzioni aventi derivata seconda di quadrato sommabile in  $(a, b)$ .*

Mostreremo ciò considerando alcune fra le classi più notevoli segnalate dal prof. M. PICONE nelle già citate Lezioni: con lo stesso ragionamento si prova l'affermazione generale che si è fatta.

3. -- Consideriamo dapprima la classe  $\Gamma_1$  delle funzioni  $y(x)$ , con  $y'(x)$  assolutamente continua in  $(a, b)$  e soddisfacenti alle condizioni

$$(1) \quad y(a) = c_1, \quad y'(a) = c_2$$

$$(2) \quad \int_a^b y''^2(x) dx < L,$$

dove  $c_1, c_2$  ed  $L \geq 0$  sono costanti assegnate.

Dalla (2) segue che le  $y(x)$  di  $\Gamma_1$  e le loro derivate  $y'(x)$  sono equicontinue e quindi equilimitate per la (1); perciò  $\Gamma_1$  è compatta del 1° ordine; essa è anche chiusa del primo ordine per la semicontinuità inferiore (del primo ordine) dell'integrale al primo membro della (2).

Sia  $\{\psi_n(x)\}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) un sistema di funzioni ortogonali e normali in  $(a, b)$  completo per l'approssimazione lineare in media delle funzioni di quadrato sommabile in  $(a, b)$ . Le funzioni

$$\varphi_n(x) = \int_a^x (x - \xi) \psi_n(\xi) d\xi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

(2) M. PICONE, « *Lezioni di Analisi funzionale* », II ed., (Roma, 1946) Cap. I.

hanno le proprietà

$$\varphi_n(a) = \varphi'_n(a) = 0,$$

$$\varphi''_n(x) = \psi_n(x)$$

quasi ovunque in  $(a, b)$ .

Sia  $\bar{y}(x)$  una funzione di  $I_1$  e si ponga

$$\gamma_n = \int_a^b \bar{y}''(x) \psi_n(x) dx \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Fissato  $\varepsilon > 0$  ad arbitrio, se l'intero  $m$  è abbastanza grande, risulta

$$(3) \quad \int_a^b \left\{ \bar{y}''(x) - \sum_{n=1}^m \gamma_n \psi_n(x) \right\}^2 dx \leq \varepsilon^2$$

ed è

$$(3') \quad \int_a^b \left[ \sum_{n=1}^m \gamma_n \psi_n(x) \right]^2 dx = \sum_{n=1}^m \gamma_n^2 \leq \int_a^b \bar{y}''^2(x) dx \leq L.$$

Posto

$$(4) \quad y_m(x) = c_1 + c_2(x - a) + \sum_{n=1}^m \gamma_n \varphi_n(x),$$

si ottiene per la disuguaglianza di SCHWARZ per  $a \leq x \leq b$

$$(5) \quad |\bar{y}'(x) - y'_m(x)| \leq \int_a^x |\bar{y}''(x) - \bar{y}''_m(x)| dx \leq \varepsilon(b - a)^{\frac{1}{2}}$$

da cui segue subito

$$(5') \quad |\bar{y}(x) - y_m(x)| \leq \varepsilon(b - a)^{3/2}.$$

Per applicare il metodo di RITZ per la ricerca del minimo di  $I(y)$  in  $I_1$  si procede così:

Si considera la funzione continua delle variabili  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$

$$I(y_m) = \int_a^b f(x, y_m(x), y'_m(x)) dx.$$

dove è

$$(4') \quad y_m(x) = c_1 + c_2(x-a) + \sum_{n=1}^m \lambda_n \varphi_n(x)$$

e se ne determina una minimante assoluta  $y_m^*(x)$  nella ipersfera

$$(6) \quad \sum_{n=1}^m \lambda_n^2 \leq L.$$

La  $y_m^*(x)$  è l' $m$ ª approssimazione del metodo di RITZ per il problema considerato.

Dimostriamo che  $\{y_m^*(x)\}$  è una successione minimizzante  $I(y)$  in  $\Gamma_1$ .

Intanto ogni  $y_m(x)$  come la (4') verifica le (1); inoltre segue subito dalle (3') e (6) che  $y_m^*(x)$  verifica anche la (2) e quindi appartiene a  $\Gamma_1$ .

Sia  $\bar{y}(x)$  una minimante assoluta di  $I(y)$  in  $\Gamma_1$ .  $I(y)$  è continuo del primo ordine e quindi, per le (5) e (5'), fissato  $\sigma > 0$  ad arbitrio, la  $\bar{y}_m(x)$  data dalla (4) per  $m$  abbastanza grande verifica la disuguaglianza

$$I(\bar{y}_m) - I(y) < \sigma;$$

dalla definizione di  $y_m^*(x)$  segue

$$I(y_m^*) \leq I(\bar{y}_m)$$

perchè  $\bar{y}_m$  per la (3') soddisfa alla (6) e quindi è

$$I(y_m^*) - I(\bar{y}) < \sigma,$$

che prova che  $\{y_m^*(x)\}$  è una successione minimizzante.

4. — Lo stesso vale se invece della classe  $\Gamma_1$  si considera la classe  $\Gamma_2$  delle  $y(x)$  con  $y'(x)$  assolutamente continua in  $(a, b)$ , che soddisfano alla (2) e per cui è

$$(1') \quad y(a) = c_1, \quad y(b) = c_2.$$

Basta porre

$$\varphi_n(x) = \int_a^b G(x, \xi) \eta'(\xi) d\xi,$$

con

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{(a-x)(b-\xi)}{b-a} & \text{per } x \leq \xi \\ \frac{(a-\xi)(b-x)}{b-a} & \text{per } x \geq \xi; \end{cases}$$

ne segue

$$\varphi_n(a) = \varphi_n(b) = 0, \quad \varphi_n''(x) = \varphi_n(x) \quad \text{q. o. in } (a, b)$$

e invece della (4') si pone

$$y_m(x) = \frac{c_1 b - c_2 a + x(c_2 - c_1)}{b-a} + \sum_{n=1}^m \lambda_n \varphi_n(x).$$

Tutto procede come nel n. 3.

Si osservi che per ogni  $\bar{y}(x)$  di  $\Gamma_2$  si può determinare una

$$\bar{y}_m(x) = \frac{c_1 b - c_2 a + x(c_2 - c_1)}{b-a} + \sum_{n=1}^m \gamma_n \varphi_n(x)$$

per cui valgono le (3), (3'), (5) e (5'). L'unica variante al precedente ragionamento è che, essendo

$$\bar{y}(a) = \bar{y}_m(a), \quad \bar{y}(b) = \bar{y}_m(b)$$

esiste almeno un  $x_m$  con  $a < x_m < b$  per cui è

$$\bar{y}'(x_m) = \bar{y}_m'(x_m);$$

ne segue

$$|\bar{y}'(x) - \bar{y}_m'(x)| \leq \int_{x_m}^x |\bar{y}'' - \bar{y}_m''| dx \leq \left\{ (b-a) \cdot \int_a^b (\bar{y}'' - \bar{y}_m'')^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

da cui si ottiene ancora la (5).

5. — Se invece di  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  si considerano le classi  $\Gamma_1^*$  e  $\Gamma_2^*$  ottenute sostituendo rispettivamente alle (1) e (1') le

$$(1^*) \quad |y(a)| \leq H_1, \quad |y'(a)| \leq H_2$$

$$(1'^*) \quad |y(a)| \leq H_1, \quad |y(b)| \leq H_2$$

con  $H_1$  e  $H_2$  costanti, il metodo di RITZ è ancora applicabile. Consideriamo la  $I_1^*$ ; si pone ancora la (4') dove ora  $c_1$  e  $c_2$  sono (come i  $\lambda_n$ ) parametri variabili e si determina la  $y_m(x)$  in modo che renda minimo  $I(y_m)$  nel dominio

$$|c_1| \leq H_1, |c_2| \leq H_2, \sum_{n=1}^m \lambda_n^2 \leq L.$$

6. — Più in generale si può considerare la classe  $\Gamma_3$  delle  $y(x)$ , con  $y'(x)$  assolutamente continua in  $(a, b)$ , soddisfacenti alla (2) e alla condizione seguente:

Sono assegnati  $\mu + \nu \geq 0$  punti di  $(a, b)$

$$\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_\mu \quad \text{e} \quad \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_\nu,$$

potendo i punti  $\xi$  coincidere coi punti  $\eta$ , e le costanti

$$c_1, c_2, \dots, c_\mu, \quad c'_1, c'_2, \dots, c'_\nu$$

ed è

$$(1'') \quad \begin{cases} y(\xi_r) = c_r & (r = 1, 2, \dots, \mu) \\ y'(\eta_s) = c'_s & (s = 1, 2, \dots, \nu); \end{cases}$$

inoltre sono assegnati in  $(a, b)$  o altri due punti  $\xi_{\mu+1}$   $\xi_{\mu+2}$  distinti dai precedenti  $\xi_r$  ed è

$$y(\xi_{\mu+1}) = c_{\mu+1} \quad y(\xi_{\mu+2}) = c_{\mu+2}$$

oppure due altri punti  $\xi_{\mu+1}$   $\eta_{\nu+1}$  distinti dai precedenti  $\xi_r$  e  $\eta_s$  ed è

$$y(\xi_{\mu+1}) = c_{\mu+1} \quad y'(\eta_{\nu+1}) = c'_{\nu+1}.$$

$\Gamma_3$  è chiusa e compatta del primo ordine.

Supponiamo che  $\Gamma_3$  non sia vuota e che vi siano in  $\Gamma_3$  delle  $y(x)$  con

$$\int_a^b y'^2(x) dx < L. \quad (3)$$

(3) Se  $L$  è tale che in  $\Gamma_3$  vi sono soltanto  $y(x)$  per cui è

$$\int_a^b y'^2(x) dx = L$$

Fissiamo, analogamente a quanto si è fatto nei n. 3 e 4, il sistema  $\{\varphi_n(x)\}$  in modo che q. o. in  $(a, b)$  sia  $\varphi_n''(x) - \varphi_n(x)$ , con le condizioni  $\varphi_n(\xi_{\mu+1}) = \varphi_n(\xi_{\mu+2}) = 0$  oppure  $\varphi_n(\xi_{\mu+1}) = \varphi_n'(\eta_{\nu+1}) = 0$  e sia  $\Phi(x)$  la funzione lineare definita da  $\Phi(\xi_{\mu+1}) = c_{\mu+1}$ ,  $\Phi(\xi_{\mu+2}) = c_{\mu+2}$  oppure  $\Phi(\xi_{\mu+1}) = c_{\mu+1}$ ,  $\Phi'(\eta_{\nu+1}) = c'_{\nu+1}$  a seconda che si sia nell'uno o nell'altro dei casi considerati.

Per applicare il metodo di RITZ si pone invece della (4') la

$$(4'') \quad y_m(x) = \Phi(x) + \sum_{n=1}^m \lambda_n \varphi_n(x)$$

e si determinano i parametri  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  in modo da rendere minimo  $I(y_m)$  nella ipersfera  $S_m$  di equazioni

$$\sum_{n=1}^m \lambda_n^2 \leq L$$

e

$$(1'') \quad \begin{cases} \sum_{n=1}^m \lambda_n \varphi_n(\xi_r) = c_r - \Phi(\xi_r) & (r = 1, 2, \dots, \mu) \\ \sum_{n=1}^m \lambda_n \varphi_n'(\eta_s) = c'_s - \Phi'(\eta_s) & (s = 1, 2, \dots, \nu). \end{cases}$$

Si noti che, per la scelta fatta del sistema  $\{\varphi_n(x)\}$ , se  $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$  sta in  $S_m$  la  $y_m(x)$  appartiene a  $\Gamma_3$ .

*Dimostriamo che per  $m$  abbastanza grande  $S_m$  non è vuota.*

Anzitutto proviamo che per  $m$  abbastanza grande le (1'') sono compatibili e cioè che la matrice  $M$  di  $\mu + \nu$  righe e infinite colonne, di elementi

$$\varphi_n(\xi_r), \varphi_n'(\eta_s) \quad (r = 1, 2, \dots, \mu; \quad s = 1, 2, \dots, \nu; \quad n = 1, 2, \dots)$$

ha caratteristica  $\mu + \nu$ .

Se ciò non fosse, si potrebbe determinare una successione di  $(\mu + \nu)^{\text{uple}}$

$$(7) \quad \{h_1^m, \dots, h_{\mu+\nu}^m\} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

allora  $\Gamma_3$  contiene soltanto la minimante assoluta di

$$\int_a^b y''^2(x) dx$$

nella classe delle  $y(x)$  con  $y''(x)$  di quadrato sommabile e soddisfacenti alle condizioni poste nei  $\mu + \nu + 2$  punti assegnati.



con

$$\sum_{r=1}^{\mu+\nu} h_r^{m^2} = 1$$

e tali che sia

$$\sum_{r=1}^{\mu} h_r^m \bar{\varphi}_n(\xi_r) + \sum_{s=1}^{\nu} h_{\mu+s}^m \varphi'_n(\eta_s) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, m).$$

Se  $\bar{h}_r (r = 1, \dots, \mu + \nu)$  è una  $(\mu + \nu)^{\text{upla}}$  di accumulazione della successione (7) si ha

$$(8) \quad \sum_{r=1}^{\mu} \bar{h}_r \varphi_n(\xi_r) + \sum_{s=1}^{\nu} \bar{h}_{\mu+s} \varphi'_n(\eta_s) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Sia ora  $\bar{y}(x)$  una funzione continua con  $\bar{y}'(x)$  e  $\bar{y}''(x)$  con

$$\bar{y}(\xi_{\mu+1}) = \bar{y}(\xi_{\mu+2}) = 0, \quad \bar{y}'(\eta_{\nu+1}) = 0$$

e tale che sia

$$(9) \quad \sum_{r=1}^{\mu} \bar{h}_r \bar{y}(\xi_r) + \sum_{s=1}^{\nu} \bar{h}_{\mu+s} \bar{y}'(\eta_s) \neq 0;$$

per le proprietà di completezza del sistema  $\{\varphi_n(x)\}$  (cfr. (5) e (5')) si possono determinare le costanti  $\bar{\lambda}_n$  in modo che sia

$$\bar{y}(\xi_r) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\lambda}_n \varphi_n(\xi_r), \quad \bar{y}'(\eta_s) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\lambda}_n \varphi'_n(\eta_s).$$

Da queste e dalle (8) segue

$$\sum_{r=1}^{\mu} \bar{h}_r \bar{y}(\xi_r) + \sum_{s=1}^{\nu} \bar{h}_{\mu+s} \bar{y}'(\eta_s) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\lambda}_n \left[ \sum_{r=1}^{\mu} \bar{h}_r \varphi_n(\xi_r) + \sum_{s=1}^{\nu} \bar{h}_{\mu+s} \varphi'_n(\eta_s) \right] = 0$$

in contraddizione con la (9). E' così provato che la matrice  $M$  ha caratteristica  $\mu + \nu$ .

Sia ora  $\bar{y}(x)$  una funzione di  $\Gamma_3$  con

$$\int_a^b \bar{y}''^2(x) dx < L.$$

Si possono determinare le costanti  $\bar{\lambda}_n$  in modo che si abbia

$$\bar{y}(\xi_r) = \Phi(\xi_r) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\lambda}_n \varphi_n(\xi_r)$$

$$\bar{y}'(\eta_s) = \Phi'(\eta_s) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\lambda}_n \varphi'_n(\eta_s) \quad (r = 1, \dots, \mu; s = 1, \dots, \nu)$$

$$\int_a^b \bar{y}''^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\lambda}_n^2 = L - \sigma \quad (\sigma > 0).$$

Si fissi il primo intero  $\bar{m}$  tale che sia compatibile il sistema

$$(10) \quad \begin{cases} \sum_{n=1}^{\bar{m}} \lambda_n \varphi_n(\xi_r) = C_r & (r = 1, 2, \dots, \mu) \\ \sum_{n=1}^{\bar{m}} \lambda_n \varphi'_n(\eta_s) = C'_s & (s = 1, 2, \dots, \nu) \end{cases}$$

per qualunque valore dei termini noti. Se  $\lambda_1^* \lambda_2^* \dots \lambda_m^*$  è una soluzione di

$$\sum_{n=1}^{\bar{m}} \lambda_n \varphi_n(\xi_r) = C_r^*, \quad \sum_{n=1}^{\bar{m}} \lambda_n \varphi'_n(\eta_s) = C'_s^* \quad \begin{matrix} (r = 1, \dots, \mu) \\ (s = 1, \dots, \nu) \end{matrix}$$

si può determinare  $\delta > 0$  in modo che se è

$$|C_r - C_r^*| < \delta, \quad |C'_s - C'_s^*| < \delta$$

il sistema (10) possiede una soluzione  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{\bar{m}}$  per cui è

$$\left| \sum_{n=1}^{\bar{m}} \lambda_n^2 - \sum_{n=1}^{\bar{m}} \lambda_n^{*2} \right| < \sigma.$$

Si determini  $m \geq \bar{m}$  tale che per  $r = 1, \dots, \mu, s = 1, \dots, \nu$  si abbia

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \bar{\lambda}_n \varphi_n(\xi_r) \right| < \delta, \quad \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \bar{\lambda}_n \varphi'_n(\eta_s) \right| < \delta.$$

Il sistema

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\bar{m}} \lambda_n \varphi_n(\xi_r) = c_r - \Phi(\xi_r) - \sum_{n=m+1}^{\infty} \bar{\lambda}_n \varphi_n(\xi_r) & (r = 1, \dots, \mu) \\ \sum_{n=1}^{\bar{m}} \lambda_n \varphi'_n(\eta_s) = c'_s - \Phi'_s(\eta_s) - \sum_{n=m+1}^{\infty} \bar{\lambda}_n \varphi'_n(\eta_s) & (s = 1, \dots, \nu) \end{cases}$$

ha la soluzione  $\lambda_n = \bar{\lambda}_n$  ( $n = 1, \dots, \bar{m}$ ) e quindi

$$(11) \quad \begin{cases} \sum_{n=1}^{\bar{m}} \lambda_n \varphi_n(\xi_r) = c_r - \Phi(\xi_r) - \sum_{n=\bar{m}+1}^m \bar{\lambda}_n \varphi_n(\xi_r) & (r = 1, \dots, \mu) \\ \sum_{n=1}^{\bar{m}} \lambda_n \varphi'_n(\eta_s) = c'_s - \Phi'(\eta_s) - \sum_{n=\bar{m}+1}^m \bar{\lambda}_n \varphi'_n(\eta_s) & (s = 1, \dots, \nu) \end{cases}$$

ha una soluzione  $\lambda_n = \lambda_n^*$  ( $n = 1, \dots, \bar{m}$ ) con

$$\left| \sum_{n=1}^{\bar{m}} \lambda_n^{*2} - \sum_{n=1}^{\bar{m}} \bar{\lambda}_n^2 \right| < \sigma.$$

Essendo

$$\sum_{n=1}^{\bar{m}} \lambda_n^{*2} + \sum_{n=\bar{m}+1}^m \bar{\lambda}_n^2 \leq \sum_{n=1}^m \bar{\lambda}_n^2 + \sigma < L,$$

da (11) risulta che il punto  $(\lambda_1^*, \dots, \lambda_{\bar{m}}^*, \bar{\lambda}_{\bar{m}+1}, \dots, \lambda_m)$  appartiene alla ipersfera  $S_m$  che è quindi non vuota.

Ciò premesso, se  $y_m(x)$  è definita dalla (4''), l' $m$ -esima approssimazione del metodo di RITZ è data da una minimante assoluta  $y_m^*(x)$  di  $I(y_m)$  in  $S_m$ .

7. — Sia  $Y(x)$  una minimante assoluta di  $I(y)$  in  $I_3$ . Se è

$$\int_a^b Y'^2 dx < L \text{ si ponga } \bar{y}(x) = Y(x); \text{ se invece } \int_a^b Y'^2 dx = L$$

per la continuità di  $I(y)$ , fissato  $\varepsilon > 0$ , si può determinare una  $\bar{y}(x)$  di  $I_3$  tale che sia (4')

$$I(\bar{y}) - I(Y) < \varepsilon, \quad \int_a^b \bar{y}'^2(x) dx = L - \varrho < L.$$

---

(4) Se  $Y(x) + \eta(x)$  è una funzione di  $I_3$  con  $\int_a^b |Y''(x) + \eta''(x)|^2 dx < L$ , la funzione  $\bar{y}_\lambda(x) = Y(x) + \lambda \eta(x)$ , dove  $\lambda$  è una costante con  $0 < \lambda \leq 1$ , sta in  $I_3$ , appartiene a un intorno del primo ordine piccolo quanto si vuole di  $Y(x)$  ed è  $\int_a^b \bar{y}_\lambda'^2 dx < L$ .

Per la proprietà di completezza del sistema  $\{\varphi_n(x)\}$  si possono determinare le costanti  $\bar{\lambda}_n$  in modo che sia con convergenza uniforme in  $(a, b)$

$$\bar{y}(x) = \Phi(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\lambda}_n \varphi_n(x) \quad \bar{y}'(x) = \Phi'(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n'(x).$$

Fissato  $\sigma$  ad arbitrio con  $0 < \sigma \leq \rho$ , consideriamo ancora il sistema (10) del n. 6; si può determinare  $\delta > 0$  in modo che, se per due gruppi di valori dei termini noti di (10) è

$$|C_r - C_r^*| < \delta, \quad |C'_s - C_s'^*| < \delta$$

ne risulti per le corrispondenti soluzioni

$$\left| \sum_{n=1}^{\bar{m}} \bar{\lambda}_n^2 - \sum_{n=1}^{\bar{m}} \lambda_n^{*2} \right| < \sigma$$

e inoltre per ogni  $x$  di  $(a, b)$

$$\left| \sum_{n=1}^{\bar{m}} (\lambda_n - \lambda_n^*) \varphi_n(x) \right| < \sigma, \quad \left| \sum_{n=1}^{\bar{m}} (\lambda_n - \lambda_n^*) \varphi_n'(x) \right| < \sigma.$$

Sia ora  $m \geq \bar{m}$  tale che si abbia in  $(a, b)$

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \bar{\lambda}_n \varphi_n(x) \right| < \delta_1, \quad \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \bar{\lambda}_n \varphi_n'(x) \right| < \delta_1$$

dove  $\delta_1$  è il minore fra  $\sigma$  e  $\delta$  e sia come nel n. 6,  $\lambda_n = \lambda_n^*$  ( $n = 1, \dots, \bar{m}$ ) la soluzione del sistema (11). Si ha ancora

$$\sum_{n=1}^{\bar{m}} \lambda_n^{*2} + \sum_{n=\bar{m}+1}^m \bar{\lambda}_n^2 < L$$

ed è

$$\begin{aligned} \left| \bar{y}(x) - \left\{ \Phi(x) + \sum_{n=1}^{\bar{m}} \lambda_n^* \varphi_n(x) + \sum_{n=\bar{m}+1}^m \bar{\lambda}_n \varphi_n(x) \right\} \right| &= \\ &= \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} \bar{\lambda}_n \varphi_n(x) + \sum_{n=1}^{\bar{m}} (\bar{\lambda}_n - \lambda_n^*) \varphi_n(x) \right| < 2\sigma \end{aligned}$$

e analogamente

$$\left| \bar{y}'(x) - \left\{ \Phi'(x) + \sum_{n=1}^{\bar{m}} \lambda_n^* \varphi_n'(x) + \sum_{n=\bar{m}+1}^m \bar{\lambda}_n \varphi_n'(x) \right\} \right| < 2\sigma.$$

Posto

$$y_m(x) = \Phi(x) + \sum_{n=1}^{\bar{m}} \lambda_n^* \varphi_n(x) + \sum_{n=\bar{m}+1}^m \bar{\lambda}_n \varphi_n(x),$$

la  $\bar{y}_m(x)$  appartiene a  $\Gamma_3$  e ad un intorno del primo ordine, piccolo quanto si vuole con  $\sigma$ , di  $\bar{y}(x)$ . Perciò per la continuità di  $I(y)$ , si può determinare una  $\bar{y}_m(x)$ , con  $m$  abbastanza grande, tale che si abbia

$$|I(\bar{y}) - I(\bar{y}_m)| < \varepsilon.$$

Per la definizione della  $m^{\text{ma}}$  approssimazione  $y_m^*(x)$  del metodo di RITZ è

$$I(\bar{y}_m) \geq I(y_m^*)$$

e quindi

$$I(y_m^*) - I(Y) < 2\varepsilon,$$

che prova che  $\{y_m^*(x)\}$  è una successione minimizzante  $I(y)$  in  $\Gamma_3$ .

8. — Più in generale invece delle condizioni del n. 6 può assegnarsi un sistema di equazioni lineari fra le  $y(\xi_r)$  e le  $y'(\eta_r)$ , anche non riducibile alla forma (1''), purchè sia tale da assicurare la compattezza del primo ordine della classe di funzioni che ne deriva.

9. — Invece della condizione (2) può pure considerarsi la

$$(2') \quad \int_a^b \theta(x) y'^2(x) dx \leq L$$

con  $\theta(x) > 0$  e continua in  $(a, b)$ ; basta sostituire al sistema  $\{\varphi_n(x)\}$  considerato nel n. 3 un sistema ortogonale e normale in  $(a, b)$  col peso  $\theta(x)$ .

10. — Invece della (2) può pure considerarsi la condizione

$$(2'') \quad |y''(x)| \leq L.$$

Invece della ipersfera  $\sum_{n=1}^m \lambda_n^2 \leq L$  si avranno i campi determinati da vari Autori<sup>(5)</sup> in sue ricerche sulle condizioni necessarie e sufficienti perchè  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$  siano i coefficienti di FOURIER (rispetto al sistema  $\{\varphi_n(x)\}$ ) di una funzione  $y''(x)$  verificante la (2'').

(5) Vedi F. RIESZ, *Annales École Normale*, 28, (1911), p. 33-62. Vedi anche A. GHIZZETTI, *Memorie Accad. Italia*, s. VII, vol. XIII (1942), p. 1165-1199 e *Rend. Lincei*, s. XIII, vol. II (1947), p. 533-536 e la bibliografia ivi citata.

11. Si abbia invece della (2'') la condizione

$$(2''') \quad |y''(x)| < K(x)$$

con  $K(x) > 0$  e di quadrato sommabile in  $(a, b)$ . Supponiamo, per semplicità, che siano verificate le (1) e sia  $I_4$  la classe di funzioni così ottenute. Si ponga

$$\varphi_n(x) = \int_a^x (x - \xi) K(\xi) \psi_n(\xi) d\xi.$$

Se  $y(x)$  appartiene a  $I_4$  è

$$(13) \quad \frac{y''(x)}{K(x)} < 1$$

e quindi, fissato  $\varepsilon > 0$  ad arbitrio, si possono determinare le costanti  $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_m$  tali che, posto

$$y_m''(x) = K(x) \sum_{n=1}^m \gamma_n \varphi_n(x),$$

risulti

$$\int_a^b \frac{1}{K^2(x)} (y''(x) - y_m''(x))^2 dx < \varepsilon^2.$$

Il metodo di RITZ si applica ponendo

$$y_m(x) = c_1 + c_2(x - a) + \sum_{n=1}^m \lambda_n \varphi_n(x);$$

ciò è lecito perchè valgono ancora le (5) e (5') essendo

$$\begin{aligned} |y'(x) - y_m'(x)| &< \int_a^x |y''(\xi) - y_m''(\xi)| d\xi < \left\{ \int_a^b K^2(x) dx \int_a^b \frac{1}{K^2(x)} |y'' - y_m''|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &< \varepsilon \sqrt{\int_a^b K^2(x) dx}. \end{aligned}$$

I parametri  $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$  devono appartenere al campo dei coefficienti di FOURIER delle funzioni  $\frac{y''(x)}{K(x)}$  soddisfacenti alla (13); ci si riconduce così al caso trattato nel n. 10.

[Tervenuto alla Redazione il 1-8 1949]