ANNALI DELLA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA
Classe di Scienze

SALVATORE CHERUBINO

Forma quasi canonica delle matrici

Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, Classe di Scienze 3e série, tome 2, nº 1-4 (1950), p. 151-166

<http://www.numdam.org/item?id=ASNSP_1950_3_2_1-4_151_0>

FORMA QUASI-CANONICA DELLE MATRICI

di SALVATORE CHERUBINO (Pisa)

Nella *classe* delle matrici:

$$H^{-1} A H, \tag{1}$$

ottenibili da una data matrice A (quadrata e complessa) al variare ad arbitrio, nel campo complesso, della matrice H che la trasforma per similitudine o contragredienza, si usano distinguere le cosiddette *forme canoniche* di A o della classe considerata, le quali godono il privilegio di porre in immediata evidenza le radici caratteristiche, con le rispettive segnature (quindi gli esponenti dei corrispondenti divisori elementari) comuni ad A ed a tutte le matrici della classe. Fra queste forme canoniche sono particolarmente notevoli, per la loro semplicità, quella dello JORDAN ed una, più recente, dello scrivente: entrambe hanno per radici caratteristiche gli elementi della diagonale principale e, da una parte di essa, un certo numero (lo stesso per entrambe le forme canoniche [1]) di elementi eguali ad uno, mentre tutti gli altri elementi sono zeri.

Le matrici antisimmetriche, vale a dire le matrici A coincidenti con le loro trasposte coniugate $\overline{A}_{-1}$, ammettono una forma canonica diagonale, che si ottiene trasformando A contemporaneamente per cogredienza, e per contragredienza, cioè mediante una H unitaria, ossia soddisfacente alla relazione

$$H \overline{H}_{-1} = \overline{H}_{-1} H = I,$$

ove I è la matrice identica dell'ordine di A. In particolare, se A è reale e simmetrica, H può scegliersi addirittura ortogonale, cioè reale e tale che

(1) Come sarà mostrato in un lavoro di E. MATTIOLI di prossima pubblicazione, le due forme si ottengono l'una dall'altra con un semplice scambio di righe e con lo stesso scambio di colonne, cioè trasformando con una matrice unimodulare, simmetrica ed involutoria, quindi ortogonale.

la sua trasposta dà anche l'inversa di H. Questa proprietà consente alle matrici antisimmetriche di disimpegnare un ruolo di primo piano in tutte le branche della matematica.

È quindi interessante sapere se non sia possibile trovare, nella classe di ogni matrice A, una matrice abbastanza semplice, che metta sempre in immediata evidenza le radici caratteristiche e la segnatura della classe e che sia trasformata di A contemporaneamente per contragredienza e per cogredienza, cioè mediante una H unitaria (in particolare reale ortogonale, se A è reale insieme alle sue radici caratteristiche).

Per distinguerle dalle due di cui sopra, che si dicono *canoniche* senza alcun prefisso od aggettivo, le matrici del tipo cui ora alludiamo, che constateremo esistenti in ogni classe, le chiameremo *quasi-canoniche* (2).

La modificazione, formalmente lieve, che abbiamo dovuto apportare al nostro procedimento del 1936 per conseguire la forma quasi-canonica ci è stata resa possibile da una semplice, ma importante proprietà delle matrici antisimmetriche, che non ci risulta, almeno esplicitamente, già rilevata. Essa segue dal procedimento, qui indicato, di riduzione di queste ultime matrici, per cogredienza, a forma diagonale, procedimento sostanzialmente identico a quello impiegato per le matrici reali e simmetriche nelle mie *Lezioni di Geometria Analitica* (Roma, Dante Alighieri, 1940, cap. VI della parte II).

La prima parte di questo procedimento fa quasi immediatamente ottenere una proposizione che precisa e rinforza notevolmente, nel caso delle matrici antisimmetriche discriminanti di forme hermitiane definite, il teorema di SYLVESTER-HADAMARD sul massimo modulo di un determinante; proposizione che dà luogo, come immediato corollario, a questo stesso famoso teorema, (3) apportandovi una precisazione che non ci consta sia stata già segnalata. Il procedimento medesimo permette inoltre di ritrovare più rapidamente del solito la condizione perchè una forma hermitiana (in particolare quadratica) sia definita.

---

(2) Nel raggiungere la nostra forma canonica (*Rend. Lincei*, 1936) siamo passati attraverso una matrice che mette appunto in immediata evidenza radici caratteristiche e segnatura della classe, senza avere gli elementi non principali tutti eguali ad uno o a zero: (sono però zero tutti quelli da una parte della diagonale principale). Una tal matrice si potrebbe dire forma *semi-canonica* di A, essendo ottenuta da A solo per contragredienza.

(3) Dalle tante dimostrazioni di questo teorema ho tenuto presenti soprattutto le due recenti di F. TRICOMI (Rivista di Tucuman, vol. I, nn 1 e 2, 1940) e di G. SANSONE (p. 518 del I vol, IV ed., delle *Lezioni di Analisi*, Padova, Cedam, 1940). La mia dimostrazione non manca di punti di contatto con le due ora citate e probabilmente anche con le altre. Forse la mia è quella che colpisce la più intima e profonda natura di questa importante proposizione.

La Nota si chiude con delle brevi osservazioni, che, per la loro forma, crediamo non prive di interesse, — le quali costituiscono un primo accenno alle possibili applicazioni della nozione di forma quasi-canonica delle matrici.

§ 1. Sulle forme hermitiane.

1. Col conciso simbolismo operativo delle matrici, una forma hermitiana si scrive:

$$x\,A\,\bar{x}_{-1} \tag{1.1}$$

dove A è una matrice complessa di ordine n antisimmetrica, cioè coincidente con la trasposta della sua coniugata $\bar{A}_{-1}$, ed

$$x = (x_1\,, x_2\,, \ldots , x_n)$$

è un n complesso orizzontale indeterminato, del campo complesso. Con

$$\bar{x} = (\bar{x}_1\,, \bar{x}_2 \ldots , \bar{x}_n)$$

si indica l'n complesso complesso-coniugato di x.

Lo stesso procedimento adoperato, nel caso delle forme quadratiche, nelle mie *Lezioni di geometria Analitica* ([4]) (p. II, cap. VI, § 2) porta la forma hermitiana (1.1) alla forma canonica:

$$\alpha_1\, x_1\, \bar{x}_1 + \alpha_2\, x_2\, \bar{x}_2 + \ldots + \alpha_n\, x_n\, \bar{x}_n \tag{2.1}$$

in cui $\alpha_1\,, \alpha_2\,, \ldots , \alpha_n$ sono le radici caratteristiche della matrice A, le quali, come è noto, sono tutte reali e di indice uno. Il procedimento richiamato dimostra che la riduzione si ottiene con *matrici unitarie*. Indicando con D la matrice diagonale i cui elementi diagonali sono le radici α_r $(r = 1\,, 2\,, \ldots , n)$ esiste dunque almeno una matrice unitaria U, cioè tale che

$$\bar{U}_{-1}\, U = U\, \bar{U}_{-1} = I\,, \tag{3.1}$$

ove I indica la matrice identica di ordine n, la quale ci dà:

$$\bar{U}_{-1}\, A\, U = D\,. \tag{4.1}$$

([4]) Roma, Dante Alighieri (1940). Richiameremo questo testo semplicemente con « *Lezioni* ».

Qui vogliamo far vedere, più in generale, che esistono matrici H, non necessariamente unitarie, tali che si abbia:

$$\bar{H}_{-1} A H = D. \tag{5.1}$$

con D matrice diagonale, i cui elementi principali non saranno necessariamente le radici caratteristiche di A. Basta, in generale, operare precisamente come nel § 1 di detto cap. VI delle citate *Lezioni*. Vi è però, come vedremo, un caso particolare, in cui convien ricorrere alle radici caratteristiche di A ed a matrici trasformanti unitarie.

2. Le matrici antisimmetriche godono le stesse proprietà dimostrate nel § 5, pag. 120, del cap. I della parte II delle mie *Lezioni* (5) per le matrici simmetriche e simmetriche reali.

Perciò, se A è non degenere di ordine $n > 2$, fra i suoi minori principali ve ne è almeno uno, ad es. a, non degenere di ordine $h < n$, che porteremo nelle prime h righe e colonne. Cioè, a meno di uno scambio nell'ordine delle righe e lo stesso scambio nell'ordine delle colonne (6), possiamo dunque scrivere:

$$A = \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline -\bar{b}_{-1} & d \end{array}\right) \qquad a = \bar{a}_{-1}, \quad d = \bar{d}_{-1} \tag{6.1}$$

e supporre che il minore principale a sia di ordine h e non degenere. Ponendo:

$$\lambda = a^{-1} b,$$

ossia:

$$b = a \lambda, \tag{7.1}$$

quindi:

$$\bar{b}_{-1} = \bar{\lambda}_{-1} a$$

e prendendo

$$H = \left(\begin{array}{c|c} I_h & -\lambda \\ \hline 0 & I_{n-h} \end{array}\right), \tag{8.1}$$

---

(5) I cor. IV e V a pag 121 valgono solo per matrici simmetriche reali Anche le dimostrazioni, pel caso delle matrici antisimmetriche, restano pressochè inalterate. Così per la realtà delle radici caratteristiche (successivo § 6, pag 123), etc

(6) Scambi che si riassumono in un prodotto del tipo $\bar{H}_{-1} A H$, con $H = \bar{H} = H_{-1} = H^{-1}$ ottenuta da I con gli stessi scambi di righe e colonne.

ove I_h ed I_{n-h} sono matrici identiche di ordini rispettivi h ed $n - h$, si ha:

$$A^* = \overline{H}_{-1}\, A\, H = \left(\begin{array}{c|c} a & 0 \\ \hline 0 & d^* \end{array}\right) \tag{9.1}$$

con

$$d^* = d - \overline{\lambda}_{-1}\, a\, \lambda\,. \tag{10.1}$$

La A^* è dunque composta mediante le due matrici antisimmetriche a e d^*, di ordini h ed $n - h$, entrambe non degeneri. Operando su queste, in modo analogo, due o più volte di seguito, la A si riduce a forma diagonale oppure ad una matrice composta di matrici antisimmetriche di ordini non superiori a due. Cioè, trasformando per *anticogredienza* con matrici come la H, ovvero composte con matrici come la H, A si riduce alla forma:

$$\left\|\begin{array}{c|c|ccc|c} a' & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \hline 0 & a'' & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ \hline 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & a^{(r)} \end{array}\right\| \tag{11.1}$$

ove $a', a'', \ldots, a^{(r)}$ sono numeri reali ovvero matrici antisimmetriche di second'ordine. Se le matrici componenti di second'ordine hanno ciascuna almeno uno degli elementi principali diverso da zero, si può procedere ancora allo stesso modo, adoperando una H di second'ordine con λ numero complesso non nullo, raggiungendo così la forma richiesta.

3. Se qualcuna delle matrici di second'ordine componenti della (11.1) ha gli elementi principali entrambi zero, si procederà come appresso.

Sia

$$a = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad a_{21} = \overline{a}_{12}\,. \tag{12.1}$$

la matrice considerata ed α il modulo comune di a_{12} ed a_{21}, cioè la radice positiva dell'equazione caratteristica di a, sicchè

$$|\, a - \alpha I_2 \,| = \alpha^2 - a_{12}\, a_{21} = 0\,.$$

Allora, indicando con $x = (x_1, x_2)$ un bicomplesso orizzontale indeterminato, l'equazione:

$$x\,(a \quad \alpha I_2) = 0 \tag{13.1}$$

ammette soluzioni non nulle. Se $x^{(0)}$ è una di queste, anche

$$c = \frac{x^{(0)}}{\sqrt{x^{(0)} \cdot \bar{x}^{(0)}_{-1}}} \tag{14.1}$$

sarà soluzione di (13.1) e risulterà:

$$c\,\bar{c}_{-1} = 1 \,. \tag{15.1}$$

Indicando con

$$c' = (c'_1 \,, c'_2)$$

un altro bicomplesso orizzontale, per ora indeterminato, si può ottenere che la matrice di second'ordine $k = \left(\frac{c'}{c}\right)$ sia unitaria, dopo di che si ha: (7)

$$k\,(a - \alpha\, I_2)\,\bar{k}_{-1} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ove

$$m = c'\,(a - \alpha\, I_2)\,\bar{c}'_{-1}\,,$$

e perciò

$$k\,a\,\bar{k}_{-1} = \begin{pmatrix} m + \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}. \tag{16.1}$$

Con una H composta di matrici parte identiche e parte o tutte come k, la desiderata forma diagonale è raggiunta.

OSSERVAZIONE I. Si tenga presente che una matrice del tipo di H, non può essere unitaria. Infatti, si ha:

$$\bar{H}_{-1} H = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \bar{\lambda}_{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I & \lambda \\ \bar{\lambda}_{-1} & \bar{\lambda}_{-1}\lambda + 1 \end{pmatrix}$$

e, per $\lambda \neq 0$, il secondo membro non può essere l'identità.

OSSERVAZIONE II. Se A è una matrice reale e simmetrica, anche la matrice λ, insieme alle analoghe delle operazioni successive, è reale; e poichè le radici caratteristiche di A sono reali, la matrice che porta A, per cogredienza, a forma diagonale risulta reale.

(7) Si tratta del procedimento generale di riduzione a forma canonica mediante sostituzioni unitarie, che pel caso delle forme quadratiche dà quello di riduzione con sostituzioni ortogonali cui ci siamo riferiti nel n. 1 richiamando le nostre *Lezioni*

4. — La forma diagonale:

$$D = \bar{H}_{-1}\, A\, H \tag{17.1}$$

può essere ad elementi diagonali tutti dello stesso segno, come accade quando la forma hermitiana di partenza è definita. Se il segno comune è positivo, si può indicare con $D^{\frac{1}{2}}$ la matrice diagonale reale che ha per elementi principali le radici quadrate di quelli di D, nello stesso ordine, e con $D^{-\frac{1}{2}}$ la sua inversa, e si ha:

$$\left(\bar{H} D^{-\frac{1}{2}}\right)_{-1} . A . \left(H D^{-\frac{1}{2}}\right) = I . \tag{18.1}$$

Se il segno comune degli elementi principali di D è negativo, cioè se la forma hermitiana di partenza è definita negativa, anzichè definita positiva, si scambierà D con $-D$ e, operando come prima, il secondo membro della (18.1) diventa I.

Se la forma è indefinita, sempre non degenere, si potrà, in modo ovvio, ottenere che A si riduca a una matrice che differisce da quella identica solo pel segno di alcuni elementi diagonali.

Anche in quest'ultima parte, la trasformazione della forma hermitiana di partenza in una forma canonica a coefficienti $+1$ o -1, si ottiene per anticogredienza: non però con matrici unitarie, salvo quando le radici caratteristiche di A siano tutte $+1$ o -1, cioè quando A sia già identica oppure involutoria (cioè sia $A^2 = I$).

È facile, sempre come per le forme quadratiche, passare al caso delle forme hermitiane degeneri. (8)

§ 2. Massimo modulo di un determinante.

5. — Quando la forma (1.1) di partenza è definita (9) essa resta tale, e col proprio segno, quale che sia la trasformazione per cogredienza, cioè la sostituzione lineare, effettuata sulle variabili $x_1, \ldots, x_n$. Perciò, la

(8) Vedi *Lezioni*, p. II, cap. VI, § 1, n. 151, pag. 162.

(9) Le condizioni perchè una forma hermitiana sia definita o semidefinita sono le stesse (e si conseguono allo stesso modo) di quelle delle forme quadratiche. Basta seguire il procedimento indicato al § 16, pag. 315, del cap. I della p. IV delle mie *Lezioni*. Le condizioni stesse saranno anzi ritrovate assai rapidamente come conseguenza delle osservazioni di questo n. 5.

(9.1) è ancora matrice discriminante di una forma hermitiana definita del segno della (1.1) e quindi sono tali le matrici a e $d^* = d - \bar{\lambda}_{-1} a \lambda$. I minori principali di A sono tutti matrici discriminanti di forme hermitiane definite del segno di $x A \bar{x}_{-1}$, come si vede lasciando indeterminati solo gli elementi dell'n complesso x che corrispondono alle righe e colonne di uno fissato, ma qualsiasi, minore principale di A ed assumendo eguali a zero i rimanenti elementi. In particolare, gli elementi principali di A sono tutti reali, diversi da zero e del segno della forma.

Gli elementi principali del prodotto

$$\bar{\lambda}_{-1} a \lambda$$

sono perciò numeri reali che, se non sono zero, sono del segno della forma di partenza, come valori della forma hermitiana definita $y a \bar{y}_{-1}$ per y eguale a una riga di $\bar{\lambda}_{-1}$. Dunque gli elementi principali di d^* che non coincidono coi corrispondenti di d sono, in valore assoluto, più piccoli di quelli di d.

Poichè la trasformazione di A in forma diagonale si ottiene con matrici del tipo di H o composte di matrici come la H, e poichè queste hanno tutte determinante eguale ad uno ([10]), possiamo enunciare che:

se A *è matrice discriminante di una forma hermitiana definita, il valore assoluto del suo determinante non supera il prodotto dei valori assoluti dei suoi elementi principali: uguaglia questo prodotto quando e solo quando* A *è diagonale.*

6 — Da questa proprietà si deduce immediatamente il teorema di SYLVESTER-HADAMARD sul massimo modulo di un determinante, ottenendo insieme una notevole sua precisazione.

Se A è qualsiasi, ma non degenere, l'n complesso orizzontale:

$$x A\,,$$

qualunque sia x non nullo, non può mai esser nullo; quindi, per ogni $x \neq 0$, si ha sempre:

$$x A \,.\, \bar{A}_{-1} \bar{x}_{-1} > 0\,, \tag{1.2}$$

cioè, la matrice $A \bar{A}_{-1}$ è matrice discriminante di una forma hermitiana definita positiva. Gli elementi principali di $A \bar{A}_{-1}$ sono i numeri reali positivi:

$$b_{rr} = a_{r1} \bar{a}_{r1} + a_{r2} \bar{a}_{r2} + \ldots + a_{rn} \bar{a}_{rn} > 0\,. \tag{2.2}$$

([10]) Non dovendo ricorrere alle radici caratteristiche di A, l'operazione di riduzione di A a forma diagonale è lineare.

Perciò, dicendo M il massimo modulo degli elementi di A, si ha:

$$b_{rr} \leqq n\,M^2 \tag{3.2}$$

ed il segno eguale si ha allora e solo che tutti gli a_{rs}, $s = 1, 2, \ldots, n$, hanno lo stesso modulo M.

Pel teorema dimostrato, riesce quindi:

$$(\mathrm{mod}\,|\,A\,|\,)^2 = |\,A\,\overline{A}_{-1}\,| \leqq b_{11}\,b_{22} \ldots b_{nn} \leqq (n\,M^2)^n\,, \tag{4.2}$$

e perciò:

$$\mathrm{mod}\,|\,A\,| \leqq n^{\frac{n}{2}}\,.\,M^n\,, \tag{5.2}$$

che è la disuguaglianza di SYLVESTER-HADAMARD.

Per quel che precede, abbiamo in più che:

nella (5.2) *il segno eguale vale allora e solo che* (A *sia quasi unitaria, cioè quando) la matrice normale* $A\,\overline{A}_{-1}$ *è diagonale e se inoltre gli elementi di* A *hanno tutti lo stesso modulo* M.

7. - Si può fare ancora un'osservazione. Abbiamo detto che se la forma $x\,A\,\overline{x}_{-1}$ è definita, anche tutti i minori principali di A sono matrici discriminanti di forme hermitiane definite e perciò sono non degeneri. Nel procedimento di riduzione a forma canonica di A si può dunque partire da uno qualunque dei suoi minori principali e questo, volendo, potrà sempre portarsi ad occupare i primi posti, per comodità di ragionamento.

Inoltre, la matrice che porta A a forma diagonale, essendo prodotto di matrici tutte aventi eguali a zero gli elementi al disotto della diagonale principale ed eguali ad uno gli elementi principali, è ancora dello stesso tipo. Dunque si ha:

$$\overline{H}_{-1}\,A\,H = D \tag{6.2}$$

con D diagonale ed H matrice avente eguali a zero tutti gli elementi al disotto della diagonale principale ed elementi principali eguali ad uno. La (6.2) può quindi scriversi:

$$\left(\begin{array}{c|c} \overline{H}^{*}_{-1} & 0 \\ \hline \overline{K}_{-1} & \overline{H}^{**}_{-1} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline \overline{b}_{-1} & d \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} H^{*} & K \\ \hline 0 & H^{**} \end{array}\right) \tag{7.2}$$

dove a è il minore principale di A contenuto nelle prime r righe, con r intero qualsiasi minore di n, ed H^* è il minore principale di H contenuto nelle stesse prime r righe.

Eseguendo il prodotto, si ha :

$$D = \left(\begin{array}{c|c} D^* & 0 \\ \hline 0 & D^{**} \end{array} \right), \tag{8.2}$$

con

$$D^* = \overline{H}^*_{-1}\, a\, H^* . \tag{9.2}$$

E poichè H^* ed H^{**} hanno determinanti eguali ad uno, risulta

$$| D^* | = | a | . \tag{10.2}$$

Abbiamo dunque che :

a) *col procedimento indicato la riduzione a forma canonica della matrice discriminante di una forma hermitiana definita viene effettuata lasciando invariati i determinanti dei minori principali contenuti successivamente nella prima riga, nelle prime due righe, e via di seguito.*

E poichè, ottenuta la riduzione a forma canonica, perchè la forma sia definita positiva o negativa occorre e basta ehe gli elementi diagonali di D siano, rispettivamente, tutti positivi o tutti negativi, tenendo presente che il minore principale portato ai primi posti è uno qualunque, si ha senz'altro che :

b) *perchè la forma* $\mathrm{x}\,\mathrm{A}\,\overline{\mathrm{x}}_{\,1}$ *sia definita positiva (negativa) occorre e basta che una successione di* n *minori principali di ordini uno due . . . ciascuno contenuto nel successivo dia determinanti tutti positivi (alternativamente negativi e positivi).* [11]

Il caso delle forme semidefinite si riduce a quello delle forme definite mercè l'osservazione di cui al n. 304 del § 16, cap. I della p. IV, pag. 318 delle citate *Lezioni.*

§ 3. Forma quasi-canonica.

8. — Data una matrice complessa A di ordine n, e detta α una sua radice caratteristica, si consideri l'equazione :

$$x\,(A - \alpha\, I) = 0\,, \tag{1.3}$$

dove $x = (x_1\,, x_2\,, \ldots, x_n)$ è un n-complesso indeterminato. Se $A - \alpha\, I$ ha nullità h, cioè caratteristica $n - h$, la (1.3) ammetterà h soluzioni linear-

---

[11] Dopo di che ciò accade per ogni successione di n minori principali ciascuno contenuto nel successivo.

mente indipendenti, quindi vi sono matrici c ad h righe, n colonne e caratteristica h per le quali si ha:

$$c\,(A - \alpha\, I) = 0\,. \tag{2.3}$$

Il prodotto

$$k = c\,\bar{c}_{-1}$$

è una matrice antisimmetrica di ordine h che può esser scelta come matrice discriminante di una forma hermitiana definita positiva, quindi vi è una matrice a non degenere la quale ci dà:

$$a\,k\,\bar{a}_{-1} = a\,c\,.\,(\overline{a\,c})_{-1} = I_h\,.$$

Il prodotto $a\,c$ manifestamente soddisfa ancora alla (1.3); potremo perciò supporre che sia la stessa c a soddisfare alla relazione

$$c\,\bar{c}_{-1} = I_h\,. \tag{3.3}$$

Con ragionamento noto, analogo a quello impiegato al n. 3, la matrice c si può includere in una matrice unitaria

$$U = \left(\frac{d}{c}\right),\quad U\,\bar{U}_{-1} = I\,,$$

e si ha che:

$$U\,(A - \alpha\, I)\,\bar{U}_{-1} = \begin{pmatrix} M & b \\ \hline 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

dove:

$$M = d\,(A - \alpha\, I)\,\bar{d}_{-1}\,, \tag{5.3}$$

$$b = d\,(A - \alpha\, I)\,\bar{c}_{-1}\,. \tag{5.3$'$}$$

Ne segue che:

$$U\,A\,\bar{U}_{-1} = U\,(A - \alpha\, I)\,\bar{U}_{-1} + \alpha\, I = \left(\begin{array}{c|c} A^* & b \\ 0 & \alpha\, I_h \end{array}\right), \tag{6.3}$$

ove

$$A^* = d\,(A - \alpha\, I)\,\bar{d}_{-1} + \alpha\, I_{n-h}\,. \tag{7.3}$$

9. — Se μ era la molteplicità di α per la matrice A e se $\mu > h$, la stessa α comparirà in A^* come radice caratteristica di molteplicità $\mu - h$. Perciò su A^* si può operare come su A. Se h' è la nullità di $A^* - \alpha\, I_{n-h}$

si trova almeno una matrice unitaria U^*, di ordine $n - h$, per la quale si ha:

$$U^* A^* U^*_{-1} = \left(\begin{array}{c|c} A^{**} & b' \\ \hline 0 & \alpha I_{h'} \end{array}\right). \tag{8.3}$$

Quindi, la matrice unitaria:

$$U' = \left(\begin{array}{c|c} U^* & 0 \\ \hline 0 & I_h \end{array}\right)$$

ci dà:

$$U' U . A . \bar{U}_{-1} \bar{U}'_{-1} = \left(\begin{array}{c|cc} A^{**} & b' & \\ \cline{1-2} 0 & \alpha I_{h'} & b \\ \hline 0 & 0 & \alpha I_h \end{array}\right). \tag{9.3}$$

Se A^{**} possiede ancora la radice caratteristica α si opererà su essa come su A^* e su A e poichè il prodotto di due o più matrici unitarie è ancora unitario si ha che, con una matrice unitaria V si può ottenere che:

$$V A \bar{V}_{-1} = \begin{pmatrix} B & b \\ 0 & C_\alpha \end{pmatrix} \tag{10.3}$$

dove B è una matrice di ordine $n - \mu$ che non possiede più la radice caratteristica α, b è una matrice ad $n - \mu$ righe e μ colonne e

$$C_\alpha = \left(\begin{array}{c|c|c|c|c} \alpha I_{h_0} & c_{01} & c_{02} & \cdots & c_{0i} \\ & \alpha I_{h_1} & c_{12} & & c_{1i} \\ \cline{3-4} 0 & & \alpha I_{h_2} & & c_{2i} \\ \cline{5-5} & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & 0 & & \\ \cline{4-5} & & & 0 & \alpha I_{h_i} \end{array}\right) \tag{11.3}$$

La matrice (4.3) ha la stessa nullità h di $A - \alpha I$; la matrice $A^{**} - \alpha I_{n-h}$ ha la stessa nullità h' di $A^* - \alpha I_{n-h}$, e via di seguito: ne segue che le matrici:

$$c_{01}, c_{12}, \ldots, c_{i-1,i} \tag{12.3}$$

hanno righe linearmente indipendenti, cioè sono di caratteristiche rispettive:

$$h_0 \leq h_1 \leq \ldots < h_{i-1} \tag{13.3}$$

e sarà $h_{i-1} \leq h_i$. Di qui, effettuando le potenze di $A - \alpha I$, che sono del tipo:

$$\left(\begin{array}{c|c} B^{*^r} & b^{(r)} \\ \hline 0 & C^{*^r} \end{array}\right),$$

dove

$$B^* = B - \alpha\, I_{n-u}\,, \quad C^* = C_u - \alpha\, I_u\,,$$

si riconosce immediatamente, dalle loro nullità, che il gruppo di interi non decrescenti:

$$(h_0\,, h_1\,, \ldots, h_t) \tag{14.3}$$

è la segnatura di A rispetto ad α (12).

10. — Se β è una seconda radice caratteristica di A, essa sarà anche radice caratteristica di B e si potrà operare su B utilizzando β, come si è operato su A utilizzando α. Proseguendo allo stesso modo, se

$$\alpha_1\,, \alpha_2\,, \ldots, \alpha_m$$

sono le radici caratteristiche distinte di A, si può ottenere, trasformando per anticogredienza, con matrici unitarie, che A si riduca alla forma:

$$C = \begin{array}{c|c|c|c|c} C_{\alpha_1} & C_{12} & C_{13} & \ldots & C_{1m} \\ \hline 0 & C_{\alpha_2} & C_{23} & \ldots & C_{2m} \\ \hline 0 & 0 & C_{\alpha_3} & \ldots & C_{3m} \\ \hline \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \hline 0 & 0 & 0 & \ldots & C_{\alpha_m} \end{array} \tag{15.3}$$

dove $C_{\alpha_1}, C_{\alpha_2}, \ldots, C_{\alpha_m}$ indicano matrici del tipo (11.3).

Restano così messe in evidenza tutte le radici caratteristiche di A, con le rispettive segnature e la *forma quasi-canonica* è raggiunta.

§ 4. Due osservazioni immediate.

11. — Se A è antisimmetrica, è tale anche $H A \bar{H}_{-1}$ qualunque sia H, perciò la forma quasi-canonica è diagonale, quindi canonica. Inoltre, se α e β sono due radici caratteristiche di $A = \bar{A}_{-1}$, certamente reali e di indice

(12) Nella forma canonica di A, le matrici $c_{01}\,, c_{12}\,, \ldots, c_{t-1,t}$ sono del tipo $(I_{h_i} \; 0)$ con le I_{h_i} tutte identiche, di ordini rispettivi $h_0\; h_1\,, \ldots, h_t$, mentre tutte le altre c_{rs} sono nulle. Volendo, le stesse $c_{01}\,, c_{12}\,\ldots, c_{t-1,t}$ possono diventare qualunque, purchè sempre di caratteristiche $h_0\,, h_1\,, \ldots, h_t$.

uno, e c', c'' sono due matrici soluzioni rispettivamente delle equazioni

$$x(A - \alpha I) = 0, \quad y(A - \beta I) = 0, \tag{1.4}$$

si ha:

$$c' A = \alpha c', \quad c'' A = \beta c'', \tag{2.4}$$

quindi:

$$c' A \bar{c}''_{-1} = \alpha c' \bar{c}''_{-1}; \tag{3.4}$$

onde, poichè la seconda delle (2.4) ci dà, essendo $\bar{A}_{-1} = A$:

$$A \bar{c}''_{-1} = \beta \bar{c}''_{-1}, \tag{2.4'}$$

si ha che:

$$c' A \bar{c}''_{-1} = \beta c' \bar{c}''_{-1} \tag{4.4}$$

e quindi:

$$\alpha c' \bar{c}''_{-1} = \beta c' \bar{c}''_{-1};$$

da cui, poichè $\alpha \neq \beta$, si deduce che:

$$c' \bar{c}''_{-1} = 0, \quad c' A \bar{c}''_{-1} = 0.$$

Di qui segue facilmente che

se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sono le radici caratteristiche distinte di una matrice antisimmetrica A, dicendo $c', c'', \ldots, c^{m}$ m matrici ciascuna col massimo numero di righe linearmente indipendenti (eguale all'ordine di molteplicità della rispettiva radice caratteristica) soluzioni delle m equazioni:

$$\underline{x}(A - \alpha_r I) = 0, \quad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

e *posto*

$$U = \left\| \begin{array}{c} c' \\ c'' \\ \hline \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \hline c^{m} \end{array} \right\| \tag{5.4}$$

si ha che le matrici

$$U A \bar{U}_{-1}, \quad U \bar{U}_{-1}$$

sono composte mediante m matrici antisimmetriche di ordini eguali alle rispettive molteplicità delle predette radici caratteristiche. In particolare, moltipli-

cando a sinistra le matrici c', c'', .. c''' per opportune matrici quadrate, si può ottenere che U *sia unitaria ed* U A U$_{-1}$ *diagonale.*

Quest'ultima parte, da ciò che precede. è ovvia. Cioè moltiplicando ciascuna c^r, a sinistra, per un'opportuna matrice a^r, si può addirittura supporre che U sia unitaria, dopo di che si ha:

$$U A \bar{U}_{-1} = D , \quad U \bar{U}_{-1} = I$$

con D diagonale composta con matrici scalari $\alpha_r I^r$ di ordini eguali alle molteplicità delle α_r. Sopprimendo i fattori a^r pei quali si sono moltiplicate le c^r, invece della matrice diagonale D o della matrice identica, si avrà una matrice composta di matrici antisimmetriche che, nel prodotto $U \bar{U}_{-1}$, sono discriminanti di forme hermitiane definite positive, di ordini eguali alle molteplicità delle radici α_r.

12. - La A sia essa stessa unitaria, quindi a radici caratteristiche di modulo uno ([13]). In tal caso, si ha che la forma quasi canonica è anch'essa unitaria e si deduce facilmente che:

per le matrici unitarie, la forma quasi canonica è diagonale, quindi canonica ([14]).

Infatti, per la C_a, data dalla (11.3), che si trova all'ultimo posto della (15.3) si dovrà avere

$$C_\alpha . (\bar{C}_\alpha)_{-1} = I_a$$

onde, ponendo:

$$a = (\alpha \, I_{h_r} \mid \gamma) \tag{6.4}$$

$$\gamma = (c_{r,r+1} \quad c_{r,r+2} \mid \dots \quad c_{r,i})$$

$$(r = 0, \ 1, \ 2, \dots, i-1)$$

si ha:

$$a \bar{a}_{-1} = \alpha \bar{\alpha} I_{h_r} + \gamma \gamma_{-1} = I_{h_r} + \gamma \gamma_{-1} = I_{h_r},$$

quindi

$$\gamma \gamma_{-1} = 0 .$$

([13]) Fatto ben noto che si ottiene subito ragionando come al n. 3 della mia Nota dal titolo: *Su certe equazioni fondamentali*... [Rend. Sem. Roma (1936)].

([14]) Che le matrici unitarie siano ortogonalmente diagonizzabili è un fatto noto e può dedursi dalla permutabilità delle loro parti antisimmetrica ed antiemisimmetrica. Cfr. la mia Nota negli Atti dell'Accad. Peloritana (Messina, 1935) dal titolo: *Sulle matrici permutabili o diagonalizzabili*, n 7.